

UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA
LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOSÉ FERNANDES DE OLIVEIRA NETO

GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES COM ORIENTAÇÃO
ARBITRÁRIA

ACARAPE

2019

JOSÉ FERNANDES DE OLIVEIRA NETO

GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES COM ORIENTAÇÃO ARBITRÁRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima

ACARAPE

2019

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

de Oliveira Neto, José Fernandes.

O42g

Gotículas Quânticas Dipolares com Orientação Arbitrária / José
Fernandes de Oliveira Neto. - Redenção, 2019.
84f: il.

Monografia - Curso de Física, Instituto De Ciências Exatas E Da
Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira, Redenção, 2019.

Orientador: Aristeu Rosendo Pontes Lima.

1. Física. 2. Condensação de Bose-Einstein dipolar. 3.
Gotículas quânticas. 4. Striped states. 5. Orientação arbitrária.
I. Lima, Aristeu Rosendo Pontes. II. Título.

CE/UF/BSCA

CDD 530

JOSÉ FERNANDES DE OLIVEIRA NETO

GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES COM ORIENTAÇÃO ARBITRÁRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Física.

Aprovada em: 13 de Junho de 2019

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Levi Rodrigues Leite
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Tommaso Macri
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

Em memória de meu pai, Luís de Sousa.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a uma pessoa que conheci em 2010 e que rapidamente se tornou a pessoa mais importante da minha (nossa) vida: minha esposa, Riany Duarte. Obrigado por todos os momentos que estamos passando juntos e quero que saiba que pretendo que passemos muito mais tempo juntos.

Um agradecimento especial deve ser dado a meu orientador, Aristeu Lima, pelas excelentes discussões e ideias para os projetos de pesquisa e por todo o apoio durante minha graduação. Seu impacto positivo pôde ser sentido logo no começo, pois por causa dele pude encontrar um tema de pesquisa o qual quero seguir, o que considero uma das questões mais difíceis para um jovem pesquisador. Graças a ele também esta monografia pode ser útil, resultando em possível artigo ao final.

Estendo esse agradecimento a Francisco Ednilson Alves dos Santos, da Universidade Federal de São Carlos, e a Emanuel Alves de Lima Henn, da Universidade de São Paulo, que estão envolvidos nesta colaboração científica.

Agradeço ao professor Levi Rodrigues Leite, da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, e ao professor Tommaso Macrì, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, por aceitarem o convite de participar da banca examinadora desta monografia.

Um agradecimento também deve ser dado a João Vitor Frossard, da Universidade Federal de Juiz de Fora, e, novamente, ao professor Levi pelas explicações sobre códigos numéricos na plataforma Mathematica.

Ao professor Axel Pelster, da Universidade Técnica de Kaiserslautern (Alemanha), agradeço pela excelente sugestão feita para este trabalho na ocasião do evento *Advances in Quantum Simulation With Ultracold Atoms*, acontecido no *International Institute of Physics*, no Rio Grande do Norte.

Aos colegas do nosso grupo de pesquisa Teoria Quântica de Campos e Matéria Condensada, Francisco Mateus Alves Guimarães e Joel Lopes de Castro, agradeço pelas conversas de bastidores e pelas sugestões dadas aqui e ali.

Agradeço aos excelentes professores que tive durante esta graduação, em especial às professoras Sílvia, Cinthia, Débora e Eligângela e aos professores Philipe, Levi e Elcimar. Quero que saibam que suas valiosas lições vão muito além dos limites da sala de aula.

Agradecimentos também devem ser dados aos colegas de sala, Mateus, Ismael,

Karla, Joel e Rogelândio. O companheirismo é algo essencial na carreira profissional. Temos construído isso ao longo destes quatro anos.

À Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico, agradeço o apoio nos projetos de pesquisa em que estive envolvido. Graças a essa valiosa ajuda pude participar de numerosos eventos científicos ao redor do Brasil e criar colaborações científicas.

E por último, mas não menos importante, agradeço pelo o apoio familiar, especialmente o de minha mãe, Luciene Fernandes, que sempre fez de tudo por mim ao longo destes 25 anos. Ao meu pai, Luís de Sousa (*in memoriam*), agradeço por ter estabelecido todo o suporte para eu estar aqui, mesmo você não estando mais. É verdadeiramente uma pena você não estar aqui para ver isto. Aos demais familiares, minha irmã caçula, Rebeca, que sempre me faz rir, minha sogra, Regina, que se tornou uma segunda mãe, minha vó, Mazé, e minha tia, Lucivânia, que cuidaram de mim até os seis anos, só tenho a agradecer pelo carinho de vocês.

“If you want to make the world a better place
Take a look at yourself, and then make a
change.”

(Garrett Seiadh)

RESUMO

Investigamos a física de gotículas quânticas dipolares e propomos, ao final, um modelo variacional baseado na superposição de dois ansatz gaussianos para a recente observação experimental de *striped states* nesses sistemas. Estas soluções em *stripes* têm atraído a atenção da comunidade científica graças ao seu potencial em manifestar efeitos de supersólidos, mas não possuem ainda um modelo teórico analítico que reproduza precisamente os seus resultados. Em experimento, estes sistemas têm se mostrado serem uma influência da orientação do campo magnético externo e da geometria da armadilha de confinamento. Ambas as características estão presentes em nosso modelo.

Palavras-chave: Condensação de Bose-Einstein dipolar. Gotículas quânticas. *Striped states*. Orientação arbitrária.

ABSTRACT

We investigated the physics of dipolar quantum droplets and proposed, at the end, a variational model based on the overlap of two Gaussian ansatz for the recent experimental observation of striped states in these systems. Such stripes have attracted the attention of the scientific community thanks to its potential in manifesting effects of supersolids, but do not yet have a theoretical analytical model that accurately reproduce its results. In the experiment these systems have been shown to be an influence of the orientation of the external magnetic field and the geometry of the harmonic trap. Both features are present in our model.

Keywords: Dipolar Bose-Einstein condensation. Quantum droplets. Striped states. Arbitrary orientation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico da função de distribuição de Bose-Einstein	24
Figura 2 – Gráfico comparativo das funções de distribuições de um gás ideal	25
Figura 3 – Figura esquemática do processo da condensação de Bose-Einstein	26
Figura 4 – Gráfico da ocupação média de partículas no estado fundamental de um gás ideal	30
Figura 5 – Propriedades da interação dipolo-dipolo	37
Figura 6 – Ajustando a interação dipolar através de um campo magnético girante	38
Figura 7 – Tabela Periódica como função do parâmetro a_{dd}	39
Figura 8 – Gráfico da função de anisotropia em simetria cilíndrica	43
Figura 9 – Gráfico do diagrama de estabilidade da Condensação de Bose-Einstein (CBE) dipolar	44
Figura 10 – Gráfico da função de anisotropia usual	45
Figura 11 – Gráfico da energia de um CBE dipolar em simetria cilíndrica	47
Figura 12 – Resultados do primeiro experimento de gotículas quânticas	51
Figura 13 – Ilustração de um instabilidade de Rosensweig típica	52
Figura 14 – Relação entre a quantidade de partículas e a vida média do padrão de gotículas	53
Figura 15 – Dinâmica do tempo de voo de uma única gotícula quântica dipolar	54
Figura 16 – Fator de correção na energia de Lee-Huang-Yang (LHY)	57
Figura 17 – Ilustração computacional do padrão de gotículas quânticas dipolares a partir de simulações do Equação de Gross-Pitaevskii (EGP) estendida	58
Figura 18 – Ilustração computacional do comportamento autoligado da solução de gotícula única	58
Figura 19 – Estudo da transição CBE-gotícula quântica dipolar a partir da energia variacional	60
Figura 20 – Estudo variacional da solução de gotícula única	61
Figura 21 – Energia variacional e numericamente obtidas para <i>striped states</i> de gotículas quânticas dipolares	62
Figura 22 – Resultados experimentais que demonstraram a existência de <i>striped states</i> em gotículas quânticas dipolares	65
Figura 23 – Ilustração esquemática da orientação do campo magnético	67

Figura 24 – Ilustração esquemática dos dois cenários considerados	68
Figura 25 – Gráfico da função de anisotropia generalizada	70

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CBE	Condensação de Bose-Einstein
EGP	Equação de Gross-Pitaevskii
IDD	Interação Dipolo-Dipolo
LHY	Lee-Huang-Yang
MOT	<i>Magneto-Optical Trap</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

a_{dd}	Constante de acoplamento da interação dipolo-dipolo
a_s	Comprimento de espalhamento da onda-s
a_{bg}	Comprimento de ressonância de Feshbach
\bar{a}	Comprimento característico de oscilação da armadilha
ω_η	Frequência de oscilação da armadilha
$\bar{\omega}$	Frequência média de oscilação da armadilha
g	Constante de acoplamento da interação de contato
f_s	Função de anisotropia cilíndrica
f	Função de anisotropia
f_{Gi}	Função de anisotropia generalizada
ε_{dd}	Parâmetro relativo de interação
μ	Potencial químico
μ_m	Momento de dipolo magnético
μ_e	Momento de dipolo elétrico
a_B	Raio de Bohr
k_B	Constante de Boltzmann
μ_0	Permeabilidade do vácuo
ϵ_0	Permissividade do vácuo
\hbar	Constante de Planck reduzida
μ_B	Magneton de Bohr
G	Unidade de Gauss
r_0	Comprimento característico da separação atômica
R_η	Raio de Thomas-Fermi
σ_η	Comprimento da nuvem condensada
κ_η	<i>Aspect ratio</i> do condensado
λ_η	<i>Aspect ratio</i> da armadilha

λ_{ab}	Comprimento de onda térmico de de Broglie
n	Densidade espacial
V	Potencial de aprisionamento
V_{dd}	Potencial de interação dipolo-dipolo
V_{δ}	Potencial de interação de contato

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN	22
2.1	Estatística de Bose-Einstein	22
2.1.1	<i>Condensação de Bose-Einstein em gases ideais</i>	25
2.2	Condensação de Bose-Einstein em gases alcalinos interagentes	29
2.2.1	<i>Potencial de interação de contato</i>	30
2.2.2	<i>Equação de Gross-Pitaevskii</i>	31
2.2.3	<i>Aproximação de Thomas-Fermi</i>	33
2.2.4	<i>Aproximação gaussiana: o colapso da função de onda</i>	34
3	CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN DIPOLARES	36
3.1	Potencial de interação dipolo-dipolo	36
3.2	Equação de Gross-Pitaevskii não local	40
3.2.1	<i>Aproximação de Thomas-Fermi</i>	41
3.2.2	<i>Aproximação gaussiana: critério de estabilidade</i>	46
4	GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES	48
4.1	Gotículas quânticas: um novo estado líquido de gases bosônicos	48
4.2	Alguns resultados experimentais em gotículas quânticas dipolares	50
4.2.1	<i>Primeira observação experimental de gotículas quânticas dipolares</i>	50
4.2.2	<i>Formação de uma única gotícula autoligada</i>	52
4.2.3	<i>Striped states de gotículas quânticas dipolares</i>	54
4.3	Descrição teórica de gotículas quânticas dipolares	55
4.3.1	<i>Equação de Gross-Pitaevskii estendida</i>	56
4.3.2	<i>Aproximação gaussiana para gotícula quânticas dipolares</i>	59
5	STRIPES DE GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES	64
5.1	Observação experimental de <i>striped states</i> em gotículas quânticas dipolares	64
5.2	Aproximação gaussiana para um sistema de duas gotículas inclinadas	66

5.2.1	<i>Caracterização do modelo</i>	66
5.2.2	<i>Energia total</i>	69
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	71
	REFERÊNCIAS	73

1 INTRODUÇÃO

A física de sistemas ultrafrios vem se estabelecendo como uma das mais versáteis e prolíficas áreas do desenvolvimento científico recente, com descobertas fundamentais que fogem à nossa imaginação. Uma das principais razões pela qual essa área tem sido um tópico bem-sucedido de pesquisa é a sua flexibilidade para estudar a física quântica de muitos corpos. De fato, estudos experimentais desses sistemas vêm permitindo a obtenção de novos estados da matéria, a observação de novas transições de fases não previstas pela teoria clássica e a descoberta de novos efeitos macroscópicos de natureza puramente quântica.

Um exemplo notável de sistema ultrafrio é aquele constituído de uma amostra gasosa de átomos alcalinos bosônicos (BLOCH *et al.*, 2008; LEWENSTEIN *et al.*, 2007; CHIN *et al.*, 2010). Em contraste a esperada cristalização devido à recombinação da interação de três corpos (FEDICHEV *et al.*, 1996b), estes sistemas, auxiliados por técnicas de resfriamento à laser (CHU, 1998; COHEN-TANNOUDJI, 1998; PHILLIPS, 1998) e evaporativo (KETTERLE; DRUTEN, 1996), mantêm-se gasosos mesmo em temperaturas ultrabaixas, da ordem de poucas dezenas de nK , o que os torna um excelente modelo à física quântica de ultrabaixas temperaturas. Foi a partir destes sistemas, por exemplo, combinando ambas as técnicas de resfriamento com o uso da ressonância de Feshbach, que um novo estado da matéria com características típicas de superfluidez, o condensado de Bose-Einstein, foi observado em 1995 (ANDERSON *et al.*, 1995; DAVIS *et al.*, 1995; BRADLEY *et al.*, 1995), laureando C. Wieman, E. Cornell e W. Ketterle com o Nobel de física de 2001.

A ocorrência desse estado é uma manifestação macroscópica da chamada natureza quântica da matéria, sendo que outras manifestações desta natureza são a supercondutividade no Hg (DELFT; KES, 2010) e a superfluidez do ^4He (ALLEN; MISENER, 1938; KAPITZA, 1938), observada pioneiramente por P. Kapitza, J. Allen e D. Misener quando resfriaram uma amostra líquida de ^4He a temperaturas abaixo do valor crítico de $T = 2,7\text{ K}$ (chamado de ponto λ). Este último atribui ao ^4He a propriedade de escoar sem perda de energia por viscosidade (ALLEN; JONES, 1938). A explicação deste fenômeno até hoje não recebeu um formalismo teórico convincente e completo, apesar de serem inúmeras as evidências de que ele esteja associado com a condensação de Bose-Einstein

(LONDON, 1938)¹.

Graças ao seu potencial científico e tecnológico a CBE tem sido explorada por décadas desde a sua observação experimental e muitos problemas e principalmente as consequências de sua observação já foram apresentadas em diversos contextos. Apesar da sua observação experimental datar de 1995, no entanto, é de se ressaltar a formulação teórica destes sistemas é muito anterior à descoberta da superfluidez no ^4He , ou mesmo de uma formulação final da teoria quântica. A primeira formulação destes sistemas apareceu ainda no início da década de 1920, quando o físico indiano S. Bose introduziu uma maneira diferente de contar microestados da que era habitual na mecânica estatística clássica (BOSE, 1924) e A. Einstein estendeu este trabalho para incluir gases massivos, uniformes, e não interagentes, resultando na famosa distribuição de Bose-Einstein (EINSTEIN, 1924; EINSTEIN, 1925)

Baseado nessa distribuição a CBE é definida como sendo a manifestação de uma ocupação macroscópica de partículas no estado de mais baixa energia do sistema, levando à coerência da função de onda neste estado. Neste ponto, as partículas neste estado específico contribuem termodinamicamente de forma diferente das demais, mudando o comportamento do sistema como um todo. Para o condensado obtido com átomos de ^{87}Rb (ANDERSON *et al.*, 1995), essa população era da ordem de $2,5 \times 10^6$ átomos no estado fundamental do sistema, e foi atingida quando em temperatura de 170×10^{-9} K, confirmando a previsão de Einstein.

É de se ressaltar, entretanto, que embora a função de distribuição de Bose-Einstein preveja a CBE de átomos alcalinos, ela não descreve precisamente a sua observação experimental, em que as interações atômicas desempenham um papel central (CORNELL; WIEMAN, 2002). Felizmente, uma vez que a grande maioria das partículas estão no estado fundamental do gás, uma teoria precisa desses experimentos pode concentrar-se somente nesse estado, desprezando qualquer efeito de uma possível fração não condensada de partículas. Essas teorias foram desenvolvidas ainda entre as décadas de 1940 e 1960 (LANDAU, 1941; BOGOLYUBOV, 1947; MATSUBARA, 1951; FEYNMAN, 1953; PENROSE; ONSAGER, 1956; HUANG; YANG, 1957; LEE *et al.*, 1957) e se resumem em uma

¹ Apesar dos seminais trabalhos de L. Tisza (TISZA, 1938), L. Landau (LANDAU, 1941), N. Bogoliubov (BOGOLYUBOV, 1947), T. Matsubara (MATSUBARA, 1951), R. Feynman (FEYNMAN, 1953), O. Penrose e L. Onsager (PENROSE; ONSAGER, 1956), entretanto, hoje sabe-se que apenas cerca de 7% dos átomos de ^4He compõem o condensado de Bose-Einstein (GLYDE, 2013), embora toda a amostra seja superfluida.

única equação: a equação de Gross-Pitaevskii.

A EGP é devida aos trabalhos independentes de E. Gross (GROSS, 1961) e L. Pitaevskii (PITAEVSKII, 1961) e assemelha-se à equação Schrödinger, mas com um termo não linear devido ao potencial de interação atômica. Ela é inteiramente fundamentada na aproximação de campo médio, o que significa que a ação sentida por uma determinada partícula devido ao resto é substituída pela ação de um campo médio sobre a partícula e vem sendo aplicada nos mais variados contextos envolvendo CBEs. Um exemplo típico de uso se dá no estudo da estabilidade do condensado, onde soluções numéricas indicam um colapso da função de onda do sistema, num fenômeno semelhante ao colapso de estrelas de nêutrons (DONLEY *et al.*, 2001).

Embora a EGP represente um formalismo poderoso e flexível para a dinâmica da CBE, ao longo dos últimos cinco anos, o interesse nesses sistemas tem se concentrado na física “além de campo médio”, por exemplo, na situação em que flutuações quânticas estão presentes. Tais flutuações quânticas mudam consideravelmente a física da CBE e são responsáveis pela surpreendente observação experimental, de 2016, em CBEs de gases dipolares: a observação de gotículas quânticas dipolares (KADAU *et al.*, 2016; FERRIER-BARBUT *et al.*, 2016), que se mostraram estáveis mesmo na ausência de uma armadilha de confinamento (SCHMITT *et al.*, 2016; FERRIER-BARBUT *et al.*, 2016).

Estes condensados dipolares são formados a partir de amostras gasosas de elementos com um forte momento de dipolo magnético, μ_m , tais como o ^{164}Dy com $\mu_m = 10\mu_B$ (magnetons de Bohr), e logo se tornaram um ramo de pesquisa próprio dentro de gases ultrafrios. A primeira manifestação da CBE nesses elementos foi em 2005 com átomos de ^{52}Cr (GRIESMAIER *et al.*, 2005) e desde então diversos outros elementos têm sido levados a esse regime de condensação dipolar. Um exemplo notável é do ^7Li , que embora apresente um momento dipolar pequeno quando comparado ao do ^{164}Dy , tem ainda assim sido levado a esse regime de condensação dipolar por meio do uso da ressonância de Feshbach (POLLACK *et al.*, 2009).

A interação devida aos momentos de dipolo tem atraído a atenção dos físicos ao longo dos anos e é particularmente atraente por ser anisotrópica e de longo alcance. Para se ter uma ideia dos efeitos físicos já observados em CBEs devidos à essa interação, podemos citar a explosão do tipo Bose nova com simetria de ondas-d (LAHAYE *et al.*, 2008; LEWENSTEIN, 2008) e o efeito de magnetostricção sugerido em CBEs de ^{52}Cr

(LAHAYE *et al.*, 2007; STUHLER *et al.*, 2005; GIOVANAZZI *et al.*, 2006a) e observado em experimento recente com ^{164}Dy (WENZEL *et al.*, 2017).

A existência de gotículas quânticas nesses sistemas dipolares² não era esperada pela teoria de campo médio correspondente que previa, isso sim, o colapso do condensado nos regimes do experimento. Essa observação logo desencadeou uma variedade de contribuições teóricas e experimentais a fim de descrever as propriedades dessas gotículas, e o resultado foi a inequívoca demonstração de que as flutuações quânticas constituem como o mecanismo base no seu processo de formação (FERRIER-BARBUT *et al.*, 2016; FERRIER-BARBUT *et al.*, 2016; WÄCHTLER; SANTOS, 2016; BAILLIE *et al.*, 2016).

Até o momento, no entanto, todos esses trabalhos teóricos envolvem um arranjo em que o campo magnético aponta em uma das três direções da armadilha de aprisionamento. Não obstante, em resultados experimentais recentes a influência da orientação do campo tem sido testada e os resultados demonstram um novo tipo de transição em gases bosônicos ultrafrios: a formação de *striped states* (WENZEL *et al.*, 2017; TANZI *et al.*, 2018).

Esses novos estados reservam semelhanças com os estados observados no ^3He (KIM; CHAN, 2004), o que levanta a questão da possibilidade da observação de supersólidos a partir desses sistemas. De fato, estudos teóricos recentes (BOMBIN *et al.*, 2017; BÖTTCHER *et al.*, 2019; ROCCUZZO; ANCILOTTO, 2019) vêm sugerindo esses *striped states* como candidatos ideais ao estudo desses exóticos estados, que unem propriedades de sólidos e superfluidos em uma só substância. Todos esses trabalhos consideram ainda, no entanto, um campo magnético de orientação fixa. Nesta monografia, propomos um formalismo para campos arbitrariamente orientados.

Estrutura desta monografia

A divisão desta monografia é feita com o propósito de apresentar a evolução nos estudos sobre gases bosônicos ultrafrios. O início é dado no Cap. 2, onde apresentamos função de distribuição de Bose-Einstein de um gás bosônico ideal e estudamos as respectivas CBEs para o caso de um gás livre e aprisionado por um potencial externo. Neste capítulo ainda, apresentamos a CBE de átomos alcalinos onde primeiro introduzimos o potencial

² Até agora, gotículas quânticas (dipolares) têm sido observadas unicamente a partir de átomos de ^{164}Dy (KADAU *et al.*, 2016; FERRIER-BARBUT *et al.*, 2016) e ^{166}Er (CHOMAZ *et al.*, 2016). É de se ressaltar, entretanto, que gotículas também têm sido observadas de átomos não dipolares, por meio de misturas bosônicas (CABRERA *et al.*, 2018; SEMEGHINI *et al.*, 2018; CHEINEY *et al.*, 2018).

de interação dominante nesses sistemas para depois deduzir, através de um procedimento variacional, a equação de Gross-Pitaevskii. Baseados nesta equação aplicamos a chamada aproximação de Thomas-Fermi para obter uma solução do perfil de densidade do condensado e utilizamos a aproximação gaussiana para estudar o seu critério de estabilidade.

Dando continuidade, no Cap. 3 introduzimos os chamados condensados de Bose-Einstein dipolares. Estes sistemas são produzidos a partir de elementos dipolares, que são caracterizados por um potencial de interação dipolo-dipolo de longo alcance e anisotrópico. Assim, logo após discutir sobre as características desse potencial dipolar, deduzimos a nova equação de Gross-Pitaevskii, novamente utilizando um procedimento variacional. De posse dessa nova equação, aplicamos novamente a aproximação de Thomas-Fermi e a aproximação gaussiana e discutimos a influência do potencial dipolar na física da CBE.

No Cap. 4, apresentamos o que há de mais recente no estudo de gases bosônicos ultrafrios: as gotículas quânticas. No primeiro tópico desta seção um tratamento mais geral é dado sobre esses sistemas, onde também caracterizamos as gotículas de misturas bosônicas não dipolares. Em seguida, um estudo mais específico para gotículas dipolares é continuado, onde discutimos os principais resultados tanto do ponto de vista experimental quanto teórico. Neste capítulo ainda, introduzimos os *striped states*, tema central desta monografia.

O Cap. 5 conta com a nossa proposta de modelo teórico para *striped states* de gotículas quânticas dipolares. Este modelo é baseado em uma aproximação gaussiana e é apresentado logo após uma breve discussão sobre os resultados experimentais que comprovaram a existência desses estados. Ressalvamos que este modelo está em fase de implementação e, portanto, não se constitui, ainda, como um resultado final.

Por fim, no Cap. 6, apresentamos as conclusões desta monografia e damos as perspectivas de resultados e trabalhos futuros, enquanto no Apêndice A apresentamos os detalhes da função que figura na energia total obtida com o nosso modelo.

2 CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN

Este capítulo é dedicado a uma breve revisão teórica da CBE, apresentando os principais tópicos acerca do assunto. Sendo assim, o capítulo inicia introduzindo o tratamento estatístico quântico para bósons. Esta estatística é desenvolvida dentro do formalismo grande canônico onde derivamos a função de distribuição de Bose-Einstein e obtemos a partir daí a temperatura de transição de CBE para gases bosônicos ideais livres e confinados.

Tendo apresentado um estudo da CBE de gases ideais, ou seja, sem interação, apresentamos em seguida um estudo que leva em consideração a presença de interações entre dois átomos. Neste primeiro momento, no entanto, a interação considerada consiste apenas naquela entre colisões binárias de átomos alcalinos. A partir do uso deste potencial deduzimos, através de um procedimento variacional, a EGP, que define a dinâmica do condensado, e finalmente apresentamos duas aproximações úteis para obter o perfil de densidade do condensado e o seu critério de estabilidade.

2.1 Estatística de Bose-Einstein

Para iniciar o estudo da CBE em gases ideais, começamos apresentando a estatística que descreve o comportamento de um conjunto de N bósons, partículas que possuem número de *spin* inteiro. Esta estatística é devida aos trabalhos pioneiros de Bose (BOSE, 1924) e Einstein (EINSTEIN, 1924; EINSTEIN, 1925) e para derivar a função de distribuição associada utilizamos o fato de que a função de onda do sistema, designada por:

$$\Psi \equiv \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ representa a posição da partícula i em função das coordenadas cartesianas (x, y, z) , é invariante sobre a troca de partículas (REIF, 2009; SALINAS, 1997), o que conduz à seguinte condição:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_N) = +\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (2.2)$$

Esta condição é resultado das propriedades intrínsecas dos bósons e implica que um estado quântico associado a uma configuração dada fica completamente caracterizado pelo conjunto de números $\{n_j\}$, onde n_j é o número de partículas no orbital j . Assim,

uma vez que é interessante saber apenas o número de partículas em cada estado, temos que não há restrição sobre a conservação do número total de partículas, o que nos permite utilizar o formalismo do *ensemble* grande canônico no que se segue.

Considere então um sistema de volume V , com temperatura fixa T e potencial químico μ , também fixo. Para este sistema a energia total $E\{n_j\}$ e número total de partículas $N\{n_j\}$, correspondentes ao estado quântico $\{n_j\}$, são representados por

$$E\{n_j\} = \sum_j \varepsilon_j n_j, \quad (2.3)$$

$$N\{n_j\} = \sum_j n_j, \quad (2.4)$$

em que ε_j designa o valor da energia no orbital j . Logo, temos que a função de partição grande canônica, $\mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}(T, V, \mu)$, para um gás ideal é escrita como (REIF, 2009; SALINAS, 1997):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{\{n_j\}} e^{-\beta \sum_j (\varepsilon_j - \mu) n_j} \\ &= \prod_j \sum_n e^{\beta(\varepsilon_j - \mu)n}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Aqui, $\beta = 1/k_B T$ é uma constante relacionada com a temperatura T e com a constante de Boltzmann k_B . Além disso, o somatório na variável muda n varia até o número total de partículas. Consequentemente, no limite em que $N \rightarrow \infty$, para o qual o somatório é avaliado pela série geométrica¹, tem-se que a função de partição reduz-se a

$$\mathcal{Z} = \prod_j \left(1 - e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)}\right)^{-1}. \quad (2.6)$$

Lembrando agora que o valor esperado do número de partículas por orbital é dado por:

$$\langle n_j \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \varepsilon_j}, \quad (2.7)$$

¹ Para chegar na expressão da série geométrica e, portanto, avaliar a somatória envolvida, considere a seguinte manipulação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{\ln(x)n} = \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=0}^{\infty} e^{yn} \Big|_{y=\ln x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

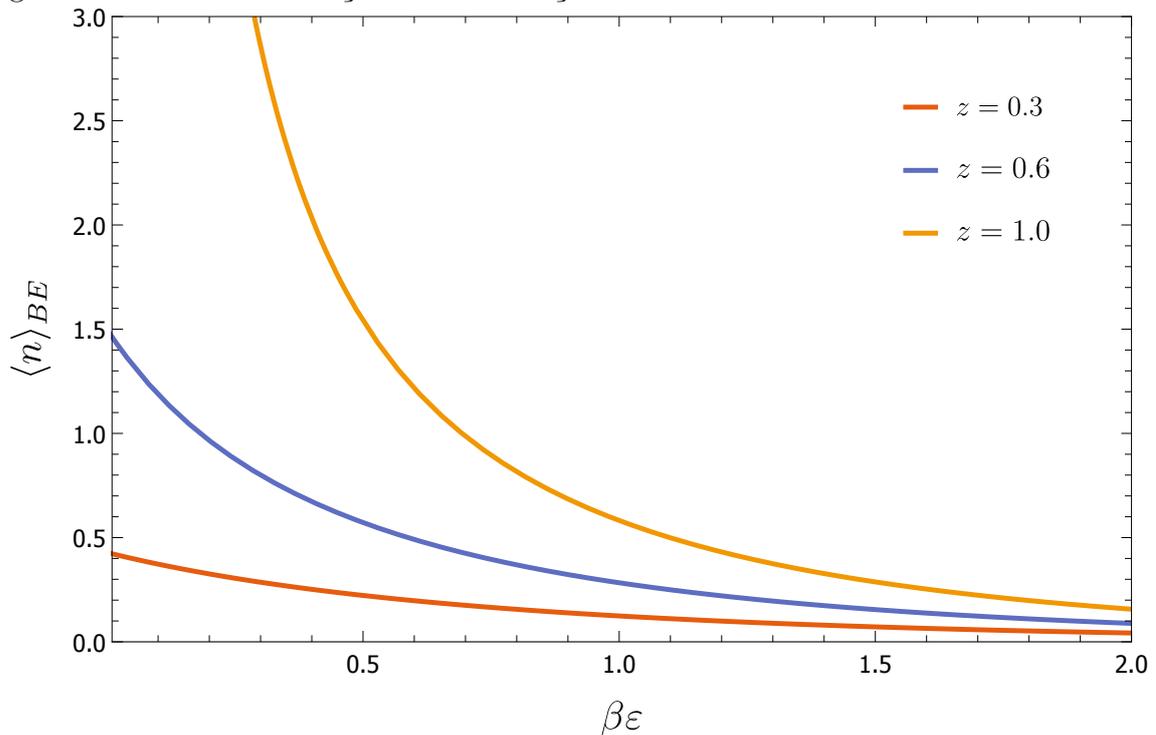
tem-se que a função de distribuição de Bose-Einstein para um dado nível de energia ε_j assume a forma:

$$\langle n_j \rangle_{BE} = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon_j} - 1}, \quad (2.8)$$

em que $z \equiv e^{\beta\mu}$ define a fugacidade da distribuição. Note que esta distribuição assume valores positivos apenas para $0 < z \leq 1$, o que implica que $\mu < 0$. Consequentemente, não faz sentido para o potencial químico assumir valores positivos.

Uma consequência notável da função (2.8) acontece para $z \rightarrow 1$. Como pode ser observado na Fig. 1, nesse limite tem-se que a ocupação do menor orbital torna-se macroscópica, dando origem a CBE. Este limite garante, portanto, a condição de CBE e é usado, no que se segue, para derivar a temperatura de transição da condensação.

Figura 1 – Gráfico da função de distribuição de Bose-Einstein



Fonte: Elaborado pelo autor. O gráfico descreve o número esperado de partículas para diferentes valores de fugacidade na distribuição de Bose-Einstein. Note que, para $z \rightarrow 1$, o valor esperado correspondente diverge, indicando uma ocupação macroscópica do estado.

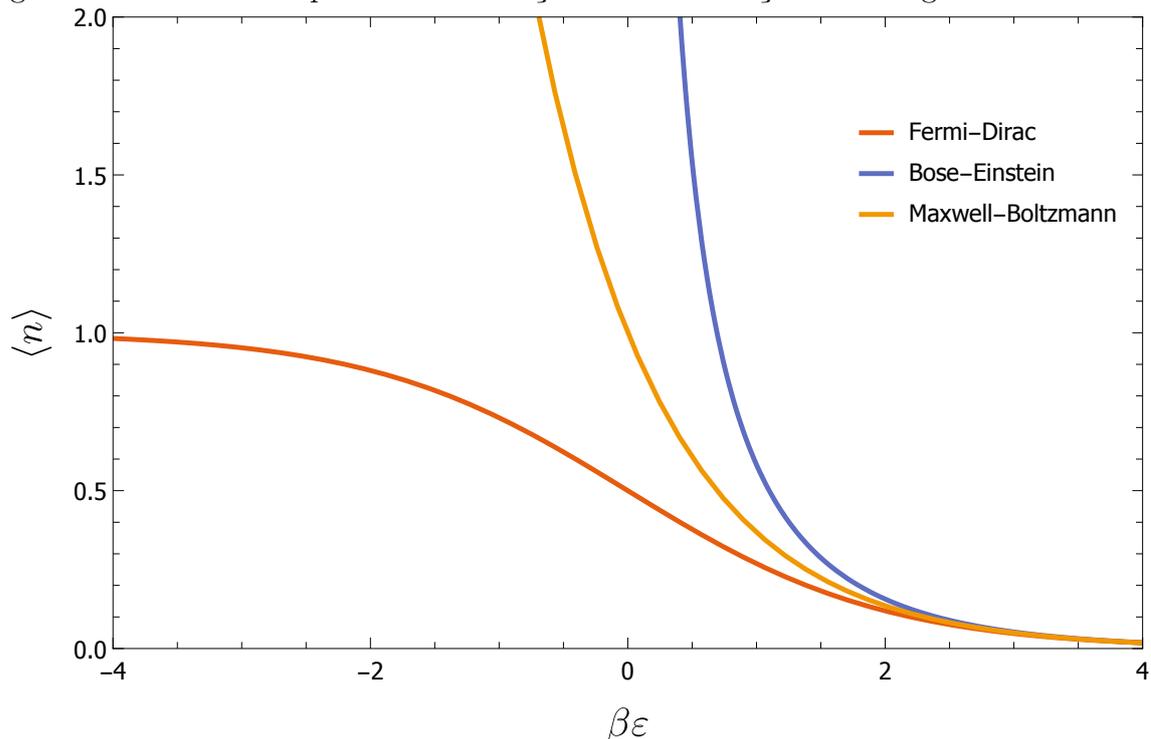
Antes, entretanto, notamos que uma outra estatística, com função de distribuição semelhante à (2.8), também pode ser obtida a partir da condição acima. Esta estatística descreve o comportamento de férmions, partículas com *spin* semi-inteiro, e pode ter o número de ocupação variando entre 0 e 1. Um procedimento análogo ao feito para obter (2.8) permite escrever a função de distribuição nessa estatística de Fermi-Dirac

como:

$$\langle n_j \rangle_{FD} = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_j} + 1}. \quad (2.9)$$

Para comparar o comportamento de (2.8) e (2.9), plotamos estas funções na Fig. 2, junto com a distribuição de Maxwell-Boltzmann, recuperada de (2.8) ou de (2.9) no limite de altas temperaturas (REIF, 2009).

Figura 2 – Gráfico comparativo das funções de distribuições de um gás ideal



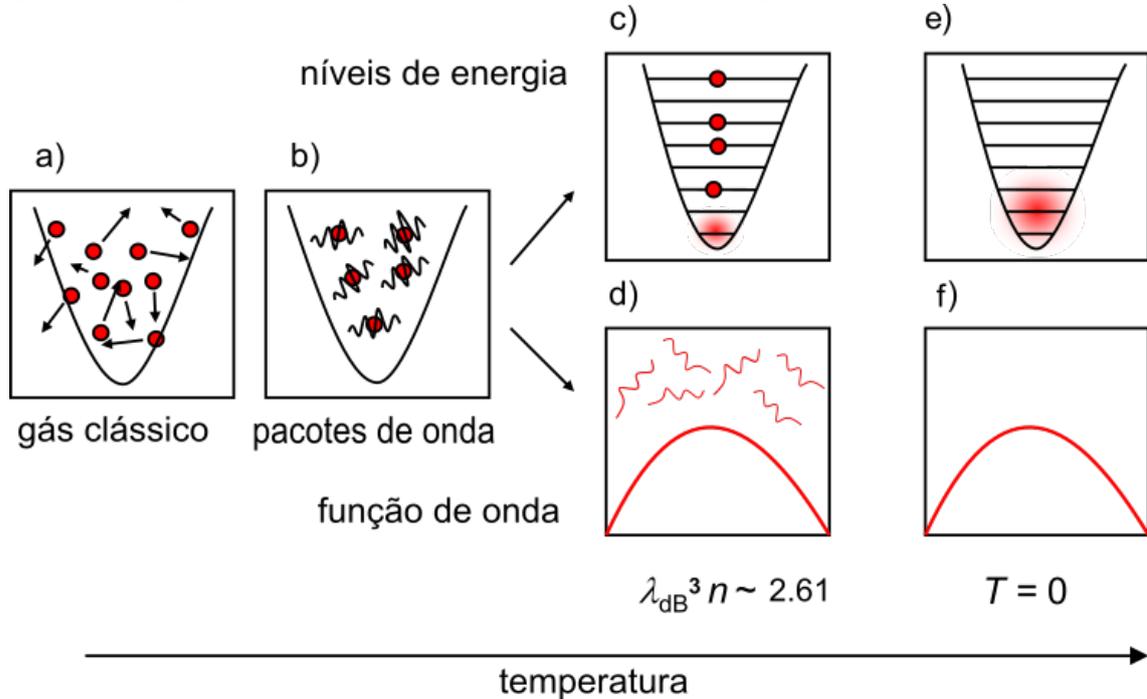
Fonte: Elaborado pelo autor. Observe que para valores grande de $\beta\epsilon$ todas as distribuições apresentam o mesmo comportamento.

2.1.1 Condensação de Bose-Einstein em gases ideais

Tendo obtido a função de distribuição de Bose-Einstein, passamos agora ao estudo da sua principal consequência: a CBE. Antes, porém, considere a seguinte visão qualitativa do processo de condensação esquematizada na Fig. 3. Nessa esquematização vemos, Fig. 3a, que os átomos de um gás a altas temperaturas podem ser considerados como bolas de bilhar. Nesse regime a estatística dominante é aquela descrita pela função de distribuição de Maxwell-Boltzmann, cujo o comportamento é plotado na Fig. 2. Na medida em que o gás é resfriado, entretanto, o postuldo onda-matéria de de Broglie torna-se evidente (KETTERLE, 2007). Consequentemente, os átomos deixam de ser

tratados como bolas de bilhar para serem vistos como pacotes de onda com comprimento de onda (término de de Broglie) $\lambda_{dB} \equiv \sqrt{2\hbar/Mk_B T}$, em que \hbar é a constante de Planck reduzida e M designa a massa atômica.

Figura 3 – Figura esquemática do processo da condensação de Bose-Einstein



Fonte: Adaptado de JOCHIM (2004). A figura exprime o comportamento de um gás bosônico típico em função da temperatura. a) A altas temperaturas o gás comporta-se classicamente e é descrito pela estatística de Maxwell-Boltzmann. b) À medida que a temperatura diminui, efeitos ondulatórios são manifestados, tal que o gás deve agora ser tratado pela estatística quântica. c) Representação do níveis de energia no ponto de saturação dos estados excitados. d) Neste ponto, devido ao caráter indistinguível das partículas bosônicas, uma única função de onda macroscópica é capaz de descrever as partículas do estado fundamental. Para $T \ll T_c$, entramos no regime de condensado ideal, onde e) todas as partículas estão “condensadas” no estado fundamental e f) uma única função de onda macroscópica descreve todas as partículas do sistema.

Para uma temperatura crítica $T = T_c$ a distância média entre os átomos torna-se comparável a λ_{dB} , dando origem a uma sobreposição de todas as ondas de de Broglie (Fig. 3d). É nesse instante que a ocupação macroscópica no estado fundamental ocorre (Fig. 3c), criando, assim, o CBE. No que se segue, derivamos a expressão analítica desta temperatura crítica para o caso de condensados livres e confinados.

Condensação em gases livres

Para derivar a temperatura de transição de um gás livre, considere o número

termodinâmico de partículas N , dado através de (2.8) como:

$$N = \sum_j \langle n_j \rangle_{BE} = \sum_j \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_j} - 1}. \quad (2.10)$$

Aqui, $\varepsilon_j = \hbar^2 k^2 / 2M$ corresponde aos autovalores de energia com \mathbf{k} sendo o vetor comprimento de onda. De forma a evitar a complexidade envolvida nessa somatória, considere ainda a substituição dessa soma por uma integral através da introdução da densidade de estados de energia $g(\varepsilon)$, ou seja,

$$\sum_j \rightarrow \int_0^\infty g(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.11)$$

Esta transformação é atribuída a Einstein (EINSTEIN, 1925) e é justificada pelo chamado limite termodinâmico, onde $N, V \rightarrow \infty$ com a densidade N/V mantida constante.

Para resolver a integral associada à transformação (2.11) precisamos primeiro obter uma expressão analítica de $g(\varepsilon)$. Para isso, seja $G(\varepsilon)$ o número total de estados do sistema, para o qual se tem $g(\varepsilon) = \frac{\partial G(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$ (REIF, 2009). Este número é definido segundo a relação,

$$G(\varepsilon) = \int \frac{d^3 r d^3 p}{(2\pi)^3} \cdot \Theta[\varepsilon - H(\mathbf{r}, \mathbf{k})], \quad (2.12)$$

em que $\Theta(x) \equiv \frac{d}{dx} \max\{x, 0\}$ é a função de Heaviside com $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ a Hamiltoniana clássica associada ao sistema. No caso de gás um gás livre, que tem Hamiltoniana dada simplesmente pela energia cinética das partículas de momento $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, segue que:

$$G(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3 p \cdot \Theta\left[\varepsilon - \frac{\mathbf{p}^2}{2M}\right] = \frac{V}{\pi^2} \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{M}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{3/2}. \quad (2.13)$$

Obtida a expressão para $G(\varepsilon)$ é possível encontrar o valor da densidade $g(\varepsilon)$. A substituição desse valor na Eq. (2.10) com a transformação (2.11) e tomando o máximo valor que μ pode assumir, ou seja, tomar $z \rightarrow 1$ (condição de condensação), leva então na seguinte expressão para N/V :

$$\frac{N}{V} = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{dB}^c}\right)^3 \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \quad (2.14)$$

em que λ_{dB}^c é associada com a temperatura crítica T_c . Além disso, $\zeta(x) \equiv \sum_{y=1}^\infty y^{-x}$ representa a função zeta de Riemann com $\zeta(3/2) \approx 2.621$.

Para obter o resultado acima² foi conveniente fazer o número de partículas N_0 na fase condensada igual a zero. Partindo deste resultado, conclui-se que a temperatura crítica de condensação de um sistema livre, resolvendo (2.14) para λ_{dB}^c e isolando T_c a partir daí, é dada por:

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{Mk_B} \left[\frac{N}{V\zeta(3/2)} \right]^{2/3}. \quad (2.15)$$

Consequentemente, voltando à expressão original (2.10), é possível obter a fração de partículas que se encontram no condensado. Este número é expresso pela fração N_0/N e é encontrada como se segue:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, \quad (2.16)$$

onde notamos que $N_0 \rightarrow N$ para $T \rightarrow 0$ e $N_0 \rightarrow 0$ para $T \rightarrow T_c$.

Condensação em gases confinados

Tendo apresentado um estudo da CBE em gases ideais livres, considere agora uma situação mais realista em que o gás é aprisionado por um potencial externo. A presença desse potencial externo é de fundamental importância para que a CBE possa ser experimentalmente observada, visto que, de outra forma, é impossível obter um estado coerente (CORNELL; WIEMAN, 2002).

Para iniciar o estudo desses sistemas confinados, considere o caso típico de um potencial externo do tipo harmônico, dado por (GRIMM *et al.*, 2000):

$$V_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{M}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (2.17)$$

em que $\mathbf{r} = (x, y, z)$ é o vetor posição em coordenadas cartesianas e ω_η corresponde à frequência de oscilação em cada direção ordenada com $\eta = x, y, z$. Normalmente, este potencial confinante é produzido de um campo magnético externo tal que ω_η é a frequência de oscilação desse campo em torno da sua posição de mínimo (PETHICK; SMITH, 2008; PITAEVSKII; STRINGARI, 2016).

² A integral que dá o resultado (2.13) pode ser avaliada pela função zeta ζ e pela função Gamma Γ segundo a condição:

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^{1/2} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^\infty n^{-3/2} \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx \equiv \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Uma primeira consequência da presença do potencial (2.17) pode ser observada nos autovalores de energia do sistema, que são agora dados por:

$$\varepsilon_j = \sum_{\eta=x,y,z} \left(n_\eta + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_\eta, \quad (2.18)$$

onde n_η indica o número quântico principal que pode ser zero ou inteiro positivo. Sendo assim, a quantidade $G(\varepsilon)$ é agora escrita como:

$$G(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{6(\hbar\bar{\omega})^3}, \quad (2.19)$$

para $\bar{\omega} \equiv (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ designando a frequência de oscilação média, tal que a densidade de estado assume a forma simples $g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2(\hbar\bar{\omega})^3}$. Consequentemente, substituindo este parâmetro na Eq. (2.10), com todas as considerações até (2.15), finalmente resulta na seguinte expressão para N :

$$N = \frac{\zeta(3)}{\beta(\hbar\bar{\omega})^3}, \quad (2.20)$$

com $\zeta(3) \approx 1.202$.

Assim, partindo dessa expressão, conclui-se que a temperatura crítica de condensação para um gás confinado em um potencial harmônico genérico é dado por:

$$T_c = \frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}, \quad (2.21)$$

o que leva a uma fração de partículas na fase condensada da forma:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3, \quad (2.22)$$

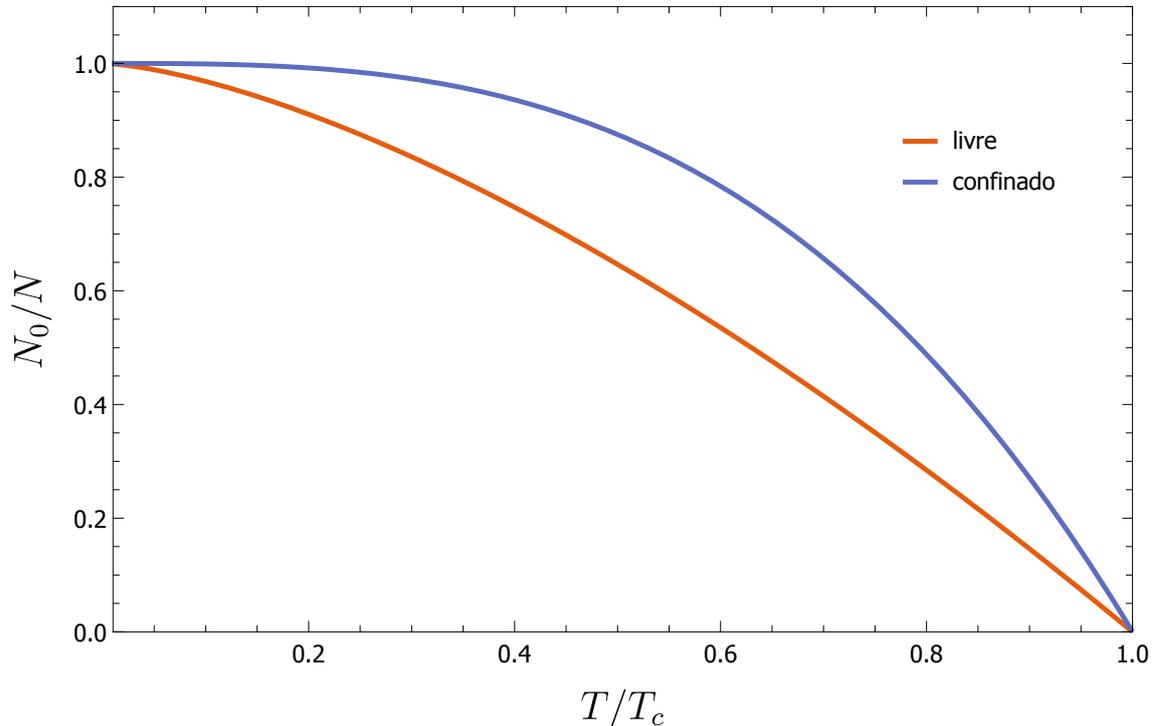
que é semelhante à temperatura (2.15), porém, com diferença na dependência com a temperatura.

Para apreciar melhor a consequência da presença do potencial externo (2.17), considere o gráfico da Fig. 4, onde plotamos em comparativo as frações de partículas na fase condensada. Nessa figura vemos que os gráficos apresentam o mesmo comportamento assintótico para $T \rightarrow 0$ e $T \rightarrow T_c$, mas são crucialmente diferentes para qualquer outra temperatura.

2.2 Condensação de Bose-Einstein em gases alcalinos interagentes

Até aqui temos apresentado um estudo da CBE de um gás bosônico ideal, ou seja, sem interação. Apesar de gases bosônicos em temperaturas ultrabaixas se aproximarem

Figura 4 – Gráfico da ocupação média de partículas no estado fundamental de um gás ideal



Fonte: Elaborado pelo autor.

bastante de uma situação ideal, tem-se mostrado ao longo dos anos que as interações atômicas desempenham um papel importante na física da CBE (CORNELL; WIEMAN, 2002). Esta seção é dedicada a um breve estudo dessas consequências para o caso da interação típica presente em átomos alcalinos. Uma análise mais completa pode ser encontrada nos livros de revisão das Refs. (PETHICK; SMITH, 2008; PITAEVSKII; STRINGARI, 2016).

2.2.1 *Potencial de interação de contato*

Para iniciar o estudo da CBE desse sistemas interagentes devemos então primeiro introduzir o potencial que rege a interação nesses sistemas. Por questões de simplicidade, entretanto, não derivamos este potencial aqui, restando-nos apenas apresentar uma análise qualitativa de sua origem.

Para começar, seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ a posição relativa em relação ao centro de massa de um sistema com dois átomos idênticos de massa M . Da teoria das colisões, sabemos que o potencial de interação que descreve esse sistema é central e é, frequentemente, considerado ser independente do tempo. Nessa situação, o potencial mais simples descrevendo o sistema é do tipo Van der Waals, que possui uma parte atrativa ($\propto r^{-6}$) devido aos momentos

de dipolo induzidos e uma parte repulsiva ($\propto r^{-12}$) devido à repulsão eletrostática. Logo, deve existir um comprimento característico mínimo, r_0 , para o qual, no limite de $T \rightarrow 0$, a distância média entre dois átomos é muito maior que este mínimo (WEINER, 2003).

A principal consequência da consideração acima é que ela permite usar a primeira aproximação de Born, que garante que a onda espalhada após a colisão difere da incidente apenas pelo ângulo de espalhamento da seção de choque por ondas-s. Consequentemente, o potencial de Van der Waals pode ser substituído por um potencial efetivo proporcional à função delta de Dirac $\delta(\mathbf{r})$ (HUANG; YANG, 1957; LEE *et al.*, 1957; WEINER *et al.*, 1999):

$$V_\delta(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{M} \delta(\mathbf{r}), \quad (2.23)$$

em que a_s é comprimento de espalhamento da onda-s frequentemente agrupada pela constante $g = 4\pi\hbar^2 a_s / M$, denominada de constante de acoplamento.

Pelo potencial (2.23), conclui-se que a interação é de curto alcance e isotrópica. Além disso, uma outra característica interessante diz respeito ao seu sinal, que pode ser tanto positivo, quando $g > 0$, correspondendo a um CBE repulsivo, quanto negativo, para $g < 0$, correspondendo a um CBE atrativo. Esta modulação de g pode ser induzida por um processo baseado no uso da ressonância de Feshbach (CHIN *et al.*, 2010; INOUE *et al.*, 1998; FEDICHEV *et al.*, 1996a; THEIS *et al.*, 2004) e desempenha um papel importante nas propriedades da CBE (ANDREWS *et al.*, 1997; MADISON *et al.*, 2000; BILLY *et al.*, 2008; MEWES *et al.*, 1996; GREINER *et al.*, 2002). Para CBEs de átomos de ^7Li , por exemplo, é mostrado que na situação em que $g < 0$ o colapso da função de onda ocorre a partir de um certo valor crítico do número de partículas (BRADLEY *et al.*, 1995).

2.2.2 Equação de Gross-Pitaevskii

Tendo apresentado o potencial que define a interação em condensados alcalinos, exploramos agora as consequências desse potencial na física da CBE. Devido às múltiplas interações binárias presentes no condensado, entretanto, estes sistemas são ligeiramente mais complicados. Felizmente, devido aos trabalhos de Gross (GROSS, 1961) e Pitaevskii (PITAEVSKII, 1961), uma teoria simples baseada em campo médio pode ser aplicada. No que se segue apresentamos uma derivação da equação principal dessa teoria: a EGP.

Para derivar a EGP utilizamos aqui um procedimento variacional baseado na

construção da seguinte lagrangiana (PETHICK; SMITH, 2008):

$$L[\Psi] = \frac{i\hbar}{2} \int \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) d^3r - E[\Psi], \quad (2.24)$$

com $E[\Psi]$ designando o funcional que determina a energia total do sistema, dado por:

$$E[\Psi] = \int d^3r \left[-\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{g}{2} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^4 \right]. \quad (2.25)$$

Aqui, o primeiro termo corresponde à energia cinética do condensado, o segundo é a contribuição da energia devido ao confinamento e o terceiro é responsável pela energia de interação. Além disso, $\Psi \equiv \Psi(\mathbf{r}, t)$, a função de onda do condensado no instante t , deve ser entendida como um parâmetro de ordem.

Para mostrar que essa lagrangiana gera a EGP, considere agora a seguinte ação total do sistema:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L[\Psi], \quad (2.26)$$

onde t_1 e t_2 são os extremos temporais. Variando esta quantidade em termos de $\Psi(\mathbf{r}, t)$, por exemplo, e usando a condição de extremização $\delta\Psi(\mathbf{r}, t_1) = \delta\Psi(\mathbf{r}, t_2) = 0$, tem-se como resultado que a variação da ação é dada por (WEINSTOCK, 1974; FOX, 1987)³:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 - V_{ext}(\mathbf{r}) - g|\Psi|^2 \right] \Psi \delta\Psi. \quad (2.27)$$

Consequentemente, pela arbitrariedade de $\delta\Psi$ conclui-se que:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.28)$$

que é a equação de Gross-Pitaevskii dependente do tempo, válida apenas no limite em que $T \rightarrow 0$ e para sistemas tridimensionais, que garante a forma do potencial (2.23) (PITAEVSKII; STRINGARI, 2016).

Frequentemente é mais conveniente trabalhar com a versão estacionária da Eq. (2.28). Esta equação também pode ser obtida por meio de um procedimento variacional a partir da variação do funcional de energia (2.25), mas com um termo adicionado responsável

³ Do cálculo variacional (WEINSTOCK, 1974; FOX, 1987) tem-se que a variação de uma determinada quantidade é dada pela expressão:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} \delta\Psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} \delta\dot{\Psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \Psi)} \delta(\nabla \Psi) \right],$$

em que \dot{x} representa a derivada temporal de x e \mathcal{L} representa a densidade desta quantidade, tal que $L[\Psi] = \int \mathcal{L} d^3r$.

pela conservação do número de partículas. Este termo é proporcional ao potencial químico μ e a variação correspondente fica:

$$\frac{\delta}{\delta\psi} \left[-\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + V_{ext}(\mathbf{r})|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{g}{2} |\psi(\mathbf{r})|^4 - \mu|\psi(\mathbf{r})|^2 \right] = 0 \quad (2.29)$$

que conduz à EGP independente do tempo:

$$\mu\psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}). \quad (2.30)$$

Vale a pena notar que nessa equação os autovalores são dados pelo potencial químico, e não pela energia como é o caso da equação de Schrödinger. Além disso, ela, como também a (2.28), são ambas não lineares com o termo não linear devido à interação. Conseqüentemente, obter soluções para estas equações é algo muito trabalhoso, mesmo numericamente. No que se segue, entretanto, apresentamos duas aproximações onde quantidades de interesse podem ser obtidas analiticamente. A primeira é chamada de aproximação de Thomas-Fermi, útil para obter o perfil de densidade do condensado, e a segunda, de aproximação gaussiana, útil para determinar um critério de estabilidade.

2.2.3 Aproximação de Thomas-Fermi

Para aplicar a primeira aproximação sugerida, é necessário supor que $g > 0$. Nesta situação, a interação de contato é repulsiva, o que faz com que o átomos do condensado se repilam ao máximo do seu centro, alocando-se nas bordas do potencial de confinamento. Dessa forma, para um sistema com um número N grande de partículas, o perfil de densidade no centro do condensado assume uma curva suave, o que permite negligenciar o termo proporcional à derivada espacial segunda de $\psi(\mathbf{r})$ na Eq. (2.30) referente à energia cinética do condensado.

Negligenciando essa derivada espacial, e resolvendo para a densidade $n(\mathbf{r}) \equiv |\psi(\mathbf{r})|^2$, tem-se, assim, que o perfil de densidade do condensado depende apenas do potencial químico e do potencial de confinamento, isto é,

$$n(\mathbf{r}) = \max \left\{ \frac{\mu - V_{ext}(\mathbf{r})}{g}, 0 \right\}, \quad (2.31)$$

onde $\max\{x_1, x_2\}$ vale x_1 para $x_1 > x_2$ ou x_2 , caso contrário. Assim, para o potencial harmônico (2.17) segue-se que:

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \cdot \max \left\{ 1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2}, 0 \right\}. \quad (2.32)$$

Esta solução concorda com cálculos numéricos da EGP (EDWARDS; BURNETT, 1995) bem como com as observações experimentais (HAU *et al.*, 1998). Nela, n_0 denota a densidade no centro do condensado, enquanto $R_\eta \equiv \sqrt{2\mu/(M\omega_\eta)}$ designa os raios de Thomas-Fermi nos respectivos eixos ordenados. Para obter uma expressão analítica desses raios é preciso primeiro determinar o potencial químico μ que, por sua vez, é obtido da condição de normalização $N = \int n(\mathbf{r}) d^3r$. Resolvendo esta integral para o potencial químico, segue que:

$$\mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left(\frac{15Na_s}{\bar{a}} \right)^{2/5}, \quad (2.33)$$

que, quando substituído em R_η , resulta em

$$R_\eta = 15^{1/5} \left(\frac{Na_s}{\bar{a}} \right)^{1/5} \frac{\bar{\omega}}{\omega_\eta} \bar{a}, \quad (2.34)$$

onde definimos o comprimento característico de oscilação, $\bar{a} \equiv \sqrt{\hbar/M\bar{\omega}}$. Observe que esses raios tornam-se significativamente maiores que \bar{a} apenas na condição em que $\Lambda \equiv Na_s/\bar{a} \gg 1$ é satisfeita. Logo, podemos definir esta relação como a condição de validade da aproximação de Thomas-Fermi (PITAEVSKII; STRINGARI, 2016).

2.2.4 Aproximação gaussiana: o colapso da função de onda

A aproximação de Thomas-Fermi que permitiu obter o perfil de densidade (2.32) foi justificada pela condição de que $g > 0$. Nesta situação tem-se que as partículas do condensado são empurradas para longe de seu centro, levando a uma condição de estabilidade. Em contraste com esta situação, entretanto, tem-se que para um condensado atrativo ($g < 0$) as partículas são empurradas para o seu centro, o que conduz, a partir de um número crítico de átomos, N_c , ao colapso do condensado (RUPRECHT *et al.*, 1995). No que se segue utilizamos a chamada aproximação gaussiana para obter uma expressão analítica de N_c .

Para começar, considere a seguinte função gaussiana como função teste (ansatz) para o funcional de energia da Eq. (2.25):

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{N}{\pi^{3/2}\bar{\sigma}^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right), \quad (2.35)$$

em que σ_η é adotado como um parâmetro variacional com $\bar{\sigma} \equiv (\sigma_x\sigma_y\sigma_z)^{1/3}$. Esta função representa a solução exata do estado fundamental de um problema de oscilador harmônico

e tem sido aplicada com sucesso no estudo das propriedades estáticas (BAYM; PETHICK, 1996; KAGAN *et al.*, 1996) e dinâmicas (PEREZ-GARCIA *et al.*, 1996; PEREZ-GARCIA *et al.*, 1997) de CBEs não dipolares.

A substituição desta função no funcional de energia (2.25) com a consideração de simetria cilíndrica ($\omega_0 \equiv \omega_x = \omega_y = \omega_z$ e $\sigma \equiv \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$), resulta na seguinte energia total:

$$E[\sigma] = N\hbar\omega_0 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\bar{a}^2}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{\bar{a}^2} \right) + \frac{N\bar{a}^2 a_s}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \right]. \quad (2.36)$$

O valor crítico N_c é obtido a partir da condição de mínimo da energia (2.36), o que conduz ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \sigma} &= \frac{\sigma^5}{\bar{a}^5} - \frac{\sigma}{\bar{a}} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{Na_s}{\bar{a}} = 0 \\ \frac{\partial^2 E}{\partial \sigma^2} &= \frac{\sigma^5}{\bar{a}^5} + \frac{3\sigma}{\bar{a}} + \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \frac{Na_s}{\bar{a}} = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Resolvendo este sistema encontra-se que $N_c \approx 0.671\bar{a}/a_s$. Este valor é próximo do resultado experimental obtido ($N_c = 0.574\bar{a}/a_s$) (DALFOVO; STRINGARI, 1996; HOUBIERS; STOOF, 1996), o demonstra a validade do modelo adotado aqui. Um método mais rigoroso, entretanto, pode ser encontrado nas Refs. (RYBIN *et al.*, 2000; SULEM; SULEM, 2007). Neste tratamento, partindo exclusivamente da EGP (2.28), os autores concluíram que, além do número crítico de partículas, a instabilidade do condensado e, conseqüentemente, o colapso também dependem do número de dimensão geométrico do sistema. Nessas condições, os autores concluem que para o potencial de interação (2.23) sempre existirá o colapso para condensados bidimensionais e tridimensionais.

3 CONDENSADOS DE BOSE-EINSTEIN DIPOLARES

No capítulo anterior, apresentamos e discutimos a CBE, desde o modelo simples para um gás ideal até sistemas mais realistas em que as interações desempenham um papel importante. Neste capítulo, nós estendemos estas discussões para a CBE na presença de um novo tipo de interação: a interação entre momentos de dipolo. Sendo assim, neste capítulo aprestamos o sistema estudado, o método utilizado e o detalhamento do processo para obter informações importantes desses chamados CBEs dipolares.

3.1 Potencial de interação dipolo-dipolo

Para iniciar o estudo da CBE dipolar começamos apresentando o sistema que configura esta condensação. Tais sistemas podem ser constituídos de átomos com momento de dipolo magnético μ_m ou moléculas elétricas com momentos de dipolo elétrico μ_e . Exemplos típicos são os condensados de átomos de ^{164}Dy , que possuem $\mu_m = 10\mu_B$ (magnetons de Bohr) ou moléculas de Cianeto de hidrogênio (HCN), para o qual se tem $\mu_e = 3D$ (com D representando a unidade de Debye).

Para estes sistemas o potencial de interação entre dois dipolos idênticos é dado pela expressão:

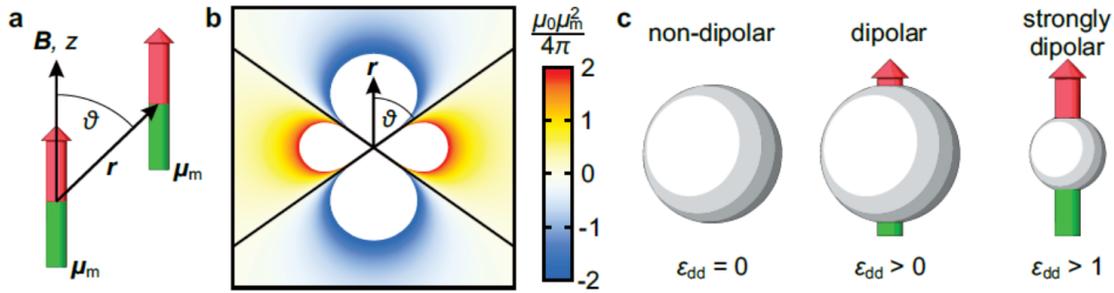
$$V_{dd}(\mathbf{r}) = \frac{C_{dd}}{4\pi} \frac{1 - 3 \cos^2 \vartheta}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (3.1)$$

onde consideramos a situação simples de dipolos todos polarizados em uma direção específica dos eixos ordenados da armadilha de confinamento, com ϑ indicando o ângulo entre essa direção de polarização e o vetor relativo entre os dipolos (veja a Fig. 5a). Além disso, definimos também a contante C_{dd} , que define a natureza dos momentos de dipolo. Para átomos magnéticos esta constante vale $C_{dd} \equiv \mu_0 \mu_B^2$ (com μ_0 sendo a permeabilidade magnética do vácuo), enquanto para moléculas elétricas ela assume a forma $C_{dd} \equiv \mu_e^2 / \epsilon_0$ (com ϵ_0 sendo a permissividade elétrica do vácuo).

Para estimar a interação relativa entre átomos magnéticos e moléculas elétricas, considere a situação típica em que $\mu_e \simeq ea_0$, com e indicando a carga eletrônica e a_0 , o raio de Bohr (LAHAYE *et al.*, 2009; GADWAY; YAN, 2016). Este raio é da ordem de magnitude de um Debye, o que leva a seguinte relação:

$$\frac{\mu_0 \mu_B^2}{\mu_e / \epsilon_0} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\mu_B^2}{e^2 a_0^2}. \quad (3.2)$$

Figura 5 – Propriedades da interação dipolo-dipolo



Fonte: Kadau (2016). A figura ilustra as propriedades da interação dipolo-dipolo. a) Ilustração esquemática da interação entre dois dipolos magnéticos idênticos polarizados na direção z por um campo magnético \mathbf{B} . b) Plote de V_{dd} como função da distância r e do ângulo ϑ . Uma interação atrativa é indicada pelas cores claras (branco ao azul), enquanto uma interação repulsiva é indicada pelas cores mais intensas (amarelo ao vermelho). As linhas diagonais ilustram os ângulos onde a interação é nula. c) Caracterização do condensado de acordo com o valor de ϵ_{dd} . Um gás é considerado dipolar quando $\epsilon_{dd} > 0$.

Consequentemente, usando as definições básicas $a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$, $\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m_e c}$ e $\epsilon_0\mu_0 \equiv c^{-2}$, com m_e sendo a massa do elétron e c a velocidade da luz, segue que:

$$\frac{\mu_0\mu_B^2}{\mu_e/\epsilon_0} \sim 10^{-4}. \quad (3.3)$$

Essa relação permite concluir, visto que a quantidade em (3.3) é muito menor que um, que os candidatos ideais para o estudo da CBE dipolar são moléculas elétricas. Devido à sua estrutura interna, entretanto, a CBE desses sistemas não foi obtida até hoje. Em contrapartida, condensados de átomos magnéticos têm sido obtidos desde de 2005, culminando na observação de gotículas quânticas, como discutido na introdução.

Voltando ao potencial (3.1), observe que, diferente da interação dada pelo potencial (2.23), a dependência com r^{-3} resulta em uma interação de longo alcance para este potencial. Consequentemente, o potencial (3.1) é não local (LAHAYE *et al.*, 2009). Estas interações não locais estão presentes em vários contextos da física e têm atraído a atenção da comunidade científica devido às suas consequências nas propriedades dos sistemas (LAHAYE *et al.*, 2009; BARANOV, 2008; BARANOV *et al.*, 2012).

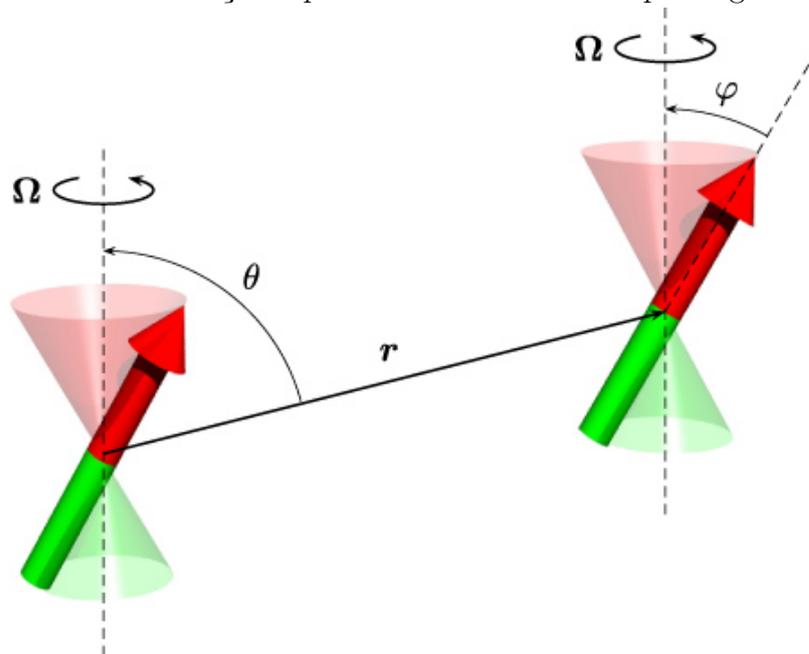
Outra característica igualmente interessante do potencial (3.1) diz respeito à sua anisotropia. Esta anisotropia decorre da dependência com ângulo ϑ e faz com que a parte angular do potencial assuma valores que variam entre -2 e 1 , uma vez que $0 \leq \vartheta \leq 90^\circ$. Assim, a Interação Dipolo-Dipolo (IDD) devida ao potencial (3.1) é repulsiva ou atrativa a depender da configuração dos dipolos. O ângulo para o qual esta interação deixa de ser repulsiva e passa a ser atrativa é encontrado como sendo $\vartheta_m = 54.74^\circ$ do qual,

como esquematizado na Fig. 5b, tem-se que a IDD é repulsiva para $0 < \vartheta < \vartheta_m$ e atrativa para qualquer outro caso.

No que concerne à física, a anisotropia de (3.1) também apresenta consequências importantes, principalmente no critério de estabilidade do condensado. Como apontou o experimento das Refs. (LAHAYE *et al.*, 2007; STUHLER *et al.*, 2005; GIOVANAZZI *et al.*, 2006a; WENZEL *et al.*, 2017), esta anisotropia faz com que o condensado tenda a se alinhar na direção de polarização do campo magnético externo. Este efeito é conhecido como magnetostricção e faz com que uma nova configuração de mínimo de energia (menor que a de condensados não dipolares) seja observada. Esta característica, na ausência de um mecanismo estabilizador externo (armadilha de confinamento, em geral) conduz ao colapso do condensado, em forte semelhança com o colapso estudado na Sec. 2.2.4. É de se ressaltar, entretanto, que este colapso segue uma simetria de ondas-d (LAHAYE *et al.*, 2008; LEWENSTEIN, 2008), em contraste ao colapso da Sec. 2.2.4, que é esféricamente simétrico.

Finalizamos esta seção discutindo sobre as situações esquematizadas na Fig. 5c e Fig. 6. Na primeira dessas figuras, vemos que a CBE pode ser categorizada em três diferentes tipos, a depender do valor numérico do parâmetro ε_{dd} , definido como:

Figura 6 – Ajustando a interação dipolar através de um campo magnético girante



Fonte: Lahaye *et al.* (2009). Ilustração esquemática do experimento da Ref. (TANG *et al.*, 2018). A IDD foi ajustada através de um campo girante com ângulo de rotação φ em torno do eixo z da armadilha e com frequência Ω menor que a frequência de Larmor.

3.2 Equação de Gross-Pitaevskii não local

Como discutido na seção anterior, a presença de um potencial do tipo (3.1) atribui um caráter não local na física da CBE. Consequentemente, a EGP desenvolvida na Sec. 2.2.2 é insuficiente para descrever o sistema. Felizmente, um procedimento análogo ao usado naquela seção pode ser aplicado aqui para desenvolver a nova equação diferencial que descreve o sistema.

No que se segue é reproduzido aquele procedimento variacional para obter esta equação diferencial, onde consideramos a situação mais geral em que tanto o potencial de contato quanto o potencial de IDD estão presentes. Nessa situação, a nova equação dinâmica preserva os termos da EGP (2.28), mas tem um termo integral adicional somado a ela, transformando-a em uma equação integro-diferencial.

Sendo assim, uma vez que todos os termos até a interação de contato já foram obtidos na Sec. 2.2.2, resta-nos apenas discutir sobre termo integral. Este termo é proporcional a $\frac{1}{2}|\Psi|^2\Phi_{dd}$, e deve ser adicionado à energia (2.25), transformando-a em (LAHAYE *et al.*, 2009):

$$E[\Psi] = \int d^3r \left[-\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\Psi|^2 + |\Psi|^2 V_{ext} + \frac{g}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2} |\Psi|^2 \Phi_{dd} \right], \quad (3.5)$$

onde $\Phi_{dd} \equiv \Phi_{dd}(\mathbf{r})$ indica a interação dipolar sobre todos os pares de dipolos no condensado, dado por:

$$\Phi_{dd}(\mathbf{r}) = \int d^3r' V_{dd}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Psi(\mathbf{r}', t)|^2. \quad (3.6)$$

Diferenciando este novo termo em (3.5) em relação a Ψ , e usando o fato de que $V_{dd}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = V_{dd}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, já que o potencial (3.1) só depende do módulo da distância relativa entre dois pontos no espaço, tem-se que variação da nova ação do sistema é obtida como:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 - V_{ext} - g|\Psi|^2 - \Phi_{dd} \right] \Psi \delta\Psi, \quad (3.7)$$

cujas a minimização conduz à seguinte equação integro-diferencial:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \int d^3r' V_{dd}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\Psi(\mathbf{r}', t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (3.8)$$

conhecida na literatura como EGP não local.

Analogamente ao que fizemos no Cap. 2, é igualmente possível obter a versão estacionária desta equação utilizando uma abordagem variacional. No entanto, utilizamos aqui um procedimento diferente baseado na transformação $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-\mu t/\hbar}$. Esta transformação é semelhante a substituição usual utilizada para obter a equação de Schrödinger estacionária, mas com a diferença de que, aqui, a energia é substituída pelo potencial químico μ . Tal troca é justificada pelo fato de que $\mu \equiv (\partial E/\partial N)_{S,V} \approx E/N$ (COOK; DICKERSON, 1995) e reduz (3.8) à seguinte equação:

$$\mu\psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r})|^2 + \int d^3r' V_{dd}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|\psi(\mathbf{r}')|^2 \right] \psi(\mathbf{r}). \quad (3.9)$$

Observe que estas Eqs. (3.8) e (3.9) continuam sendo não lineares (na verdade, elas são integro-diferenciais). Assim, obter soluções delas é, ainda, algo muito trabalhoso, ou até mesmo impossível em alguns casos. Felizmente, a aproximação de Thomas-Fermi e a aproximação gaussiana ainda permanecem úteis em seus respectivos regimes e podem ser usadas para obter propriedades da CBE dipolar. No que se segue apresentamos um estudo baseado nessas aproximações.

3.2.1 Aproximação de Thomas-Fermi

Na Sec. 2.2.2 vimos que a aproximação de Thomas-Fermi conduz a uma situação em que os efeitos de borda são desprezíveis. Tal situação permitiu negligenciar a derivada espacial na EGP estacionária, resultando nas Eqs. (2.32), (2.33) e (2.34). No que se segue, uma discussão semelhante é aplicada para CBEs dipolares. Devido ao termo não local (3.6), entretanto, a equação integral correspondente (Eq. (3.10)) é consideravelmente mais complicada de ser resolvida.

$$\mu = V_{ext}(\mathbf{r}) + gn(\mathbf{r}) + \Phi_{dd}(\mathbf{r}). \quad (3.10)$$

Uma primeira solução desta equação, entretanto, foi obtida ainda em 2005 por meio de laborioso método com funções de Green para a situação de um CBE aprisionado por uma armadilha de simetria cilíndrica (com $\omega_\rho \equiv \omega_x = \omega_y$, em que ω_ρ é a frequência na direção radial) (EBERLEIN *et al.*, 2005; O'DELL *et al.*, 2004). Esta solução foi, subsequentemente, testada por experimentos (LAHAYE *et al.*, 2007; STUHLER *et al.*, 2005; GIOVANAZZI *et al.*, 2006a), e o resultado encontrado foi que a forma funcional da função de onda correspondente mantinha as mesmas características da solução encontrada

quando $\varepsilon_{dd} = 0$, mas com uma diferença explícita nos raios de Thomas-Fermi, que agora dependem da anisotropia advindo da parte angular do potencial (3.1).

Com esta solução em mãos, semelhantemente ao que foi feito na Sec. 2.2.3, estes novos raios de Thomas-Fermi podem ser obtidos igualando os coeficientes quadráticos da Eq. (3.10), resultando nos seguintes raios da direção radial (com $\rho^2 \equiv x^2 + y^2$) e axial, respectivamente (EBERLEIN *et al.*, 2005; O'DELL *et al.*, 2004):

$$\begin{aligned} R_\rho &= \left\{ \frac{15Ng\kappa}{4\pi M\omega_\rho^2} \left[1 - \varepsilon_{dd} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\kappa^2 f_s(\kappa)}{\kappa^2 - 1} \right) \right] \right\}^{1/5}, \\ R_z &= \left\{ \frac{15Ng}{4\pi M\omega_\rho^2 \kappa^4} \left[1 - \varepsilon_{dd} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\kappa^2 f_s(\kappa)}{\kappa^2 - 1} \right) \right] \right\}^{1/5}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nesses raios, o parâmetro $\kappa \equiv R_\rho/R_z$ e é obtido, em termos dos valores do *aspect ratio* $\lambda \equiv \omega_z/\omega_\rho$, resolvendo a seguinte equação transcendental:

$$3\kappa\varepsilon_{dd} \left[\left(\frac{\lambda^2}{2} + 1 \right) \frac{f_s(\kappa)}{1 - \kappa^2} - 1 \right] + (\varepsilon_{dd} - 1)(\kappa^2 - \lambda^2) = 0. \quad (3.12)$$

A função $f(\kappa)$, por outro lado, é chamada de chamada de função de anisotropia, dada aqui em simetria cilíndrica, e é responsável por levar em conta a anisotropia do potencial (3.6). Sua forma funcional é obtida como (EBERLEIN *et al.*, 2005; YI; YOU, 2000):

$$f_s(\kappa) = \frac{1 + 2\kappa^2 - 3\kappa^2 \Xi(\kappa)}{1 - \kappa^2}, \quad \text{em que} \quad \Xi = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{1-\kappa^2}}{\sqrt{1-\kappa^2}}, & \text{quando } 0 \leq \kappa < 1, \\ \frac{\operatorname{arctan} \sqrt{\kappa^2-1}}{\sqrt{\kappa^2-1}}, & \text{quando } \kappa \geq 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

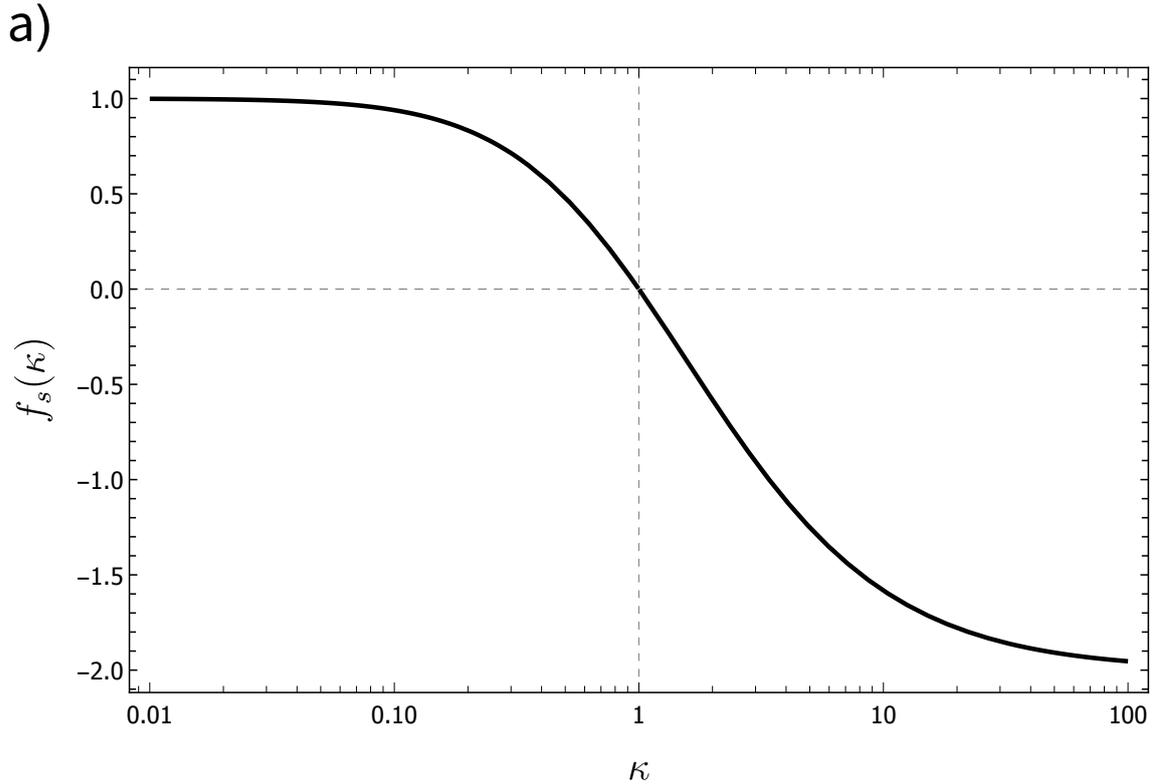
em que, pelo seu gráfico, plotado na Fig. 9, ver-se que ela assume valores negativos sempre que o condensado possui geometria oblata ($\kappa > 1$), correspondendo a uma IDD eminentemente atrativa. Quando $\kappa < 1$ (simetria prolata), por outro lado, a IDD é predominantemente repulsiva.

A dependência com $f_s(\kappa)$ também é observada para o novo potencial químico do sistema. Este potencial químico é obtido a partir de (3.10) igualando os termos constantes correspondentes, resultando em:

$$\mu = g n_0 [1 - \varepsilon_{dd} f_s(\kappa)]. \quad (3.14)$$

Conseqüentemente, o potencial químico é eminentemente crescente para condensados de geometria prolata, e é decrescente para condensados oblatos. Além disso, note ainda que esta dependência implica em uma nova expressão para o parâmetro Λ , usado na Sec. 3.2.2 para definir o critério de aplicação da aproximação de Thomas-Fermi (PARKER; O'DELL, 2008).

Figura 8 – Gráfico da função de anisotropia em simetria cilíndrica



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para condensados de geometria prolata esta nova condição é dada por $N(a_s - a_{dd})\kappa^{5/3}/\bar{a} \gg 1$, enquanto para condensados oblatos a condição é: $N(a_s + 2a_{dd})/\kappa^{10/3}\bar{a} \gg 1$.

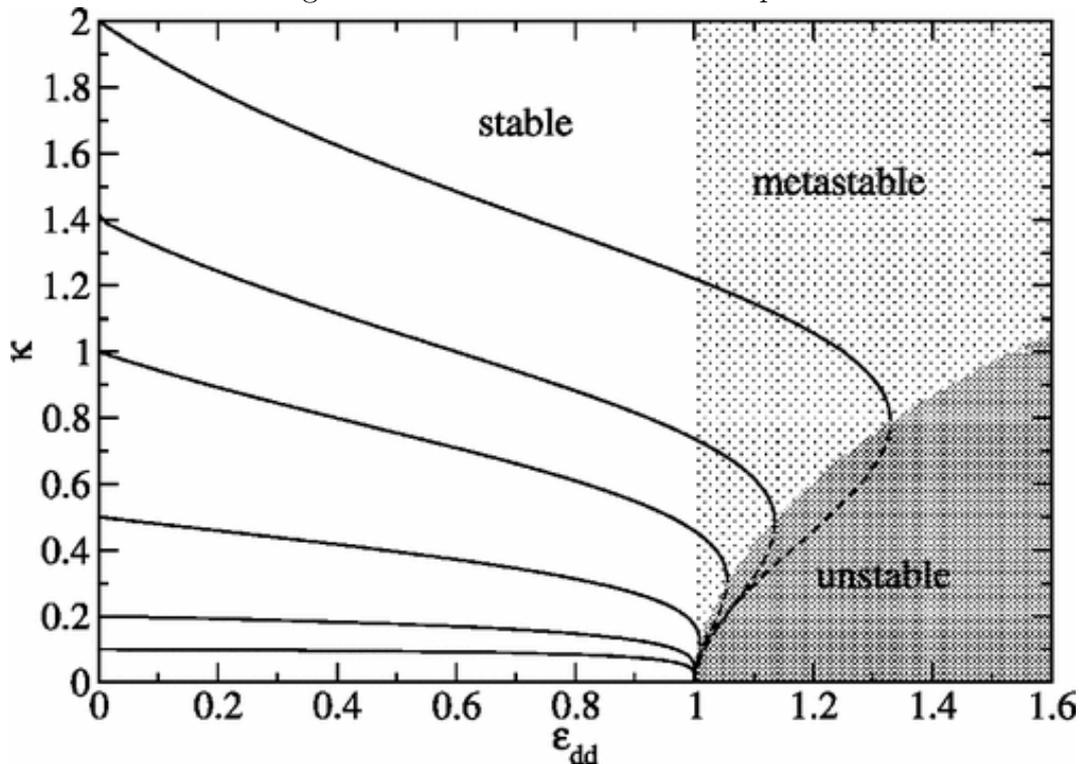
Uma consequência das propriedades acima pode ser observada no gráfico de estabilidade mostrado na Fig. 10, produzido a partir da equação transcendental (3.12) para diferentes valores de λ . Desse gráfico fica claro que uma única solução estável da equação de Thomas-Fermi (3.10) é sempre possível para valores de $0 \leq \varepsilon_{dd} \leq 1$ e que essa solução independe do λ adotado. A dependência com λ , no entanto, fica evidente para valores de $\varepsilon_{dd} > 1$, resultando em condensados metaestáveis ou instáveis para valores de $\lambda > 1$.

Método alternativo baseado em um princípio de mínima ação

Os resultados (3.11) e (3.14) foram obtidos a partir da equação de Thomas-Fermi (3.10) baseados no perfil de densidade $n(\mathbf{r})$ determinado na Ref. (EBERLEIN *et al.*, 2005; O'DELL *et al.*, 2004) por meio do uso de funções de Green. Estes resultados correspondem com as propriedades estáticas do condensado e para determiná-las completamente é necessário resolver ainda a equação transcendental (3.12).

No restante desta seção apresentamos um método alternativo capaz de obter

Figura 9 – Gráfico do diagrama de estabilidade da CBE dipolar



Fonte: Eberlein *et al.* (2005).

os mesmo resultados acima, mas por meio de um procedimento variacional mais simples (LIMA, 2010). É de se ressaltar que, para além das propriedades estáticas, este novo método permite obter também as propriedades dinâmicas do sistema, o que o configura, assim, como uma alternativa conveniente ao procedimento padrão baseado nas complicadas equações de Bogoliubov-de Gennes.

Para iniciar este tratamento variacional, considere a seguinte transformação na função de onda da Lagrangiana correspondente ao sistema dipolar:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}, t)e^{iM\chi(\mathbf{r}, t)/\hbar}. \quad (3.15)$$

Esta transformação é chamada de transformação de Madelung (DONNELLY, 1991) e o termo $\chi(\mathbf{r}, t)$ é associado com a fase de propagação do condensado¹. Um ansatz para esta fase é escrito como $\chi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\alpha_x(t)x^2 + \alpha_y(t)y^2 + \alpha_z(t)z^2]$, em que $\alpha_\eta(t) \equiv \dot{R}_\eta(t)/R_\eta(t)$ descreve a mudança do raio com o tempo.

Para a função de onda $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$, por outro lado, o ansatz é assumido ter a mesma forma funcional da densidade obtida resolvendo a equação de Thomas-Fermi não dipolar. Esta consideração, junto com $\chi(\mathbf{r}, t)$, permite obter uma densidade Lagrangiana

¹ Na transformação de Madelung esta fase é associada com a energia cinética do condensado. Embora estejamos no regime de Thomas-Fermi, ela deve ser mantida nos cálculos.

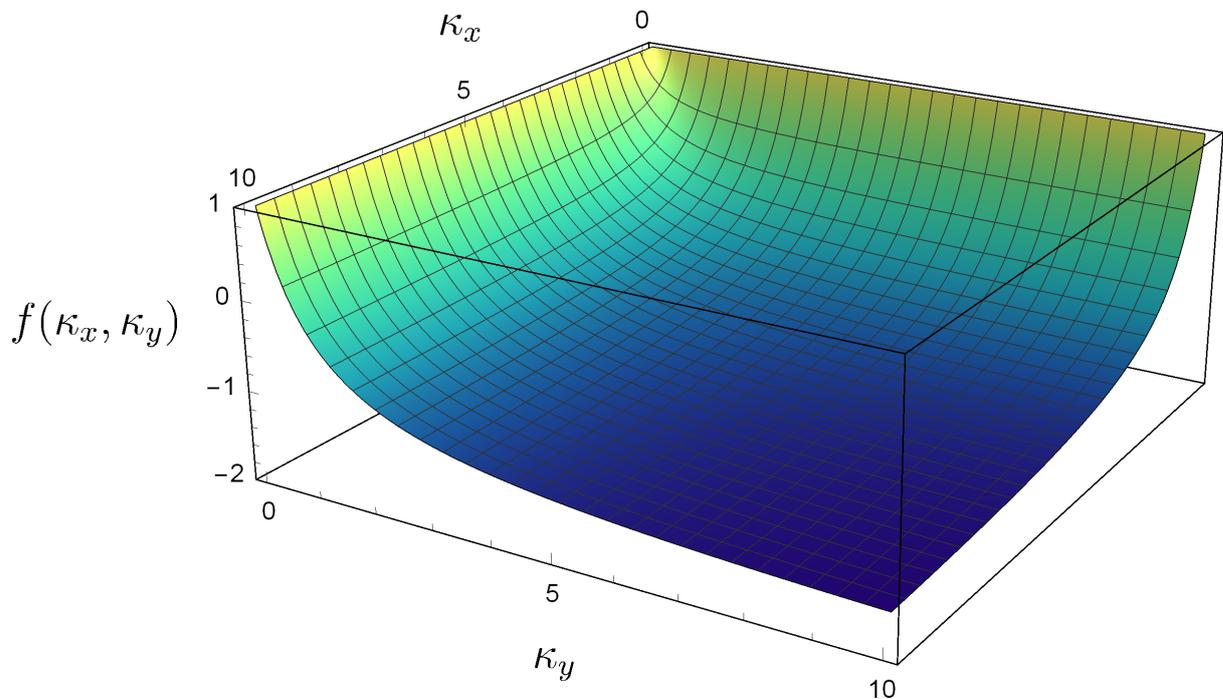
da forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{MN}{7} \left\{ \sum_{\eta} \frac{R_{\eta}(t)^2}{2} [\dot{\alpha}_{\eta}(t) + \alpha_{\eta}(t)^2 + \omega_{\eta}^2] + \frac{15Ng}{4\pi M\bar{R}(t)^3} \left[1 - \varepsilon_{dd} f \left(\frac{R_x(t)}{R_z(t)}, \frac{R_y(t)}{R_z(t)} \right) \right] \right\}, \quad (3.16)$$

em que $\bar{R} \equiv (R_x R_y R_z)^{1/3}$. Observe que nenhuma simetria é imposta nessa equação. Conseqüentemente, a função $f(\kappa_x, \kappa_y)$ representa a generalização da função de anisotropia da Eq. (3.13). Seu gráfico é mostrado na Fig. 10 e a sua forma funcional é derivada no Apêndice A da Ref. (LIMA, 2010), para o qual encontra-se:

$$f(\kappa_x, \kappa_y) = 1 + 3\kappa_x \kappa_y \frac{E(\vartheta, \xi) - F(\vartheta, \xi)}{(1 - \kappa_y^2) \sqrt{1 - \kappa_x^2}}. \quad (3.17)$$

Figura 10 – Gráfico da função de anisotropia usual



Fonte: Elaborado pelo autor.

Esta função apareceu pela primeira vez no contexto de gases bosônicos dipolares (GIOVANAZZI *et al.*, 2006b; GLAUM; PELSTER, 2007) mas também determina a influência da anisotropia em gases fermiônicos dipolares (LIMA; PELSTER, 2010). Nessa expressão $E(\vartheta, \xi)$ e $F(\vartheta, \xi)$ são funções elíticas de primeira e segunda ordem, respectivamente, e seus argumentos são dados em termos dos *aspect ratios* $\kappa_x \equiv R_x/R_z$ e $\kappa_y \equiv R_y/R_z$ através das relações:

$$\begin{aligned} \sin^2(\xi) &= \frac{1 - \kappa_y^2}{1 - \kappa_x^2}, \\ \sin(\vartheta) &= \sqrt{1 - \kappa_x^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Tendo determinado a densidade Lagrangiana associada ao sistema, a EGP (3.8) pode ser substituída pelas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad (3.19)$$

levando ao seguinte sistema de equações diferenciais para os raios $R_\eta(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{R}_x(t) &= -\omega_x^2 R_x(t) + \frac{15gN}{4\pi \bar{R}(t)^3 R_x(t)} \left[1 - \varepsilon_{dd} (1 - R_x \partial_{R_x}) f \left(\frac{R_x(t)}{\bar{R}(t)}, \frac{R_y(t)}{\bar{R}(t)} \right) \right], \\ \ddot{R}_y(t) &= -\omega_y^2 R_y(t) + \frac{15gN}{4\pi \bar{R}(t)^3 R_y(t)} \left[1 - \varepsilon_{dd} (1 - R_y \partial_{R_y}) f \left(\frac{R_x(t)}{\bar{R}(t)}, \frac{R_y(t)}{\bar{R}(t)} \right) \right], \\ \ddot{R}_z(t) &= -\omega_z^2 R_z(t) + \frac{15gN}{4\pi \bar{R}(t)^3 R_z(t)} \left[1 - \varepsilon_{dd} (1 - R_z \partial_{R_z}) f \left(\frac{R_x(t)}{\bar{R}(t)}, \frac{R_y(t)}{\bar{R}(t)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Estas equações foram obtidas pioneiramente por Giovanazzi *et al.* (2006b) através de um procedimento hidrodinâmico e podem ser usadas para estudar as propriedades dinâmicas do condensado no regime de Thomas-Fermi. Para as propriedades estáticas, os resultados (3.11) e (3.14) são recuperados fazendo $\ddot{R}_\eta = 0$.

3.2.2 Aproximação gaussiana: critério de estabilidade

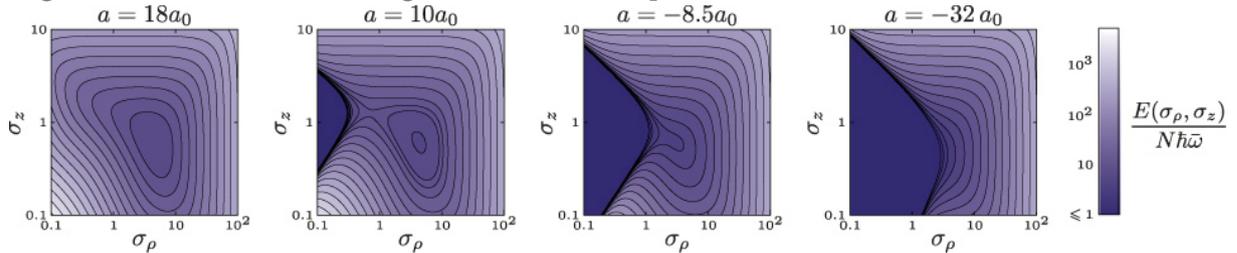
Até aqui apresentamos as soluções estáticas de CBEs dipolares e discutimos sobre sua estabilidade através de um tratamento baseado na equação transcendental (3.12). Para obter um tratamento analítico das regiões de estabilidade do condensado, considere agora a aplicação da aproximação gaussiana. Este método tem sido aplicado com sucesso no estudo das propriedades de condensados dipolares (YI; YOU, 2000; GIOVANAZZI *et al.*, 2003; BIJNEN *et al.*, 2010), e para o tratamento a seguir, citamos a Ref. (KOCH *et al.*, 2008).

Por simplicidade, uma simetria cilíndrica é adotada. Nesta situação, a energia total por partícula e em unidades de $\hbar\bar{\omega}$ é dada por:

$$\frac{E}{N\hbar\bar{\omega}} = \frac{\bar{a}^2}{4} \left(\frac{2}{\sigma_\rho^2} + \frac{1}{\sigma_z^2} \right) + \frac{1}{4\bar{a}^2 \lambda^{2/3}} (2\sigma_\rho^2 + \lambda^2 \sigma_z^2) + \frac{Na_s \bar{a}^2}{\sqrt{2\pi} \sigma_\rho^2 \sigma_z} [1 - \varepsilon_{dd} f_s(\kappa)]. \quad (3.21)$$

O gráfico desta energia em torno da sua região de mínimo para diferentes valores de a_s é mostrado na Fig. 11 na situação em que $\lambda = 10$ e $N = 20.000$ átomos de ^{52}Cr . Na primeira dessas figuras, temos a situação em que $\varepsilon_{dd} < 1$. Para esta configuração um mínimo global é observado correspondendo a uma solução estável. Esta situação está de acordo com o gráfico da Fig. 9b, em que uma solução estável é sempre possível para $\varepsilon < 1$.

Figura 11 – Gráfico da energia de um CBE dipolar em simetria cilíndrica



Fonte: Koch *et al.* (2008).

Na medida em que a_s é diminuído, entretanto, esse mínimo global dá lugar a um mínimo local (em $a_s = 10a_0$) correspondendo a uma solução metaestável. Para valores ainda menores de a_s , o que significa valores ainda maiores de $\varepsilon_{dd} > 1$, esse mínimo local desaparece em $a_{crit} = -8,5a_0$, levando o condensado a situação de instabilidade.

Analiticamente, uma expressão para a_{crit} pode ser obtida de (3.21) considerando o limite $N \rightarrow \infty$. Nessa situação apenas o termo referente à interação (proporcional a N) se torna importante, o que sugere escrevermos convenientemente a seguinte abreviação: $X(\kappa) \equiv a_s - a_{dd}f_s(\kappa)$, para o qual tem-se que $E_{tot} \propto X(\kappa)$.

Dado que todos os demais termos em (3.21) são sempre positivos, a condição de instabilidade, para o qual tem-se uma energia líquida negativa, é dado então através da condição $X(\kappa) = 0$. Conseqüentemente, o valor de a_{crit} procurado é dado por: $a_{crit} = a_{dd}f_s(\kappa)$.

4 GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES

Nos capítulos anteriores, discutimos a condensação de Bose-Einstein observada a partir de átomos alcalinos e lantanídeos. Como vimos, este novo estado da matéria apresenta características típicas de superfluidos, mas precisa ser aprisionado por uma armadilha externa para ter uma localização bem definida. Os experimentos de 2016 liderados por Pfau, na cidade de Stuttgart (SCHMITT *et al.*, 2016; FERRIER-BARBUT *et al.*, 2016), e independentemente por F. Ferlaino, em Innsbruck (CHOMAZ *et al.*, 2016), e mais tarde, em 2018, por L. Tarruell, na cidade de Barcelona (CABRERA *et al.*, 2018), e M. Fattori, na cidade de Florença (SEMEGHINI *et al.*, 2018), entretanto, demonstraram que é igualmente possível obter sistemas bem localizados de CBEs mesmo na ausência de um armadilha externa. Estes sistemas constituem as chamadas gotículas quânticas e caracterizam como um novo estado da matéria observado a partir de CBEs. No que se segue, apresentamos, brevemente, uma investigação tanto teórica quanto experimental dessas gotículas quânticas.

4.1 Gotículas quânticas: um novo estado líquido de gases bosônicos

Em nossa experiência diária nos deparamos comumente com três diferentes tipos de fases na qual a matéria pode ser encontrada, a saber, a fase sólida, líquida e gasosa. A mudança de uma fase para outra recebe o nome de transição de fase e pode ser representada através de um diagrama de fases pressão versus temperatura, o que significa que essas fases têm valores bem definidos dessas grandezas.

Embora do ponto de vista termodinâmico essas fases possam ser facilmente compreendidas a partir do diagrama de fases, em escala microscópica elas apresentam uma não trivialidade inerente. Para a fase líquida, por exemplo, uma teoria microscópica que descreve o seu comportamento só foi proposta em 1873 e é baseada no potencial de Van der Waals introduzido na Seção 2.2.1. Segundo este modelo, esta fase surge pelo balanço entre a interação repulsiva e atrativa deste potencial, estabilizando o par de partículas quando a posição relativa entre elas é numericamente igual à sua posição de mínimo.

Para sistemas diluídos sujeitos à temperaturas muito baixas (da ordem de nanokelvins), no entanto, vimos que a estatística das partículas do sistema se torna importante, implicando em transições não usuais. Para sistemas bosônicos a estatística de

Bose-Einstein manifesta o efeito da CBE (ANDERSON *et al.*, 1995; DAVIS *et al.*, 1995; BRADLEY *et al.*, 1995; GRIESMAIER *et al.*, 2005; FRIED *et al.*, 1998; ROBERT *et al.*, 2001; MODUGNO *et al.*, 2001; WEBER *et al.*, 2003; TAKASU *et al.*, 2003; KRAFT *et al.*, 2009; STELLMER *et al.*, 2009; LU *et al.*, 2011; AIKAWA *et al.*, 2012), enquanto para sistemas fermiônicos a estatística de Fermi-Dirac dá lugar ao chamado gás de Fermi degenerado¹. Ambos os fenômenos emergem de gases diluídos e, embora já se saiba que ambos apresentem um comportamento fluido, e até superfluido, a questão se existe uma transição gás-líquido associada a estes sistemas vem atraindo a atenção dos físicos nos últimos anos.

Para gases bosônicos, uma transição dessa natureza foi observada ainda em 2016 em uma série de experimentos envolvendo gases dipolares (KADAU *et al.*, 2016; FERRIER-BARBUT *et al.*, 2016; SCHMITT *et al.*, 2016; FERRIER-BARBUT *et al.*, 2016). Esta nova fase líquida recebeu o nome de gotículas quânticas (dipolares) (*quantum droplets*) e vem se mostrando promissora para o estudo de exóticos fenômenos da teoria de muitos corpos, tais como os supersólidos.

No que refere-se à teoria, essas gotículas quânticas (dipolares ou não) não podem ser explicadas pela teoria de campo médio desenvolvida nos capítulos anteriores. Para gases não dipolares, por exemplo, vimos no Cap. 2 que o potencial real de Van der Waals pode ser substituído por um pseudopotencial do tipo delta de Dirac, cujo o único parâmetro significativo é o do comprimento de espalhamento a_s . Este comprimento é medido experimentalmente e é muito maior que a distância que estabiliza o potencial de Van der Waals, tal que estes sistemas, segundo esta teoria, nunca deveriam ser observados em uma fase líquida (FERRIER-BARBUT; PFAU, 2018).

Os experimentos de 2018 conduzidos por Tarruell, em armadilhas achatadas (CABRERA *et al.*, 2018; CHEINEY *et al.*, 2018) e, subsequentemente, por Fattori com sistemas livres de qualquer potencial confinante (SEMEGHINI *et al.*, 2018), entretanto, mostraram que é possível obter gotículas quânticas de misturas bosônicas alcalinas. Estes experimentos são fundamentados pela proposta teórica de 2015 de D. Petrov (PETROV, 2015), que define o mecanismo necessário para a observação dessas gotículas quânticas em misturas não dipolares.

¹ A degenerescência em gases fermiônicos foi observada, até então, para os seguintes elementos: K (DEMARCO; JIN, 1999), Li (SCHRECK *et al.*, 2001; TRUSCOTT *et al.*, 2001), He (MCNAMARA *et al.*, 2006), Sr (TEY *et al.*, 2010), Yb (SUGAWA *et al.*, 2011), Dy (LU *et al.*, 2012), Er (AIKAWA *et al.*, 2014) e Cr (NAYLOR *et al.*, 2015).

Em poucas palavras, este modelo de Petrov assegura que a formação de gotículas quânticas em misturas bosônicas é devida ao balanço proporcional entre a energia atrativa de campo médio e a energia repulsiva proporcionada pela correção de primeira ordem dessa energia, o chamado termo de LHY, obtido perturbativamente pelos físicos T. Lee, C. Yang e K. Huang em 1957 para um sistema homogêneo. Esta correção é proporcionada pela presença de flutuações quânticas no sistema e, para um gás não homogêneo, é dada por (LEE *et al.*, 1957; LEE; YANG, 1957)

$$E_{qf} = \frac{64}{15} g n(\mathbf{r})^2 \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}) a_s^3}{\pi}}. \quad (4.1)$$

Em geral, a presença dessas flutuações quânticas são imperceptíveis para CBEs típicos, para os quais geralmente se tem $n a_s^3 \ll 1$. Apesar disso, estas flutuações quânticas se constituem, ainda assim, como o mecanismo estabilizador das respectivas gotículas quânticas. Para um estudo tanto teórico quanto experimental sobre essas gotículas não dipolares, sugerimos ao leitor as Refs. (CÓRDOVA, 2018; FERIOLI, 2018).

Para gotículas quânticas a partir de CBEs dipolares um modelo baseado em flutuações quânticas também foi sugerido como o mecanismo capaz de explicar a formação das gotículas. Devido ao termo não local (3.6) estes sistemas têm características ligeiramente diferentes. O restante desta monografia é dedicado ao estudo de algumas das principais propriedades dessas gotículas quânticas dipolares.

4.2 Alguns resultados experimentais em gotículas quânticas dipolares

Nesta seção, apresentamos alguns dos principais resultados experimentais em gotículas quânticas dipolares. A seção inicia com uma discussão sobre os primeiros resultados que confirmaram a presença de gotículas. Na seção seguinte, discutimos sobre a observação de uma gotícula única como estado fundamental do sistema e o seu caráter autoligado. Por fim, na última seção, discutimos brevemente o experimento recente que resultou na observação de *striped states* como provável solução do estado fundamental de um sistema com geometria prolata.

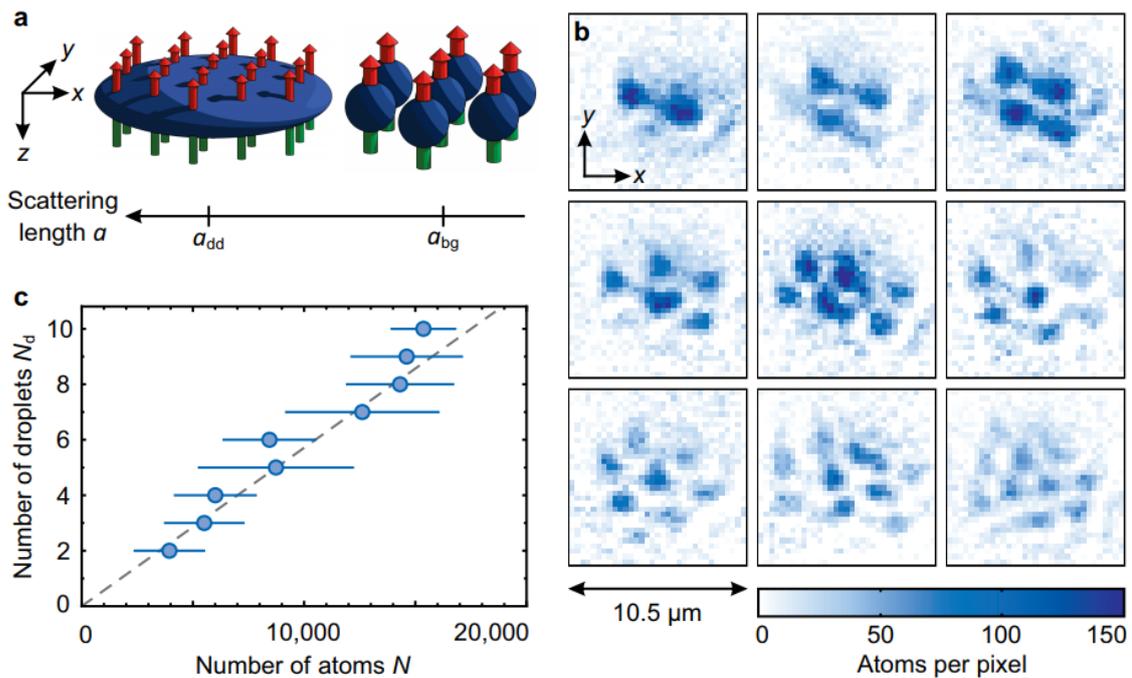
4.2.1 Primeira observação experimental de gotículas quânticas dipolares

Nesta seção, apresentamos os primeiros resultados em gotículas quânticas dipolares. Estes resultados foram obtidos a partir de um CBE de átomos de ^{164}Dy

aprisionado em uma armadilha harmônica em formato de panqueca, com *aspect ratio* $\lambda \approx 3$, e sujeito a um campo magnético externo com orientação de polarização ao longo do eixo z dessa armadilha (KADAU *et al.*, 2016). Nessa configuração inicial o CBE era estável, em concordância com a teoria de campo médio desenvolvida no Cap. 3.

À medida em que a_s foi modulado para valores abaixo do comprimento a_{crit} da Sec. 3.2.2, no entanto, o experimentos indicaram um comportamento anômalo não previsto pela teoria de campo médio. Enquanto a teoria previa que abaixo do valor crítico a_{crit} o condensado deveria se tornar instável devido à perda de átomos através da recombinação de três corpos (RONEN *et al.*, 2007; WILSON *et al.*, 2009), os experimentais mostraram, por meio de imagens *in situ* de alta resolução (Fig. 12), a formação de um padrão triangular de pequenas estruturas em resposta a essa instabilidade (KADAU *et al.*, 2016).

Figura 12 – Resultados do primeiro experimento de gotículas quânticas

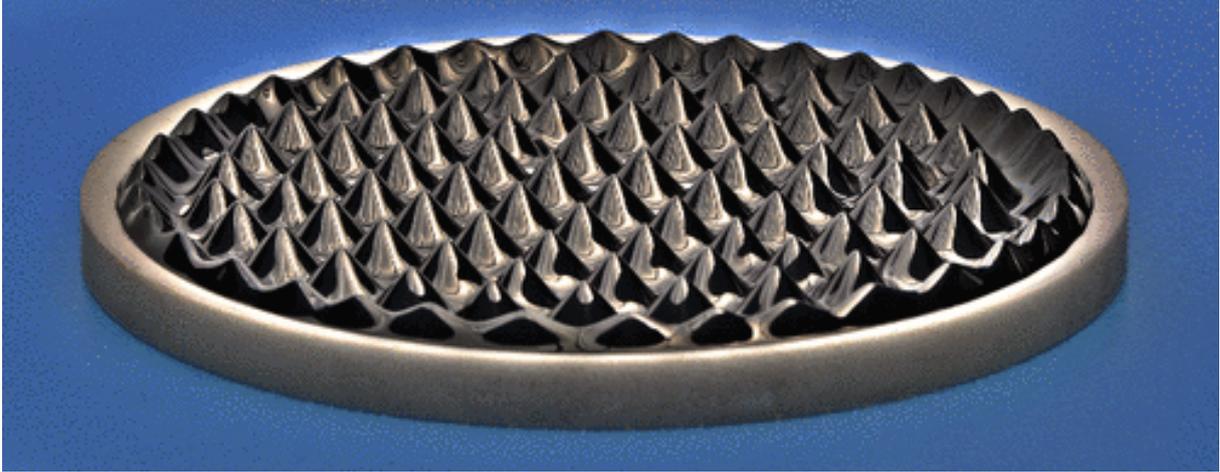


Fonte: Kadau *et al.* (2016). a) Ilustração esquemática da modulação de a_s . Como discutido no texto, a perturbação periódica no perfil acontece quando $a_s \approx a_{bg}$. b) Imagens *in situ* do padrão de gotículas observado quando da modulação de a_s . O número de gotículas por arranjo varia de $N_d = 2$ a $N_d = 10$ c) Relação entre o número de gotículas e o número de átomos no sistema. As marcações em azul indicam o erro associado na medida, enquanto a linha tracejada indica a relação linear entre N_g e N .

Foi observado que essa transição é consequência de uma perturbação periódica na densidade do condensado inicial (SAITO *et al.*, 2009), um mecanismo semelhante à perturbação em ferrofluidos clássicos devida à instabilidade de Rosensweig (Fig. 13) (COWLEY; ROSENSWEIG, 1967). Por conta disso, os padrões da Fig. 12 foram referidos

como uma manifestação de ferrofluidos quânticos, e as estruturas internas como gotículas quânticas (dipolares).

Figura 13 – Ilustração de um instabilidade de Rosensweig típica



Fonte: Knieling *et al.* (2007).

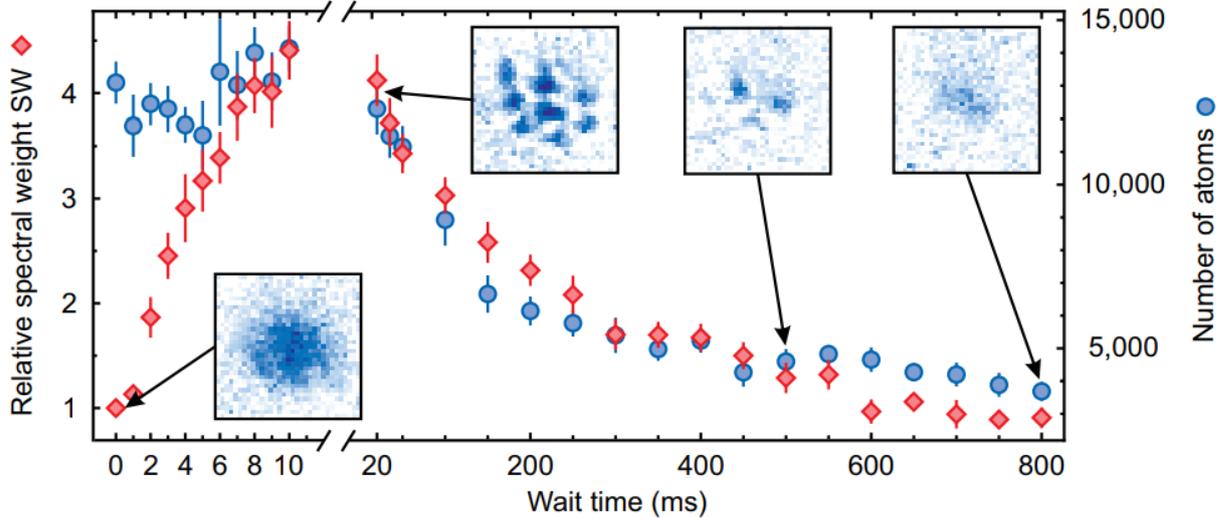
Como indicado na Fig. 12a essa perturbação acontece para $a_s \approx a_{bg}$, em que a_{bg} é comprimento de espalhamento associado ao ^{164}Dy na situação distante de sua ressonância de Feshbach. A quantidade de gotículas por arranjo foi observada depender linearmente com número de partículas no sistemas, para o qual tem-se, aparentemente, um ponto de saturação quando $N \approx 17.500$, correspondendo a um número de gotículas $N_d = 10$ (veja a Fig. 12c).

A distância d de separação média entre as gotículas foi observado ser da ordem de $d = 2$ a $3 \mu\text{m}$ e um padrão completo dessas gotículas era formado em ≈ 7 ms depois da modulação de a_s . Este padrão permanecia estável por aproximadamente 300 ms, perdendo completamente sua forma em $t = 800$ ms (Fig. 14). Estas características permitem concluir que estes padrões estão em um regime de metaestabilidade e não constituem, portanto, o estado fundamental.

4.2.2 Formação de uma única gotícula autoligada

Logo após ao experimento que resultou na observação de gotículas quânticas dipolares, diferentes grupos teóricos ao redor do mundo trabalharam incessantemente na caracterização destes sistemas. Dois dos primeiros trabalhos nesta direção podem ser encontrados nas Refs. (BAILLIE *et al.*, 2016; WÄCHTLER; SANTOS, 2016) e foram responsáveis pela previsão da existência de uma única gotícula autoligada em substituição

Figura 14 – Relação entre a quantidade de partículas e a vida média do padrão de gotículas



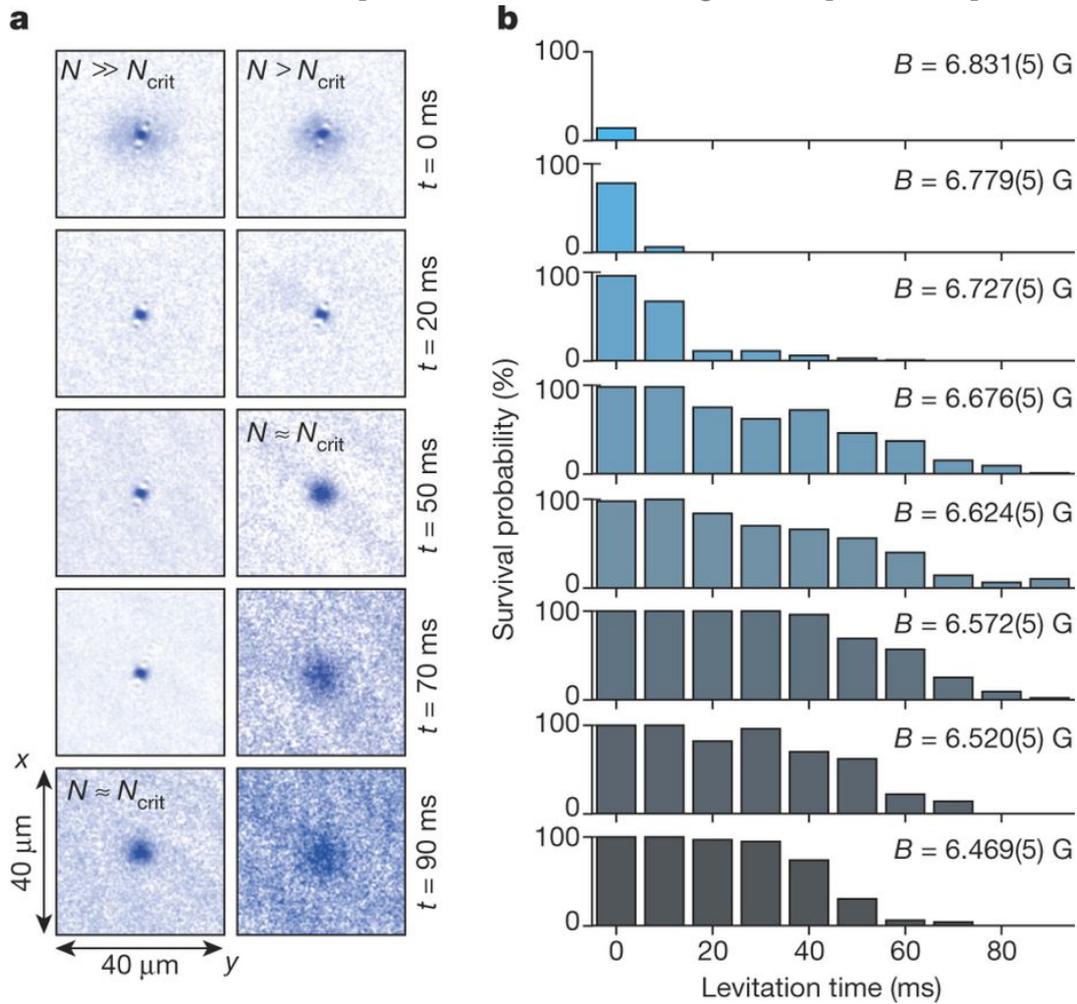
Fonte: Kadau *et al.* (2016). Medida estatística da relação entre o número de átomos e a vida média do padrão de gotículas em diferentes momentos no tempo. Um padrão completo de gotículas é observado em ≈ 7 ms e permanece, sem perda de partículas, por aproximadamente 300 ms. Para detalhes sobre a função SW (pontos em vermelho), sugerimos a Ref. (KADAU *et al.*, 2016).

ao conjunto de gotículas. Esta solução deveria existir apenas para uma configuração em que $\lambda < 1$ e a suas propriedades deveriam depender de parâmetros externos tais como o número de átomos no sistema e a intensidade do campo magnético.

Esta solução de gotícula única foi, de fato, observada no experimento, e o seu caráter autoligante foi confirmado (SCHMITT *et al.*, 2016; CHOMAZ *et al.*, 2016). Ao contrário do que previa a teoria, entretanto, esta solução existia mesmo para $\lambda > 1$, confirmando a dependência do número de gotículas com o *aspect ratio* da armadilha. Esta observação constitui como a primeira manifestação de um fenômeno autoligado a partir de gases bosônicos tridimensionais e guarda estreita semelhança com as gotículas de ^4He (HARMS *et al.*, 1998; STRINGARI; TREINER, 1987; DALFOVO *et al.*, 1995), embora as gotículas quânticas sejam de 6 a 8 ordens de grandezas menos densas, tornando-as um sistema análogo muito mais fácil de descrever no nível microscópico.

Na Fig. 15a, imagens da dinâmica de tempo de voo (após o desligamento da armadilha) da gotícula formada de ^{164}Dy são mostradas para diferentes momentos no tempo e para duas situações diferentes com respeito ao número de partículas no sistema inicial. As imagens correspondem a uma configuração de campo magnético com intensidade fixa, com $B = 6,676(5)$ G (gauss). Dessa figura fica claro da vida média dessa gotícula com o número de átomos no sistema, sendo que uma maior vida média acontece na situação em que $N \gg N_{crit}$, onde N_{crit} é o número crítico de átomos para o qual a gotícula é estável.

Figura 15 – Dinâmica do tempo de voo de uma única gotícula quântica dipolar



Fonte: Schmitt *et al.* (2016). a) Imagens *in situ* da evolução de dois sistemas diferentes sujeitos a um campo magnético de intensidade fixa em $B = 6,676(5)$ G. Para o primeiro sistema, $N \gg N_{crit}$ o tempo de estabilidade após o desligamento da armadilha é superior ao do segundo, com $N > N_{crit}$. b) Relação entre a porcentagem restante de gotícula com a intensidade do campo magnético. Observe que, para $B = 6,572(5)$ G, a gotícula permanece sem perda de átomos por aproximadamente 30 ms.

Na Fig. 15b, por outro lado, é mostrada a porcentagem restante de gotícula para diferentes valores de intensidade do campo magnético. Para campos magnéticos pouco intensos ($B \leq 6,676(5)$ G), a vida média dessas gotículas varia entre $70 \lesssim t_m \gtrsim 90$ ms para o qual um decréscimo pouco acentuado é observado. Para campos acima de $B = 6,727(5)$ G, entretanto, a vida média reduz drasticamente, chegando a uma perda total de átomos logo no primeiro momento quando $B = 6,841(5)$ G.

4.2.3 *Striped states de gotículas quânticas dipolares*

Até aqui, discutimos dois cenários possíveis para a obtenção de gotículas quânticas dipolares. Enquanto no primeiro cenário ($\lambda \approx 3$) os experimentos indicaram

a formação de um padrão triangular de gotículas, no segundo ($\lambda < 2$) a solução de uma única gotícula foi observada.

Como discutido teoricamente em (CINTI *et al.*, 2017) e, subsequentemente, observado em experimento (WENZEL *et al.*, 2017), uma nova transição é ainda possível para armadilhas com geometria ainda mais prolatas ($\lambda \ll 1$). Esta transição acontece de uma para múltiplas gotículas e ocorre devido à rotação do campo magnético externo. As gotículas nessa transição se organizam em formato de listras e, por conta disso, o estado final é referido como *striped states*.

Soluções em *stripes* têm sido propostas para sistemas dipolares bidimensionais (BARANOV *et al.*, 2012) e vêm sendo observadas em materiais supercondutores sólidos (ORENSTEIN; MILLIS, 2000), o que levanta a questão sobre a possível natureza supersólida desse estado. Supersólidos são caracterizados por um estado fundamental auto-organizado com um perfil de densidade periódica que não perturba a coerência de grande escala. No experimento, a observação de supersólidos em *striped states* de gotículas dipolares vem sendo, de fato, confirmada (TANZI *et al.*, 2018; ROCCUZZO; ANCILOTTO, 2019), o que aumenta o interesse nesses estados *stripes*.

Mais detalhes sobre esta nova transição são apresentados no Cap. 5, bem como a nossa proposta de modelo variacional para descrevê-lá.

4.3 Descrição teórica de gotículas quânticas dipolares

Tendo discutido sobre os principais aspectos experimentais das gotículas quânticas dipolares, passamos agora ao estudo teórico dessas propriedades. Um estudo teórico preciso da formação dessas gotículas provou, no entanto, ser uma tarefa difícil, uma vez que, como relatado na Ref. (WÄCHTLER; SANTOS, 2016), as simulações baseadas na EGP (3.8) levam ao colapso do condensado sempre que a_s é reduzido abaixo do valor crítico encontrado experimentalmente. Isto implica, portanto, que um modelo teórico para essas gotículas deve ir além da teoria de campo médio. Nesta seção, apresentamos esta teoria além de campo médio e exploramos algumas consequências de seu uso.

4.3.1 Equação de Gross-Pitaevskii estendida

A teoria além de campo médio que permitiu a explicação da formação das gotículas quânticas dipolares foi proposta por F. Wächtler e L. Santos ainda em 2016 (WÄCHTLER; SANTOS, 2016), e é baseada em um mecanismo semelhante ao proposto por Petrov para explicar a formação de gotículas em misturas bosônicas. O pano de fundo deste formalismo é, portanto, baseado num mecanismo semelhante ao da correção de LHY para a energia do estado fundamental do CBE e deve, assim, levar em consideração as flutuações quânticas.

Para gases quânticos dipolares essas flutuações foram estudadas teoricamente por A. Lima e A. Pelster em 2011, e a correção de primeira ordem na energia do estado fundamental de um CBE dipolar homogêneo de volume V é dada por (LIMA; PELSTER, 2011; LIMA; PELSTER, 2012):

$$E_{qf} = \frac{64V}{15} g n^2 \sqrt{\frac{n a_s^3}{\pi}} \mathcal{Q}_5(\varepsilon_{dd}), \quad (4.2)$$

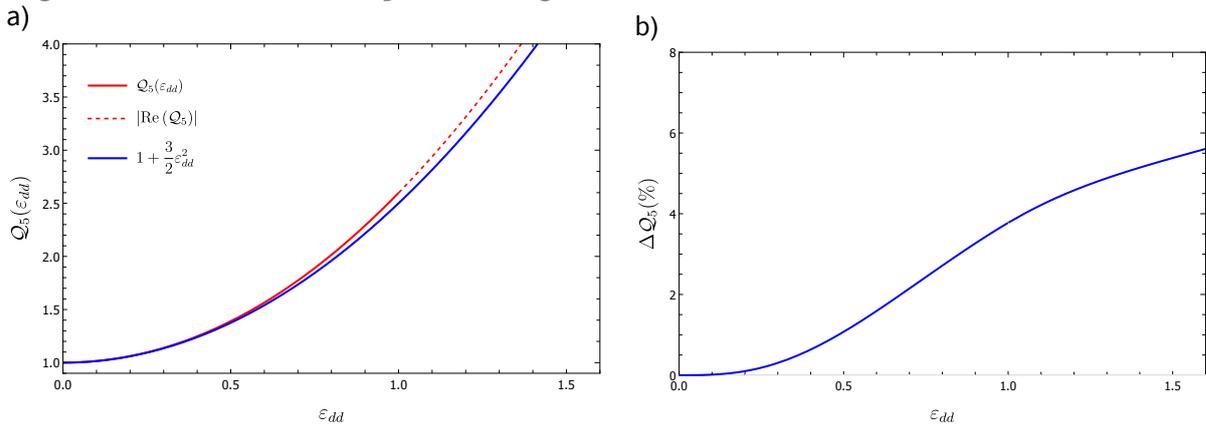
que apresenta uma forma funcional idêntica ao termo de LHY da Eq. (4.1) a menos do fator corretivo devido à função

$$\mathcal{Q}_5(\varepsilon_{dd}) = (1 - \varepsilon_{dd})^{5/2} {}_2F_1\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3\varepsilon_{dd}}{\varepsilon_{dd} - 1}\right), \quad (4.3)$$

onde ${}_2F_1(a, b; c; z)$ é a função hipergeométrica de Gauss. Observe que esta função $\mathcal{Q}_5(\varepsilon_{dd})$ possui uma descontinuidade em $\varepsilon_{dd} = 1$ e apresenta uma pequena parte imaginária para valores acima deste ponto. Como demonstrado na Ref. (SCHÜTZHOLD *et al.*, 2006), entretanto, essa parte imaginária pode ser removida por meio de uma aproximação de Taylor sem afetar significativamente a parte real da função. Para uma aproximação de segunda ordem, tal que $\mathcal{Q}_5(\varepsilon_{dd}) \approx 1 + \frac{3}{2}\varepsilon_{dd}^2$, o comportamento de $\mathcal{Q}_5(\varepsilon_{dd})$, e de sua correspondente aproximação linear são mostrados na Fig. 16a. Observe na Fig. 16 que o erro relativo associado a esta aproximação permanece inferior a 6%, o que justifica seu uso.

Para o caso mais geral de um sistema não homogêneo, ainda seguindo Lima e Pelster (LIMA; PELSTER, 2011; LIMA; PELSTER, 2012), a correção na energia pode ser obtida através da aproximação de densidade local. Nessa situação, o potencial químico corrigido ($\mu = \partial E_{qf} / \partial N$) devido às flutuações quânticas é escrito como $\mu(\mathbf{r}) = g_{qf} |\psi(\mathbf{r})|^3$, em que ψ é a função de onda do condensado no regime de campo médio e g_{qf} é uma

Figura 16 – Fator de correção na energia de LHY



Fonte: Elaborado pelo autor. a) Gráficos de $\mathcal{Q}_5(\varepsilon_{dd})$ e sua respectiva aproximação linear. Para $\varepsilon_{dd} > 1$ \mathcal{Q}_5 tem uma pequena parte imaginária e a parte real é negativa. Assim, a linha pontilhada corresponde à $|\text{Re}(\mathcal{Q}_5)|$. b) Erro percentual entre a função \mathcal{Q}_5 e sua respectiva aproximação de segunda ordem. Observe que, mesmo para valores de $\varepsilon_{dd} > 1$, o erro permanece inferior a 6%.

abreviação, definida como:

$$g_{qf} = \frac{32g}{3} \sqrt{\frac{a_s^3}{\pi}} \mathcal{Q}_5(\varepsilon_{dd}). \quad (4.4)$$

Conseqüentemente, adicionando essa correção na EGP (3.8), finalmente chegamos na chamada EGP estendida:

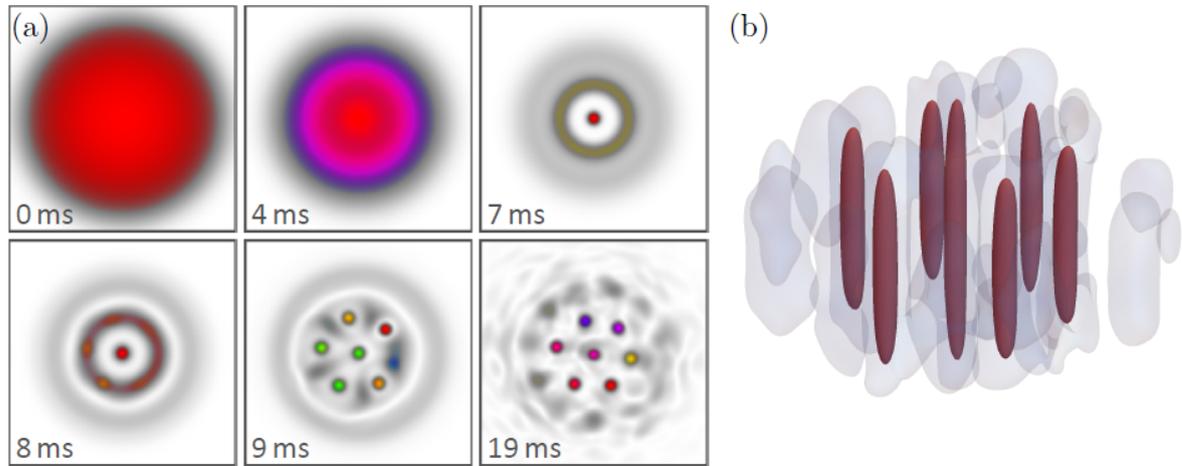
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \Phi_{dd}(\mathbf{r}, t) + g_{qf}|\Psi(\mathbf{r}, t)|^3 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (4.5)$$

que descreve adequadamente condensados fortemente dipolares e dá origem à física das gotículas quânticas dipolares para quaisquer valores de a_s e λ (WÄCHTLER; SANTOS, 2016; BAILLIE *et al.*, 2016).

Uma simulação desta equação para diferentes momentos no tempo e após a modulação de a_s (com $\lambda = 3$), é mostrada na Fig. 17 para um condensado com aproximadamente 15.000 átomos de ^{164}Dy . Nessa simulação fica claro que Eq. (4.5) apresenta, pelo menos, duas soluções distintas e que a transição CBE-gotículas ($t = 9$ ms) é precedida por uma nuvem de partículas de formato toroidal, com densidade inferior a do pico central correspondente ao CBE restante. Este comportamento não foi observado experimentalmente, mas está diretamente relacionado com a instabilidade de Rosensweig.

Uma simulação semelhante é apresentada na Fig. 18, retirada da Ref. (BAILLIE *et al.*, 2016), para o caso em que $\lambda < 1$. Nesta situação a Eq. (4.5) possui apenas uma solução, o que permite estudar a configuração de gotícula única observada. De fato, após a modulação de a_s , a solução de gotícula é observada no interior da armadilha (linhas

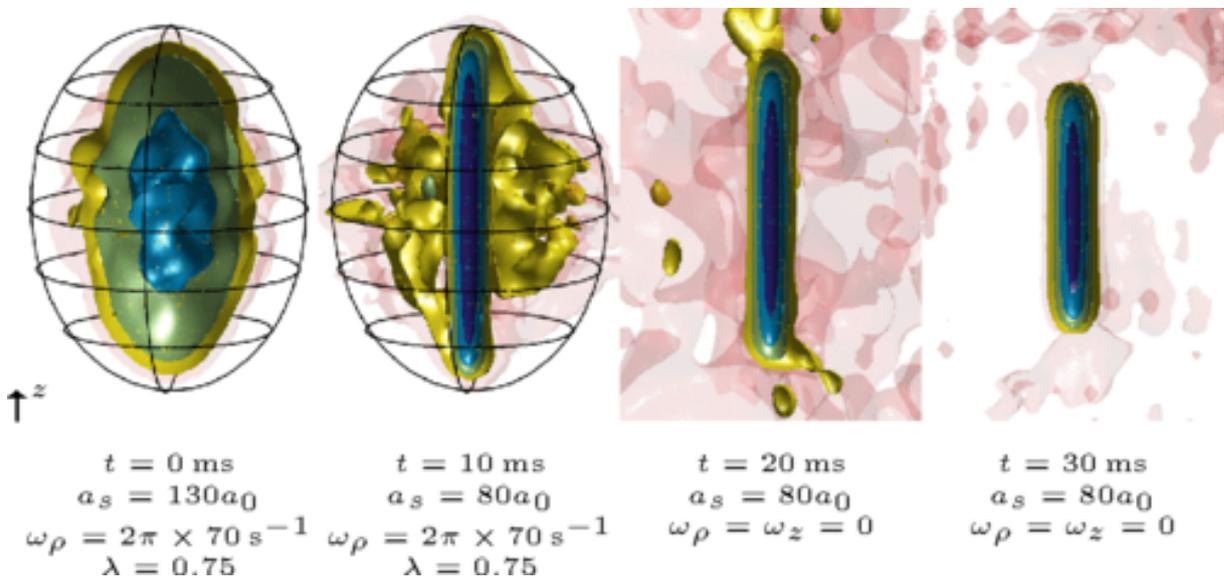
Figura 17 – Ilustração computacional do padrão de gotículas quânticas dipolares a partir de simulações do EGP estendida



Fonte: WENZEL (2018). a) Simulação de (4.5) para um condensado com aproximadamente 15.000 átomos de ^{164}Dy preso em uma armadilha com $\lambda = 3$. O tempo t é contado a partir da modulação de a_s . As cores são proporcionais ao logarítmico da densidade. Cores mais escuras correspondem à densidades mais altas. b) Distribuição de densidades de um padrão completamente formado.

pretas) e permanece estável mesmo após o desligamento da armadilha, comprovando o caráter autoligado da solução.

Figura 18 – Ilustração computacional do comportamento autoligado da solução de gotícula única



Fonte: Baillie *et al.* (2016). As linhas pretas representam a armadilha de confinamento. Após a formação da gotícula em $t = 10 \text{ ms}$, a armadilha é desligada em $t = 20 \text{ ms}$. Esta gotícula fica estável mesmo na ausência da armadilha, e apresenta uma densidade superior ao do CBE inicial.

4.3.2 Aproximação gaussiana para gotícula quânticas dipolares

Resultados semelhantes também podem ser obtidos a partir de um procedimento variacional baseado na aproximação gaussiana correspondente (BAILLIE *et al.*, 2016; WÄCHTLER; SANTOS, 2016). A energia total para essa nova configuração é obtida a partir do seguinte funcional de energia corrigido:

$$E[\psi] = \int d^3r \left[-\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\psi|^2 + |\psi|^2 V_{ext} + \frac{g}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2} |\psi|^2 \Phi_{dd} + \frac{2}{5} g_{gf} |\psi|^3 \right] \psi, \quad (4.6)$$

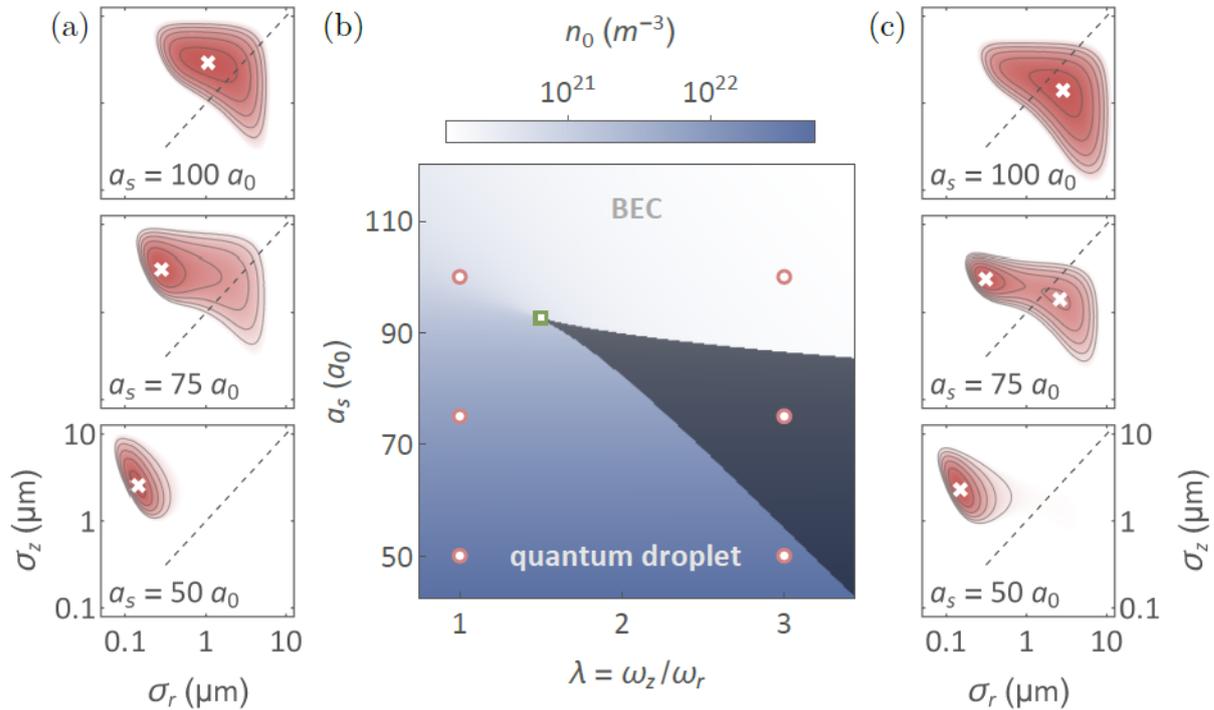
em que o último termo contabiliza a energia devido às flutuações quânticas. Substituindo o ansatz (2.35) neste funcional, a energia por partícula e em unidades de $\hbar\bar{\omega}$ é encontrada como (BAILLIE *et al.*, 2016; WÄCHTLER; SANTOS, 2016):

$$\begin{aligned} \frac{E}{N\hbar\bar{\omega}} &= \frac{\bar{a}^2}{4} (\sigma_x^{-2} + \sigma_y^{-2} + \sigma_z^{-2}) + \frac{1}{\bar{a}^2\bar{\omega}^2} (\omega_x^2\sigma_x^2 + \omega_y^2\sigma_y^2 + \omega_z^2\sigma_z^2) + \frac{N\bar{a}^2 a_s}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}^3} [2 - \varepsilon_{ddf}(\kappa_x, \kappa_y)] \\ &+ \frac{512\sqrt{2}\bar{a}^2}{75\sqrt{5}\bar{\sigma}^{9/2}} N^{3/2} a_s^{5/2} \mathcal{Q}_5(\varepsilon_{dd}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Um estudo baseado nesta energia vem sendo aplicado com sucesso na obtenção de propriedades do estado fundamental e excitações de baixas frequências das gotículas (BAILLIE *et al.*, 2016; WÄCHTLER; SANTOS, 2016). Na Fig. 19, por exemplo, o gráfico dessa energia em função dos eixos radial e axial que a minimizam é mostrado para diferentes valores de a_s e para duas situações de λ . Para $\lambda = 1$ (Fig. 19a) a modulação de a_s é acompanhada uma variação contínua na posição de mínimo da energia, resultando em um mínimo local ($a_s = 50a_0$) com *aspect ratio* $\kappa < 1$. Este mínimo caracteriza a solução de gotícula única observada experimentalmente ou através de simulações de (4.5). Através desta análise vemos que pico de densidade dessa gotícula é, pelo menos, três ordens de grandeza maior (Fig. 19b) que a da correspondente fase inicial ($a_s = 100a_0$) e que a sua geometria apresenta um *aspect ratio* κ em forma de charuto ($\kappa < 1$), como pode ser observado pela simulação da Fig. 18.

Para $\lambda = 3$, a transição CBE-gotícula é mostrada na Fig. 19c. Diferentemente do primeiro caso, entretanto, esta transição é caracterizada por possuir dois mínimos em $a_s = 75a_0$. Estes parâmetros correspondem justamente aos parâmetros experimentais usados na primeira observação das gotículas quânticas, o que permite inferir que a solução encontra lá está situada em uma região de biestabilidade (região mais escura na Fig. 19b). Esta região de biestabilidade apresenta um ponto triplo em $\lambda_c = 1,5$ e $a_c = 93a_0$ e depende

Figura 19 – Estudo da transição CBE-gotícula quântica dipolar a partir da energia variacional



Fonte: WENZEL (2018). a,c) Gráfico da energia (4.7) para diferentes valores de a_s e para $\lambda = 1$ (a) e $\lambda = 3$ (c). A posição de mínimo é marcada com uma cruz branca. b) Diagrama de fases em função de a_s , λ e d pico de densidade. Para $\lambda > \lambda_c$ (retângulo verde) sempre existirá uma região de biestabilidade (parte mais escura) com dois mínimos.

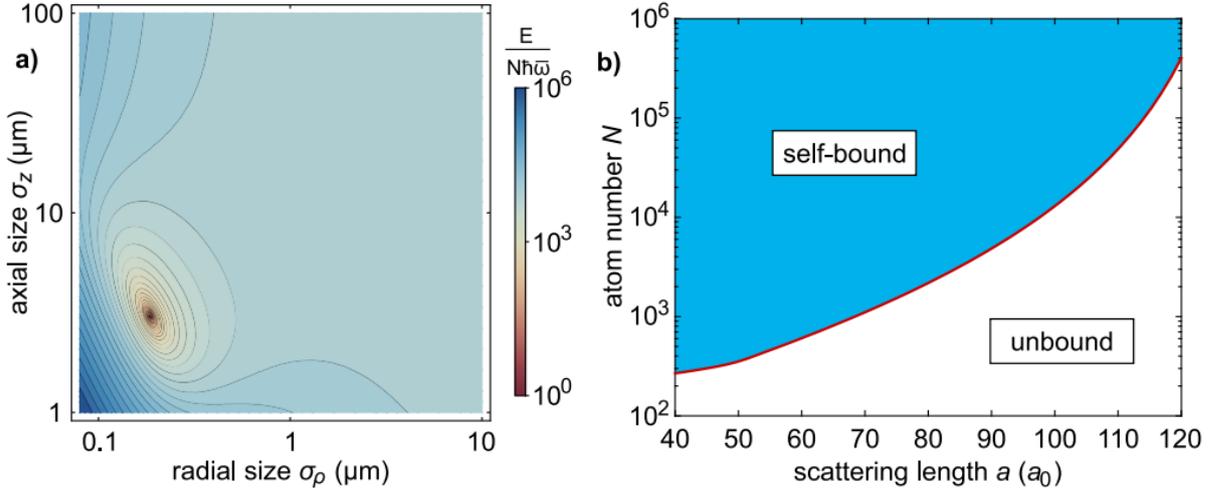
de parâmetros tais como o número de partículas e a frequência média de oscilação da armadilha.

Para valores ainda mais baixos de a_s , este comportamento biestável desaparece resultando novamente em uma solução única de gotícula. Isto permite concluir que o padrão triangular de muitas gotículas não constitui verdadeiramente como o estado fundamental do sistema. No entanto, devido à perda de átomos através da recombinação de três corpos, esta transição não foi observada experimentalmente.

Um estudo semelhante foi feito para estudar o caráter autoligado da gotícula. Na Fig. 20a. retirada da Ref. (SCHMITT, 2017), o gráfico da energia para a situação em que a armadilha foi desligada é mostrado. Mesmo na ausência da armadilha externa, um mínimo dessa energia é ainda assim observado para valores finitos de σ_η , o que demonstra o caráter autoligado da gotícula quântica. Na Fig. 20b é indicado a relação deste mínimo com o número de átomos.

Para *striped states* um procedimento variacional semelhante pode ser aplicado. A fim de melhor caracterizar a transição de uma para duas gotículas, entretanto, os autores

Figura 20 – Estudo variacional da solução de gotícula única



Fonte: SCHMITT (2017). a) Gráfico de (4.7) na situação em que a energia da armadilha é ignorada. Apesar deste termo, um mínimo de energia é ainda assim observado. b) Relação entre este mínimo e os parâmetros N e a_s .

(WENZEL *et al.*, 2017) têm sugerido um estudo baseado em uma densidade que é a soma de duas funções gaussianas do tipo (2.35), isto é,

$$n(\mathbf{r}) \equiv |\Psi(\mathbf{r})|^2 = |\psi(x - d/2, y, z)|^2 + |\psi(x + d/2, y, z)|^2, \quad (4.8)$$

em que d é a distância de separação entre as gotículas.

Baseado neste novo ansatz a energia total do sistema é função dos parâmetros σ_η e d , e foi encontrada como (WENZEL *et al.*, 2017):

$$\begin{aligned} \frac{E}{N\hbar\bar{\omega}} &= \frac{\bar{a}^2}{4} (\sigma_x^{-2} + \sigma_y^{-2} + \sigma_z^{-2}) + \frac{1}{4\bar{a}^2\bar{\omega}^2} \left[\omega_x^2 \left(\sigma_x^2 + \frac{1}{2}d^2 \right) + \omega_y^2\sigma_y^2 + \omega_z^2\sigma_z^2 \right] \\ &+ \frac{N\bar{a}^2 a_s}{2\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}^3} \left[1 + \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) - \varepsilon_{dd} (f(\kappa_x, \kappa_y) + \mathcal{I}_{dip}(\kappa_x, \kappa_y, u)) \right] \\ &+ \frac{512\sqrt{2}\bar{a}^2}{75\sqrt{5}\pi^{7/4}\bar{\sigma}^{9/2}} N^{3/2} a_s^{5/2} \mathcal{I}_{qf}(u) \mathcal{Q}_5(\varepsilon_{dd}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que $u \equiv d/\sigma_x$. Observe que, para $d = 0$, a solução de gotícula única (4.7) é recuperada.

Nesta nova energia, a função

$$\mathcal{I}_{dip}(\kappa_x, \kappa_y, u) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) - 3 \frac{\kappa_x \kappa_y}{(1 - \kappa_x^2)^{3/2}} \int_0^{\sqrt{1-\kappa_x^2}} d\xi \frac{\xi^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2} \frac{\kappa_x^2 \xi^2}{(1-\kappa_x^2)(1-\xi^2)}\right)}{\sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1 - \xi^2 \frac{1-\kappa_y^2}{1-\kappa_x^2}}} \quad (4.10)$$

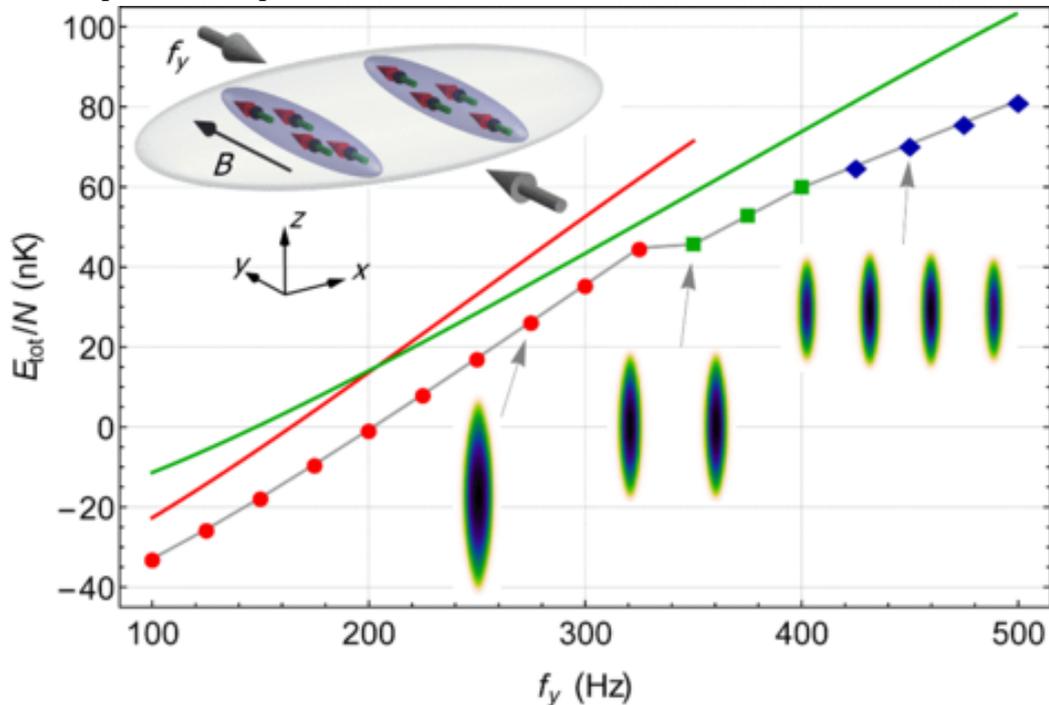
caracteriza a anisotropia do sistema, reduzindo-se a $f(\kappa_x, \kappa_y)$ para $u = 0$. Além disso, $\mathcal{I}_{qf}(u)$ é uma termo corretivo para a energia de flutuação quântica. Esse termo é dado através da integral:

$$\mathcal{I}_{qf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{5}{2}u^2\right) \int_0^\infty dv e^{-v^2} \cosh\left(\sqrt{\frac{2}{5}}uv\right)^{5/2}, \quad (4.11)$$

para a qual se tem $\mathcal{I}_{qf}(0) = 1$.

Observe que, embora a solução de *striped states* tenha sido observada experimentalmente a partir de um campo magnético em rotação, a energia acima não leva em consideração a rotação deste campo. Apesar disso, um estudo variacional da transição é, ainda assim, possível. Na figura 21, o gráfico da energia variacional total para $d = 0$ (linha vermelha) e $d > \sigma_x > 0$ (linha verde) em função da frequência $f_y = 2\pi\omega_y$ é mostrada. Para $f_y \gtrsim 200$ Hz a transição de uma para duas gotículas é observada, o que confirma a previsão de que para geometrias ainda mais prolatas uma nova transição é observada.

Figura 21 – Energia variacional e numericamente obtidas para *striped states* de gotículas quânticas dipolares



Fonte: Wenzel *et al.* (2017). As linhas contínuas representam as soluções variacionais, sendo a linha vermelha correspondente ao caso de uma única gotícula e a linha verde ao de duas gotículas. A transição segundo este procedimento variacional acontece para $f_y \gtrsim 200$ Hz. Por outro lado, as linhas pontilhadas correspondem às soluções numericamente obtidas a partir da EGP estendida. Estas soluções preveem ainda mais *stripes* com o aumento de f_y que não são encontradas através do procedimento variacional aplicado.

Em simulações com a EGP estendida, transições ainda mais acentuadas são obtidas na medida em que f_y se torna cada vez maior (linha pontilhada na Fig. 21). Nestas simulações, a transição de uma para duas gotículas acontece apenas $f_y \gtrsim 340$ Hz, o que demonstra a fragilidade do modelo variacional adotado.

Esta característica pode estar relacionada com consideração de um campo magnético de orientação fixa em (4.9). Assim, levando em consideração a importância

desses *striped states* na física dos supersólidos, nós estendemos, no próximo capítulo, este formalismo inicial pra incluir o efeito da orientação do campo.

5 STRIPES DE GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES

No capítulo anterior, introduzimos as gotículas quânticas dipolares e estudamos algumas de suas principais propriedades. Vimos que estas propriedades dependem de parâmetros como o *aspect ratio* da armadilha e foram estudadas na literatura tanto do ponto de vista experimental quanto teórico. A teoria variacional de *striped states* desenvolvida na Ref. (WENZEL *et al.*, 2017), entretanto, falha em descrever precisamente o comportamento da transição associada. Neste capítulo, estendemos esta teoria na tentativa caracterizar melhor estes estados.

5.1 Observação experimental de *striped states* em gotículas quânticas dipolares

A solução de *striped states* de gotículas quânticas dipolares foi proposta teoricamente em 2016 na Ref. (CINTI *et al.*, 2017), mas só foi observada experimentalmente em um trabalho de 2017 (WENZEL *et al.*, 2017). Estes estados foram observados a partir de um sistema de gotícula única em uma armadilha com *aspect ratio* $\lambda \ll 1$, e o mecanismo de controle no número de *stripes* no sistema se deu através da orientação do campo magnético externo.

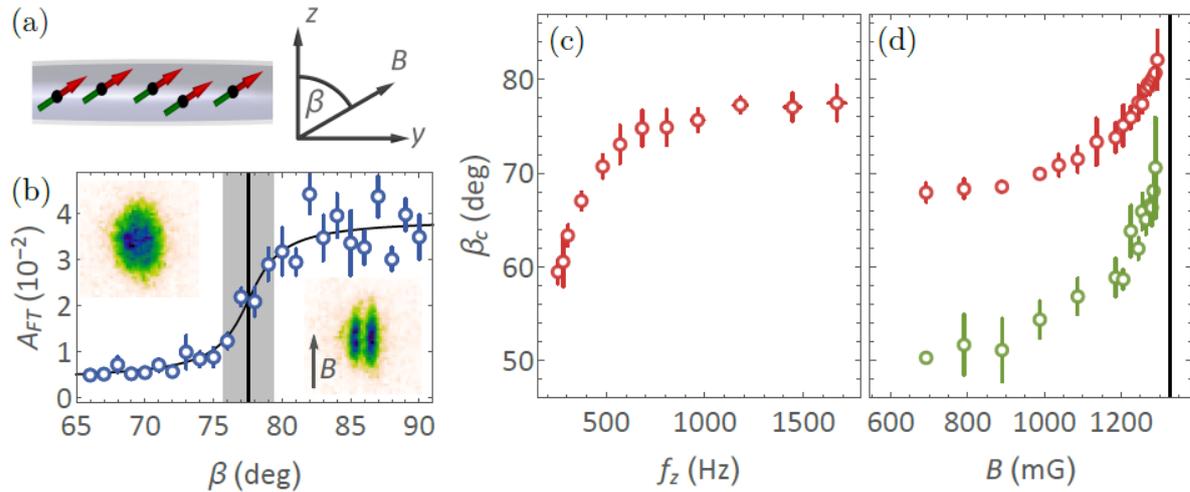
Esta modulação da orientação do campo é permitida graças à introdução de uma *lightsheet* no *Magneto-Optical Trap* (MOT), e serve como um mecanismo de ajuste para o valor de a_{dd} , em um procedimento semelhante ao utilizado no experimento da Fig. 6, mas com a diferença de que o ângulo de rotação do campo acontece apenas sobre o plano zy , segundo o ângulo β^1 da Fig. 22a.

Esta rotação induz uma transição de uma (imagem à esquerda na Fig. 22b) para duas gotículas (imagem à direita) a partir de um certo ângulo crítico β_c e o estado final se caracteriza como a solução de *stripes* da Ref. (CINTI *et al.*, 2017), visto que as gotículas estão distribuídas em uma configuração *head-to-tail*. Este ângulo crítico acontece na faixa entre $75^\circ \lesssim \beta_c \lesssim 80^\circ$ (barra cinza na Fig. 22b). Este ângulo β define a orientação das gotículas em relação aos eixos da armadilha. Este efeito é chamado de magnetostrição e representa a primeira observação *in situ* deste fenômeno em CBEs dipolares², embora

¹ A taxa máxima de $\dot{\beta}$ que resultou em efeitos apreciáveis nas propriedades do sistema é inferior a 0,4 graus/ms.

² Em gases de Fermi degenerados efeito semelhante tem sido observado. Neste caso, a superfície de Fermi

Figura 22 – Resultados experimentais que demonstraram a existência de *striped states* em gotículas quânticas dipolares



Fonte: Wenzel *et al.* (2017). a) Ilustração esquemática da rotação dos dipolos segundo o ângulo de inclinação β . Os eixos z e y correspondem aos eixos da armadilha. b) Imagem *in situ* das duas gotículas (inferior à direita) observadas após o campo atingir a orientação do ângulo crítico. Estas gotículas são alongadas em direção ao eixo de polarização do campo e suas orientações são solidárias à orientação do campo. A região de ângulo crítico é indicado pela faixa cinza de largura $75^\circ < \beta_c < 80^\circ$. Este valor é obtido a partir da função auxiliar A_{FT} (para mais detalhes sobre esta função, sugerimos a Ref. (WENZEL *et al.*, 2017)). c) Ângulo crítico para diferentes valores da frequência f_z em um situação em que $B = 1240(5)$ mG. Para $f_z \gtrsim 900$ Hz, β_c satura para um valor entre 70° e 80° . d) Dependência de β_c com a intensidade de B para $f_z = 300(10)$ Hz (pontos em verde) e $f_z = 950(10)$ Hz (pontos em vermelho). Observe que β_c apresenta um comportamento assintótico para valores de B cada vez mais próximos de $B_0 = 1326(3)$ mG (indicado pela linha preta vertical)

o mesmo efeito já tenha sido relatado em experimentos de tempo de voo com o ^{52}Cr (STUHLER *et al.*, 2005).

Segundo os resultados da Fig. 22c, este ângulo crítico β_c cresce conforme a frequência $f_z \equiv \omega_z/2\pi$ é aumentada, mas apresenta, aparentemente, um ponto de saturação em $f_z \gtrsim 900$ Hz. Esta leitura indica que a interação dipolar independe de f_z para valores a partir deste ponto, levando a um β_c situado justamente na região da Fig. 22a.

Por outro lado, como ilustrado na Fig. 22d, a relação entre a intensidade do campo e esse β_c indica que, para B_0 (linha vertical indicada na figura), este ângulo atinge o seu máximo valor. Este campo B_0 corresponde ao campo de ressonância de Feshbach do sistema e tem valor $B_0 = 1326(3)$ mG. A relação de β_c com o campo é deferente para f_z diferentes, tendo um β_c maior para geometrias mais prolatas (pontos em vermelho).

é que gira solidária ao campo, enquanto a distribuição espacial permanece fixa (AIKAWA *et al.*, 2014).

5.2 Aproximação gaussiana para um sistema de duas gotículas inclinadas

Na Sec. 4.3.2 apresentamos o modelo variacional proposto na Ref. (WENZEL *et al.*, 2017) que permitiu descrever a transição de uma para duas gotículas prevista numericamente em (CINTI *et al.*, 2017) e observada pelo experimento da Ref. (WENZEL *et al.*, 2017). Como ressaltado na Sec. 4.3.2, entretanto, este modelo é impreciso na descrição da transição. Nesta seção, apresentamos nossa proposta de modelo variacional para esses sistemas. Este modelo é semelhante ao proposto em (WENZEL *et al.*, 2017), mas leva em conta a orientação do campo magnético externo e a influência da superposição das gotículas no momento da transição.

5.2.1 Caracterização do modelo

Para iniciar o estudo sobre a influência da orientação do campo magnético na física de *striped states* de gotículas quânticas dipolares, começamos apresentando o seguinte potencial de IDD generalizado:

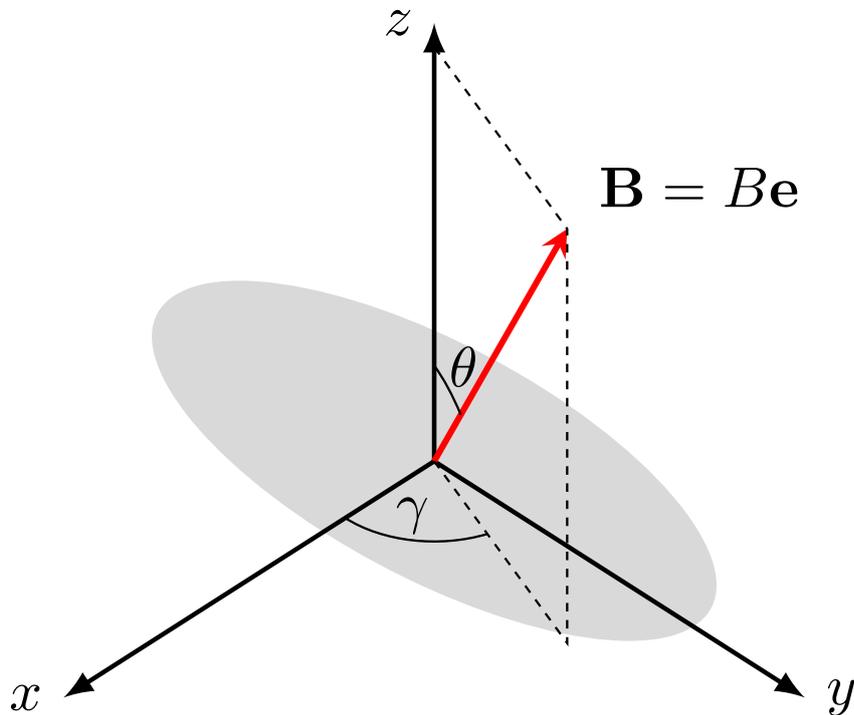
$$V_{dd}(\mathbf{r}) = -\frac{C_{dd}}{4\pi} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})^2 - |\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5}, \quad (5.1)$$

em que $\mathbf{e} = (\sin \beta \cos \gamma, \sin \beta \sin \gamma, \cos \beta)$ é o vetor unitário que define a orientação do campo em relação aos eixos da armadilha. Este potencial tem sido aplicado em estudos recentes com gases de Fermi degenerados (VELJIĆ *et al.*, 2018; VELJIC *et al.*, 2019) e os ângulos β e γ são os indicados na Fig. 23, em que β corresponde ao ângulo da Fig. 22a. Por outro lado, o ângulo adicional γ é introduzido por nós para caracterizar a influência da orientação do campo sobre o plano xy . Embora no experimento este ângulo permaneça fixo, é possível que sua influência desempenhe um papel importante na física do sistema.

No que se refere ao ansatz, nossa proposta adota uma função de onda que é soma de duas funções gaussianas posicionadas em $x = \pm d/2$. A fim de descrever o comportamento para valores pequenos da distância d , entretanto, esta função de onda total, ao contrário da função usada em (WENZEL *et al.*, 2017), é adotada ser uma superposição das funções de cada gotícula individual, ou seja,

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + e^{-u^2})}} [\psi_+(\mathbf{r}) + \psi_-(\mathbf{r})], \quad (5.2)$$

Figura 23 – Ilustração esquemática da orientação do campo magnético



Fonte: Elaborado pelo autor. Os eixos x , y e z correspondem aos eixos da armadilha. O vetor unitário \mathbf{e} , por outro lado, define a orientação de polarização do campo em relação a esses eixos. Observe que a rotação pelo o ângulo β corresponde à mesma rotação considerada no experimento da Ref. (WENZEL *et al.*, 2017; AIKAWA *et al.*, 2014). O ângulo γ , por sua vez, é introduzido para permitir a rotação mais geral possível.

em que $u \equiv u/2\sigma_x$ e $\psi_{\pm}(\mathbf{r})$ é dado através de:

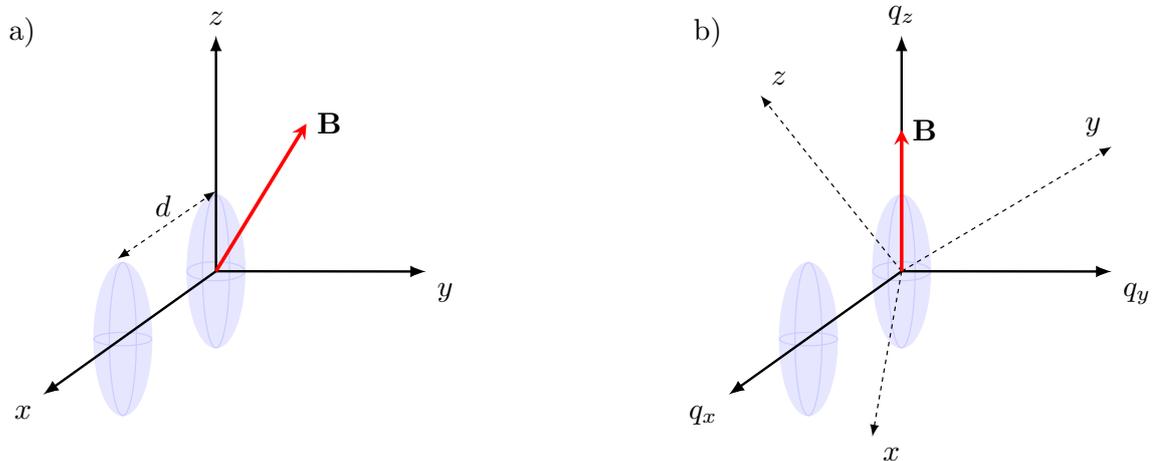
$$\psi_{\pm}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{N}{\pi^{3/2}\bar{\sigma}^3}} \exp\left(-\frac{\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right). \quad (5.3)$$

Esta função de onda total, embora o experimento (WENZEL *et al.*, 2017) indique apenas um cenário em que as gotículas como um todo giram juntas com o campo, é considerada em dois diferentes cenários, conforme esquematizado na Fig. 24. No primeiro desses cenários, Fig. 24a, o vetor posição da função de onda correspondente, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, é considerado fixo em relação aos eixos da armadilha, e apenas os dipolos de cada gotícula é que giram seguindo o campo. Esta situação ao observado no experimento, mas pode ser útil para estudar a influência da orientação das gotículas.

No segundo cenário (Fig. 24b), por outro lado, as gotículas como um todo giram seguindo o campo. Nesta configuração, o novo vetor posição, em relação à armadilha

fixa, é agora dado por $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ e dipolos de cada gotícula estão orientados na direção q_z desse novo sistema de eixos, relacionado com o sistema fixo através da relação:

Figura 24 – Ilustração esquemática dos dois cenários considerados



Fonte: Elaborado pelo autor. a) Neste cenário o vetor posição $\mathbf{r} = (x, y, z)$ da função de onda é fixo em relação aos eixos da armadilha. Nesta situação, apenas os dipolos giram com o campo. b) Neste segundo cenário, por outro lado, o novo vetor posição das gotículas é $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$, que gira junto com o campo. Estes eixos ordenados se relacionam com os eixos fixos da armadilha segundo a Eq. (5.4). Para γ fixo, este cenário corresponde exatamente à situação do experimento (WENZEL *et al.*, 2017).

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\sin \beta & \sin \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

A interação dipolar nesta configuração é, então, esperada independer da orientação do campo magnético externo. Por outro lado, o potencial de aprisionamento externo deve ser reescrito como:

$$V_{ext}(\mathbf{q}) = \frac{M}{2} \sum_{\eta=x,y,z} \omega_{q_\eta}^2 \left(\sum_{\nu=x,y,z} \mathbb{A}_{\eta\nu} q_\nu \right)^2, \quad (5.5)$$

onde $\mathbb{A}_{\eta\nu}$ são os elementos da matriz transposta associada à transformação (5.4). Observe que este cenário correspondente exatamente à situação observada em experimento quando γ é mantido fixo, embora o modelo variacional proposto não considere a influência do potencial (5.5).

5.2.2 Energia total

Tendo introduzido os elementos básicos de nosso modelo, calculamos agora a energia total dos sistemas através do funcional de energia (4.6). Estas energias são representadas em unidades adimensionais através dos parâmetros:

$$\bar{\sigma}_\eta \equiv \frac{\sigma_\eta}{\bar{a}}, \quad \bar{\omega}_\eta \equiv \frac{\omega_\eta}{\bar{\omega}}, \quad \bar{a}_s \equiv \frac{a_s}{\bar{a}}, \quad (5.6)$$

e a energia do primeiro cenário é encontrada como:

$$\begin{aligned} \frac{E_{tot}^{(1)}}{N\hbar\bar{\omega}} = & \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\bar{\sigma}_x^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_y^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_z^2} - 2 \frac{u^2 \exp(-u^2)}{\bar{\sigma}_x^2 (1 + e^{-u^2})} \right] + \frac{1}{4} \left[\bar{\omega}_x^2 \bar{\sigma}_x^2 \left(1 + \frac{2u^2}{1 + e^{-u^2}} \right) + \bar{\omega}_y^2 \bar{\sigma}_y^2 + \bar{\omega}_z^2 \bar{\sigma}_z^2 \right] \\ & + \frac{N\bar{a}_s \exp(-2u^2)}{\sqrt{2\pi} (1 + e^{-u^2})^2 \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y \bar{\sigma}_z} \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \exp(2u^2) + 2 \exp\left(\frac{u^2}{2}\right) - \varepsilon_{dd} f_G(\kappa_x, \kappa_y, u, \beta, \gamma) \right] \\ & + \frac{256N^{3/2} \bar{a}_s^{5/2} \mathcal{Q}_5(\epsilon_{dd})}{75\sqrt{5} \pi^{7/4} (1 + e^{-u^2})^{5/2} (\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y \bar{\sigma}_z)^{3/2}} \left(1 + 5e^{-\frac{8}{5}u^2} + 10e^{-\frac{12}{5}u^2} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

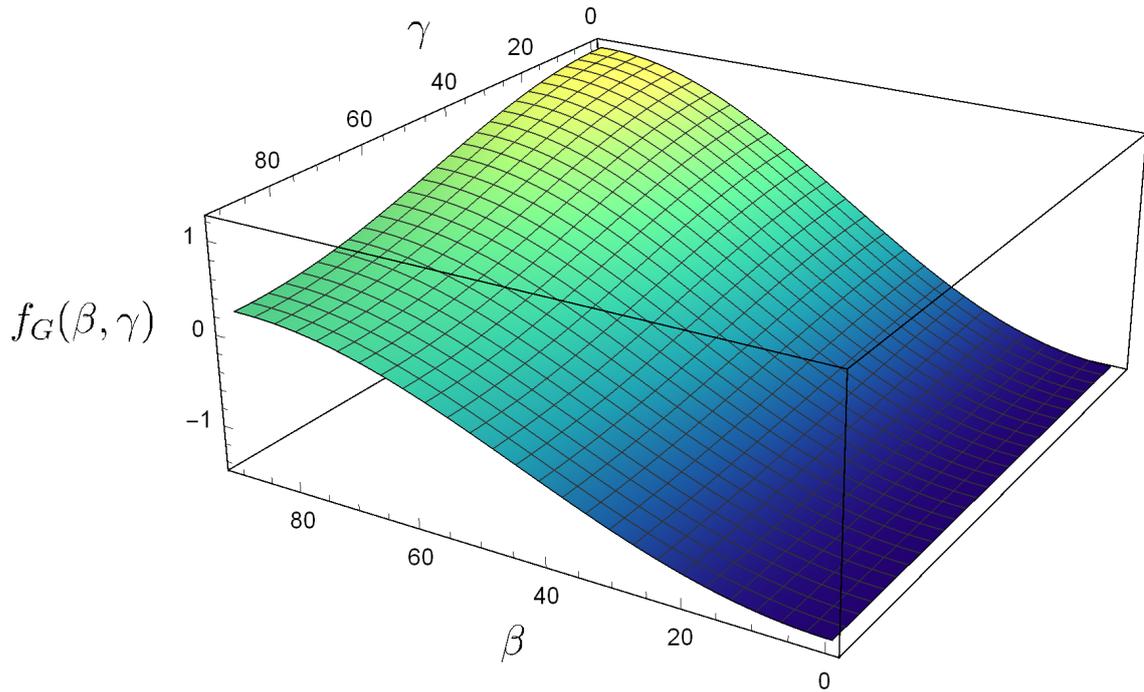
Nessa energia, $f_G(\kappa_x, \kappa_y, u, \beta, \gamma)$ generaliza a função $\mathcal{I}_{dip}(\kappa_x, \kappa_y, u)$ para incluir os efeitos da orientação do campo e é válida mesmo para valores pequenos de u . O gráfico dessa função em termos dos ângulos β e γ é mostrado na Fig. 25 e sua forma funcional é discutida no apêndice A. Por agora, enfatizamos apenas que $f_G(\kappa_x, \kappa_y, u, 0, 0)$ apresenta $\mathcal{I}_{dip}(\kappa_x, \kappa_y, u)$ como caso particular e reduz-se a $f(\kappa_x, \kappa_y)$ quando $u = 0$ e $\beta = \gamma = 0$. Conseqüentemente, a solução de gotícula única (4.7) pode ser recuperada a partir de (5.7).

Para o segundo cenário, a substituição do ansatz correspondente resultou na seguinte energia total:

$$\begin{aligned} \frac{E_{tot}^{(2)}}{N\hbar\bar{\omega}} = & \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\bar{\sigma}_{q_x}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{q_y}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{q_z}^2} - \frac{2u^2 \exp(-u^2)}{\bar{\sigma}_{q_x}^2 (1 + e^{-u^2})} \right] + \frac{1}{4} \left[\sum_{\eta,\nu} \bar{\omega}_{q_\eta}^2 \mathbb{A}_{\eta\nu}^2 \bar{\sigma}_\nu^2 + \frac{2u^2 \bar{\sigma}_{q_x}^2 e^{u^2}}{1 + e^{u^2}} \sum_\eta \mathbb{A}_{\eta x}^2 \bar{\omega}_{q_\eta}^2 \right] \\ & + \frac{N\bar{a}_s \exp(-2u^2)}{\sqrt{2\pi} (1 + e^{-u^2})^2 \bar{\sigma}_{q_x} \bar{\sigma}_{q_y} \bar{\sigma}_{q_z}} \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \exp(2u^2) + 2 \exp\left(\frac{u^2}{2}\right) - \varepsilon_{dd} f_{G1}(\kappa_{q_x}, \kappa_{q_y}, u) \right] \\ & + \frac{256N^{3/2} \bar{a}_s^{5/2} \mathcal{Q}_5(\epsilon_{dd})}{75\sqrt{5} \pi^{7/4} (1 + e^{-u^2})^{5/2} (\bar{\sigma}_{q_x} \bar{\sigma}_{q_y} \bar{\sigma}_{q_z})^{3/2}} \left(1 + 5e^{-\frac{8}{5}u^2} + 10e^{-\frac{12}{5}u^2} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Neste cenário, as gotículas como um todo giram seguindo a orientação do campo, tal que os seus dipolos estão paralelos ao eixo q_z do novo sistema de referência. Nesta configuração, a função de anisotropia correspondente, $f_{G1}(\kappa_{q_x}, \kappa_{q_y}, u)$, independe dos ângulos de rotação, o que leva a uma função semelhante ao da energia (4.9), mas com um termo adicional devido à superposição na função de onda.

Figura 25 – Gráfico da função de anisotropia generalizada



Fonte: Elaborado pelo autor. Gráfico de $f_G(\kappa_x, \kappa_y, u, \beta, \gamma)$ em função dos ângulos de inclinação (em graus) para $\kappa_x = 3$, $\kappa_y = 2$ e $u = 0.6$. Observe que nenhuma variação no valor de f_G é observada para $\beta = 0$. Por outro lado, para $\beta > 0$, uma variação acentuada de f_G é acontece para diferentes valores de γ . Esta característica justifica o uso deste ângulo em nosso modelo.

Tendo obtido a energia total dos dois cenários, um estudo variacional semelhante ao feito em (WENZEL *et al.*, 2017) pode ser agora aplicado para estudar a transição de *striped states*. Este estudo está, ainda, em fase de implementação e é feito em colaboração com pesquisadores da Universidade Federal de São Carlos e Universidade de São Paulo.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta monografia, investigamos a física de gases dipolares ultrafrios desde a sua condensação de Bose-Einstein até os recentes observados *striped states* de gotículas quânticas. Estes sistemas ultrafrios têm sido aplicados em diferentes contextos na física e vêm se confirmando como um modelo ideal para o estudo da superfluidez e dos supersólidos.

Para os supersólidos, entretanto, embora os experimentos venham demonstrando este efeito (TANZI *et al.*, 2018; ROCCUZZO; ANCILOTTO, 2019), um modelo variacional simples que o descreva, precisamente, ainda não foi estabelecido. Nesta monografia, apresentamos nossa proposta nessa direção.

No experimento, esses exóticos estados supersólidos são manifestados através de *striped states* de gotículas quânticas dipolares (WENZEL *et al.*, 2017; TANZI *et al.*, 2018; ROCCUZZO; ANCILOTTO, 2019). O estado supersólido nesses sistemas, diferentemente dos efeitos observados em (LÉONARD *et al.*, 2017; LI *et al.*, 2017), é devido a uma modulação na densidade do sistema induzida pela rotação do campo magnético externo, tal que um modelo teórico para descrevê-lo precisa levar em conta esta orientação. Nosso modelo considera essa possibilidade, embora ainda esteja em fase inicial e o efeito de supersólido ainda não tenha sido caracterizado.

Por outro lado, por meio de um ansatz que é a superposição de duas funções gaussianas, a energia total do estado fundamental da solução de *striped states* de duas gotículas é obtida. Esta energia é mais geral do que a energia variacional encontrada por Wenzel *et al.* (2017) e representa um resultado parcial importante desta monografia, significando em um resultado inédito na literatura.

Com essa energia em mãos, o passo seguinte é achar os parâmetros variacionais que a minimizam e, então, comparar com os resultados numéricos e experimentais existentes. Esta etapa representa o primeiro passo na caracterização variacional dos supersólidos e está sendo feita em colaboração com pesquisadores da Universidade Federal de São Carlos e Universidade de São Paulo. Estes resultados estão sendo sintetizados em um artigo que está em produção¹.

Para além do estado fundamental do sistema, esta monografia também apresenta como perspectiva o estudo sobre as excitações de baixas frequências desse conjunto de dois

¹ de OLIVEIRA NETO *et al.* (2019).

stripes. Baseados em um ansatz semelhante ao proposto por Perez-Garcia *et al.* (1996):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A(t) \prod_{\eta=x,y,z} \exp \left[-\frac{(\eta - \eta_0(t))^2}{2\omega_\eta^2} + i\eta\alpha_\eta(t) + i\eta^2\beta_\eta(t) \right], \quad (6.1)$$

mas estendido para incluir os efeitos de duas gotículas, esperamos estudar, pioneiramente, as oscilações de monopolo e quadrupolo do sistema, além das oscilações do tipo tesoura. Para este último, um estudo recente baseado em *sum rule* foi proposto para um sistema de gotícula única (FERRIER-BARBUT *et al.*, 2018). Esperamos que nosso modelo reproduza este resultado como caso particular.

REFERÊNCIAS

- AIKAWA, K.; BAIER, S.; FRISCH, A.; MARK, M.; RAVENSBERGEN, C.; FERLAINO, F. Observation of fermi surface deformation in a dipolar quantum gas. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 345, n. 6203, p. 1484–1487, 2014.
- AIKAWA, K.; FRISCH, A.; MARK, M.; BAIER, S.; RIETZLER, A.; GRIMM, R.; FERLAINO, F. Bose-einstein condensation of erbium. **Physical review letters**, APS, v. 108, n. 21, p. 210401, 2012.
- AIKAWA, K.; FRISCH, A.; MARK, M.; BAIER, S.; GRIMM, R.; FERLAINO, F. Reaching fermi degeneracy via universal dipolar scattering. **Physical review letters**, APS, v. 112, n. 1, p. 010404, 2014.
- ALLEN, J.; JONES, H. New phenomena connected with heat flow in helium ii. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 141, n. 3562, p. 243, 1938.
- ALLEN, J. F.; MISENER, A. Flow of liquid helium ii. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 141, n. 3558, p. 75, 1938.
- ANDERSON, M. H.; ENSHER, J. R.; MATTHEWS, M. R.; WIEMAN, C. E.; CORNELL, E. A. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995.
- ANDREWS, M.; TOWNSEND, C.; MIESNER, H.-J.; DURFEE, D.; KURN, D.; KETTERLE, W. Observation of interference between two bose condensates. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 275, n. 5300, p. 637–641, 1997.
- BAILLIE, D.; WILSON, R.; BISSET, R.; BLAKIE, P. Self-bound dipolar droplet: A localized matter wave in free space. **Physical Review A**, APS, v. 94, n. 2, p. 021602, 2016.
- BARANOV, M. A. Theoretical progress in many-body physics with ultracold dipolar gases. **Physics Reports**, Elsevier, v. 464, n. 3, p. 71–111, 2008.
- BARANOV, M. A.; DALMONTE, M.; PUPILLO, G.; ZOLLER, P. Condensed matter theory of dipolar quantum gases. **Chemical Reviews**, ACS Publications, v. 112, n. 9, p. 5012–5061, 2012.
- BAYM, G.; PETHICK, C. Ground-state properties of magnetically trapped bose-condensed rubidium gas. **Physical review letters**, APS, v. 76, n. 1, p. 6, 1996.
- BIJNEN, R. V.; PARKER, N.; KOKKELMANS, S.; MARTIN, A.; O'DELL, D. Collective excitation frequencies and stationary states of trapped dipolar bose-einstein condensates in the thomas-fermi regime. **Physical Review A**, APS, v. 82, n. 3, p. 033612, 2010.
- BILLY, J.; JOSSE, V.; ZUO, Z.; BERNARD, A.; HAMBRECHT, B.; LUGAN, P.; CLÉMENT, D.; SANCHEZ-PALENCIA, L.; BOUYER, P.; ASPECT, A. Direct observation of anderson localization of matter waves in a controlled disorder. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 453, n. 7197, p. 891, 2008.
- BLOCH, I.; DALIBARD, J.; ZWERGER, W. Many-body physics with ultracold gases. **Reviews of modern physics**, APS, v. 80, n. 3, p. 885, 2008.

- BOGOLYUBOV, N. N. On the theory of superfluidity. **Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz.**, v. 11, p. 23–32, 1947.
- BOMBIN, R.; BORONAT, J.; MAZZANTI, F. Dipolar bose supersolid stripes. **Physical review letters**, APS, v. 119, n. 25, p. 250402, 2017.
- BOSE, S. N. Plancks gesetz und lichtquantenhypothese. Springer, 1924.
- BÖTTCHER, F.; SCHMIDT, J.-N.; WENZEL, M.; HERTKORN, J.; GUO, M.; LANGEN, T.; PFAU, T. Transient supersolid properties in an array of dipolar quantum droplets. **Physical Review X**, APS, v. 9, n. 1, p. 011051, 2019.
- BRADLEY, C. C.; SACKETT, C.; TOLLETT, J.; HULET, R. G. Evidence of bose-einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. **Physical review letters**, APS, v. 75, n. 9, p. 1687, 1995.
- CABRERA, C.; TANZI, L.; SANZ, J.; NAYLOR, B.; THOMAS, P.; CHEINEY, P.; TARRUELL, L. Quantum liquid droplets in a mixture of bose-einstein condensates. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 359, n. 6373, p. 301–304, 2018.
- CHEINEY, P.; CABRERA, C.; SANZ, J.; NAYLOR, B.; TANZI, L.; TARRUELL, L. Bright soliton to quantum droplet transition in a mixture of bose-einstein condensates. **Physical review letters**, APS, v. 120, n. 13, p. 135301, 2018.
- CHIN, C.; GRIMM, R.; JULIENNE, P.; TIESINGA, E. Feshbach resonances in ultracold gases. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 82, n. 2, p. 1225, 2010.
- CHOMAZ, L.; BAIER, S.; PETTER, D.; MARK, M.; WÄCHTLER, F.; SANTOS, L.; FERLAINO, F. Quantum-fluctuation-driven crossover from a dilute bose-einstein condensate to a macrodroplet in a dipolar quantum fluid. **Physical Review X**, APS, v. 6, n. 4, p. 041039, 2016.
- CHU, S. Nobel lecture: The manipulation of neutral particles. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 70, n. 3, p. 685, 1998.
- CINTI, F.; CAPPELLARO, A.; SALASNICH, L.; MACRÌ, T. Superfluid filaments of dipolar bosons in free space. **Physical review letters**, APS, v. 119, n. 21, p. 215302, 2017.
- COHEN-TANNOUDJI, C. N. Nobel lecture: Manipulating atoms with photons. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 70, n. 3, p. 707, 1998.
- COOK, G.; DICKERSON, R. Understanding the chemical potential. **American Journal of Physics**, AAPT, v. 63, n. 8, p. 737–742, 1995.
- CORNELL, E. A.; WIEMAN, C. E. Nobel lecture: Bose-einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 74, n. 3, p. 875, 2002.
- COWLEY, M.; ROSENSWEIG, R. E. The interfacial stability of a ferromagnetic fluid. **Journal of Fluid mechanics**, Cambridge University Press, v. 30, n. 4, p. 671–688, 1967.

- CÓRDOVA, C. R. C. **Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensates**. 2018. 247 f. Tese (Ph.D. Thesis) — The Institute of Photonic Sciences, Universidad Politécnica de Cataluña, Cataluña, 2018.
- DALFOVO, F.; LASTRI, A.; PRICAUPENKO, L.; STRINGARI, S.; TREINER, J. Structural and dynamical properties of superfluid helium: a density-functional approach. **Physical Review B**, APS, v. 52, n. 2, p. 1193, 1995.
- DALFOVO, F.; STRINGARI, S. Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices. **Physical Review A**, APS, v. 53, n. 4, p. 2477, 1996.
- DAVIS, K. B.; MEWES, M.-O.; ANDREWS, M. R.; DRUTEN, N. J. van; DURFEE, D. S.; KURN, D.; KETTERLE, W. Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms. **Physical review letters**, APS, v. 75, n. 22, p. 3969, 1995.
- de OLIVEIRA NETO, J. F.; dos SANTOS, F. E. A.; HENN, E. A. L.; LIMA, A. R. P. Ground-state properties and elementary excitations of striped states in dipolar quantum droplets. Em preparação. 2019.
- DELFT, D. V.; KES, P. The discovery of superconductivity. **Physics Today**, v. 63, n. 9, p. 38–43, 2010.
- DEMARCO, B.; JIN, D. S. Onset of fermi degeneracy in a trapped atomic gas. **science**, American Association for the Advancement of Science, v. 285, n. 5434, p. 1703–1706, 1999.
- DONLEY, E. A.; CLAUSSEN, N. R.; CORNISH, S. L.; ROBERTS, J. L.; CORNELL, E. A.; WIEMAN, C. E. Dynamics of collapsing and exploding bose–einstein condensates. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 412, n. 6844, p. 295, 2001.
- DONNELLY, R. J. **Quantized vortices in helium II**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1991. v. 2.
- EBERLEIN, C.; GIOVANAZZI, S.; O'DELL, D. H. Exact solution of the thomas-fermi equation for a trapped bose-einstein condensate with dipole-dipole interactions. **Physical Review A**, APS, v. 71, n. 3, p. 033618, 2005.
- EDWARDS, M.; BURNETT, K. Numerical solution of the nonlinear schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms. **Physical Review A**, APS, v. 51, n. 2, p. 1382, 1995.
- EINSTEIN, A. Sitzber, kgl preuss. **Akad. Wiss**, v. 261, 1924.
- EINSTEIN, A. Zweite abhandlung, sitzber. **Kgl. Preuss. Akad. Wiss**, v. 3, 1925.
- FEDICHEV, P.; KAGAN, Y.; SHLYAPNIKOV, G.; WALRAVEN, J. Influence of nearly resonant light on the scattering length in low-temperature atomic gases. **Physical review letters**, APS, v. 77, n. 14, p. 2913, 1996.
- FEDICHEV, P.; REYNOLDS, M.; SHLYAPNIKOV, G. Three-body recombination of ultracold atoms to a weakly bound s level. **Physical review letters**, APS, v. 77, n. 14, p. 2921, 1996.
- FERIOLI, G. **Self-bound quantum droplets in Bose-Bose mixture**. 2018. 111 f. Tese (Ph.D. Thesis) — Università Degli Studi di Firenze, Florence, 2018.

FERRIER-BARBUT, I.; KADAU, H.; SCHMITT, M.; WENZEL, M.; PFAU, T. Observation of quantum droplets in a strongly dipolar bose gas. **Physical review letters**, APS, v. 116, n. 21, p. 215301, 2016.

FERRIER-BARBUT, I.; PFAU, T. Quantum liquids get thin. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 359, n. 6373, p. 274–275, 2018.

FERRIER-BARBUT, I.; SCHMITT, M.; WENZEL, M.; KADAU, H.; PFAU, T. Liquid quantum droplets of ultracold magnetic atoms. **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, IOP Publishing, v. 49, n. 21, p. 214004, 2016.

FERRIER-BARBUT, I.; WENZEL, M.; BÖTTCHER, F.; LANGEN, T.; ISOARD, M.; STRINGARI, S.; PFAU, T. Scissors mode of dipolar quantum droplets of dysprosium atoms. **Physical review letters**, APS, v. 120, n. 16, p. 160402, 2018.

FEYNMAN, R. P. Atomic theory of the λ transition in helium. **Physical Review**, APS, v. 91, n. 6, p. 1291, 1953.

FOX, C. **An introduction to the calculus of variations**. [S.l.]: Courier Corporation, 1987.

FRIED, D. G.; KILLIAN, T. C.; WILLMANN, L.; LANDHUIS, D.; MOSS, S. C.; KLEPPNER, D.; GREYTAK, T. J. Bose-einstein condensation of atomic hydrogen. **Physical Review Letters**, APS, v. 81, n. 18, p. 3811, 1998.

GADWAY, B.; YAN, B. Strongly interacting ultracold polar molecules. **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, IOP Publishing, v. 49, n. 15, p. 152002, 2016.

GIOVANAZZI, S.; GÖRLITZ, A.; PFAU, T. Tuning the dipolar interaction in quantum gases. **Physical review letters**, APS, v. 89, n. 13, p. 130401, 2002.

GIOVANAZZI, S.; GÖRLITZ, A.; PFAU, T. Ballistic expansion of a dipolar condensate. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, IOP Publishing, v. 5, n. 2, p. S208, 2003.

GIOVANAZZI, S.; PEDRI, P.; SANTOS, L.; GRIESMAIER, A.; FATTORI, M.; KOCH, T.; STUHLER, J.; PFAU, T. Expansion dynamics of a dipolar bose-einstein condensate. **Physical Review A**, APS, v. 74, n. 1, p. 013621, 2006.

GIOVANAZZI, S.; PEDRI, P.; SANTOS, L.; GRIESMAIER, A.; FATTORI, M.; KOCH, T.; STUHLER, J.; PFAU, T. Expansion dynamics of a dipolar bose-einstein condensate. **Physical Review A**, APS, v. 74, n. 1, p. 013621, 2006.

GLAUM, K.; PELSTER, A. Bose-einstein condensation temperature of dipolar gas in anisotropic harmonic trap. **Physical Review A**, APS, v. 76, n. 2, p. 023604, 2007.

GLYDE, H. Bose-einstein condensation measurements and superflow in condensed helium. **Journal of Low Temperature Physics**, Springer, v. 172, n. 5-6, p. 364–387, 2013.

GREINER, M.; MANDEL, O.; ESSLINGER, T.; HÄNSCH, T. W.; BLOCH, I. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. **nature**, Nature Publishing Group, v. 415, n. 6867, p. 39, 2002.

GRIESMAIER, A.; WERNER, J.; HENSLER, S.; STUHLER, J.; PFAU, T. Bose-einstein condensation of chromium. **Physical Review Letters**, APS, v. 94, n. 16, p. 160401, 2005.

GRIMM, R.; WEIDEMÜLLER, M.; OVCHINNIKOV, Y. B. Optical dipole traps for neutral atoms. In: **Advances in atomic, molecular, and optical physics**. [S.l.]: Elsevier, 2000. v. 42, p. 95–170.

GROSS, E. P. Structure of a quantized vortex in boson systems. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, Springer, v. 20, n. 3, p. 454–477, 1961.

HARMS, J.; TOENNIES, J. P.; DALFOVO, F. Density of superfluid helium droplets. **Physical Review B**, APS, v. 58, n. 6, p. 3341, 1998.

HAU, L. V.; BUSCH, B.; LIU, C.; DUTTON, Z.; BURNS, M. M.; GOLOVCHENKO, J. A. Near-resonant spatial images of confined bose-einstein condensates in a 4-dee magnetic bottle. **Physical Review A**, APS, v. 58, n. 1, p. R54, 1998.

HOUBIERS, M.; STOOF, H. Stability of bose condensed atomic li 7. **Physical Review A**, APS, v. 54, n. 6, p. 5055, 1996.

HUANG, K.; YANG, C. N. Quantum-mechanical many-body problem with hard-sphere interaction. **Physical review**, APS, v. 105, n. 3, p. 767, 1957.

INOUE, S.; ANDREWS, M.; STENGER, J.; MIESNER, H.-J.; STAMPER-KURN, D.; KETTERLE, W. Observation of feshbach resonances in a bose-einstein condensate. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 392, n. 6672, p. 151, 1998.

JOCHIM, S. **Bose-Einstein Condensation of Molecules**. 2004. 180 f. Tese (Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)) — Fakultät der Leopold-Franzens, Universität Innsbruck, Innsbruck, 2004.

KADAU, H.; SCHMITT, M.; WENZEL, M.; WINK, C.; MAIER, T.; FERRIER-BARBUT, I.; PFAU, T. Observing the rosenzweig instability of a quantum ferrofluid. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 530, n. 7589, p. 194, 2016.

KADAU, H. M. E. **Rosenzweig Instability and Droplets in a Quantum Ferrofluid of Dysprosium Atoms**. 2016. 140 f. Tese (Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)) — Von der Fakultät Mathematik und Physik, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2016.

KAGAN, Y.; SHLYAPNIKOV, G.; WALRAVEN, J. Bose-einstein condensation in trapped atomic gases. **Physical review letters**, APS, v. 76, n. 15, p. 2670, 1996.

KAPITZA, P. Viscosity of liquid helium below the λ -point. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 141, n. 3558, p. 74, 1938.

KETTERLE, W. Bose-einstein condensation: identity crisis for indistinguishable particles. In: **Quantum Mechanics at the Crossroads**. [S.l.]: Springer, 2007. p. 159–182.

KETTERLE, W.; DRUTEN, N. V. Evaporative cooling of trapped atoms. In: **Advances in atomic, molecular, and optical physics**. [S.l.]: Elsevier, 1996. v. 37, p. 181–236.

- KIM, E.; CHAN, M. Probable observation of a supersolid helium phase. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 427, n. 6971, p. 225, 2004.
- KNIELING, H.; RICHTER, R.; REHBERG, I.; MATTHIES, G.; LANGE, A. Growth of surface undulations at the rosenweig instability. **Physical Review E**, APS, v. 76, n. 6, p. 066301, 2007.
- KOCH, T.; LAHAYE, T.; METZ, J.; FRÖHLICH, B.; GRIESMAIER, A.; PFAU, T. Stabilization of a purely dipolar quantum gas against collapse. **Nature physics**, Nature Publishing Group, v. 4, n. 3, p. 218, 2008.
- KRAFT, S.; VOGT, F.; APPEL, O.; RIEHLE, F.; STERR, U. Bose-einstein condensation of alkaline earth atoms: Ca 40. **Physical review letters**, APS, v. 103, n. 13, p. 130401, 2009.
- LAHAYE, T.; KOCH, T.; FRÖHLICH, B.; FATTORI, M.; METZ, J.; GRIESMAIER, A.; GIOVANAZZI, S.; PFAU, T. Strong dipolar effects in a quantum ferrofluid. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 448, n. 7154, p. 672, 2007.
- LAHAYE, T.; MENOTTI, C.; SANTOS, L.; LEWENSTEIN, M.; PFAU, T. The physics of dipolar bosonic quantum gases. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 72, n. 12, p. 126401, 2009.
- LAHAYE, T.; METZ, J.; FROEHLICH, B.; KOCH, T.; MEISTER, M.; GRIESMAIER, A.; PFAU, T.; SAITO, H.; KAWAGUCHI, Y.; UEDA, M. d-wave collapse and explosion of a dipolar bose-einstein condensate. **Physical review letters**, APS, v. 101, n. 8, p. 080401, 2008.
- LANDAU, L. Theory of the superfluidity of helium ii. **Physical Review**, APS, v. 60, n. 4, p. 356, 1941.
- LEE, T.; YANG, C. Many-body problem in quantum mechanics and quantum statistical mechanics. **Physical Review**, APS, v. 105, n. 3, p. 1119, 1957.
- LEE, T. D.; HUANG, K.; YANG, C. N. Eigenvalues and eigenfunctions of a bose system of hard spheres and its low-temperature properties. **Physical Review**, APS, v. 106, n. 6, p. 1135, 1957.
- LÉONARD, J.; MORALES, A.; ZUPANCIC, P.; ESSLINGER, T.; DONNER, T. Supersolid formation in a quantum gas breaking a continuous translational symmetry. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 543, n. 7643, p. 87, 2017.
- LEWENSTEIN, M. Dancing the bose-nova with a twirl. **Physics**, APS, v. 1, p. 13, 2008.
- LEWENSTEIN, M.; SANPERA, A.; AHUFINGER, V.; DAMSKI, B.; SEN, A.; SEN, U. Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond. **Advances in Physics**, Taylor & Francis, v. 56, n. 2, p. 243–379, 2007.
- LI, J.-R.; LEE, J.; HUANG, W.; BURCHESKY, S.; SHTEYNAS, B.; TOP, F. Ç.; JAMISON, A. O.; KETTERLE, W. A stripe phase with supersolid properties in spin-orbit-coupled bose-einstein condensates. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 543, n. 7643, p. 91, 2017.

- LIMA, A. R.; PELSTER, A. Collective motion of polarized dipolar fermi gases in the hydrodynamic regime. **Physical Review A**, APS, v. 81, n. 2, p. 021606, 2010.
- LIMA, A. R.; PELSTER, A. Quantum fluctuations in dipolar bose gases. **Physical Review A**, APS, v. 84, n. 4, p. 041604, 2011.
- LIMA, A. R.; PELSTER, A. Beyond mean-field low-lying excitations of dipolar bose gases. **Physical Review A**, APS, v. 86, n. 6, p. 063609, 2012.
- LIMA, A. R. P. **Hydrodynamic Studies of Dipolar Quantum Gases**. 2010. 153 f. Tese (Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)) — Fachbereich Physik, Freien Universität Berlin, Berlin, 2010.
- LONDON, F. The λ -phenomenon of liquid helium and the bose-einstein degeneracy. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 141, n. 3571, p. 643, 1938.
- LU, M.; BURDICK, N. Q.; LEV, B. L. Quantum degenerate dipolar fermi gas. **Physical Review Letters**, APS, v. 108, n. 21, p. 215301, 2012.
- LU, M.; BURDICK, N. Q.; YOUN, S. H.; LEV, B. L. Strongly dipolar bose-einstein condensate of dysprosium. **Physical review letters**, APS, v. 107, n. 19, p. 190401, 2011.
- MADISON, K.; CHEVY, F.; WOHLLEBEN, W.; DALIBARD, J. Vortex formation in a stirred bose-einstein condensate. **Physical review letters**, APS, v. 84, n. 5, p. 806, 2000.
- MAIER, T. **Interactions in a Quantum Gas of Dysprosium Atoms**. 2015. 148 f. Tese (Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)) — Von der Fakultät Mathematik und Physik, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2015.
- MATSUBARA, T. Quantum-statistical theory of liquid helium. **Progress of Theoretical Physics**, Oxford University Press, v. 6, n. 5, p. 714–730, 1951.
- MCNAMARA, J.; JELTES, T.; TYCHKOV, A.; HOGERVORST, W.; VASSEN, W. Degenerate bose-fermi mixture of metastable atoms. **Physical review letters**, APS, v. 97, n. 8, p. 080404, 2006.
- MEWES, M.-O.; ANDREWS, M.; DRUTEN, N. V.; KURN, D.; DURFEE, D.; TOWNSEND, C.; KETTERLE, W. Collective excitations of a bose-einstein condensate in a magnetic trap. **Physical review letters**, APS, v. 77, n. 6, p. 988, 1996.
- MODUGNO, G.; FERRARI, G.; ROATI, G.; BRECHA, R. J.; SIMONI, A.; INGUSCIO, M. Bose-einstein condensation of potassium atoms by sympathetic cooling. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 294, n. 5545, p. 1320–1322, 2001.
- NAYLOR, B.; REIGUE, A.; MARÉCHAL, E.; GORCEIX, O.; LABURTHE-TOLRA, B.; VERNAC, L. Chromium dipolar fermi sea. **Physical Review A**, APS, v. 91, n. 1, p. 011603, 2015.
- ORENSTEIN, J.; MILLIS, A. Advances in the physics of high-temperature superconductivity. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 288, n. 5465, p. 468–474, 2000.

- O'DELL, D. H.; GIOVANAZZI, S.; EBERLEIN, C. Exact hydrodynamics of a trapped dipolar bose-einstein condensate. **Physical review letters**, APS, v. 92, n. 25, p. 250401, 2004.
- PARKER, N.; O'DELL, D. Thomas-fermi versus one-and two-dimensional regimes of a trapped dipolar bose-einstein condensate. **Physical Review A**, APS, v. 78, n. 4, p. 041601, 2008.
- PASQUIOU, B.; BISMUT, G.; BEAUFILS, Q.; CRUBELLIER, A.; MARÉCHAL, E.; PEDRI, P.; VERNAC, L.; GORCEIX, O.; LABURTHE-TOLRA, B. Control of dipolar relaxation in external fields. **Physical Review A**, APS, v. 81, n. 4, p. 042716, 2010.
- PENROSE, O.; ONSAGER, L. Bose-einstein condensation and liquid helium. **Physical Review**, APS, v. 104, n. 3, p. 576, 1956.
- PEREZ-GARCIA, V. M.; MICHINEL, H.; CIRAC, J.; LEWENSTEIN, M.; ZOLLER, P. Low energy excitations of a bose-einstein condensate: A time-dependent variational analysis. **Physical review letters**, APS, v. 77, n. 27, p. 5320, 1996.
- PEREZ-GARCIA, V. M.; MICHINEL, H.; CIRAC, J.; LEWENSTEIN, M.; ZOLLER, P. Dynamics of bose-einstein condensates: Variational solutions of the gross-pitaevskii equations. **Physical Review A**, APS, v. 56, n. 2, p. 1424, 1997.
- PETHICK, C. J.; SMITH, H. **Bose–Einstein condensation in dilute gases**. [S.l.]: Cambridge university press, 2008.
- PETROV, D. Quantum mechanical stabilization of a collapsing bose-bose mixture. **Physical review letters**, APS, v. 115, n. 15, p. 155302, 2015.
- PHILLIPS, W. D. Nobel lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 70, n. 3, p. 721, 1998.
- PITAEVSKII, L. Vortex lines in an imperfect bose gas. **Sov. Phys. JETP**, v. 13, n. 2, p. 451–454, 1961.
- PITAEVSKII, L.; STRINGARI, S. **Bose-Einstein condensation and superfluidity**. [S.l.]: Oxford University Press, 2016. v. 164.
- POLLACK, S. E.; DRIES, D.; JUNKER, M.; CHEN, Y.; CORCOVILOS, T.; HULET, R. Extreme tunability of interactions in a li 7 bose-einstein condensate. **Physical Review Letters**, APS, v. 102, n. 9, p. 090402, 2009.
- REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. [S.l.]: Waveland Press, 2009.
- ROBERT, A.; SIRJEAN, O.; BROWAEYS, A.; POUPARD, J.; NOWAK, S.; BOIRON, D.; WESTBROOK, C. I.; ASPECT, A. A bose-einstein condensate of metastable atoms. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 292, n. 5516, p. 461–464, 2001.
- ROCCUZZO, S. M.; ANCILOTTO, F. Supersolid behavior of a dipolar bose-einstein condensate confined in a tube. **Physical Review A**, APS, v. 99, n. 4, p. 041601, 2019.

- RONEN, S.; BORTOLOTTI, D. C.; BOHN, J. L. Radial and angular rotons in trapped dipolar gases. **Physical review letters**, APS, v. 98, n. 3, p. 030406, 2007.
- RUPRECHT, P.; HOLLAND, M.; BURNETT, K.; EDWARDS, M. Time-dependent solution of the nonlinear schrödinger equation for bose-condensed trapped neutral atoms. **Physical Review A**, APS, v. 51, n. 6, p. 4704, 1995.
- RYBIN, A.; VARZUGIN, G.; LINDBERG, M.; TIMONEN, J.; BULLOUGH, R. K. Similarity solutions and collapse in the attractive gross-pitaevskii equation. **Physical Review E**, APS, v. 62, n. 5, p. 6224, 2000.
- SAITO, H.; KAWAGUCHI, Y.; UEDA, M. Ferrofluidity in a two-component dipolar bose-einstein condensate. **Physical review letters**, APS, v. 102, n. 23, p. 230403, 2009.
- SALINAS, S. R. **Introdução a física estatística vol. 09**. [S.l.]: Edusp, 1997.
- SCHMITT, M. **A Self-bound Dilute Quantum Liquid of Dysprosium Atoms**. 2017. 112 f. Tese (Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)) — Von der Fakultät Mathematik und Physik, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2017.
- SCHMITT, M.; WENZEL, M.; BÖTTCHER, F.; FERRIER-BARBUT, I.; PFAU, T. Self-bound droplets of a dilute magnetic quantum liquid. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 539, n. 7628, p. 259, 2016.
- SCHRECK, F.; KHAYKOVICH, L.; CORWIN, K.; FERRARI, G.; BOURDEL, T.; CUBIZOLLES, J.; SALOMON, C. Quasipure bose-einstein condensate immersed in a fermi sea. **Physical Review Letters**, APS, v. 87, n. 8, p. 080403, 2001.
- SCHÜTZHOLD, R.; UHLMANN, M.; XU, Y.; FISCHER, U. R. Mean-field expansion in bose-einstein condensates with finite-range interactions. **International Journal of Modern Physics B**, World Scientific, v. 20, n. 24, p. 3555–3565, 2006.
- SEMEGHINI, G.; FERIOLI, G.; MASI, L.; MAZZINGHI, C.; WOLSWIJK, L.; MINARDI, F.; MODUGNO, M.; MODUGNO, G.; INGUSCIO, M.; FATTORI, M. Self-bound quantum droplets of atomic mixtures in free space. **Physical review letters**, APS, v. 120, n. 23, p. 235301, 2018.
- STELLMER, S.; TEY, M. K.; HUANG, B.; GRIMM, R.; SCHRECK, F. Bose-einstein condensation of strontium. **Physical review letters**, APS, v. 103, n. 20, p. 200401, 2009.
- STRINGARI, S.; TREINER, J. Surface properties of liquid ^3He and ^4He : a density-functional approach. **Physical Review B**, APS, v. 36, n. 16, p. 8369, 1987.
- STUHLER, J.; GRIESMAIER, A.; KOCH, T.; FATTORI, M.; PFAU, T.; GIOVANAZZI, S.; PEDRI, P.; SANTOS, L. Observation of dipole-dipole interaction in a degenerate quantum gas. **Physical Review Letters**, APS, v. 95, n. 15, p. 150406, 2005.
- SUGAWA, S.; INABA, K.; TAIE, S.; YAMAZAKI, R.; YAMASHITA, M.; TAKAHASHI, Y. Interaction and filling-induced quantum phases of dual mott insulators of bosons and fermions. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 7, n. 8, p. 642, 2011.
- SULEM, C.; SULEM, P.-L. **The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. v. 139.

- TAKASU, Y.; MAKI, K.; KOMORI, K.; TAKANO, T.; HONDA, K.; KUMAKURA, M.; YABUZAKI, T.; TAKAHASHI, Y. Spin-singlet bose-einstein condensation of two-electron atoms. **Physical Review Letters**, APS, v. 91, n. 4, p. 040404, 2003.
- TANG, Y.; KAO, W.; LI, K.-Y.; LEV, B. L. Tuning the dipole-dipole interaction in a quantum gas with a rotating magnetic field. **Physical review letters**, APS, v. 120, n. 23, p. 230401, 2018.
- TANZI, L.; LUCIONI, E.; FAMÀ, F.; CATANI, J.; FIORETTI, A.; GABBANINI, C.; MODUGNO, G. Observation of stable stripes in a dipolar quantum gas. **arXiv preprint arXiv:1811.02613**, 2018.
- TEY, M. K.; STELLMER, S.; GRIMM, R.; SCHRECK, F. Double-degenerate bose-fermi mixture of strontium. **Physical Review A**, APS, v. 82, n. 1, p. 011608, 2010.
- THEIS, M.; THALHAMMER, G.; WINKLER, K.; HELLWIG, M.; RUFF, G.; GRIMM, R.; DENSCHLAG, J. H. Tuning the scattering length with an optically induced feshbach resonance. **Physical Review Letters**, APS, v. 93, n. 12, p. 123001, 2004.
- TISZA, L. Transport phenomena in helium ii. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 141, n. 3577, p. 913, 1938.
- TRUSCOTT, A. G.; STRECKER, K. E.; MCALEXANDER, W. I.; PARTRIDGE, G. B.; HULET, R. G. Observation of fermi pressure in a gas of trapped atoms. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 291, n. 5513, p. 2570–2572, 2001.
- VELJIĆ, V.; LIMA, A. R.; CHOMAZ, L.; BAIER, S.; MARK, M. J.; FERLAINO, F.; PELSTER, A.; BALAŽ, A. Ground state of an ultracold fermi gas of tilted dipoles in elongated traps. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 20, n. 9, p. 093016, 2018.
- VELJIC, V.; PELSTER, A.; BALAZ, A. Stability of quantum degenerate fermi gases of tilted polar molecules. **arXiv preprint arXiv:1902.09518**, 2019.
- WÄCHTLER, F.; SANTOS, L. Quantum filaments in dipolar bose-einstein condensates. **Physical Review A**, APS, v. 93, n. 6, p. 061603, 2016.
- WEBER, T.; HERBIG, J.; MARK, M.; NÄGERL, H.-C.; GRIMM, R. Bose-einstein condensation of cesium. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 299, n. 5604, p. 232–235, 2003.
- WEINER, J. **Cold and ultracold collisions in quantum microscopic and mesoscopic systems**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- WEINER, J.; BAGNATO, V. S.; ZILIO, S.; JULIENNE, P. S. Experiments and theory in cold and ultracold collisions. **Reviews of Modern Physics**, APS, v. 71, n. 1, p. 1, 1999.
- WEINSTOCK, R. **Calculus of variations: with applications to physics and engineering**. [S.l.]: Courier Corporation, 1974.
- WENZEL, M. **Macroscopic States of Dipolar Quantum Gases**. 2018. 140 f. Tese (Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)) — Von der Fakultät Mathematik und Physik, Universität Stuttgart, Stuttgart, 2018.

WENZEL, M.; BÖTTCHER, F.; LANGEN, T.; FERRIER-BARBUT, I.; PFAU, T. Striped states in a many-body system of tilted dipoles. **Physical Review A**, APS, v. 96, n. 5, p. 053630, 2017.

WILSON, R. M.; RONEN, S.; BOHN, J. L. Angular collapse of dipolar bose-einstein condensates. **Physical Review A**, APS, v. 80, n. 2, p. 023614, 2009.

YI, S.; YOU, L. Trapped atomic condensates with anisotropic interactions. **Physical Review A**, APS, v. 61, n. 4, p. 041604, 2000.