



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA  
AFRO-BRASILEIRA - UNILAB  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA - ICEN  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**ANTONIO LUAN DA SILVA PEREIRA**

**DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA E AS SÉRIES DE FOURIER**

**ACARAPE/CE**

**2019**

ANTONIO LUAN DA SILVA PEREIRA

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA E AS SÉRIES DE FOURIER

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Sistema de Bibliotecas da UNILAB  
Catalogação de Publicação na Fonte.

---

Pereira, Antonio Luan da Silva.

P489d

Desigualdade isoperimétrica e as séries de Fourier / Antonio Luan da Silva Pereira. - Redenção, 2019.

70f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2019.

Orientador: Wesley Marinho Lozório.

1. Desigualdade Isoperimétrica. 2. Séries de Fourier. 3. Geometria diferencial. I. Título

CE/UF/BSP

CDD 510

---

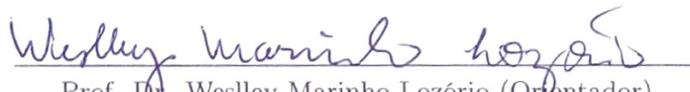
ANTONIO LUAN DA SILVA PEREIRA

DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA E AS SÉRIES DE FOURIER

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 02/04/2019.

BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

  
Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

  
Prof. Dr. Frederico Vale Girão

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a todos os meus familiares  
por todo o apoio e amor que sempre tiveram.

## AGRADECIMENTOS

À Deus pelo dom da vida e por me possibilitar viver este momento de realização.

À minha mãe, Antonia Elizete, por toda a dedicação e amor.

Ao meu pai, Francisco Ailton, por sempre cuidar de toda a família, e por ser minha maior inspiração.

À minha irmã, Antonia Erislândia, por ser sempre uma amiga e por me ajudar em tudo.

À minha sobrinha Bruna Hannaly, por sempre tirar um sorriso meu.

Aos meus amigos Jany, Fernandes e Erika(Jojó) pela companhia, conversas, brincadeiras e momentos de estudo que proporcionaram.

Aos meus amigos Ricardo, Isael e Rodolfo por toda ajuda e momentos de descontração.

À todos os meus amigos da UNILAB, em especial, minha turma (primeira turma da matemática) pelos bons momentos que tivemos.

À todos os professores aos quais tive o privilégio de conhecer no decorrer da graduação. Em especial, ao meu orientador Dr. Wesley Marinho Lozório, por ter sido sempre rigoroso em suas aulas, me fazendo evoluir ao longo do curso e, além disso, por ter me dado a honra de produzir este trabalho sob sua orientação.

Aos professores participantes da banca: João Francisco da Silva Filho, Wesley Marinho Lozorio e Frederico Vale Girão, pelas valiosas contribuições.

*"Acredite que você pode chegar no fim do arco  
íris e um pote de ouro encontrar."*

*Edi Rock*

## RESUMO

No presente trabalho, apresentamos uma demonstração do *teorema da desigualdade isoperimétrica (ou problema isoperimétrico)*. Este teorema relaciona o comprimento  $L$  de uma *curva plana simples e fechada*  $C$  com a área  $A$  da região delimitada por  $C$ , a saber, ele afirma que a área  $A$  é sempre menor ou igual à  $L^2/4\pi$  e, além disso, este valor é alcançado se, e somente se,  $C$  é um círculo de raio  $L/2\pi$ . A demonstração apresentada é devida ao matemático alemão *Adolf Hurwitz* e faz uso das famosas séries de Fourier, bem como do *Teorema de Green* e de alguns dos resultados fundamentais da Geometria Diferencial. Deste modo, introduzimos a teoria das séries de Fourier fazendo o estudo dos principais tópicos relacionados, tais como convergência, derivabilidade e integrabilidade das séries de Fourier. Além disso, apresentamos os conceitos da Geometria Diferencial que são necessários para a demonstração.

**Palavras-chave:** Desigualdade Isoperimétrica. Séries de Fourier. Geometria Diferencial.

## ABSTRACT

In the present work, we present a demonstration of the *isoperimetric inequality theorem* (or *isoperimetric problem*). This theorem relates the length  $L$  of a *simple closed curve*  $C$  in the plane with area  $A$  of the region delimited by  $C$ , namely, it states that the area  $A$  is always less than or equal to  $L^2/4\pi$  and, moreover, this value is achieved if, and only if,  $C$  is a circle of radius  $L/2\pi$ . The demonstration presented is due to the german mathematician *Adolf Hurwitz* and makes use of the famous Fourier series, as well as the Green Theorem and some of the fundamental results of Differential Geometry. In this way, we introduced the theory of Fourier Series by studying the main related topics such as convergence, derivability and integrability of the Fourier series. In addition, we present the concepts of Differential Geometry that are required for demonstration.

**Keywords:** Isoperimetric Inequality. Fourier Series. Differential Geometry.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1	Tópicos de Espaços Euclidianos . . . . .	11
1.2	Ortogonalidade . . . . .	14
1.3	Continuidade . . . . .	16
1.4	Sequências e Séries de Funções . . . . .	16
1.5	Funções Pares e Funções Ímpares . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>24</b>
2.1	Espaços Euclidianos de Dimensão Infinita . . . . .	24
2.2	Desigualdade de Bessel e Identidade de Parseval . . . . .	25
2.3	Subespaços fechados . . . . .	27
2.4	Espaço das Funções Contínuas por Partes . . . . .	31
2.5	Séries de Fourier . . . . .	34
2.6	Mudança de Intervalo . . . . .	38
2.7	Teorema Básico . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Convergência das Séries de Fourier</b>	<b>44</b>
3.1	Convergência Pontual das Séries de Fourier . . . . .	44
3.2	Convergência Uniforme das Séries de Fourier . . . . .	52
3.3	Derivação e Integração das Séries de Fourier . . . . .	57
<b>4</b>	<b>O Problema Isoperimétrico</b>	<b>62</b>
4.1	Curvas Parametrizadas . . . . .	62
4.2	Mudança de Parâmetro; Comprimento de Arco . . . . .	63
4.3	Teorema da Desigualdade Isoperimétrica . . . . .	64

# Introdução

O *Problema Isoperimétrico Clássico* teve sua origem na Grécia antiga, por volta do século IX a.C. e está relacionado com a seguinte situação: *Qual, dentre todas as curvas planas simples e fechadas, com um comprimento fixo, delimita a região com maior área?* Durante muito tempo não existiu uma prova matemática para este problema, até que em 1870, K. Weierstrass forneceu uma demonstração da existência de uma solução. Após isso, surgiram outras demonstrações mais diretas como, por exemplo, a demonstração feita por *E. Schimdt* em 1939, que pode ser encontrada na referência [2]. Neste trabalho, apresentamos uma demonstração puramente analítica feita por *A. Hurwitz* em 1901, que é baseada no Teorema de Green e nas Séries de Fourier. Estas, por sua vez, surgiram em 1807 com o matemático e físico francês *J. Fourier*, durante seus estudos sobre a propagação do calor em corpos sólidos, e teve contribuições de extrema relevância de grandes matemáticos, como os alemães *P. G. Dirichlet* e *F. B. Riemann*.

Deste modo, apresentamos no primeiro capítulo uma breve revisão de alguns dos conceitos fundamentais da análise linear, cálculo e álgebra.

No capítulo dois, iniciamos nossos estudos sobre Séries de Fourier introduzindo resultados importantes sobre espaços euclidianos de dimensão infinita e, além disso, descrevemos o espaço euclidiano das funções contínuas por partes. Em seguida, apresentamos as séries trigonométricas em questão descrevendo os coeficientes, chamados *coeficientes de Fourier*, que multiplicam cada termo de *seno* e *coseno*.

No terceiro capítulo, chegamos a um ponto crucial dessa teoria. Nesse capítulo, apresentamos os resultados relacionados à convergência, diferenciabilidade e integrabilidade das séries de Fourier.

No último capítulo, relembremos conceitos fundamentais da Geometria Diferencial de curva planas e, por fim, a demonstração do Teorema da Desigualdade Isoperimétrica, segundo *Hurwitz*.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Tópicos de Espaços Euclidianos

Nesta seção, denotaremos por  $V$  um espaço vetorial real. Definiremos em  $V$  os conceitos de distância, comprimento e medida de ângulo. Para tal, usaremos o que se conhece por *produto interno*, um funcional bilinear simétrico e positivo em  $V$ . Mais precisamente:

**Definição 1.** *Um produto interno sobre  $V$  é uma aplicação que associa a cada par de vetores  $(u, v) \in V \times V$  um número real  $\langle u, v \rangle$ , satisfazendo*

- i)  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ ,  $v, v, w \in V$ ;*
- ii)  $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ ,  $u \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;*
- iii)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ,  $u, v \in V$ ;*
- iv)  $\langle u, u \rangle > 0$  se  $u \neq 0$ .*

Um espaço vetorial com produto interno é chamado de *espaço euclidiano* e o número real  $\langle u, v \rangle$ , onde lê-se “*u interno v*”, denomina-se produto interno de  $u$  e  $v$ .

**Exemplo 1.** *Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Definindo o produto interno de  $x$  e  $y$  por*

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

$\mathbb{R}^n$  torna-se um espaço euclidiano. Este espaço é comumente chamado de Espaço Euclidiano  $n$ -dimensional.

**Exemplo 2.** *Seja  $\mathcal{C}[a, b]$  o conjunto das funções contínuas no intervalo  $[a, b]$ .  $\mathcal{C}[a, b]$  é um espaço euclidiano com produto interno dado por*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \tag{1.1}$$

onde  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ .

**Definição 2.** *Sejam  $V$  um espaço euclidiano e  $u \in V$ . A norma (comprimento) de  $u$  é definida como sendo o número real não-negativo*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Disto, resulta que dado  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ , tem-se que

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}.$$

E ainda, se  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ , então

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_a^b [f(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, dados  $u \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , valem as seguintes propriedades:

- i)  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ ,
- ii)  $\|u\| \geq 0$  e  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

Essas propriedades resultam imediatamente das definições 1 e 2.

**Teorema 1.** *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Sejam  $u, v \in V$ . Então*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

*Demonstração.* Com efeito, sejam  $V$  um espaço euclidiano e  $u, v \in V$ . Supondo  $u = 0$ , tem-se que

$$|\langle 0, v \rangle| = 0 = \|0\| \|v\|.$$

De outra forma, se  $u \neq 0$ , então dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tem-se  $\|u + \lambda v\|^2 \geq 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u + \lambda v\|^2 &= \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\lambda \langle u, v \rangle + \lambda^2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$[2\langle u, v \rangle]^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0,$$

donde segue que

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2,$$

e portanto,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

□

**Corolário 1.** (*Desigualdade triangular*) Se  $u, v \in V$ , então

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

*Demonstração.* Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Donde segue imediatamente o resultado.  $\square$

Consideremos agora um espaço euclidiano  $V$  e a aplicação  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$d(u, v) = \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

Então, as seguintes propriedades são válidas:

- i)  $d(u, v) \geq 0$  e  $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ ,
- ii)  $d(u, v) = d(v, u)$ ,
- iii)  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ .

Dito isto, definimos a distância entre  $u$  e  $v$  da seguinte forma.

**Definição 3.** Sejam  $u, v \in V$ . O número  $d(u, v)$  é denominado distância entre  $u$  e  $v$ .

Por fim, sejam novamente  $u, v \in V$ . Da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle| &\leq \|u\|\|v\| \\ \Rightarrow -\|u\|\|v\| &\leq \langle u, v \rangle \leq \|u\|\|v\| \\ \Rightarrow -1 &\leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1 \end{aligned}$$

Logo, existe um único  $\theta \in [0, \pi]$  tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

**Definição 4.** Sejam  $u, v \in V$  vetores não nulos. O ângulo entre  $u$  e  $v$  é o número  $\theta \in [0, \pi]$  satisfaz

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

## 1.2 Ortogonalidade

Dados dois vetores de um espaço euclidiano, dizemos que eles são *ortogonais*, ou *perpendiculares*, se o cosseno do ângulo entre eles é nulo. Assim, de acordo com os resultados anteriores, dois vetores  $u$  e  $v$  são ortogonais se, e somente se,  $\langle u, v \rangle = 0$ . Isto, por sua vez, sugere a seguinte definição:

**Definição 5.** Diz-se que um conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$  em um espaço euclidiano é um conjunto ortogonal se para todo  $i, j \in \mathbb{N}$  vale

$$\langle x_i, x_j \rangle = 0,$$

sempre que  $i \neq j$ . Além disso, se para todo  $i$  vale

$$\langle x_i, x_i \rangle = 1,$$

então diz-se que o conjunto é ortonormal.

**Exemplo 3.** Seja  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$  o espaço das funções contínuas no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . As funções  $f, g : [-\pi, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  dadas por  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $g(x) = \text{cos}(x)$  são ortogonais em  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ . De fato, qualquer que seja  $x \in [-\pi, \pi]$ , tem-se que

$$\langle \text{sen}(x), \text{cos}(x) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(x) \text{cos}(x) dx = 0.$$

**Teorema 2.** (*Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt*) Seja  $\{u_1, u_2, u_3, \dots\}$  um conjunto de vetores linearmente independentes num espaço euclidiano  $V$  e  $\mathcal{S}(u_1, u_2, \dots, u_n)$  o subespaço gerado por  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Então existe um conjunto ortogonal  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  em  $V$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{S}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathcal{S}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . Além disso, os vetores  $e_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , podem ser escolhidos de acordo com as seguintes regras

$$e_1 = u_1, \quad e_{n+1} = u_{n+1} - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k,$$

onde

$$\alpha_k = \frac{\langle u_{n+1}, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}.$$

Geometricamente, o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt consiste em tomar cada vetor  $e_k$ ,  $k > 1$ , como a diferença entre o vetor  $u_k$  e sua projeção ortogonal sob o subespaço gerado pelos vetores  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ , como ilustrado na figura 1.1.

Muitas vezes é mais cômodo trabalhar com conjuntos ortonormais ao invés de ortogonais. Assim, em vez de utilizar o conjunto ortogonal  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ , pode-se utilizar o conjunto

$$\left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \frac{e_3}{\|e_3\|}, \dots \right\},$$

que é ortonormal.

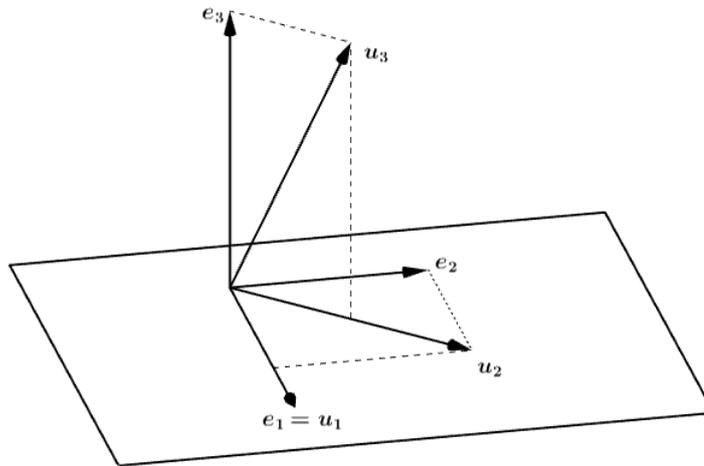


Figura 1.1

**Corolário 2.** *Todo espaço euclidiano de dimensão finita possui uma base ortonormal.*

Assim, se  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal de um espaço euclidiano  $V$ ,  $\dim(V) = n$ , dado  $u \in V$ , com

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

então, como

$$\langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j; \\ 0, & \text{se } k \neq j, \end{cases}$$

tem-se que  $\langle u, e_k \rangle = \alpha_k$ , para cada  $k = 1, 2, \dots, n$ . Portanto, cada vetor  $u \in V$  pode ser escrito univocamente sob a forma

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle u, e_n \rangle e_n.$$

Finalmente, se  $u$  e  $v$  são vetores de  $V$ , com

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

e

$$v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n,$$

então

$$\langle u, v \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

Ou seja, o produto interno de dois vetores de um espaço euclidiano de dimensão finita é dado pela soma dos produtos de suas componentes correspondentes quando calculadas com relação a uma base ortonormal.

### 1.3 Continuidade

**Definição 6.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo. Diz-se que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua num ponto  $x_0 \in I$ , se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que*

$$x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

**Definição 7.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  intervalo. Uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se uniformemente contínua em  $I$ , se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$ , dependente de  $\epsilon$  mas não de  $x$ , tal que*

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

quaisquer que sejam  $x_1, x_2 \in I$ .

É claro que se uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uniformemente contínua em  $I$ , então ela é contínua em  $I$ , entretanto, a recíproca não é verdadeira. Verifiquemos esta afirmação a partir de um exemplo.

**Exemplo 4.** *Considere a função  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 1/x$ . Dado  $\epsilon > 0$ , sejam  $\delta > 0$  e  $x_0 \in (0, +\infty)$  tais que  $0 < x_0 < \delta$  e  $0 < x_0 < 1/3\epsilon$ . Assim, para  $x = x_0 + \delta/2$ , temos  $|x - x_0| < \delta$ , no entanto,*

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{1}{x_0 + \delta/2} - \frac{1}{x_0} = \frac{\delta}{x_0(2x_0 + \delta)} > \frac{\delta}{3\delta x_0} = \frac{1}{3x_0} > \epsilon.$$

Portanto,  $f$  não é uniformemente contínua em  $(0, 1]$ , pois dado  $\epsilon > 0$ , qualquer que seja  $\delta > 0$ , é possível encontrar  $x, x_0 \in (0, 1]$  tais que  $|x - x_0| < \delta$  e  $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$ .

**Teorema 3.** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ , então ela é uniformemente contínua neste intervalo.*

### 1.4 Sequências e Séries de Funções

**Definição 8.** *Seja  $I$  subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Uma sequência de funções  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma correspondência que associa a cada  $k \in \mathbb{N}$  uma função  $f_k$ , definida em  $I$  e tomando valores reais.*

**Notação:**  $\{f_k\}$  denotará uma sequência de funções.

**Exemplo 5.** *A figura 1.2 mostra os três primeiros elementos da sequência  $\{f_k\}$  definida por*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{k}, & \text{se } |x| < k, \\ 0, & \text{se } |x| \geq k. \end{cases}$$

Diferente das sequências de números reais, existe mais de uma forma de convergência de sequência de funções. Nesta seção estudamos os seguintes casos: convergência pontual e convergência

uniforme.

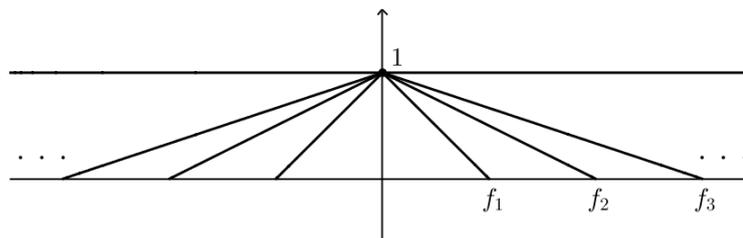


Figura 1.2

**Definição 9.** Diz-se que uma sequência  $\{f_k\}$  de funções  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas num intervalo  $I$ , converge pontualmente para uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para cada  $x_0 \in I$ , a sequência de números reais  $(f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_k(x_0), \dots)$  converge para o número  $f(x_0)$ . Ou seja, para cada  $x \in I$  fixado, tem-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x).$$

**Exemplo 6.** Seja  $\{f_k\}$  a sequência de funções definida por  $f_k(x) = x/k$ .  $\{f_k\}$  converge pontualmente, em toda a reta, para a função identicamente nula (figura 1.3), pois qualquer que seja  $x_0 \in \mathbb{R}$  fixo, tem-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_0}{k} = 0.$$

**Exemplo 7.** Seja  $\{g_k\}$  a sequência das potências inteiras de  $x$ , isto é,  $g_k(x) = x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (figura 1.4). Esta sequência converge pontualmente para a função

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

De fato, para todo  $x \in [0, 1)$ , tem-se  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 0$ , enquanto que  $\lim_{k \rightarrow \infty} 1^k = 1$ .

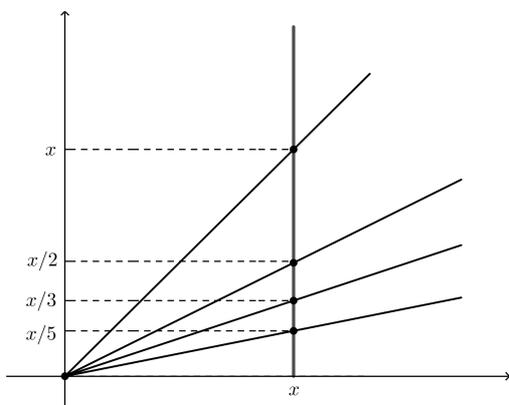


Figura 1.3

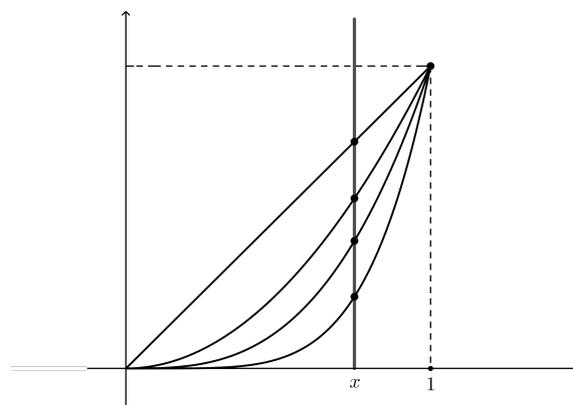


Figura 1.4

No exemplo 6 cada função  $g_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  é contínua em  $[0, 1]$ , no entanto a função limite  $g$  não é contínua neste intervalo, enquanto que, no exemplo 7 tanto as funções  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , quanto a função limite  $f$  são contínuas. A seguir, apresentamos um caso de convergência

em que este comportamento não acontece, a saber, a *convergência uniforme*.

**Definição 10.** Diz-se que uma sequência  $\{f_k\}$  de funções  $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente para a função  $f$  no intervalo  $I$ , se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $K \in \mathbb{N}$ , dependente de  $\epsilon$  mas não de  $x$ , que satisfaz

$$k \geq K \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in I.$$

Em outras palavras, dizer que uma sequência  $\{f_k\}$  converge uniformemente para  $f$  equivale a dizer que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que todas as funções  $f_k$ , onde  $k > K$ , têm seus gráficos contidos numa "faixa" de raio  $\epsilon$  em torno do gráfico de  $f$ , como ilustrado na figura 1.5.

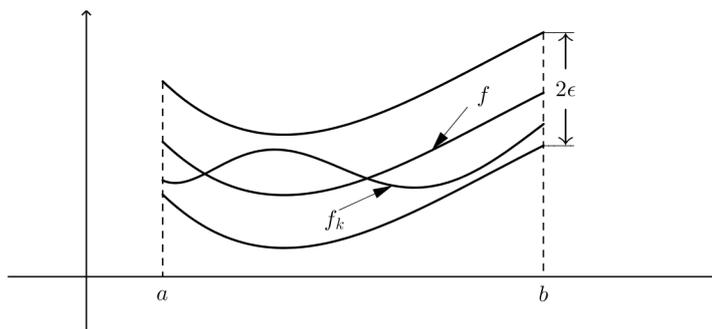


Figura 1.5

**Observação 1.** Se uma sequência  $\{f_k\}$  converge uniformemente para  $f$  em um intervalo  $I$ , então ela converge pontualmente para  $f$  neste intervalo.

Como afirmamos anteriormente, se uma sequência de funções contínuas num dado intervalo converge uniformemente para  $f$ , então  $f$  também é contínua. A verificação desta afirmação é feita a partir do seguinte teorema.

**Teorema 4.** Seja  $\{f_k\}$  uma sequência de funções contínuas definidas num intervalo  $I$ . Se  $\{f_k\}$  converge uniformemente para a função  $f$ , então  $f$  é uma função contínua em  $I$ .

*Demonstração.* Sejam  $x, x_0 \in I$ . Da desigualdade triangular, obtém-se que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(x_0) + f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)|. \end{aligned}$$

Ora, como a convergência é uniforme, então existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que

$$k > K \Rightarrow |f(x) - f_k(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad |f_k(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Fixando  $k$ , como  $f_k$  é contínua, então é possível determinar  $\delta > 0$  tal que

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Donde segue que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(x_0)| + |f_k(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Por fim, relembremos alguns resultados referentes à integração e derivação das sequências de funções.

**Teorema 5.** *Seja  $\{f_k\}$  uma sequência de funções integráveis em  $[a, b]$  que converge uniformemente para a função  $f$ . Então  $f$  é integrável e*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b [\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)] dx = \int_a^b f(x) dx, \quad \forall x \in [a, b].$$

*Demonstração.* Com efeito, desde que a convergência é uniforme, existe  $K \in \mathbb{N}$  tal que

$$k \geq K \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_k(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_k(x) - f(x)] dx \right| \\ &\leq \int_a^b |[f_k(x) - f(x)]| dx \\ &< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} \\ &= (b-a) \frac{\epsilon}{b-a} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

**Teorema 6.** *Seja  $\{f_k\}$  uma sequência de funções continuamente diferenciáveis, que converge pontualmente para  $f$  relativamente a  $a \leq x \leq b$ . Se a sequência  $\{f'_k\}$  converge uniformemente em  $[a, b]$ , então existe  $f'$  para todo  $x \in [a, b]$  e*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(x) = f'(x).$$

*Demonstração.* Seja  $g$  o limite de  $\{f'_k\}$ , então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Assim, pelo teorema 5,

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x f'_k(t)dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} [f_k(x) - f_k(a)] \\ &= [f(x) - f(a)].\end{aligned}$$

Logo, pelo teorema fundamental do cálculo, segue que

$$f'(x) = g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(x).$$

□

Os resultados obtidos até aqui são facilmente transferidos às séries de funções através da *sequência das somas parciais*. Assim, dada uma sequência  $\{f_k\}$ , dizemos que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

converge pontualmente (uniformemente) para a função  $f$ , quando a sua sequência associada das somas parciais converge pontualmente (uniformemente) para a função  $f$ . No caso em que a convergência é uniforme, se cada função  $f_k$  é contínua, segue dos teoremas 4 e 5 que a função limite  $f$  é contínua e que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Por outro lado, se cada função  $f_k$  é continuamente diferenciável e a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

é uniformemente convergente, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) = f'(x).$$

Por fim, enunciamos o seguinte teorema sobre critério de convergência uniforme de séries de funções.

**Teorema 7.** (*Teste M de Weierstrass*) *Sejam*

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k$$

*uma série convergente de números reais positivos, e*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (1.2)$$

uma série de funções. Se para todo  $k \in \mathbb{N}$  e todo  $x \in [a, b]$ , tem-se que  $|f_k(x)| \leq M_k$ , então a série (1.2) converge uniforme e absolutamente em  $[a, b]$ .

### 1.5 Funções Pares e Funções Ímpares

**Definição 11.** Uma função real  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I$  é intervalo simétrico em relação à origem, diz-se par se

$$f(-x) = f(x),$$

e ímpar se

$$f(-x) = -f(x),$$

para todo  $x \in I$ .

Observe que uma função é par e ímpar ao mesmo tempo se, e somente se, ela é identicamente nula.

**Exemplo 8.** As funções  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x^3$  são funções par e ímpar, respectivamente, pois

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

e

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x).$$

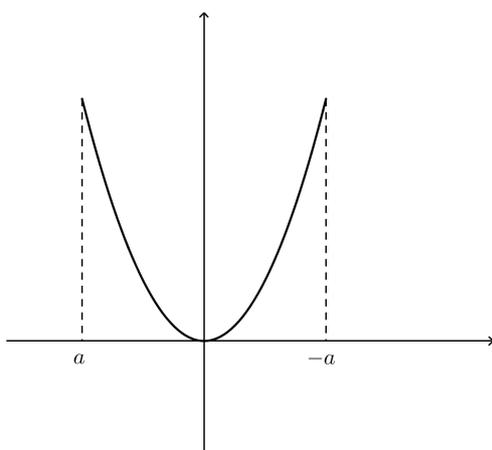


Figura 1.6: Gráfico de  $f(x) = x^2$ .

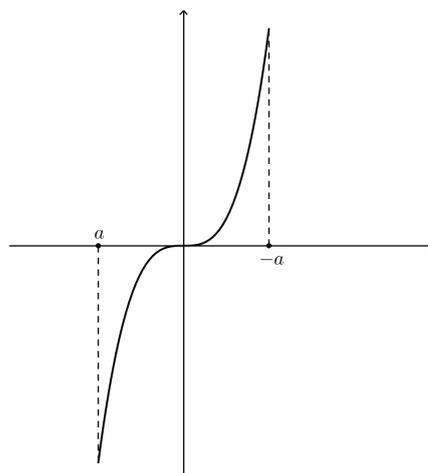


Figura 1.7: Gráfico de  $g(x) = x^3$ .

Duas propriedades importantes das funções pares e ímpares, e que são evidenciadas nas figuras 1.6 e 1.7, vêm das igualdades

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_{-a}^a g(x)dx = 0,$$

em que  $f$  é uma função par e  $g$  é uma função ímpar. De fato, desde que  $f(-x) = f(x)$  e

$g(-x) = -g(x)$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
 &= \int_{-a}^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
 &= -\int_a^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
 &= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
 &= 2\int_0^a f(x)dx.
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a g(x)dx &= \int_{-a}^0 g(x)dx + \int_0^a g(x)dx \\
 &= -\int_{-a}^0 g(-x)dx + \int_0^a g(x)dx \\
 &= \int_a^0 g(x)dx + \int_0^a g(x)dx \\
 &= -\int_0^a g(x)dx + \int_0^a g(x)dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Além disso, o produto entre funções pares e ímpares obedece às seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
 (\text{par})(\text{par}) &= (\text{ímpar})(\text{ímpar}) = (\text{par}), \\
 (\text{par})(\text{ímpar}) &= (\text{ímpar})(\text{par}) = (\text{ímpar}).
 \end{aligned}$$

**Lema 1.** *Toda função definida num intervalo  $[-a, a]$  pode ser escrita de forma única como a soma de uma função par com uma função ímpar.*

*Demonstração.* Seja  $h$  uma função qualquer em  $[-a, a]$ , e sejam

$$h_P(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} \quad \text{e} \quad h_I(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}.$$

A função  $h_P$  acima definida é par, enquanto que a função  $h_I$  é ímpar. Com efeito, qualquer que seja  $x \in [-a, a]$ , tem-se que

$$h_P(-x) = \frac{h(-x) + h(-(-x))}{2} = \frac{h(-x) + h(x)}{2} = h_P(x),$$

e

$$h_I(-x) = \frac{h(-x) - h(-(-x))}{2} = \frac{h(-x) - h(x)}{2} = -\frac{h(x) - h(-x)}{2} = -h_P(x).$$

Assim, como

$$h_P(x) + h_I(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} + \frac{h(x) - h(-x)}{2} = h(x),$$

então existe pelo menos uma forma de escrever  $h$  como soma de uma função par e uma ímpar. Suponha agora que existem  $g_P$  e  $g_I$ , tal que  $h = g_P + g_I$ , com  $g_P$  par e  $g_I$  ímpar, então

$$\begin{aligned} h_P + h_I &= g_P + g_I \\ \Rightarrow h_P - g_P &= g_I - h_I. \end{aligned}$$

Assim, como a soma (diferença) de funções pares é par e a soma (diferença) de funções ímpares é ímpar, segue que as funções  $h_P - g_P$  e  $g_I - h_I$  são par e ímpar, respectivamente. Ora, mas a igualdade acima afirma que elas são funções pares e ímpares ao mesmo tempo, isto por sua vez, implica que elas são identicamente nulas, ou seja

$$h_P - g_P = g_I - h_I = 0,$$

donde segue que  $h_P = g_P$  e  $g_I = h_I$ . □

## Capítulo 2

# Séries de Fourier

### 2.1 Espaços Euclidianos de Dimensão Infinita

Um subconjunto  $\beta$  de um espaço euclidiano  $V$ , é uma base de  $V$  quando é um conjunto linearmente independente (LI) e qualquer vetor  $x$  de  $V$  pode ser escrito como combinação linear dos vetores de  $\beta$ . Além disso, através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, qualquer conjunto linearmente independente pode ser ortogonalizado, assim podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\beta$  é um conjunto ortogonal. No caso em que  $\beta$  é um conjunto infinito, sendo  $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ , a combinação linear de  $x \in V$  em relação aos vetores de  $\beta$  é

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} e_k. \quad (2.1)$$

Neste caso, diremos que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} e_k$  converge em média para  $x$ . Os coeficientes  $\frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$  são denominados *coeficientes de Fourier* de  $x$  com relação ao conjunto  $\beta$ .

Vale observar que em um espaço euclidiano de dimensão infinita  $V$  é possível que um subconjunto com infinitos elementos seja LI mas não seja base de  $V$ . Com efeito, seja  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$  o espaço euclidiano das funções contínuas no intervalo  $[-\pi, \pi]$  com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}[-\pi, \pi].$$

Sejam ainda a função  $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$  dada por  $f(x) = x$ , e o conjunto ortonormal

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}. \quad (2.2)$$

Verifiquemos que  $f$  não pode ser escrita como combinação dos vetores de  $\beta$ . De fato, desde que  $f$  é ímpar e  $\cos(kx)$  é par para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então

$$\langle x, \cos(kx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx)dx = 0,$$

e

$$\langle x, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0.$$

Assim,

$$\frac{\langle x, 1 \rangle}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, \cos(kx) \rangle}{\sqrt{\pi}} = 0,$$

no entanto, claramente  $f$  não é identicamente nula. Por outro lado, os coeficientes de Fourier de  $f$  com relação ao conjunto ortonormal

$$\bar{\beta} = \left\{ \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(3x)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\} \quad (2.3)$$

são tais que

$$\left\langle x, \frac{\text{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x \text{sen}(kx) dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\pi}}{k}, & k = 1, 3, 5, \dots \\ -\frac{2\sqrt{\pi}}{k}, & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Assim, o segundo membro da equação (2.1) torna-se

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\text{sen}(kx)}{k}.$$

Mais adiante veremos que esta série realmente converge em média para  $f$ , e podemos escrever

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\text{sen}(kx)}{k}. \quad (2.4)$$

Entretanto,  $\bar{\beta}$  também não é uma base de  $\mathbb{C}[-\pi, \pi]$ . Ora, seja  $g$  uma função par não identicamente nula de  $\mathbb{C}[-\pi, \pi]$ , como  $\text{sen}(kx)$  é ímpar para todo  $k \in \mathbb{N}$ , então

$$\left\langle g, \frac{\text{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \text{sen}(kx) dx = 0.$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle g, \frac{\text{sen}(kx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = 0.$$

Ou seja, a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \langle g, \text{sen}(kx)/\pi \rangle$  não converge em média para  $g$ .

## 2.2 Desigualdade de Bessel e Identidade de Parseval

Os dois resultados apresentados nesta seção têm particular importância no decorrer deste trabalho e são extremamente importantes no estudo dos espaços euclidianos de dimensão infinita. Eles podem ser vistos como generalizações de proposições em espaços euclidianos de dimensão finita, em particular, a identidade de Parseval pode ser considerada como uma generalização do teorema de Pitágoras para dimensão infinita.

**Teorema 8.** *Seja  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  um conjunto ortogonal de vetores de um espaço euclidiano de dimensão infinita  $V$ . Então, se  $x \in V$ , vale*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k \rangle^2}{\|e_k\|^2} \leq \|x\|^2. \quad (\text{Desigualdade de Bessel})$$

Além disso,  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  é uma base de  $V$  se, e somente se,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k \rangle^2}{\|e_k\|^2} = \|x\|^2. \quad (\text{Identidade de Parseval})$$

*Demonstração.* Com efeito, como  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  é um conjunto ortogonal de vetores, então

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} \|e_i\|^2, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Assim, sendo  $\alpha_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$ ,

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - 2 \left\langle x, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma, como

$$2 \left\langle x, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\rangle = 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle x, e_k \rangle = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} \langle x, e_k \rangle = 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \|e_k\|^2$$

e

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \|e_k\|^2.$$

Então,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \|e_k\|^2$$

Logo, como

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|^2 \geq 0,$$

segue que

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \|e_k\|^2.$$

Para concluir a demonstração da desigualdade de Bessel, observamos que, como a sequência associada das somas parciais de  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$  é limitada superiormente e monotamente não-

decrecente, então esta série converge e

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \|e_k\|^2$$

ou, fazendo  $\alpha_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2}$ ,

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k \rangle^2}{\|e_k\|^2}.$$

Suponhamos agora que  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  é uma base de  $V$ . Então, pela equação (2.1),

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} e_k,$$

assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n \frac{\langle x, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} e_k \right\|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \frac{\langle x, e_k \rangle^2}{\|e_k\|^2} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\langle x, e_k \rangle^2}{\|e_k\|^2} &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_k \rangle^2}{\|e_k\|^2} = \|x\|^2.$$

□

### 2.3 Subespaços fechados

O conceito de subespaço fechado está relacionado com a convergência de qualquer sequência de vetores deste subespaço. Mais precisamente, dizemos que um subespaço  $W$  de um espaço euclidiano  $V$  é fechado em  $V$ , se para toda sequência convergente de vetores  $\{x_n\}$  de  $W$ , tem-se

$$\lim x_n \in W.$$

É natural analisar primeiro os casos em dimensão finita e ver exemplos de subespaços que são ou não fechados, no entanto, todos os subespaços euclidianos de dimensão finita são fechados. A prova desta afirmação é feita no seguinte lema.

**Lema 2.** *Todo subespaço  $W$  de um espaço euclidiano de dimensão finita  $V$  é fechado.*

*Demonstração.* É claro que se  $W$  é vazio, então ele é fechado. Se, porém,  $W$  não é vazio, suponha que  $\dim(V) = n$  e  $\dim(W) = m$ , então é possível encontrar conjuntos ortonormais de vetores  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  e  $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$  tais que  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  é uma base de  $W$  e

$\{e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$  é uma base de  $V$ . Dessa forma, um vetor  $x$  de  $V$  pertence a  $W$  se, e somente se, suas últimas  $n - m$  componentes, com relação à base de  $V$ , forem nulas.

Sejam

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n,$$

e  $\{x_k\}$  uma sequência convergente de vetores de  $W$  tal que  $\{x_k\} \rightarrow x$ . Assim, se para cada  $k \in \mathbb{N}$  têm-se,

$$x_k = \alpha_{1k} e_1 + \alpha_{2k} e_2 + \dots + \alpha_{mk} e_m + \alpha_{(m+1)k} e_{m+1} + \dots + \alpha_{nk} e_n,$$

então,

$$\|x_k - x\|^2 = (\alpha_{1k} - \alpha_1)^2 + (\alpha_{2k} - \alpha_2)^2 + \dots + (\alpha_{mk} - \alpha_m)^2 + (\alpha_{(m+1)k} - \alpha_{m+1})^2 + \dots + (\alpha_{nk} - \alpha_n)^2.$$

Dessa forma,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \{\alpha_{1k}\} \rightarrow \alpha_1 \\ \{\alpha_{2k}\} \rightarrow \alpha_2 \\ \vdots \\ \{\alpha_{mk}\} \rightarrow \alpha_m \\ \vdots \\ \{\alpha_{nk}\} \rightarrow \alpha_n \end{cases}. \quad (2.5)$$

Logo, desde que  $\{x_k\}$  é uma sequência convergente de vetores de  $W$ , então

$$\alpha_{(m+1)k} = \dots = \alpha_{nk} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo, de acordo com (2.5)

$$\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 0. \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

E portanto  $x \in W$ . □

Dito isto, vemos que apenas em espaços euclidianos de dimensão infinita é possível encontrar subespaços que não são fechados. Um exemplo disto é visto a seguir, no espaço  $\ell_2$  das seqüências de quadrado somável.

**Exemplo 9.** Seja  $\ell_2$  o conjunto de todas as seqüências infinitas de números reais

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots),$$

tais que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty.$$

Sejam  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ , definimos:

i)  $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$

ii)  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots)$

$$\text{iii) } \langle x, y \rangle = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, \dots)$$

Assim  $\ell_2$  se torna um espaço euclidiano. Verifiquemos inicialmente que i), ii) e iii) estão bem definidos. Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tem-se que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^2 x_k^2 = \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2 + 2x_k y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k. \end{aligned}$$

Ora, da desigualdade de Cauchy – Schwarz, sabe-se que

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ &\leq \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 + 2 \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \end{aligned}$$

Logo, como  $x, y \in \ell_2$ , fazendo  $n \rightarrow \infty$ , segue que

$$\left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

é finito, e portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)^2 < \infty.$$

Por fim, é sabido que para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ , vale

$$ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2].$$

Assim, supondo que  $u = (u_1, u_2, \dots)$  e  $v = (v_1, v_2, \dots)$  pertencem a  $\ell_2$ , então

$$\sum_{k=1}^n u_k v_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}[(u_k + v_k)^2 - u_k^2 - v_k^2] = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n (u_k + v_k)^2 - \sum_{k=1}^n u_k^2 - \sum_{k=1}^n v_k^2 \right).$$

Pelo resultado anterior, fazendo  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2 < \infty.$$

Donde segue que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty.$$

Assim, fazendo  $u = v = xy$ , obtem-se que

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 y_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k y_k)(x_k y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k < \infty.$$

Portanto, i), ii) e iii) estão bem definidos.

Além disso,  $\ell_2$  contém o conjunto ortonormal

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

e portanto é de dimensão infinita. Seja agora o conjunto  $W$  de todos os vetores de  $\ell_2$  que possuem um número finito de componentes não-nulas.

Afirmção:  $W$  é subespaço de  $\ell_2$ .

De fato, se  $x$  e  $y$  são vetores de  $W$  com  $m$  e  $n$  coordenadas não-nulas, respectivamente, em que  $m, n \in \mathbb{N}$ , então o vetor  $x + y$  possui, no máximo,  $m + n$  componentes não-nulas. Por outro lado, sendo  $x$  como acima e dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então o vetor  $\lambda x$  possui  $m$  componentes não-nulas, e portanto,  $W$  é subespaço de  $\ell_2$ . Tomemos agora a sequência  $\{x_k\}$  onde

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \dots \\ x_2 &= \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, \dots \\ x_3 &= \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, 0, \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tal sequência pertence à  $W$ , mas converge para  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^k}, \dots)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , que não pertence à  $W$ , e portanto  $W$  não é fechado.

**Definição 12.** Seja  $W$  subespaço qualquer de um espaço euclidiano  $V$ . O fecho de  $W$  em  $V$ , denotado por  $\overline{W}$ , é a interseção de todos os subespaços fechados de  $V$  que contém  $W$ .

Em outras palavras, o fecho de  $W$  é o próprio subespaço  $W$  acrescentado dos limites das sequências de  $W$ , que não pertencem à ele. Observe que tal conceito está bem definido, pois

se  $W$  é um espaço euclidiano então  $W$ , tomado como subespaço de si mesmo, é fechado, assim, todo subespaço de  $W$  está contido em pelo menos um subespaço fechado. Por outro lado, se  $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$  são subespaços fechados de um espaço euclidiano  $V$ , então o subespaço

$$\bigcap_{k=1}^n W_k$$

é fechado. De fato, qualquer que seja a sequência  $\{y_n\}$  de  $\bigcap_{k=1}^n W_k$ , tem-se que  $\{y_n\} \in W_k$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, n$  e, conseqüentemente,

$$\lim y_n \in W_k, \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo,

$$\lim y_n \in \bigcap_{k=1}^n W_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

De forma mais geral, se  $X$  é um subconjunto de um espaço euclidiano  $V$ , então existe um subespaço gerado por  $X$ , denotado por  $S(X)$ , e assim,  $\overline{S(X)}$  é o fecho de  $S(X)$  em  $V$  gerado por  $X$ .

## 2.4 Espaço das Funções Contínuas por Partes

O conjunto das funções contínuas por partes é um ambiente de fundamental importância no estudo das séries de Fourier. Nesta seção, mostramos que tal conjunto é um espaço euclidiano com as operações usuais de soma e produto por escalar, e produto interno dado pela equação 1.1, isto é,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (2.6)$$

**Definição 13.** Dizemos que uma função real  $f$  é contínua por partes num intervalo  $[a, b]$  se:

- i)  $f$  é definida e contínua em  $[a, b]$ , exceto numa quantidade finita de pontos;
- ii) para todo  $x_0 \in [a, b]$ , existem os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 + h) = f(x_0^+), \quad e \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 - h) = f(x_0^-).$$

**Observação 2.** As notações  $f(x_0^+)$  e  $f(x_0^-)$  representam os limites laterais à direita e à esquerda de  $f$  em  $x_0$ , respectivamente. Se  $x_0$  é um dos extremos de  $[a, b]$ , apenas um dos limites é cabível.

**Exemplo 10.** A função real  $f$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 1 - x, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

é uma função contínua por partes no intervalo  $[0, 2]$ , enquanto que a função:

$$g(x) = \frac{1}{x},$$

não é contínua por partes em nenhum intervalo que contenha a origem.

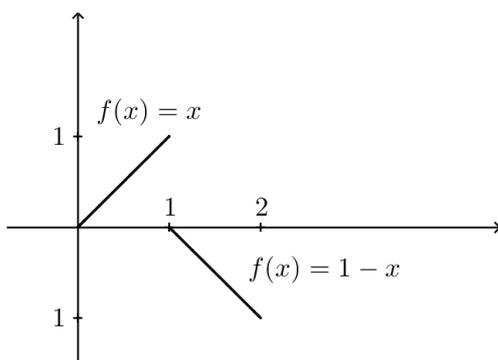


Figura 2.1: Gráfico de  $f(x)$

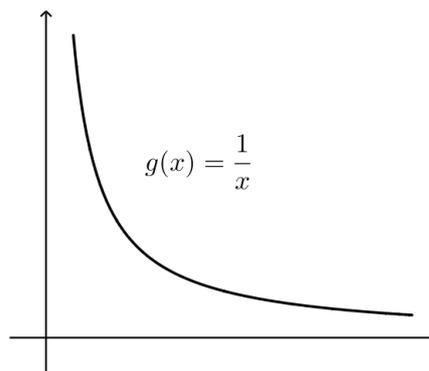


Figura 2.2: Gráfico de  $g(x)$

A seguir, explicitamos alguns fatos relacionados às funções contínuas por partes que serão utilizados daqui por diante com frequência sem maiores comentários.

- 1) Se  $f$  é contínua por partes em  $[a, b]$ , então a integral

$$\int_a^b f(x) dx,$$

existe e não depende dos valores de  $f$  nos pontos de descontinuidade. Ora, se  $x_0, x_1, \dots, x_p \in (a, b)$  são os pontos de descontinuidade de  $f$ , então  $f$  é integrável nos intervalos

$$[a, x_0), (x_0, x_1), \dots, (x_p, b]$$

(aqui assumimos que  $f$  é contínua nos extremos  $a, b$ ), e podemos escrever,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \dots + \int_{x_p}^b f(x) dx \\ &= F(x_0^-) - F(a) + F(x_1^-) - F(x_0^+) + \dots + F(b) - F(x_p^+) \end{aligned}$$

em que  $F'(x) = f(x)$ . Note que se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então  $F(x_i^-) = F(x_i^+)$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ , e obtemos

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

- 2) Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas por partes em  $[a, b]$ , então o produto  $fg$  também o é. Com efeito, desde que  $f$  e  $g$  são contínuas por partes, então os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 \pm h) = f(x_0^\pm) \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} g(x_0 \pm h) = g(x_0^\pm),$$

existem em cada ponto  $x_0$  de  $[a, b]$ . Assim, sendo  $h = fg$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} h(x_0 \pm h) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (fg)(x_0 \pm h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} [f(x_0 \pm h)g(x_0 \pm h)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_0 \pm h) \lim_{h \rightarrow 0^+} g(x_0 \pm h) \\ &= f(x_0^\pm)g(x_0^\pm) \\ &= (fg)(x_0^\pm) \\ &= h(x_0^\pm). \end{aligned}$$

Além disso,  $fg$  terá uma quantidade de descontinuidades menor ou igual à soma da quantidade de descontinuidades de  $f$  e  $g$ . Portanto o produto de funções contínuas por partes é também uma função contínua por partes.

Estas duas propriedades combinadas, implicam que a integral do produto de funções contínuas por partes sempre existe.

- 3) Toda função contínua em  $[a, b]$  é contínua por partes em  $[a, b]$ .
- 4) Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas por partes em  $[a, b]$  e diferem apenas em uma quantidade finita de pontos, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Daí surge a seguinte relação de equivalência entre as funções contínuas por partes sobre  $[a, b]$ :

$$f \sim g \Leftrightarrow f \text{ e } g \text{ diferem em uma quantidade finita de pontos.}$$

Denotaremos por  $\bar{f}$  o conjunto das funções  $g$  tais que  $g \sim f$ . Observamos que  $\bar{f}$  é a classe de equivalência de  $f$  em relação a  $\sim$ . Assim, se  $g \in \bar{f}$ , diremos que  $g = f$ . Finalmente, se  $\mathcal{CP}[a, b]$  denota o conjunto das classes de equivalência das funções contínuas por partes em  $[a, b]$ , é possível mostrar que  $\mathcal{CP}[a, b]$  é um espaço vetorial, munido das operações de soma e produto por escalar usuais.

**Observação 3.** A notação  $f \in \mathcal{CP}[a, b]$  significará que  $f$  é uma função contínua por partes em  $[a, b]$  e que “representa”  $\bar{f}$ .

**Observação 4.** Se  $f \in \mathcal{CP}[a, b]$  é tal que  $f' \in \mathcal{CP}[a, b]$ ,  $f$  é dita continuamente diferenciável por partes sobre  $[a, b]$ .

Agora podemos verificar que a equação (2.6) define um produto interno em  $\mathcal{CP}[a, b]$ . De fato, sejam  $f, g, h \in \mathcal{CP}[a, b]$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b [f(x)]^2 dx \geq 0.$$

A igualdade ocorrerá acima se, e somente se,  $f = 0$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \langle f, g + \lambda h \rangle &= \int_a^b f(x)[g(x) + \lambda h(x)] \\ &= \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda \int_a^b f(x)h(x)dx \\ &= \langle f, g \rangle + \lambda \langle f, h \rangle. \end{aligned}$$

E, por fim:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle.$$

Portanto, a verificação está concluída.

Para fins futuros, observamos que dado o conjunto

$$\{1, \cos(x), \sen(x), \cos(2x), \sen(2x), \dots\},$$

em  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ , tem-se que:

- i)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sen(mx)\sen(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = 0, \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m \neq n.$
- ii)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sen(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = 0, \forall k \in \mathbb{N}$
- iii)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sen(mx)dx = 0, \forall n, m \in \mathbb{N}.$

Ou seja,  $\beta$  é um conjunto ortogonal em  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ .

## 2.5 Séries de Fourier

Nesta seção, admitiremos que o conjunto ortogonal  $\beta = \{1, \cos(x), \sen(x), \dots, \cos(nx), \sen(nx), \dots\}$  é uma base de  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ . Tal fato será demonstrado na seção 2.7.

Deste modo, dada uma função  $f \in \mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ , então, de acordo com a equação 2.1, a série

$$\frac{\langle f, 1 \rangle}{\|1\|^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\langle f, \cos(kx) \rangle}{\|\cos(kx)\|^2} \cos(kx) + \frac{\langle f, \sen(kx) \rangle}{\|\sen(kx)\|^2} \sen(kx) \right] \quad (2.7)$$

converge em média para  $f$ . Assim, como

$$\|\cos(kx)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \sen^2(kx)dx = \|\sen(kx)\|^2$$

e

$$\|1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

podemos escrever (2.7) como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)], \quad (2.8)$$

onde,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(kx) dx.$$

A série (2.8) é chamada *desenvolvimento em série de Fourier de f* em  $[-\pi, \pi]$ , e  $a_k$  e  $b_k$  são os coeficientes de Fourier de  $f$ .

**Exemplo 11.** Seja  $\varphi \in \mathcal{CP}[-\pi, \pi]$  dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Observe que  $\varphi$  é uma ímpar e  $\cos(kx)$  é par, para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim,  $\varphi(x) \cos(kx)$  é ímpar, e

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos(kx) dx = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \text{sen}(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \varphi(x) \text{sen}(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \text{sen}(kx) dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \text{sen}(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}(kx) dx \\ &= \frac{2}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)] \\ &= \begin{cases} \frac{4}{k\pi}, & k = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, o desenvolvimento em série de Fourier de  $\varphi$  é dado por

$$\frac{4}{\pi} \left[ \text{sen}(x) + \frac{\text{sen}(3x)}{3} + \frac{\text{sen}(5x)}{5} + \dots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2k-1)x]}{2k-1}.$$

A figura 2.3 abaixo mostra o gráfico de  $\varphi$  e o gráfico do seu desenvolvimento em série de Fourier com  $k = 4$ , e a figura 2.4, com  $k = 6$ .

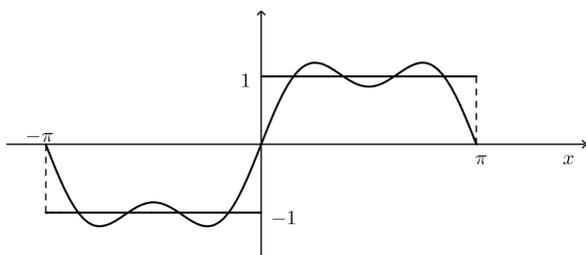


Figura 2.3: Desenvolvimento em série de Fourier de  $\varphi$  com  $k = 4$ .

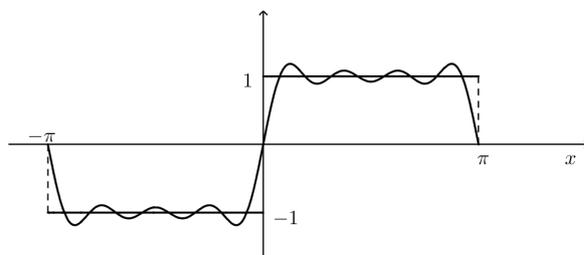


Figura 2.4: Desenvolvimento em série de Fourier de  $\varphi$  com  $k = 6$ .

A seguir, enunciamos um dos teoremas mais importantes relacionados à convergência das séries de Fourier. Sua demonstração será feita apenas na seção 3.1

**Teorema 9.** *Seja  $f$  continuamente diferenciável por partes sobre  $[-\pi, \pi]$ . Então o desenvolvimento em série de Fourier de  $f$  converge pontualmente em  $[-\pi, \pi]$ , e tem valor*

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

para todo  $x_0 \in (-\pi, \pi)$ , e

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$$

em  $\pm\pi$ . Além disso, se  $F$  é a extensão periódica de  $f$ , então a série tem valor  $F(x_0)$  se  $x_0$  é ponto de continuidade de  $F$ , e

$$\frac{F(x_0^+) + F(x_0^-)}{2}$$

quando  $x_0$  é um ponto de descontinuidade de  $F$ .

Em outras palavras, este teorema afirma que se  $f$  é uma função contínua por partes, então seu desenvolvimento em série de Fourier converge para  $f(x_0)$  se  $f$  é contínua em  $x_0$  e, caso contrário, converge para a média aritmética dos limites laterais. Assim, no exemplo 11, a série

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2k-1)x]}{2k-1}$$

converge pontualmente, em  $[-\pi, \pi]$ , para a função

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } -\pi < x < 0, \\ 0, & \text{se } x = -\pi, 0, \pi, \\ 1, & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Isto nos diz, por exemplo, que se  $x = \pi/2$ , então

$$1 = \frac{4}{\pi} \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right],$$

e, conseqüentemente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Ainda sobre o exemplo 11, vemos que o desenvolvimento em série de Fourier de  $\varphi$  possui apenas termos em *seno*. Isto se dá pelo fato de ser  $a_k = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , pois função  $\varphi(x) \cos(kx)$  é ímpar. De forma geral, dada uma função  $f \in \mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ , se  $f$  é par, então para todo  $k$  tem-se que  $f(x) \sin(kx)$  é ímpar e  $f(x) \cos(kx)$  é par, assim

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0.$$

Dessa forma, se  $S(x)$  designa o desenvolvimento em série de Fourier de  $f$ , então

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx),$$

onde

$$a_k = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

De forma análoga, se  $f$  é ímpar, então

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

onde,

$$b_k = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Estes resultados, em conjunto com o fato de que

$$1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots$$

formam uma base de  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ , implicam que os conjuntos

$$\{1, \cos(x), \cos(2x), \dots\} \quad \text{e} \quad \{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x), \dots\}$$

são, respectivamente, bases dos espaços euclidianos das funções contínuas por partes pares e ímpares.

Para concluir esta seção, façamos uma breve análise do desenvolvimento em série de Fourier de  $f$  apenas no intervalo  $[0, \pi]$ . Uma forma de fazer isto é desenvolver uma função  $F$  em séries de Fourier, em que  $F$  é uma extensão de  $f$  ao intervalo  $[-\pi, \pi]$ , de maneira que  $F = f$  em  $[0, \pi]$ . Esta extensão pode ser feita de várias formas desde que  $F$  ainda pertença a  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ . Aqui explicitamos as seguintes extensões:

$$P_f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ f(-x), & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$I_f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ -f(-x), & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

A primeira extensão,  $P_f$ , é chamada *extensão par de  $f$* , e a segunda,  $I_f$ , é chamada *extensão ímpar de  $f$* . Com efeito, para a extensão par de  $f$ , temos que

$$\begin{aligned} x \in [0, \pi] &\Rightarrow -x \in [-\pi, 0) \\ &\Rightarrow P_f(-x) = f(-(-x)) = f(x) = P_f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in [-\pi, 0) &\Rightarrow -x \in [0, \pi] \\ &\Rightarrow P_f(x) = f(-x) = P_f(-x). \end{aligned}$$

Portanto,  $P_f$  é par. Para a extensão ímpar de  $f$ , temos que

$$\begin{aligned} x \in [0, \pi] &\Rightarrow -x \in [-\pi, 0) \\ &\Rightarrow I_f(-x) = -f(-(-x)) = -f(x) = -I_f(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in [-\pi, 0) &\Rightarrow -x \in [0, \pi] \\ &\Rightarrow I_f(x) = -f(-x) = -I_f(-x). \end{aligned}$$

E portanto,  $I_f$  é ímpar.

## 2.6 Mudança de Intervalo

Até aqui tratamos apenas de funções nos intervalos  $[-\pi, \pi]$  e  $[0, \pi]$ , casos estes que são muito restritivos. Os resultados obtidos nestes casos, entretanto, podem ser generalizados para um intervalo qualquer  $[a, b]$ . Consideremos inicialmente um intervalo da forma  $[-p, p]$  e o espaço euclidiano  $\mathcal{CP}[-p, p]$ . Então o conjunto

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{\pi x}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{p}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \dots \right\} \quad (2.9)$$

é ortogonal em  $\mathcal{CP}[-p, p]$ . Além disso, assim como no caso em que  $p = \pi$ , pode-se mostrar que este conjunto é uma base de  $\mathcal{CP}[-p, p]$  e que, portanto, as séries de Fourier correspondentes convergem em média. Os resultados sobre convergência pontual continuam sendo válidos, fazendo, é claro, as devidas modificações referentes ao comprimento do intervalo.

Deste modo, como

$$\int_{-p}^p \cos^2\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx = \int_{-p}^p \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx = p \quad \text{e} \quad \int_{-p}^p dx = 2p,$$

então os coeficientes de Fourier de uma função  $f \in \mathcal{CP}[-p, p]$ , são dados por

$$a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx,$$

$$b_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx.$$

Logo, a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \right],$$

converge em média para  $f$ , onde escrevemos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \right].$$

Finalmente, consideremos um intervalo arbitrário  $[a, b]$  e o espaço euclidiano  $\mathcal{CP}[a, b]$ . Tomando o resultado anterior e fazendo  $b - a = 2p$ , obtemos  $\mathcal{CP}[a, b] = \mathcal{CP}[a, a + 2p]$ . Dessa forma o conjunto (2.9) é uma base de  $\mathcal{CP}[a, a + 2p]$  e, por conseguinte, se  $f \in \mathcal{CP}[a, b]$ , então a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) \right]$$

converge em média para  $f$ , onde

$$a_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) dx,$$

$$b_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) dx.$$

## 2.7 Teorema Básico

Muitos dos resultados obtidos até aqui se baseiam fortemente no fato de que o conjunto

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(kx), \sin(kx), \dots\}$$

é uma base de  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ . Para demonstrar tal afirmação será feito uso de três importantes teoremas, o primeiro deles é o Teorema de Aproximação de Weierstrass, que é enunciado a seguir.

**Teorema 10.** (*Teorema de Aproximação de Weierstrass.*) *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , e seja  $f$  tal que  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Então, dado qualquer número real  $\epsilon > 0$ , existe um polinômio trigonométrico*

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{N(\epsilon)} (A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx))$$

tal que

$$|T(x) - f(x)| < \epsilon$$

para todo  $x$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Geometricamente, este teorema diz que o gráfico do polinômio  $T(x)$  está “dentro da faixa” delimitada pelos gráficos das funções  $f(x) - \epsilon$  e  $f(x) + \epsilon$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$  (figura 2.5). O número  $N(\epsilon)$  determina a largura da faixa, isto é, quanto maior a quantidade de termos do polinômio trigonométrico  $T(x)$ , menor é o valor de  $\epsilon$  e, conseqüentemente, melhor é a aproximação.

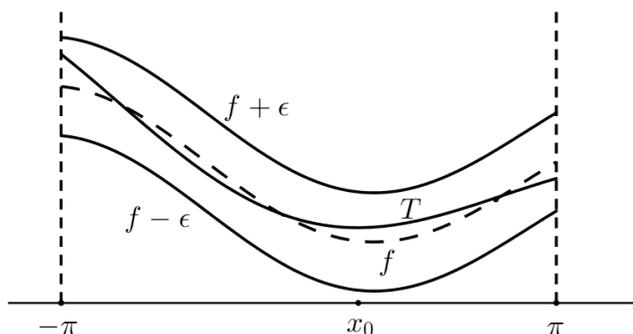


Figura 2.5: Ideia geométrica do teorema da Aproximação de Weierstrass.

Os dois próximos resultados fazem menção ao subespaço das funções contínuas em  $[-\pi, \pi]$  tais que  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Tal subespaço será denotado por  $\mathcal{P}[-\pi, \pi]$ .

**Teorema 11.** *Seja  $\beta$  o conjunto formado por*

$$1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(kx), \sin(kx), \dots$$

*Então toda função  $f$  de  $\mathcal{P}[-\pi, \pi]$  pertence ao fecho do subespaço gerado por  $\beta$  em  $\mathcal{CP}[\pi, \pi]$ .*

*Demonstração.* Devemos mostrar que toda função  $f \in \mathcal{P}[-\pi, \pi]$  pode ser aproximada, em média, por um polinômio trigonométrico. Com efeito, pelo teorema de Aproximação de Weierstrass, é possível encontrar um polinômio trigonométrico  $T_k$ , tal que

$$|T_k(x) - f(x)| < \frac{1}{k\sqrt{2\pi}},$$

para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ . Assim,

$$\|T_k - f\| = \left[ \int_{-\pi}^{\pi} [T_k(x) - f(x)]^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} < \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \right]^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k}.$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T_k - f\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0.$$

E portanto, a sequência  $\{T_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , converge em média para  $f$ . □

**Teorema 12.** *Seja  $f$  uma função contínua por partes em  $[-\pi, \pi]$ . Então, para todo  $\epsilon > 0$  existe uma função  $g$  contínua em  $[-\pi, \pi]$ , tal que*

$$\|f - g\| < \epsilon.$$

*Demonstração.* Consideremos inicialmente que  $f$  possua apenas uma descontinuidade em  $[-\pi, \pi]$ , e seja  $x_0$  este ponto em que  $f$  é descontínua. Obtemos a função  $g$  redefinindo  $f$  nas proximidades de  $x_0$  e dos extremos do intervalo  $[-\pi, \pi]$ , como indicado nas figuras 2.6 e 2.7 abaixo.

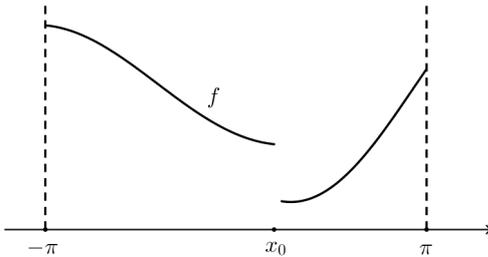


Figura 2.6: Exemplo do gráfico de  $f$ .

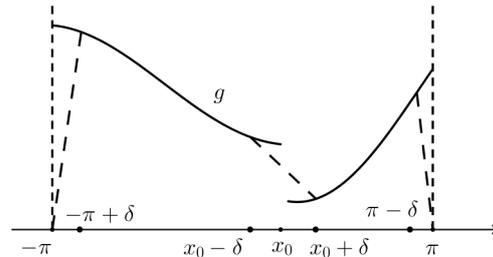


Figura 2.7: Exemplo do gráfico de  $g$ .

Isto é,  $g = f$  nos intervalos  $[-\pi + \delta, x_0 - \delta]$  e  $[x_0 + \delta, \pi - \delta]$ , enquanto que nos intervalos  $[-\pi, -\pi + \delta]$ ,  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  e  $[\pi - \delta, \pi]$ ,  $g$  é definida por retas, como na figura 2.7, e além disso,  $g(-\pi) = g(\pi)$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{-\pi + \delta} [f(x) - g(x)]^2 dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} [f(x) - g(x)]^2 dx + \int_{\pi - \delta}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx \end{aligned}$$

Seja  $M \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(x)| \leq M$ , para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ . Assim,

$$|f(x) - g(x)|^2 \leq (2M)^2,$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} [f(x) - g(x)]^2 dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [f(x) - g(x)]^2 dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2 dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{-\pi+\delta} 4M^2 dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} 4M^2 dx + \int_{\pi-\delta}^{\pi} 4M^2 dx \\ &= 4M^2(\delta + 2\delta + \delta) \\ &= 16M^2\delta. \end{aligned}$$

Logo, escolhendo  $\delta < \frac{\epsilon}{16M^2}$ , tem-se que

$$\|f - g\|^2 \leq 16M^2\delta < 16M^2 \frac{\epsilon}{16M^2} = \epsilon.$$

Para concluir a demonstração para uma função  $f$  qualquer de  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ , basta repetir o mesmo processo para todos os pontos de descontinuidade de  $f$ .  $\square$

Em posse destes resultados, podemos agora mostrar que o conjunto

$$\{1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(kx), \sin(kx), \dots\}$$

é uma base de  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ . Isto será feito a partir do seguinte teorema.

**Teorema 13.** (*Teorema básico*) *O conjunto*

$$\beta = \{1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(kx), \sin(kx), \dots\}$$

*é uma base de  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ .*

*Demonstração.* Devemos mostrar que qualquer função  $f$  contínua por partes é o limite de uma sequência de polinômios trigonométricos. Ora, pelo teorema 12, existem funções  $f_k \in \mathcal{P}[-\pi, \pi]$  tais que

$$\|f - f_k\| < \frac{1}{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, pelo teorema 11, existem polinômios trigonométricos  $T_k$ , tais que

$$\|f_k - T_k\| < \frac{1}{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Assim, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}\|f - T_k\| &= \|(f - f_k) + (f_k - T_k)\| \\ &\leq \|f - f_k\| + \|f_k - T_k\| \\ &\leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \\ &= \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Donde concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - T_k\| = 0.$$

□

**Corolário 3.** (*Igualdade de Parseval*) *Seja  $f$  uma função contínua por partes em  $[-\pi, \pi]$ , então*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

onde  $a_k$  e  $b_k$  são os coeficientes de Fourier de  $f$ .

*Demonstração.* Com efeito, desde que  $\{1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(kx), \sin(kx), \dots\}$  é uma base de  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ , então a Identidade de Parseval é satisfeita (Teorema 8). Assim,

$$\|f\|^2 = \frac{\langle f, 1 \rangle^2}{\|1\|^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\langle f, \cos(kx) \rangle^2}{\|\cos^2(kx)\|^2} + \frac{\langle f, \sin(kx) \rangle^2}{\|\sin^2(kx)\|^2} \right] \quad (2.10)$$

Ora, mas

$$i) \frac{\langle f, 1 \rangle^2}{\|1\|^2} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right]^2 = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right] = \frac{\pi a_0^2}{2},$$

$$ii) \frac{\langle f, \cos(kx) \rangle^2}{\|\cos^2(kx)\|^2} = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right]^2 = \pi \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right] = \pi a_k^2,$$

$$iii) \frac{\langle f, \sin(kx) \rangle^2}{\|\sin^2(kx)\|^2} = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right]^2 = \pi \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \right] = \pi b_k^2.$$

E como,

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx,$$

segue que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx &= \frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\pi a_k^2 + \pi b_k^2) \\ \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).\end{aligned}$$

□

## Capítulo 3

# Convergência das Séries de Fourier

Nesta seção, estudaremos alguns dos problemas relacionados à convergência das séries de Fourier. Mais especificamente, a convergência pontual, enunciada na seção 3, e a convergência uniforme, que é um pouco mais delicada. Além disso, estudaremos ainda a questão da diferenciabilidade e da integrabilidade das séries de Fourier.

### 3.1 Convergência Pontual das Séries de Fourier

Dos pontos citados acima, iniciamos com a demonstração do teorema da convergência pontual. Para auxiliar nesta tarefa, utilizaremos o seguinte lema.

**Lema 3.** (*Lema de Riemann-Lebesgue*) *Se  $g$  é contínua por partes em  $[a, b]$ , então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \operatorname{cos}(\lambda x) dx = 0.$$

*Demonstração.* Faremos a demonstração apenas para  $g(x) \sin(\lambda x)$ , e o caso  $g(x) \cos(\lambda x)$  é análogo. Seja  $I(\lambda)$  a sequência dada por

$$I(\lambda) = \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx. \quad (3.1)$$

Consideremos inicialmente que  $g$  é contínua em  $[a, b]$ . Assim, fazendo  $x = t + \frac{\pi}{\lambda}$ , obtemos

$$I(\lambda) = \int_{a - \frac{\pi}{\lambda}}^{b - \frac{\pi}{\lambda}} g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \operatorname{sen}\left(\lambda\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right) dt. \quad (3.2)$$

Ora, mas como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\lambda\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right)\right) &= \operatorname{sen}(\pi + \lambda t) \\ &= \operatorname{sen}(\pi) \operatorname{cos}(\lambda t) + \operatorname{cos}(\pi) \operatorname{sen}(\lambda t) \\ &= -\operatorname{sen}(\lambda t) \end{aligned}$$

então,

$$I(\lambda) = - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) \text{sen}(\lambda t) dt. \quad (3.3)$$

Voltando (3.3) para a variável  $x$  e somando com (3.2), membro a membro, obtemos que

$$\begin{aligned} 2I(\lambda) &= - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \text{sen}(\lambda x) dx + \int_a^b g(x) \text{sen}(\lambda x) dx \\ &= - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \text{sen}(\lambda x) dx - \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \text{sen}(\lambda x) dx \\ &\quad + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} g(x) \text{sen}(\lambda x) dx + \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b g(x) \text{sen}(\lambda x) dx \\ &= - \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \text{sen}(\lambda x) dx + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left[ g(x) - g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right] \text{sen}(\lambda x) dx \\ &\quad + \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b g(x) \text{sen}(\lambda x) dx. \end{aligned}$$

Assim, se  $M$  é o valor máximo de  $|g|$  em  $[a, b]$ , então

$$2|I(\lambda)| \leq \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a M |\text{sen}(\lambda x)| dx + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left[ g(x) - g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right] \text{sen}(\lambda x) dx + \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b M |\text{sen}(\lambda x)| dx,$$

e como  $|\text{sen}(\lambda x)| \leq 1$ , segue que

$$\begin{aligned} 2|I(\lambda)| &\leq M \int_{a-\frac{\pi}{\lambda}}^a dx + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left[ g(x) - g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right] dx + M \int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b dx \\ &= 2 \frac{M\pi}{\lambda} + \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left[ g(x) - g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right] dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$|I(\lambda)| \leq \frac{M\pi}{\lambda} + \frac{1}{2} \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left| g(x) - g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx.$$

Como admitimos  $g$  contínua em  $[a, b]$  então, de acordo com o Teorema 3,  $g$  é uniformemente contínua neste intervalo. Assim, para todo  $\epsilon > 0$ , é possível determinar um número real  $\lambda_0$ , dependente apenas de  $\epsilon$ , tal que, para todo  $x \in [a, b]$ ,

$$\lambda > \lambda_0 \Rightarrow \left| g(x) - g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| < \frac{\epsilon}{b-a},$$

com  $\frac{2M\pi}{\lambda} < \epsilon$ , sempre que  $\lambda > \lambda_0$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left| g(x) - g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx &< \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \frac{\epsilon}{b-a} dx \\ &= \frac{\epsilon}{b-a} \left( b - \frac{\pi}{\lambda} - a \right) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |I(\lambda)| &\leq \frac{M\pi}{\lambda} + \frac{1}{2} \int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} \left| g(x) - g\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = 0$ , no caso em que  $g$  é contínua. Para completar a demonstração para uma função qualquer de  $\mathcal{CP}[a, b]$ , basta aplicar o mesmo argumento para cada intervalo em que tal função é contínua.  $\square$

Antes de fazer a demonstração do teorema da convergência pontual, convém deduzir uma expressão para a sequência das somas parciais da série de Fourier de uma função  $f \in \mathcal{CP}[-\pi, \pi]$ . Seja

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)), \quad (3.4)$$

onde,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(kx) dx,$$

a série de Fourier de  $f$ . Assim,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)),$$

é a sequência das somas parciais de (3.4). Mas, para  $k = 1, 2, \dots, n$ , temos que

$$\begin{aligned} a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx) &= \frac{1}{\pi} \left[ \cos(kx) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt + \text{sen}(kx) \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen}(kt) dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos(kx) \cos(kt) + \text{sen}(kx) \text{sen}(kt)] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(k(t-x)) dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(k(t-x)) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right] dt.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Tomando a identidade trigonométrica dada por

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \cos(ks) = \operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)s\right] - \operatorname{sen}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)s\right]$$

e somando, fazendo  $k$  variar de 1 até  $n$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{k=1}^n \cos(ks) &= \sum_{k=1}^n \left[ \operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)s\right] - \operatorname{sen}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)s\right] \right] \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^n \cos(ks) &= \frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{k=1}^n \left[ \operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)s\right] - \operatorname{sen}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)s\right] \right].
\end{aligned}$$

Mas como,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \left[ \operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)s\right] - \operatorname{sen}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)s\right] \right] &= \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}s\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}s\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}s\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}s\right) \\
&\quad + \cdots + \operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right] - \operatorname{sen}\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)s\right] \\
&= -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) + \operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right],
\end{aligned}$$

segue que,

$$\sum_{k=1}^n \cos(ks) = \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right) + \operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} \tag{3.6}$$

Assim, combinando (3.5) e (3.6), podemos escrever  $S_n(x)$  da seguinte forma

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt.$$

Ou, fazendo  $t-x = s$ ,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} ds.$$

Para concluir a dedução, observamos que, como  $f$  é periódica de período  $2\pi$ , então a função

$$f(x+s) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)},$$

também o é, e podemos escrever

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) s \right]}{2\text{sen} \left( \frac{s}{2} \right)} ds. \quad (3.7)$$

Este resultado é conhecido como *Fórmula de Dirichlet de  $S_n$* . Uma última observação é o fato de que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) s \right]}{2\text{sen} \left( \frac{s}{2} \right)} ds = \pi. \quad (3.8)$$

Em posse destes resultados, podemos agora fazer a demonstração do teorema da convergência pontual, que aqui é enunciado de forma equivalente ao visto na seção 3.

**Teorema 14.** (*Teorema da Convergência Pontual*) *Seja  $f$  uma função contínua por partes em  $(-\infty, \infty)$ , periódica de período  $2\pi$ , e tal que*

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)],$$

*para todo  $x$ . Então a série de Fourier de  $f$  converge para  $f(x_0)$  em cada ponto  $x_0$  em que  $f$  tem derivadas à esquerda e à direita. Em particular, se  $f$  é continuamente diferenciável por partes, sua série de Fourier converge para  $f(x)$  com relação a todo  $x$ .*

*Demonstração.* Faremos a demonstração em duas partes, a primeira para os pontos em que  $f$  é contínua, e a segunda para os pontos em que  $f$  é descontínua. Sejam  $f$  uma função contínua em  $[-\pi, \pi]$  e  $x_0 \in [-\pi, \pi]$ , então devemos mostrar que  $S_n(x_0) - f(x_0)$  tende a zero quando  $n$  cresce. Com efeito, de acordo com (3.8), podemos escrever

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0) \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) s \right]}{2\text{sen} \left( \frac{s}{2} \right)} ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_n(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+s) \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) s \right]}{2\text{sen} \left( \frac{s}{2} \right)} ds - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0) \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) s \right]}{2\text{sen} \left( \frac{s}{2} \right)} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0-s) - f(x_0)] \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) s \right]}{2\text{sen} \left( \frac{s}{2} \right)} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{f(x_0+s) - f(x_0)}{s} \frac{s}{2\text{sen} \left( \frac{s}{2} \right)} \right] \text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) s \right] ds. \end{aligned}$$

Ora, como  $f$  tem derivadas laterais em  $x_0$ , então a função

$$g(s) = \frac{f(x_0+s) - f(x_0)}{s} \frac{s}{2\text{sen} \left( \frac{s}{2} \right)},$$

é contínua por partes. De fato, como

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{2\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{2\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)} = 1,$$

e como os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existem, então:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \frac{s}{2\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{2\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \frac{s}{2\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{2\text{sen}\left(\frac{h}{2}\right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Portanto,  $g$  possui limites laterais em  $x_0$ , e como possui também uma quantidade finita de descontinuidades, concluímos que  $g$  é contínua por partes. Assim, pelo Lema de Reimann-Lebesgue, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x_0) - f(x_0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) s \right] ds = 0,$$

como queríamos. Suponhamos agora que  $x_0$  seja um ponto de descontinuidade de  $f$ , então devemos mostrar que a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx_0) + b_k \text{sen}(kx_0)]$$

converge para  $f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ . No entanto, isto equivale a mostrar que a série de Fourier da função

$$G(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$$

converge para zero em  $x = 0$ . De fato, seja

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(kx_0) + B_k \text{sen}(kx_0)]$$

a série de Fourier de  $G$ . Então, desde que  $f$  é periódica, tem-se que

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+x_0) - f(x_0)] dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+x_0) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+x_0) dx - 2f(x_0) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - 2f(x_0) \\
 &= a_0 - 2f(x_0).
 \end{aligned}$$

E, para  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x) \cos(kx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+x_0) - f(x_0)] \cos(kx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+x_0) \cos(kx) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0) \cos(kx) dx
 \end{aligned}$$

Como,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0) \cos(kx) dx = f(x_0) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = 0$$

para todo  $k$  inteiro, então

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+x_0) \cos(kx) dx.$$

Agora, fazendo  $x = t - x_0$ , obtem-se

$$\begin{aligned}
 A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(t) \cos(t-x_0) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x_0}^{\pi} f(t) [\cos(kt) \cos(kx_0) + \operatorname{sen}(kt) \operatorname{sen}(kx_0)] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(t) \cos(kt) \cos(kx_0) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(t) \operatorname{sen}(kt) \operatorname{sen}(kx_0) dt \\
 &= \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(t) \cos(kt) dt \right] \cos(kx_0) + \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(t) \operatorname{sen}(kt) dt \right] \operatorname{sen}(kx_0)
 \end{aligned}$$

Ou, voltando à variável  $x$ , e como  $f$  é periódica de período  $2\pi$ , então

$$\begin{aligned} A_k &= \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(x) \cos(kx) dx \right] \cos(kx_0) + \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx \right] \operatorname{sen}(kx_0) \\ &= \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right] \cos(kx_0) + \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx \right] \operatorname{sen}(kx_0) \\ &= a_0 \cos(kx_0) + b_k \operatorname{sen}(kx_0) \end{aligned}$$

De forma análoga, obtém-se que

$$B_k = b_k \cos(kx_0) - a_k \operatorname{sen}(kx_0).$$

Assim, a série de Fourier de  $G$  é:

$$\begin{aligned} \frac{a_0 - 2f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k \cos(kx_0) + b_k \operatorname{sen}(kx_0)) \cos(kx) \\ + (b_k \cos(kx_0) - a_k \operatorname{sen}(kx_0)) \operatorname{sen}(kx)]. \end{aligned}$$

Seja  $S_G(x)$  a série de Fourier de  $G$ . Então, em  $x = 0$  tem-se que

$$S_G(0) = -f(x_0) + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx_0) + b_k \operatorname{sen}(kx_0)].$$

Donde segue que  $S_G(0)$  converge para zero se, e somente se, a série de Fourier de  $f$  converge para  $f(x_0)$ .

Seja  $G$  escrita como

$$G = G_P + G_I,$$

onde

$$G_P(x) = \frac{G(x) + G(-x)}{2} \quad \text{e} \quad G_I(x) = \frac{G(x) - G(-x)}{2}, \quad (3.9)$$

ou seja,  $G_P$  e  $G_I$  são as partes par e ímpar de  $G$ , respectivamente. Assim, desde que  $G_I$  é ímpar, sua série de Fourier converge para zero em  $x = 0$ . Por outro lado,  $G_P$  é contínua em  $x = 0$ , pois de acordo com (3.9),

$$\begin{aligned} G_P(x) &= \frac{G(x) + G(-x)}{2} \\ &= \frac{f(x+x_0) - f(x_0)}{2} + \frac{f(-x+x_0) - f(x_0)}{2} \\ &= \frac{1}{2} [f(x+x_0) + f(-x+x_0) - 2f(x_0)], \end{aligned}$$

e assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G_P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} G_P(x) = G_P(0) = 0.$$

Além disso, de acordo com (3.9),

$$\begin{aligned} \frac{G_P(h) - G_P(0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ \frac{G(h) + G(-h)}{2} - \frac{G(0) + G(0)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{G(h) - G(0)}{h} + \frac{G(-h) - G(0)}{h} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \right]. \end{aligned}$$

Por hipótese, os limites

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h},$$

existem em cada ponto  $x_0$  de  $[-\pi, \pi]$ . Assim, as derivadas laterais de  $G_P$  em  $x = 0$  existem e são tais que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_P(h) - G_P(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left[ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left[ \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{G_P(h) - G_P(0)}{h}. \end{aligned}$$

Portanto,  $G_P$  está nas condições do caso anterior desta demonstração, e assim a série de Fourier de  $G_P$  converge para

$$\frac{1}{2}[G_P(0^+) + G_P(0^-)] = G_P(0) = 0.$$

□

### 3.2 Convergência Uniforme das Séries de Fourier

**Teorema 15.** *Seja  $f$  uma função contínua em  $(-\infty, \infty)$ , periódica de período  $2\pi$  e com derivada primeira contínua por partes. Então a série de Fourier de  $f$  converge uniforme e absolutamente em todo intervalo fechado do eixo  $x$ .*

*Demonstração.* Sejam  $f$  uma função contínua em  $(-\infty, \infty)$ , e  $f'$  a derivada primeira de  $f$ . Sejam ainda

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)] \quad \text{e} \quad \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{a}_k \cos(kx) + \bar{b}_k \text{sen}(kx)],$$

as séries de Fourier de  $f$  e  $f'$ , respectivamente. Observe que podemos escrever  $\bar{a}_k$  e  $\bar{b}_k$  em termos

de  $b_k$  e  $a_k$ , respectivamente, pois

$$\begin{aligned}\bar{a}_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ f(x) \cos(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx \right],\end{aligned}$$

como  $f(x)$  e  $\cos(kx)$  são periódicas de período  $2\pi$ , então

$$f(\pi) \cos(k\pi) - f(-\pi) \cos(-k\pi) = 0,$$

para todo  $k$  inteiro. E assim,

$$\bar{a}_k = k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx = kb_k.$$

Note que se  $k = 0$ , então  $\bar{a}_k = 0$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned}\bar{b}_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ f(x) \operatorname{sen}(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \right] \\ &= -k \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ &= -ka_k.\end{aligned}$$

Pela *desigualdade de Bessel*,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\bar{a}_k^2 + \bar{b}_k^2) \leq \|f'(x)\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx.$$

Desde que  $f'$  é contínua por partes, então

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx < \infty,$$

e como,

$$\bar{a}_k^2 + \bar{b}_k^2 = k^2(b_k^2 + a_k^2) = \left[ k\sqrt{b_k^2 + a_k^2} \right]^2,$$

segue que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ k\sqrt{b_k^2 + a_k^2} \right]^2 < \infty.$$

Logo, a sequência  $\left\{ k\sqrt{b_k^2 + a_k^2} \right\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , pertence ao espaço  $\ell_2$  (exemplo 9). Assim, como a sequência  $\left\{ \frac{1}{k} \right\}$  também pertence à  $\ell_2$ , então

$$\sqrt{b_k^2 + a_k^2} = \frac{1}{k} k\sqrt{b_k^2 + a_k^2} \in \ell_2,$$

consequentemente, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{b_k^2 + a_k^2}$$

converge. Pela *desigualdade de Cauchy-Schwarz*, se  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\{e_1, e_2\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , sendo  $u = ae_1 + be_2$  e  $v = \cos(kx)e_1 + \sin(kx)e_2$ , então

$$|a\cos(kx) + b\sin(kx)| = |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Logo,

$$\left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)| \leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a^2 + b^2}$$

Assim, pelo *Teste M de Weierstrass* (Teorema 7), concluímos que a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

converge uniforme e absolutamente em qualquer intervalo fechado do eixo  $x$ .  $\square$

**Lema 4.** *Seja  $\gamma$  uma função continuamente diferenciável por partes e periódica em  $(-\infty, \infty)$  tal que, para  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $\gamma$  é definida da seguinte forma:*

$$\gamma = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\pi}\right), & -\pi \leq x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right), & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Então a série de Fourier de  $\gamma$  converge pontualmente com relação a todo  $x$ , e converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos da forma  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Seja

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)]$$

a série de Fourier de  $\gamma$ . Como  $\gamma$  é ímpar, então  $b_k = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ , e

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \gamma(x) \sin(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \gamma(x) \sin(kx) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left[1 + \frac{x}{\pi}\right] \sin(kx) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[1 - \frac{x}{\pi}\right] \sin(kx) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(kx) dx - \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^0 x \sin(kx) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx. \end{aligned}$$

Utilizando o método de integração por partes, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(kx) dx &= \frac{1}{2\pi^2} \left[ -\frac{x}{k} \cos(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{\pi}{k} \cos(k\pi) + \frac{\pi}{k} \cos(-k\pi) \right] \\ &= -\frac{\cos(k\pi)}{k\pi}. \end{aligned}$$

E como,

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(kx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(kx) dx = \frac{1}{2k\pi} - \frac{\cos(k\pi)}{2k\pi},$$

segue que,

$$b_k = \frac{1}{2k\pi} - \frac{\cos(k\pi)}{2k\pi} + \frac{\cos(k\pi)}{k\pi} + \frac{1}{2k\pi} - \frac{\cos(k\pi)}{2k\pi} = \frac{1}{k\pi}.$$

Portanto, a série de Fourier de  $\gamma$  é

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}. \quad (3.10)$$

Assim, devemos mostrar que (3.10) converge uniformemente em qualquer intervalo fechado de  $[-\pi, \pi]$  que não contenha a origem. Seja

$$S_n(x) = \operatorname{sen}(x) + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \dots + \frac{\operatorname{sen}(2n)}{n},$$

a  $n$ -ésima soma parcial da série de Fourier da função  $\pi\gamma$ . Definindo a sequência  $T_n$  por

$$T_n(x) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x) + \dots + \operatorname{sen}(nx),$$

tem-se que

$$\operatorname{sen}(kx) = T_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Dessa forma,  $S_n$  pode ser escrita como

$$S_n(x) = T_1(x) + \frac{T_2(x) - T_1(x)}{2} + \dots + \frac{T_n(x) - T_{n-1}(x)}{n},$$

ou, equivalentemente,

$$S_n(x) = \frac{T_1(x)}{1 \cdot 2} + \frac{T_2(x)}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{T_{n-1}(x)}{(n-1) \cdot n} + \frac{T_n(x)}{n}.$$

Além disso, da identidade trigonométrica

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sen}(kx) = \cos\left[x\left(k - \frac{1}{2}\right)\right] - \cos\left[x\left(k + \frac{1}{2}\right)\right],$$

obtem-se que

$$2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) [\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x) + \dots + \operatorname{sen}(nx)] = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left[x\left(n + \frac{1}{2}\right)\right],$$

donde,

$$T_k(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left[x\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Como,

$$\left| \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left[x\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \right| \leq 2,$$

segue que,

$$|T_k(x)| \leq \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right|},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x \in [-\pi, \pi]$ . Assim, dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $n > m$ , para todo  $x \in [-\pi, \pi]$  tem-se que:

$$\begin{aligned} |S_n(x) - S_m(x)| &= \left| \frac{T_m(x)}{(m+1)m} + \cdots + \frac{T_{n-1}(x)}{(n-1)m} + \frac{T_n(x)}{n} - \frac{T_m(x)}{m} \right| \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{sen}(x/2)} \left[ \frac{1}{(m+1)m} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right]. \end{aligned}$$

Seja agora  $x \in [-\pi, \pi]$  tal que  $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$ . Logo,

$$\left| \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \right| \geq \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right),$$

e assim,

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leq \frac{1}{\operatorname{sen}(\delta/2)} \left[ \frac{1}{(m+1)m} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right].$$

Ora, mas como a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

é convergente, pode-se tomar  $m, n \in \mathbb{N}$  de tal forma que

$$\frac{1}{(m+1)m} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

torna-se arbitrariamente pequeno. Dessa forma, qualquer que seja  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon,$$

sempre que  $m, n > N$ , onde  $\delta \leq |x| \leq \pi$ . Donde conclui-se que a série de Fourier de  $\pi\gamma$  converge uniformemente sempre que  $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$  e, conseqüentemente, o mesmo vale para a série de  $\gamma$ .  $\square$

**Teorema 16.** *Seja  $f$  uma função continuamente diferenciável por partes e periódica em  $(-\infty, \infty)$  de período  $2\pi$ . A série de Fourier de  $f$  converge uniformemente em qualquer intervalo fechado do eixo  $x$  que não possua pontos de descontinuidade.*

*Demonstração.* Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_m$  os pontos de descontinuidade de  $f$  em  $[-\pi, \pi]$  e seja  $w_i = f(x_i^+) - f(x_i^-)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , o comprimento do salto de descontinuidade de  $f$  em  $x_i$ . Então, como  $\gamma(2\pi n^+) - \gamma(2\pi n^-) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o comprimento dos saltos de descontinuidade da função  $w_i \gamma(x - x_i)$  nos pontos da forma  $x_i + 2\pi n$  é igual a  $w_i$ . Assim, a função

$$f(x) - w_i \gamma(x - x_i)$$

é contínua nos pontos em que  $f$  é contínua, e nos pontos da forma  $x_i + 2\pi n$ . Repetindo este processo para cada  $i$ , obtemos que a função

$$f(x) - \sum_{i=1}^m w_i \gamma(x - x_i)$$

é continuamente diferenciável por partes em  $(-\infty, \infty)$ , periódica de período  $2\pi$ , e ainda que terá pontos de descontinuidade apenas quando  $f(-\pi) \neq f(\pi)$ , isto é, em  $\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ . De forma análoga ao feito acima, seja  $w_\pi = f(\pi^+) - f(\pi^-)$ , e seja  $F$  a função dada por

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^m w_i \gamma(x - x_i) - w_\pi \gamma(x - \pi).$$

Logo,  $F$  é contínua em  $(-\infty, +\infty)$ , periódica de período  $2\pi$  e possui derivada contínua por partes, e portanto, satisfaz as hipóteses do Teorema 15. Assim, a série de Fourier de  $F$  converge uniformemente para  $F$  em qualquer intervalo fechado do eixo  $x$ . Além disto, pelo Lema 4, a série de Fourier da função

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^m w_i \gamma(x - x_i) + w_\pi \gamma(x - \pi)$$

converge uniformemente para  $\phi$  em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de  $f$ . Consequentemente, como  $f = F + \phi$ , a série de Fourier de  $f$  é a série de Fourier de  $F + \phi$ , que converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de  $f$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

### 3.3 Derivação e Integração das Séries de Fourier

**Teorema 17.** (*Teorema de derivação*) *Seja  $f$  uma função contínua em  $(-\infty, \infty)$ , periódica de período  $2\pi$  e com derivada primeira contínua por partes. Então a série de Fourier de  $f'$  pode ser obtida derivando a série de  $f$  termo a termo, e a série derivada converge pontualmente para  $f'$  se  $f''$  existe.*

*Demonstração.* Sejam

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)] \quad \text{e} \quad \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{a}_k \cos(kx) + \bar{b}_k \text{sen}(kx)],$$

as séries de Fourier de  $f$  e  $f'$ , respectivamente. Como  $f$  tem período  $2\pi$ , então

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = 0.$$

Como visto na demonstração do Teorema 15, para  $k > 0$  vale

$$\bar{a}_k = kb_k \quad \text{e} \quad \bar{b}_k = -ka_k,$$

donde segue que a série de Fourier de  $f'$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k[b_k \cos(kx) - a_k \text{sen}(kx)].$$

Este é justamente o resultado obtido derivando a série de Fourier de  $f$  termo a termo. Por fim, se existe  $f''$ , pelo Teorema 14, a série derivada converge pontualmente para  $f'$ . Isto encerra a demonstração.  $\square$

**Teorema 18.** *Seja  $f$  uma função contínua por partes em  $(-\infty, \infty)$  com período  $2\pi$ , e seja*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)]$$

a série de Fourier de  $f$ . Então

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k [\text{sen}(kb) - \text{sen}(ka)] - b_k [\cos(kb) - \cos(ka)]}{k}.$$

Ou seja, a integral definida de  $f$ , de  $a$  à  $b$ , pode ser calculada integrando sua série de Fourier termo a termo.

*Demonstração.* Seja

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt.$$

Então  $F$  é contínua, periódica de período  $2\pi$  e tem derivada primeira contínua por partes. De fato, desde que  $f$  é periódica de período  $2\pi$ , então dado  $n \in \mathbb{N}$ , para todo  $x$  tem-se que

$$\int_x^{x+2\pi n} f(t) dt = \int_0^{2\pi n} f(t) dt = n \int_0^{2\pi} f(t) dt = n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

e como,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

então,

$$\begin{aligned}
 F(x + 2\pi n) &= \int_0^{x+2\pi n} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\
 &= \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt + \int_x^{x+2\pi n} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\
 &= \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt + \int_0^{2\pi n} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\
 &= \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt + \int_0^{2\pi n} f(t) dt - \pi n a_0 \\
 &= \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt + \int_0^{2\pi n} f(t) dt - n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\
 &= \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\
 &= F(x).
 \end{aligned}$$

Portanto  $F$  está nas condições do teorema da convergência uniforme e do teorema de derivação. Assim, se  $A_k$  e  $B_k$  são os coeficientes da série de Fourier de  $F$ , ou seja,

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(kx) + B_k \text{sen}(kx)],$$

então,

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k [B_k \cos(kx) - A_k \text{sen}(kx)]. \quad (3.11)$$

Por outro lado,

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)]. \quad (3.12)$$

Assim, comparando (3.11) e (3.12), obtemos que

$$A_k = -\frac{a_k}{k} \quad \text{e} \quad B_k = \frac{a_k}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

E portanto,

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [a_k \text{sen}(kx) - b_k \cos(kx)].$$

Logo, como

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_0^x f(t) dt - \frac{a_0}{2} x,$$

segue que,

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [a_k \text{sen}(kx) - b_k \cos(kx)].$$

Para concluir a demonstração, observamos que, como

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx,$$

então,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{a_0}{2}b + \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [a_k \text{sen}(kb) - b_k \cos(kb)] \\ &\quad - \frac{a_0}{2}a - \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [a_k \text{sen}(ka) - b_k \cos(ka)] \\ &= \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k [\text{sen}(kb) - \text{sen}(ka)] - b_k [\cos(kb) - \cos(ka)]}{k}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 19.** (Teorema de integração) *Seja  $f$  uma função arbitrária de  $\mathcal{CP}[-\pi, \pi]$  cuja série de Fourier é*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)].$$

Então, a série de Fourier da função

$$\int_0^x f(t)dt, \quad -\pi < x < \pi,$$

converge pontualmente com relação a todo  $x \in (-\pi, \pi)$ , e

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k \cos(kx) + [a_k + (-1)^{k+1}a_0] \text{sen}(kx)}{k}.$$

*Demonstração.* Do Teorema 18, temos

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \text{sen}(kx) - b_k \cos(kx)}{k}.$$

Fazendo  $x = 0$ , obtemos que

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Da equação (2.4), temos

$$\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\text{sen}(kx)}{k}.$$

Portanto,

$$\int_0^x f(t)dt = a_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\text{sen}(kx)}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \text{sen}(kx) - b_k \cos(kx)}{k},$$

ou, equivalentemente,

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k \cos(kx) + [a_k + (-1)^{k+1}a_0] \operatorname{sen}(kx)}{k}.$$

□

## Capítulo 4

# O Problema Isoperimétrico

Obtidos todos os resultados, relacionados às séries de Fourier, necessários para a resolução do problema isoperimétrico, podemos agora tratar deste. No entanto, como já foi dito anteriormente, este é um problema da geometria diferencial e, portanto, são necessários alguns conceitos sobre curvas. Nesse sentido, apresentamos, antes do problema isoperimétrico, alguns dos resultados fundamentais da geometria diferencial.

### 4.1 Curvas Parametrizadas

**Definição 14.** *Seja  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que a cada  $t \in I$  associa o vetor  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . A variável  $t$  é dita parâmetro da curva, e o subconjunto  $\{\alpha(t), t \in I\}$  de  $\mathbb{R}^2$  é chamado traço da curva  $\alpha$ .*

Lembramos que a aplicação  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é diferenciável se, e somente se, as funções reais  $x(t)$  e  $y(t)$  são diferenciáveis.

Diremos que uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é regular se  $|\alpha'(t)| \neq 0$ , para todo  $t \in I$ , onde  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ . Consideremos alguns exemplos.

**Exemplo 12.** *Sejam  $\alpha : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\beta : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  as curvas parametrizadas diferenciáveis dadas por*

$$\alpha(t) = (\cos(t) + a, \sin(t) + b), \quad a, b, t \in \mathbb{R} \quad e \quad \beta(t) = (\cos(2t) + a, \sin(2t) + b).$$

*Estas curvas possuem o mesmo traço, a saber, a circunferência de raio 1 centrada em  $(a, b)$ . Além disso,  $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$  e  $\beta'(t) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t))$ , e*

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{[-\sin(t)]^2 + [\cos(t)]^2} = 1 \quad e \quad |\beta'(t)| = \sqrt{[-2\sin(2t)]^2 + [2\cos(2t)]^2} = 2.$$

*Então  $\alpha$  e  $\beta$  são curvas regulares e  $|\beta'(t)| = 2|\alpha'(t)|$ .*

Considere agora a curva parametrizada  $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ . O traço de  $\gamma$  está representado na figura 4.1 abaixo.

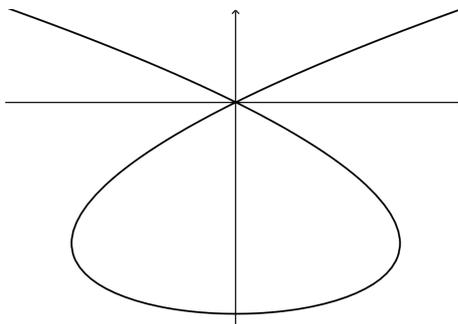


Figura 4.1

Observe que  $\gamma(2) = \gamma(-2) = (0, 0)$ , ou seja,  $\gamma$  não é uma aplicação biunívoca.

Com isto, diremos que uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é *simples* se é injetiva. Além disso, a curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *simples e fechada*, se  $\alpha(a) = \alpha(b)$  e  $\alpha(x) \neq \alpha(y)$  para todo  $x \neq y \in [a, b)$ .

## 4.2 Mudança de Parâmetro; Comprimento de Arco

Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $h : J \rightarrow I$  uma função diferenciável tal que  $h'(s) \neq 0$  para todo  $s \in J$ , e  $h(J) = I$ . A aplicação  $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva regular e possui o mesmo traço de  $\alpha$ .  $\beta$  é dita *reparametrização de  $\alpha$  por  $h$* , e a função  $h$  é dita *mudança de parâmetro*.

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada diferenciável. A função

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du,$$

é denominada *função comprimento de arco* de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Note que se  $\alpha$  é regular, então  $s$  é uma função diferenciável de  $t$  com  $s'(t) = |\alpha'(t)| > 0$ , o que implica  $s$  injetiva e, portanto, bijetiva sobre sua imagem.

**Definição 15.** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *parametrizada pelo comprimento de arco (PCA)* se

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du = t - t_0.$$

Assim, uma curva regular  $\alpha$  é PCA se, e somente se,  $|\alpha'(t)| = 1$  para todo  $t$ . De fato, se  $|\alpha'(t)| = 1$ , então

$$\int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du = t - t_0.$$

Reciprocamente, se  $\alpha$  é PCA, então

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du = t - t_0.$$

Assim, supondo  $t \geq t_0$ , tem-se  $s'(t) = |\alpha'(t)| = 1$ . De outra forma, se  $t \leq t_0$ , então

$$s(t) = - \int_t^{t_0} |\alpha'(u)| du = -(t_0 - t).$$

Logo,  $s'(t) = |\alpha'(t)| = 1$ . De qualquer forma temos  $|\alpha'(t)| = 1$ .

**Teorema 20.** *Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular,  $s : I \rightarrow J$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$  fixado, onde  $J = s(I) \subset \mathbb{R}$  e  $h = s^{-1}$  a função inversa de  $s$ , definida em  $J$ . Então a aplicação  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  é PCA.  $\beta$  é dita uma reparametrização de  $\alpha(I)$  pelo comprimento de arco.*

*Demonstração.* Com efeito, derivando a igualdade  $h(s(t)) = t$  em relação a  $t$ , obtemos que

$$\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dh}{ds} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Assim,

$$\frac{d}{ds}(\beta) = \frac{d}{ds}(\alpha \circ h) = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} = \left| \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \right| = 1.$$

Logo,  $\beta = \alpha \circ h(s)$ ,  $s \in J$ , é uma reparametrização de  $\alpha$  por  $h$  e  $\beta$  é PCA.  $\square$

### 4.3 Teorema da Desigualdade Isoperimétrica

Finalmente, apresentamos nesta seção o *Teorema da Desigualdade Isoperimétrica*. Como afirmamos anteriormente, faremos a demonstração que é devida à *Hurwitz*, fazendo uso das séries de Fourier. Deste modo, demonstraremos o teorema no caso em que a curva  $C$ , citada no enunciado, é continuamente diferenciável por partes. Além disso, fazemos uso do *Teorema de Green* e assumimos que o leitor esteja familiarizado com este.

**Teorema 21. (Desigualdade Isoperimétrica)** *Seja  $C$  uma curva plana simples e fechada com comprimento  $L$ , e seja  $A$  a área da região limitada por  $C$ . Então,*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

*e verifica-se a igualdade se, e somente se,  $C$  é um círculo.*

*Demonstração.* Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in [0, L]$ , uma parametrização pelo comprimento de arco de  $C$ . Como  $C$  é fechada, então  $\alpha(0) = \alpha(L)$  e  $\alpha^{(k)}(0) = \alpha^{(k)}(L)$ ,  $\forall k \geq 1$ .

Consideremos as extensões  $L$ -periódicas de  $x(s)$  e  $y(s)$ :

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x(s + L) = x(s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad y(s + L) = x(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Então,  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções continuamente diferenciáveis por partes e periódicas de período  $L$ . Fazendo  $L = 2l$ , como  $x$  e  $y$  são funções contínuas e possuem derivadas contínuas por partes, então é possível fazer seus desenvolvimentos em série de Fourier uniforme e absolutamente convergentes. Sejam

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) + b_k \text{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right] \quad \text{e} \quad \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_k \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) + d_k \text{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right],$$

as séries de Fourier de  $x$  e  $y$ , respectivamente. Os coeficientes  $a_k, b_k, c_k$  e  $d_k$  são tais que:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(s) \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) ds,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x(s) \text{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) ds,$$

$$c_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l y(s) \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) ds,$$

$$d_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l y(s) \text{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) ds.$$

Deste modo, pelo Teorema de Derivação,

$$\begin{aligned} x'(s) &= \frac{d}{ds}(x(s)) = \frac{d}{ds} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) + b_k \text{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right] \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k\pi}{l} \left[ -a_k \text{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) + b_k \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y'(s) &= \frac{d}{ds}(y(s)) = \frac{d}{ds} \left[ \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_k \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) + d_k \text{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right] \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k\pi}{l} \left[ -c_k \text{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) + d_k \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

E a identidade de Parseval nos permite escrever

$$\|x'\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{k\pi a_k}{l} \right)^2 \left\| \text{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right\|^2 + \left( \frac{k\pi b_k}{l} \right)^2 \left\| \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right\|^2 \right], \quad (4.1)$$

$$\|y'\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{k\pi c_k}{l} \right)^2 \left\| \text{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right\|^2 + \left( \frac{k\pi d_k}{l} \right)^2 \left\| \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right\|^2 \right]. \quad (4.2)$$

Mas, como

$$\|x'\|^2 = \langle x', x' \rangle = \frac{1}{l} \int_{-l}^l (x'(s))^2 ds$$

e

$$\|y'\|^2 = \langle y', y' \rangle = \frac{1}{l} \int_{-l}^l (y'(s))^2 ds,$$

e ainda, como

$$\left\| \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right\|^2 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \operatorname{sen}^2 \left( \frac{k\pi s}{l} \right) ds = 1$$

e

$$\left\| \cos \left( \frac{k\pi s}{l} \right) \right\|^2 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos^2 \left( \frac{k\pi s}{l} \right) ds = 1,$$

então podemos escrever (4.1) e (4.2) da seguinte forma:

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l (x'(s))^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 (a_k^2 + b_k^2) \right], \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l (y'(s))^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 (c_k^2 + d_k^2) \right], \quad (4.4)$$

respectivamente. E, conseqüentemente,

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l [(x'(s))^2 + (y'(s))^2] ds = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) \right]$$

Ora, como  $\alpha$  é P.C.A, então  $|\alpha'(s)| = 1, \forall s \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = |\alpha'(s)|^2 = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_{-l}^l [(x'(s))^2 + (y'(s))^2] ds &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l 1 ds \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) \right] &= 2 \\ \Rightarrow \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [k^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2)] &= 2l^2. \end{aligned}$$

Fazendo  $L = 2l$ , obtemos que

$$\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [k^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2)] = 2l^2 = 2 \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{L^2}{2}. \quad (4.5)$$

Agora, pelo Teorema de Green, a área  $A$  é tal que,

$$\begin{aligned} A = \int_C x dy &= \int_{-l}^l x(s)y'(s)ds \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} [k(a_k d_k - c_k b_k)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2)] - 4\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [k(a_k d_k - c_k b_k)] \\ &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2 + k^2 c_k^2 + k^2 d_k^2 - 2k a_k d_k + 2k c_k b_k] \\ &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [(k a_k - d_k)^2 - d_k^2 + (k b_k + c_k)^2 - c_k^2 + k^2 c_k^2 + k^2 d_k^2] \\ &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [(k a_k - d_k)^2 + (k b_k + c_k)^2 + (k^2 - 1)(c_k^2 + d_k^2)] \end{aligned}$$

Assim, como todos os termos desta última série são maiores ou iguais a zero, obtemos que

$$L^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [(k a_k - d_k)^2 + (k b_k + c_k)^2 + (k^2 - 1)(c_k^2 + d_k^2)] \geq 0,$$

ou simplesmente,

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Finalmente, vale a igualdade acima se, e somente se,

$$\begin{cases} a_1 = d_1, \\ b_1 = -c_1, \\ a_k = b_k = c_k = d_k = 0, \quad \forall k > 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Logo,

$$x(s) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi s}{l}\right) + b_1 \text{sen}\left(\frac{\pi s}{l}\right)$$

e

$$y(s) = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos\left(\frac{\pi s}{l}\right) + a_1 \text{sen}\left(\frac{\pi s}{l}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \left(x(s) - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y(s) - \frac{c_0}{2}\right)^2 &= \left[a_1 \cos\left(\frac{\pi s}{l}\right) + b_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{l}\right)\right]^2 \\
 &+ \left[-b_1 \cos\left(\frac{\pi s}{l}\right) + a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{l}\right)\right]^2 \\
 &= a_1^2 \cos^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) + b_1^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) + 2a_1 b_1 \cos\left(\frac{\pi s}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{l}\right) \\
 &+ b_1^2 \cos^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) + a_1^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) - 2b_1 a_1 \cos\left(\frac{\pi s}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{l}\right) \\
 &= a_1^2 \left[\cos^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi s}{l}\right)\right] + b_1^2 \left[\cos^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi s}{l}\right)\right] \\
 &= a_1^2 + b_1^2.
 \end{aligned}$$

Mas por (4.5) e (4.6), podemos escrever

$$\left(x(s) - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y(s) - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2$$

Portanto, a curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  é uma parametrização do círculo centrado em  $\left(\frac{a_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right)$  de raio  $\frac{l}{\pi}$ . □

# Considerações Finais

Ressaltamos a importância deste trabalho no fato que utilizamos, seguindo o trabalho de *Hurwitz*, ferramentas da análise linear para fazer a demonstração do problema isoperimétrico, que é essencialmente um problema da Geometria Diferencial.

Apresentamos os principais resultados relacionados e vimos que a convergência das séries de Fourier, sob algumas condições, é uniforme. Fato este que foi crucial para solução da desigualdade isoperimétrica.

Além do mais, vale ressaltar que muitos dos conceitos estudados foram, e ainda são, de extrema importância para a evolução da matemática que se conhece hoje.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] KREIDER, Donald L. **Introdução à Análise Linear**. 1<sup>a</sup>. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972. 264p. Volume 2.
- [2] CARMO, M. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção Textos Universitários).
- [3] FIGUEIREDO, Djairo G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4<sup>a</sup> ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2000.
- [4] LIMA, Elon L. **Álgebra Linear**. 1<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Matemática Universitária)
- [5] CALLIOLI, Carlos A. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6<sup>a</sup> ed. rev. São Paulo: Atual, 1993.
- [6] KREYZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.
- [7] LIMA, Elon L. **Curso de Análise**, vol. 1, 12<sup>a</sup> ed. Projeto Euclides. IMPA, 2004.
- [8] FIGUEIREDO, Djairo G. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 1974.