UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ADAIL BOA DE FREITAS FILHO

PROBABILIDADE: UMA PROPOSTA À LUZ DA BNCC

REDENÇÃO-CE
2020

ADAIL BOA DE FREITAS FILHO

PROBABILIDADE: UMA PROPOSTA À LUZ DA BNCC

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

REDENÇÃO-CE
2020

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Freitas Filho, Adail Boa de.

F866p

Probabilidade: uma proposta à luz da BNCC / Adail Boa de Freitas Filho. - Redenção, 2020.
53f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Base Nacional Comum Curricular. 2. Educação Básica. 3. Matemática - Estudo e Ensino. 4. Probabilidades. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 510

ADAIL DE BOA FREITAS FILHO

PROBABILIDADE: UMA PROPOSTA À LUZ DA BNCC

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 07/08/2020

BANCA EXAMINADORA

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

João Fco da S. Filho

Prof. Dr João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Prof. Dr Renivaldo Sodré de Sena
Instituto Federal do Ceará - IFCE

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais e aos meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pelo dom da vida e pelas maravilhas que ele me concedeu.

Ao meu pai, Adail Boa de Freitas, e também minha mãe, Maria Alice Alves Nobre de Freitas, que sempre me apoiaram e se preocuparam em oferecer uma boa educação não só a mim, mas a todos os seus filhos.

Aos meus irmãos, Adaliane Nobre de Freitas, Aliciane Nobre de Freitas e Alisson Nobre de Freitas, por todo o incentivo para continuar buscando meu crescimento profissional e pessoal.

Ao meu orientador, Professor Doutor Rafael Jorge Pontes Diógenes, pelo apoio, atenção, paciência e dedicação na orientação deste trabalho.

Aos professores do programa de mestrado PROFMAT, pelos conhecimentos e contribuições transmitidos ao longo do curso.

Aos colegas do PROFMAT, por fazerem parte da minha formação e por todo apoio ao longo dessa caminhada.

A todos que contribuíram, de forma direta ou indireta, para a realização desse trabalho e para que eu conseguisse concluir esse curso.

Aos professores João Francisco da Silva Filho e Renivaldo Sodré de Sena, por aceitarem participar da banca examinadora e pelas valiosas contribuições a este trabalho

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

A construção e posterior homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a educação básica no Brasil, estabeleceu algumas mudanças no ensino de Matemática. Dentre essas mudanças, destacamos o estudo de probabilidade, que passa a ser abordado ao longo de todo o Ensino Fundamental e Ensino Médio. Diante de uma mudança significativa como essa, esse trabalho busca apresentar aos professores de matemática um breve panorama da BNCC, destacando as principais mudanças para o ensino de Matemática, principalmente no que diz respeito a abordagem de probabilidade, levando o professor a compreender de que forma esse tema pode ser abordado em cada uma das etapas de ensino, de forma a se adequar à proposta do documento. Desse modo, o trabalho apresenta sugestões de atividades relacionadas ao tema probabilidade, seguidas de comentários sobre o desenvolvimento dessas atividades e como elas contribuem para o desenvolvimento das habilidades estabelecidas pelo documento.

Palavras-chave: Base Nacional Comum Curricular. Educação Básica. Matemática – Estudo e Ensino. Probabilidades.

ABSTRACT

The construction and subsequent homologation of the National Common Curricular Base (BNCC) for basic education in Brazil, causes some changes in the teaching of Mathematics. Among these changes, we highlight the study of probability, which is now addressed throughout elementary and high school. Faced with a necessary change like this, this work seeks to present to mathematics teachers a brief overview of BNCC, highlighting the main changes for the teaching of Mathematics, mainly not regarding the probability approach, leading the teacher to understand how this theme can be addressed in each of the teaching stages, in order to adapt to the document's proposal. Thus, the paper presents suggestions for activities related to the probability theme, followed by comments on the development of these activities and how they contribute to the development of skills through the document.

Keywords: Common Base National Curriculum. Basic Education. Mathematics – Study and Teaching. Odds.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A teoria das probabilidades surgiu ainda na idade média, a partir do interesse do homem em compreender determinados fenômenos relacionados aos jogos de azar da época. Ao longo do tempo, as teorias e os cálculos relacionados a probabilidade foram se desenvolvendo, fruto do estudo de muitos matemáticos. Dentre eles, podemos citar Pascal (1623 – 1662) e Fermat (1601 – 1655), que construíram os alicerces da teoria dos cálculos probabilísticos.

Atualmente, o estudo de probabilidade tornou-se muito importante devido as suas aplicações em estudos relacionados a diversas áreas, como Estatística, Economia, Engenharia, Química, Biologia, Sociologia, entre outras. O reconhecimento de sua importância, já ressaltada em trabalhos acadêmicos relacionados ao tema, fez com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) impusesse uma mudança significativa no estudo desse tema na educação básica do Brasil. Antes abordado, na maioria das escolas e redes de ensino, apenas no Ensino Médio, o estudo de probabilidade passa a ser vivenciado pelos alunos desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Isso irá proporcionar aos alunos a compreensão de que a Matemática é uma ciência que trabalha não apenas com a exatidão, mas também com incerteza.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental a BNCC propõe o desenvolvimento de habilidades relacionas à compreensão dos conceitos básicos que fundamentam o estudo de probabilidade, como por exemplo, a noção de aleatoriedade, a capacidade de distinguir eventos do cotidiano, certos, possíveis e impossíveis de acontecer, a determinação do espaço amostral de um experimento aleatório, entre outros, dando início a construção do pensamento probabilístico. Nos anos finais dessa mesma etapa, propõe a ampliação e aprofundamento do tema, através de atividades que proporcionem o aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, além da realização de experimento aleatórios e simulações para que os alunos possam confrontar os resultados obtidos. Do mesmo modo, no Ensino Médio deve-se buscar novamente a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens desenvolvidas na etapa anterior, através da resolução de problemas mais complexos, que envolvem por exemplo, métodos de contagem mais sofisticados e diferentes tipos de espaços amostrais.

Com estudo de probabilidade passando a ser realizado também no Ensino Fundamental, surgiu o interesse em compreender a forma como esse tema poderia ser trabalhado em cada uma das séries da educação básica, de forma a proporcionar o desenvolvimento das habilidades propostas na BNCC, e também de conhecer a base como um todo, tendo em vista ser professor de uma escola de ensino médio. Esses foram os motivos para que esse tema fosse o objeto de estudo desse trabalho.

Esse trabalho tem por objetivo apresentar um breve panorama da BNCC, destacando características importantes desse documento e incentivando o leitor a buscar conhece-lo na íntegra, e apresentar sugestões de atividades para cada uma das habilidades relacionadas ao tema, que foram indicadas no documento, levando o professor de matemática a compreender de que forma esse tema pode ser abordado em cada uma das series e/ou etapas de ensino.

A preparação dos professores, bem como a adequação dos materiais didáticos utilizados por eles, de forma a atenderem o que é estabelecido na BNCC, tornou-se algo muito importante. Por isso, a pesquisa, estudo e elaboração de trabalhos relacionados ao ensino de Matemática, precisam ser realizados para que os docentes possam ter subsídios para entender e colocar em prática essa base, tendo em vista que ela apenas determina um conjunto de aprendizagens mínimas para cada etapa de ensino, não especificando a forma como cada conteúdo pode ser trabalhado.

Dessa forma, o Capítulo 2 desse trabalho apresenta um breve panorama do documento, falando um pouco de sua estrutura, seguido de um resumo de seu histórico de construção, que se inicia com a aprovação de leis que mencionavam sua elaboração e termina com a sua homologação no final de 2018, além de mostrar aspectos importantes relacionados a disciplina Matemática. Obviamente, a leitura desse capítulo não dará ao leitor um profundo conhecimento do documento, pois a intenção é que ele seja apenas um motivador para que o leitor possa buscar estudar a BNCC, de forma a conhecê-la por completo.

Com base nas conclusões obtidas após a leitura da BNCC, e de trabalhos relacionados a ela, o Capítulo 3 apresenta sugestões de atividades alinhadas à base, que de acordo com o entendimento do autor, contribuem de forma significativa para o desenvolvimento das habilidades relacionadas ao tema probabilidade. A maioria dessas atividades são autorais, elaboradas de modo a favorecer o desenvolvimento das habilidades relacionadas a elas e figurando como um dos mais importantes resultados desse trabalho. Algumas das atividades foram retiradas de outros trabalhos, por entender que são ótimas sugestões para que o professor possa entender como as habilidades relacionas a elas podem ser devolvidas. Outras por sua vez, foram adaptadas, por acreditar que as mesmas atenderiam melhor ao objetivo, da forma como estão aqui apresentadas. Após cada atividade, ou bloco de atividades, é apresentado um comentário sobre o desenvolvimento da atividade em questão, sendo de grande importância pois permitirá ao professor entender como a atividade pode ser desenvolvida e como ela irá contribuir para o desenvolvimento da habilidade a ela relacionada.

2 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Em dezembro de 2018 foi homologado pelo Ministério da Educação (MEC) a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – Etapa Ensino Médio, compondo junto com a BNCC relativa a Educação Infantil e Ensino Fundamental, que havia sido homologada em dezembro de 2017, uma base curricular única para todo o país, assim como estava previsto na Constituição de 1988, na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1996 e no Plano Nacional de Educação (PNE) de 2014.

De acordo com o Ministério da Educação, a BNCC trata-se de um documento normativo que estabelece um conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver ao longo das etapas da educação básica. A partir dela, as redes de ensino estaduais, municipais e privadas de todo o país, passam a ter uma referência para a elaboração ou reformulação obrigatória de seus currículos e/ou propostas pedagógicas.

O documento tem por objetivo principal estabelecer um patamar de aprendizagem e desenvolvimento para todos os estudantes, impulsionando a qualidade da educação e garantindo que saiam da escola com conhecimentos e habilidades essenciais para o seu desenvolvimento na sociedade do século XXI.

No que diz respeito a sua estrutura, a BNCC estabelece um conjunto de dez competências gerais para a educação básica, necessárias à formação integral do estudante. Tais competências se referem a conhecimentos, pensamento cientifico, crítico e criativo, repertório cultural, cultura digital, trabalho e projeto de vida, comunicação, argumentação, empatia e cooperação, autoconhecimento e cidadania. Além delas, o documento apresenta competências específicas para cada área de conhecimento e componente curricular. Estas por sua vez, definem uma aprendizagem mínima que cada estudante deve desenvolver em cada etapa da educação básica e em cada área do conhecimento e componente curricular, de forma que seu desenvolvimento favorece o desenvolvimento das competências gerais citadas anteriormente, permitindo que ao fim da educação básica o estudante esteja preparado para os desafios da vida cotidiana, do mundo do trabalho, e para o pleno exercício da cidadania.

Visando o desenvolvimento das competências especificas, também é estabelecido no documento um conjunto de habilidades, que por sua vez, estão relacionadas aos objetos do conhecimento (conteúdos, conceitos e procedimentos) que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da educação básica. Especificamente, as habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo do ensino médio, estabelecem os conhecimentos essenciais que os alunos dessa etapa deverão estudar na parte comum, em uma carga horária de 1800 horas, devendo estes escolher um dos cinco itinerários formativos (Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Formação Técnica e Profissional), para aprofundamento acadêmico em uma área do conhecimento de seu interesse, de modo que a carga horária correspondente aos itinerários formativos será de 1200 horas.

Cabe destacar que a BNCC define competências como a capacidade de mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (cognitivas, práticas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver os problemas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Além disso, é preciso também deixar claro que a BNCC não é currículo, ela define competências e conhecimentos essenciais que deverão ser oferecidos aos estudantes. Assim as redes de ensino e escolas é que deverão elaborar seus currículos com base nela e nas realidades e necessidades locais, levando em consideração as necessidades dos seus estudantes.

2.1 BNCC: UM POUCO DE HISTÓRIA

No que diz respeito ao histórico de elaboração da Base Nacional Comum Curricular de nosso país, iniciamos ressaltando que sua elaboração já era mencionada em importantes leis nacionais, que a consideravam necessária para se promover uma educação básica de qualidade.

O Art. 10 da Constituição da República Federativa do Brasil disciplina *in verbis* “Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais." (BRASIL, 1988)

O Art. 26 da LDB (Lei n.9.394, de 20 de dezembro de 1996), estabelece que:

> Os currículos da educação infantil, do ensino fundamental e do ensino médio devem ter base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. (BRASIL, 1996)

O Plano Nacional de Educação (Lei n.13.005, de 25 de junho de 2014), trata da BNCC, como estratégia para cumprimento das metas 2, 3 e 7.

> Estratégia 2.2 - pactuar entre União, Estados, Distrito Federal e Municípios, no âmbito da instância permanente de que trata o § 5º do art. 7º desta Lei, a implantação dos

> direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que configurarão a base nacional comum curricular do ensino fundamental. (BRASIL, 2014)
>
> Estratégia 3.3 - pactuar entre União, Estados, Distrito Federal e Municípios, no âmbito da instância permanente de que trata o § 5º do art. 7º desta Lei, a implantação dos direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento que configurarão a base nacional comum curricular do ensino médio. (BRASIL, 2014)
>
> Estratégia 7.1 - estabelecer e implantar, mediante pactuação interfederativa, diretrizes pedagógicas para a educação básica e a base nacional comum dos currículos, com direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento dos (as) alunos (as) para cada ano do ensino fundamental e médio, respeitada a diversidade regional, estadual e local (BRASIL, 2014)

Após a instituição de uma comissão de especialistas para a elaboração da proposta da Base Nacional Comum Curricular, foi disponibilizada a primeira versão do documento em 16 de setembro de 2015, estando disponível para consulta pública no período entre outubro de 2015 e março de 2016, e recebendo mais de 12 milhões de contribuições dos diversos setores interessados. Tais contribuições, foram analisadas e incorporadas ao texto da BNCC, resultando em uma segunda versão que foi divulgada em maio de 2016, sendo novamente discutida, desta vez em seminários com cerca de 9 mil professores, realizados em todas as unidades da federação e organizados pelo Conselho Nacional de Secretários de Educação (Consed) e pela União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (Undime).

Como resultado de todas as contribuições e da discussão realizada com base nas duas primeiras versões, com participação dos mais diversos agentes interessados, especialmente os professores, a terceira versão começa a ser redigida em agosto de 2016. Nessa etapa da construção do documento, os resultados obtidos nos seminários foram sistematizados pela Universidade de Brasília (UnB) dando subsídio para a elaboração do relatório em que Consed e Undime expressam seu posicionamento a respeito do documento. Esse relatório serviu como principal referência para a construção da versão final, que foi revista por especialistas e gestores do MEC e disponibilizada novamente para consulta pública, recebendo cerca 44 mil contribuições.

Em 20 de dezembro de 2017 a parte da BNCC correspondente a Educação Infantil e Ensino Fundamental foi aprovada pelo Conselho Nacional de Educação e homologada pelo MEC. Com relação à parte correspondente ao Ensino Médio, o MEC sentiu a necessidade de aprofundar o debate, promovendo ao logo do ano de 2018, novas audiências, consultas públicas online, encontros com redes de ensino, gestores, professores, especialistas e interessados na temática da educação para o Ensino Médio, visando a construção de uma versão final condizente com a realidade e necessidade do Ensino Médio atualmente. Com isso, a versão final da BNCC – Etapa Ensino Médio foi homologada em de dezembro de 2018 e o Brasil passou a ter uma base nacional comum curricular para a educação básica, que servirá como norte para a construção ou reformulação dos currículos das redes de ensinos do país.

Após a construção, se inicia o processo de implementação da base, de forma a garantir que a mesma chegasse as salas de aula em 2020. Para tanto, o MEC criou o programa ProBNCC (Programa de Apoio à Implementação da BNCC), criando uma equipe de técnicos em cada unidade da federação, que atuando em regime de colaboração com os municípios, constituem uma equipe dedicada a sua implementação nas redes de ensino e escolas de todo o território nacional, promovendo dentre outras coisas, formações para os professores.

Como podemos observar, a construção desse importante documento que há anos vinha sendo exigido por nossa legislação, contou com um grande número de colaborações de profissionais que fazem a educação de nosso país e que por meio dessas colaborações puderam tornar a BNCC um documento capaz de garantir um patamar de aprendizagem aos estudantes, especificando as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas em cada etapa da educação básica, bem como garantir o princípio da equidade na aprendizagem desses alunos.

2.2 A MATEMÁTICA NA BNCC

Segundo a BNCC, a Matemática no Ensino Fundamental tem como compromisso o desenvolvimento do letramento matemático, que diz respeito as habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, estabelecendo conjecturas e resolvendo problemas nos mais variados contextos, utilizando conceitos, procedimentos e ferramentas matemáticas. Nesse sentido, a resolução de problemas, bem como a investigação, a modelagem e o desenvolvimento de projetos, são citados no documento como importantes processos matemáticos a serem adotados nessa etapa de ensino, por serem processos de aprendizagem potencialmente ricos para o desenvolvimento do letramento matemático.

Dessa forma, a BNCC propõe para o Ensino Fundamental cinco unidades temáticas correlacionadas (números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, e probabilidade e estatística), sugerindo uma articulação entre as ideias fundamentais da Matemática, tais como equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação, e orientando a formulação das habilidades a serem desenvolvidas ao longo dessa etapa de ensino.

No que diz respeito as mudanças trazidas pela BNCC, Diniz (2018) destaca que essas mudanças não ocorreram apenas na nomenclatura, quando observamos que os eixos temáticos foram substituídos por unidades temáticas, que os conteúdos foram substituídos por objetos do conhecimento e que os objetivos passaram a ser chamados de competências e habilidades.

Dentre as principais mudanças relacionadas as unidades temáticas, podemos citar a abordagem da álgebra desde o Ensino Fundamental – Anos iniciais, onde se busca nessa etapa, promover o desenvolvimento da aprendizagem de algumas dimensões da álgebra, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, não propõe nessa fase o uso de letras para expressar as regularidades. O que se espera é uma abordagem que permita ao aluno compreender, por exemplo, que o sinal de igualdade não serve apenas para a indicação de operação a ser feita, mas que representa também a ideia de equivalência.

No que diz respeito à unidade temática Probabilidade e Estatística, que estuda a incerteza e o tratamento de dados, houveram também algumas mudanças, entre elas o início do estudo de noções probabilidade desde o primeiro ano do Ensino Fundamental. Dessa forma, ao se promover o estudo de probabilidade nos anos iniciais espera-se que o alunos dessa etapa, compreendam a noção de aleatoriedade, a incerteza relacionada a ocorrência de eventos, sabendo identificar eventos impossíveis, certos e prováveis, construam o espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando procedimentos como a árvore de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações.

Já no Ensino Fundamental – Anos Finais observa-se que alguns conceitos de probabilidade, antes trabalhados apenas o Ensino Médio, passam a fazer parte dessa etapa. Nela é enfatizado o trabalho com as formas de representação da probabilidade, o estudo do tema sob a perspectiva clássica e também frequentista, valorizando a realização de experimentos aleatórios, por parte dos alunos, exigindo que comparem os resultados obtidos com o resultado do cálculo pelo modo clássico.

No campo da Geometria, o plano cartesiano passa a ser objeto de estudo desde o 5º ano do Ensino Fundamental, onde o aluno começa a identificar coordenadas cartesianas e representar deslocamentos no plano cartesiano. Observa-se também nos anos finais do Ensino Fundamental, mais especificamente a partir do 7º ano, uma ênfase maior no trabalho com as transformações geométricas no plano cartesiano.

No que diz respeito ao ensino de Matemática no Ensino Médio, a BNCC busca aprofundar as aprendizagens desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, tendo como foco a formação de uma visão integrada da Matemática, aplicada a realidade, levando em consideração as vivências dos alunos. Assim, os estudantes devem desenvolver nessa etapa de ensino, as habilidades de investigar, resolver e elaborar problemas, construir modelos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, mobilizando os diferentes recursos matemáticos, por meio de seu modo particular de racionar, representar, argumentar e se comunicar.

Ao participar de processos de investigação, o aluno estará percorrendo um conjunto de etapas, que inicia na observação da possibilidade de ocorrência, passa pela identificação de padrões e elaboração de hipóteses, pela comprovação ou negação das hipóteses, generalização e argumentação, finalizando com a comunicação dos resultados por diversos modos, sejam eles algébricos, geométricos ou qualquer outro.

No que diz respeito à resolução de problemas, a BNCC – Ensino Médio enfatiza esse processo, não apenas como uma habilidade a ser desenvolvida pelo aluno, mas como metodologia para o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Aliado a isso, esses estudantes também devem modelar situações problemas, utilizando a linguagem e os conhecimentos matemáticos.

3 PROBABILIDADE E A BNCC

Uma das mudanças estabelecidas pela BNCC corresponde a abordagem de probabilidade desde o 1° ano do Ensino Fundamental. Apesar de alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), e alguns trabalhos de pesquisa, sugerirem a introdução de conceitos de probabilidade nessa etapa, considerando a importância de desenvolver o pensamento probabilístico, pois é comum nos depararmos com situações de natureza aleatória, o que se percebe é que poucas escolas o vinha fazendo. O seu estudo se dá geralmente no ensino médio, mais exclusivamente no 2º ano, na maioria dos estabelecimentos de ensino.

3.1 ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS INICIAIS

Ao ser trabalhado probabilidade em toda a educação básica, o que se propõe para os anos iniciais do Ensino Fundamental, é que as crianças iniciem, ainda nessa etapa, a construção do pensamento probabilístico, compreendendo que nem todos os fenômenos são previsíveis e percebendo situações de seu cotidiano que possuem natureza aleatória. Além disso, consigam assimilar a noção de acaso, e assim identificar eventos como certos, prováveis, improváveis ou impossíveis.

A compreensão desses conceitos fundamentais, bem como a identificação dos elementos que compõem o espaço amostral de um experimento aleatório, o reconhecimento das chances de ocorrência de um determinado evento, identificando se há eventos com mais chances de ocorrer, além da capacidade de determinar a probabilidade de eventos equiprováveis, são algumas habilidades que a BNCC estabelece para serem desenvolvidas pelos alunos nessa etapa de ensino. Porém, quando se trata de determinar a probabilidade, esta corresponde a uma habilidade a ser desenvolvida apenas no 5º ano, quando o aluno já compreendeu todos esses conceitos citados anteriormente.

A tabela a seguir, apresenta todas as habilidades relacionadas ao tema, que devem ser desenvolvidas nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Tabela 3.1 – Habilidades correspondentes aos anos iniciais do Ensino Fundamental

Habilidades	Objeto do Conhecimento	Ano
(EF01MA20) Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez	Noção de Acaso	1°

Habilidades	Objeto do Conhecimento	Ano
aconteça" e "é impossível acontecer", em situações do cotidiano.		
(EF02MA21) Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como "pouco prováveis", "muito prováveis", "improváveis" e "impossíveis".	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano	2°
(EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.	Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral	3°
(EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.	Análise de chances de eventos aleatórios	4º
(EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios	5º
(EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).	Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis	

Fonte: Base Nacional Comum Curricular – BNCC

Cada uma das habilidades descritas na BNCC, são identificadas por um código alfanumérico, que no Ensino Fundamental é formado por duas letras que indicam a etapa educacional, um par de números que indicam a que ano se refere essa habilidade (ou o bloco de anos), um segundo par de letras indica o componente curricular e um segundo par de números que indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano ou do bloco de anos, nessa ordem.

Se tomarmos, por exemplo, os códigos EF03MA25 e EF06MA30, o primeiro corresponde a vigésima quinta habilidade para alunos do terceiro ano do Ensino Fundamental, enquanto o segundo corresponde a trigésima habilidade para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Além disso, convém ressaltar que apesar de o documento indicar que tal habilidade deve ser desenvolvida em um determinado ano escolar, é preciso levar em consideração que a cada ano das series iniciais as noções de probabilidade, bem como de todas as unidades do conhecimento são retomadas, ampliadas e aprofundadas, e que é preciso compreender como essas habilidades estão conectadas a habilidades dos anos anteriores, identificando as aprendizagens já consolidadas pelos alunos e a partir daí compreender o papel da habilidade que se objetiva desenvolver no conjunto de aprendizagens. É importante também compreender como a abordagem para o desenvolvimento dela em sala de aula, servirá de base para aprofundamento do conteúdo e o desenvolvimento de aprendizagens correspondentes aos anos seguintes.

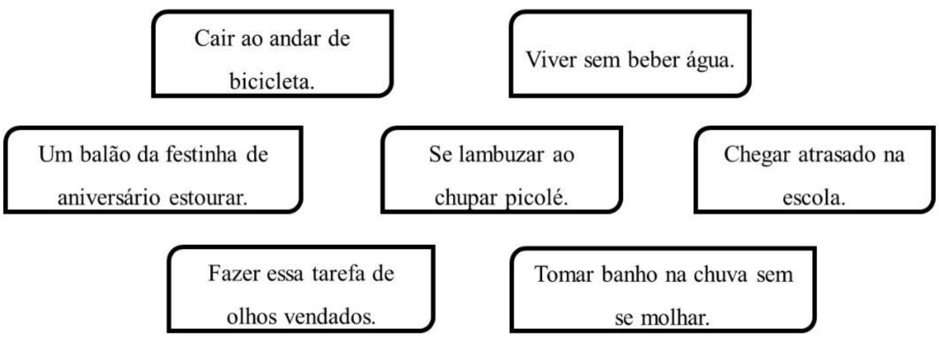
Dessa forma deseja-se explorar nesta seção os objetos do conhecimento e habilidades apresentados na Tabela 3.1 propondo exercícios e atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, que levem essas crianças a adquirirem as aprendizagens consideradas essenciais para a construção do pensamento probabilístico. Após cada uma das atividades aqui propostas, é apresentado um comentário que aborda a forma como a atividade pode ser desenvolvida de modo a favorecer o desenvolvimento da habilidade a ela relacionada.

A partir daqui representaremos as habilidades citadas na Tabela 3.1 apenas por seu código alfanumérico.

Atividade 3.1 – Habilidade EF01MA20 (Adaptado de SILVA, 2018)

Leia as situações apresentadas nos quadrinhos abaixo e pinte os que apresentam situações impossíveis de acontecer.

Figura 3.1 – Situações possíveis e impossíveis



Fonte: Autor

Comentário: Ao desenvolver essa atividade, o professor deve inicialmente discutir com os alunos o que são situações “possíveis” e situações “impossíveis”, utilizando exemplos do cotidiano para que os alunos possam compreender o que se deseja na atividade. Além disso, é preciso entender que por estarem ainda em processo de alfabetização, pode ser necessário fazer a leitura para os alunos, mas permitindo e os incentivando a discutirem entre si, se cada uma dessas situações é possível ou não, e porquê. Ao exporem seus pensamentos para a turma, o professor poderá identificar quais alunos conseguem perceber as situações em que o acaso está presente, e que há eventos que são imprevisíveis.

Atividade 3.2 – Habilidade EF02MA21

Joãozinho está à procura de sua bola de futebol. Ele guarda seus brinquedos em três caixas como as apresentadas na figura abaixo.

Figura 3.2 – Caixas

Fonte: Autor

Ele lembra que guardou a bola em uma dessas caixas, mas como ela são idênticas, ele não sabe em qual delas ela está. Então decidiu procurar em todas.

- É muito provável, pouco provável, improvável ou impossível que ele encontre na primeira caixa que abrir?
- Se ele já viu que não está na primeira caixa, a chances de ele encontrar na segunda caixa aumentam?

Comentário: A habilidade indicada para ser desenvolvida no segundo ano do Ensino Fundamental, busca uma evolução do aluno no que diz respeito a habilidade desenvolvida no primeiro ano. Aqui não basta o aluno identificar se um determinado evento é provável de acontecer, ele deve também estimar o quanto esse evento é provável. Dessa forma a Atividade 3.2 leva o aluno a analisar e refletir sobre o quanto é provável ele achar as bolas nas caixa escolhida por Joãozinho, em dois momentos, de forma que ao realizar a atividade o aluno irá perceber que as chances de um determinado evento ocorrer podem aumentar ou diminuir ao se modificar as características do experimento aleatório. Convém ressaltar também, que assim como na atividade anterior, é necessário que o professor inicie a atividade discutindo com aos alunos o que são situações prováveis e improváveis, ajude-os na leitura e compreensão da atividade e os incentive a discutir com os colegas os questionamentos apresentados.

Atividade 3.3 – Habilidade EF03MA25

1ª parte: Com um dado em mãos, como o apresentado na figura abaixo, observe-o e responda as perguntas.

Figura 3.3 – Dado

Fonte: Autor

- Se lançá-lo sobre a mesa, quais são os valores que podem sair na face que ficará voltada para cima?

> Ao responder essa pergunta, você listou todos os resultados possíveis definindo o ESPAÇO AMOSTRAL dessa situação. O ESPAÇO AMOSTRAL é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

- No lançamento desse dado, o que é mais provável que saia um número menor que 3 ou um maior que 5? Por quê?

2ª parte:

- Se lançar dois dados e somar os valores que ficaram nas faces voltadas para cima, é possível que a soma seja 1? E um número maior que 12? Por quê?
- No lançamento de dois dados, é mais provável que a soma das faces voltadas para cima seja 3 ou 8? Por quê?
- Quais valores são possíveis obter na soma das faces voltadas para cima, ao lançar dois dados?

Atividade 3.4 – Habilidade EF03MA25

A professora de André irá presentear um aluno com um bombom. Para escolher, ela escreveu o nome de cada um deles em pequenos pedaços de papeis, dobrou todos papéis e os colocou em um saco escuro, para sortear um deles retirando um dos papeis do saco, sem olhar. Na figura abaixo estão os nomes de todos os alunos.

Figura 3.4 – Alunos da turma em que André estuda

André	Alice	Amanda	Beatriz	Breno
Bruno	Camilo	Daniela	Danilo	Eduardo
Fábio	Gabriela	Jeremias	Marcelo	Márcio
Maria	Mariana	Mateus	Tiago	Tadeu

Fonte: Autor

É mais provável que seja sorteado um menino ou uma menina? Por quê?

Depois de retirar um papel de dentro do saco, a professora deu uma dica sobre quem foi o aluno sorteado.

Figura 3.5 – Dica de aluno sorteado

O nome do aluno sorteado começa com a letra M.

Fonte: Autor

Quem pode ter sido o aluno sorteado?

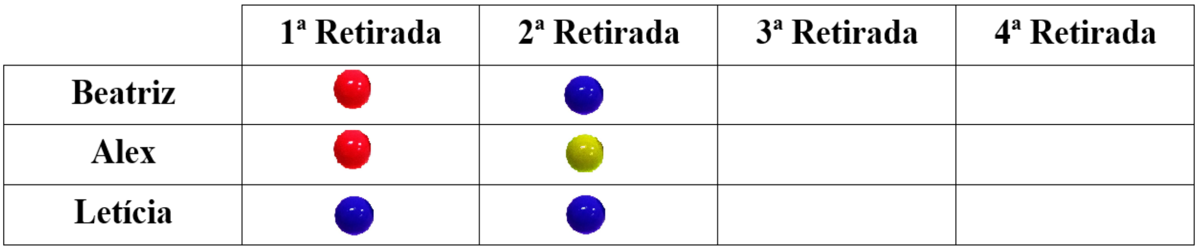
Depois dessa dica, é mais provável que seja sorteado um menino ou uma menina?

Comentário: Assim como visto anteriormente, a habilidade EF03MA25 diz respeito a identificar em experimentos aleatórios, todos os resultados possíveis, ou seja, construir o espaço amostral desse experimento. Para abordar essa habilidade em sala de aula é sugerida a 1ª parte da Atividade 3.3. Porém, ela também especifica que deve ser desenvolvida no aluno a habilidade de identificar entre dois ou mais eventos possíveis, aqueles que tem maior ou menor chance de ocorrência. Para tanto, é sugerida a 2ª parte da Atividade 3.3 que faz questionamentos acerca da situação problema apresentada na 1ª parte, e a Atividade 3.4 onde o aluno já tem em mãos os elementos que compõem o espaço amostral, e tem apenas que estimar quais dos eventos citados são mais prováveis.

Atividade 3.5 – Habilidade EF04MA26

O pai de Alex, Beatriz e Letícia apresentou a eles uma caixa contendo 5 bolas azuis, 4 vermelhas e 3 amarelas. Em seguida pediu que cada um fosse retirando uma bola de cada vez da caixa. Sendo que Beatriz é a primeira a retirar, Alex o segundo e Letícia a terceira. Depois de algumas retiradas, o resultado é o seguinte:

Figura 3.6 – Resultado após a segunda retirada

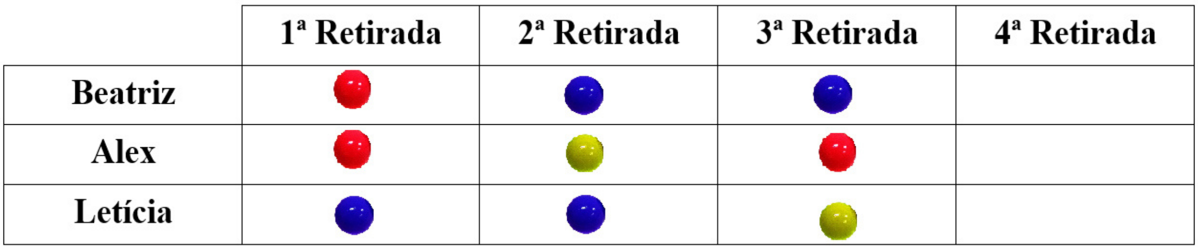


	1ª Retirada	2ª Retirada	3ª Retirada	4ª Retirada
Beatriz				
Alex				
Letícia				

Fonte: Autor

- Antes da primeira retirada, quais elementos formavam o espaço amostral? E após as duas primeiras retiradas?
- Se na terceira retirada, Beatriz retirar uma bola azul, e Alex uma bola vermelha, é mais provável que Letícia retire uma bola da cor azul, vermelha ou amarela? Por quê?
- Observando a tabela a seguir com os resultados após a terceira retirada, quais as possiblidades de resultados para a quarta retirada?

Figura 3.7 – Resultado após a terceira retirada



	1ª Retirada	2ª Retirada	3ª Retirada	4ª Retirada
Beatriz				
Alex				
Letícia				

Fonte: Autor

Comentário: A habilidade EF04MA26 é um aprofundamento da habilidade EF03MA25 que deve ser desenvolvida no 3º ano, onde o aluno além de ser capaz de estimar qual evento tem maior ou menor chance de ocorrência, deve também identificar quais características embasam essa conclusão. Para tanto, a Atividade 3.5 apresenta uma situação problema, onde o aluno é questionado sobre as chances de ocorrência de determinados eventos, em momentos diferentes, sendo que em cada um desses momentos as características do experimento são alteradas.

Atividade 3.6 – Habilidades EF05MA22 e EF05MA23

A professora de Larissa e Mateus entregou a eles cinco cartões numerados de 1 a 6, e pediu que formassem números com dois algarismos, usando esses cartões. Tais números não poderão ter algarismos repetidos.

Figura 3.8 – Cartões numerados

Fonte: Autor

- Quais números são possíveis formar? Que estratégia é possível utilizar para descobrir?
- Quantas são as possibilidades de formar números de dois algarismos, usando apenas os apresentados nesses cartões?
- Utilizando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantas possibilidades há de formar números de dois algarismos, menores que 40? E maiores que 40?

Em um segundo momento a professora colocou os cartões em um envelope de papel, e pediu para cada um retirar um cartão do envelope. Larissa irá retirar o cartão correspondente a dezena e Mateus o cartão correspondente a unidade do número. O cartão retirado não será recolocado no envelope.

- É mais provável que esse número formado seja menor que 40 ou maior que 40?
- Qual a probabilidade de o número ser menor que 40? E maior?
- Qual a probabilidade de o número formado ser par?

Atividade 3.7 – Habilidade EF05MA23

João e Gabriel estão jogando com um dado de seis faces.

Figura 3.9 – Dado

Fonte: Autor

As regras do jogo são as seguintes:

- Cada um dos jogadores lança o dado sobre a mesa e aquele que obtiver o resultado maior irá iniciar;

- A partir daí, a cada rodada, cada um lança o dado, anota o resultado obtido e soma com seus resultados anteriores corresponde a quantidade de pontos que cada jogador tem;
- Aquele que primeiro obtiver 100 pontos ou mais, é o vencedor.

Em um determinado momento do jogo, João está com 97 pontos e Gabriel está com 96. Sabendo que Gabriel iniciou o jogo e que ele é o próximo a jogar, responda as seguintes perguntas:

- Qual a probabilidade de Gabriel ser o vencedor ainda nessa rodada?
- Se Gabriel não ganhou o jogo nessa rodada, qual a probabilidade de João ser o vencedor nessa rodada?
- Sabendo que nem João e nem Gabriel conseguiram atingir os 100 pontos nessa rodada, quais as possibilidades de resultados do lançamento do dado por Gabriel, para essa rodada e a seguinte? Quais delas o tornariam vencedor na rodada seguinte?

Comentário: No 5º ano do Ensino Fundamental a BNCC estabelece duas habilidades a serem desenvolvidas, relacionadas ao tema probabilidade. A habilidade EF05MA22 propõe um aprofundamento das habilidades EF03MA25 e EF04MA26, onde o aluno deve desenvolver a habilidade de estimar quando eventos são ou não equiprováveis. Por sua vez, a habilidade EF05MA23 complementa a EF05MA22, estabelecendo que o aluno deve ser capaz de determinar a probabilidade de ocorrência de eventos aleatórios equiprováveis. Para tanto, é apresentada a Atividade 3.6 como sugestão para se trabalhar em sala de aula visando o desenvolvimento das duas habilidades. Nela é cobrado do aluno a identificação das possibilidades de ocorrência de alguns eventos, em uma situação em que o os elementos que compõem o espaço amostral são equiprováveis, e determinam a probabilidade de ocorrência desses eventos. Já a Atividade 3.7, trata especificamente da habilidade de determinar a probabilidade de ocorrência de eventos, em um experimento em que o espaço amostral é equiprovável.

3.2 ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS

Nessa etapa, convém considerar que as habilidades relativas aos anos iniciais do Ensino Fundamental foram desenvolvidas, e que assim os discentes ao iniciarem os anos finais do Ensino Fundamental, compreendem os conceitos básicos de probabilidade, bem como são de capazes de determinar a probabilidade de ocorrência de um evento, em meio a eventos equiprováveis, através da construção do espaço amostral. Com isso, a BNCC estabelece quatro habilidades a serem desenvolvidas ao longo do período compreendido entre o 6º e o 9º ano.

Tais habilidades, tratam de probabilidade por meio da abordagem frequentista, relacionando e comparando os resultados obtidos com os da probabilidade clássica. Além disso, estabelecem que o aluno deve ser capaz de diferenciar eventos dependentes e independentes, calcular a probabilidade em ambos os casos, e representar a probabilidade de um evento ocorrer, não somente por meio de fração, mas também por meio de porcentagem ou número decimal.

Assim, após serem apresentadas as habilidades, e seus respectivos objetos do conhecimento na Tabela 3.2, são sugeridas algumas atividades que podem ser utilizadas para o desenvolvimento das habilidades relativas a essa etapa de ensino. Assim como na seção 193.1, a forma como as atividades podem ser desenvolvidas e como contribuem para o desenvolvimento das habilidades, estão expressas nos comentários após as atividades. 19

No entanto, convém ressaltar que não se busca aqui, apresentar sequências didáticas que favoreçam o completo desenvolvimento das quatro habilidades, mas sim, sugestões de atividades que podem ser utilizadas para compor tais sequencias.

A tabela a seguir, apresenta todas as habilidades relacionadas ao tema, que devem ser desenvolvidas nos anos finais do Ensino Fundamental. A primeira coluna apresenta a habilidade, a segunda o objeto do conhecimento a ela relacionado e a terceira coluna apresenta o ano em que ela deve ser desenvolvida.

Tabela 3.2 – Habilidades correspondentes aos anos finais do Ensino Fundamental

Habilidades	**Objeto do Conhecimento**	**Ano**
(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável.	**6°**
	Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).	

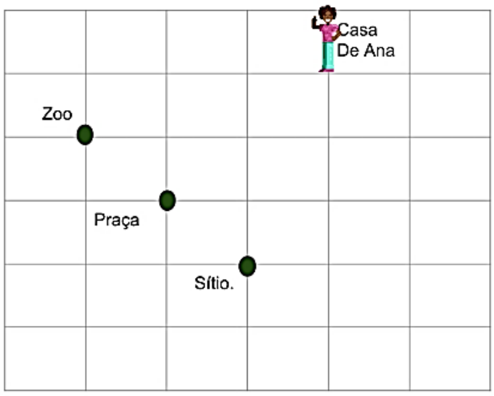
(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências.	7°
(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.	Princípio multiplicativo da contagem.	8°
	Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.	
(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.	9°

Fonte: Base Nacional Comum Curricular – BNCC

Atividade 3.8 – Habilidade EF06MA30 (SANTOS, 2018)

Ana decidiu tornar seus passeios do fim de semana (zoológico, praça ou sítio) mais divertidos e para isso resolveu deixá-los aleatórios com o auxílio de uma moeda. Veja abaixo o mapa do local onde Ana mora:

Figura 3.10 – Mapa do local onde Ana mora



Fonte: Nova Escola

Em cada esquina Ana joga uma moeda. Caso o resultado seja cara, Ana anda um quarteirão para frente. Se sair coroa, ela anda um quarteirão para baixo.
Sabendo que ela jogou a moeda o menor número de vezes possível, qual dos locais tem maior probabilidade de ser visitado? Justifique.

Comentário: A atividade por si só não é capaz de levar o aluno a desenvolver a habilidade EF06MA30, mas ao apresentar ao aluno como um problema a ser solucionado, é possível observar as estratégias utilizadas pelos alunos para solucioná-lo, perceber as dificuldades apresentadas, fazer questionamentos conduzindo-os a solução, bem como pedir que, utilizando uma moeda, realizem esse experimento aleatório, fazendo a comparação dos resultados obtidos no cálculo da probabilidade, com os resultados obtidos ao realizar o experimento uma quantidade de vezes suficientemente razoável. Além disso, pode-se pedir que representem as probabilidades utilizando as formas fracionária, decimal e percentual, reconhecendo as diferentes formas de representação da probabilidade.

Atividade 3.9 – Habilidade EF07MA34

Um certo dia, ao abordar o conteúdo probabilidade em sua turma de 7º ano, o professor de João resolveu dividir a turma em grupos de cinco alunos, e pediu que cada componente do grupo lançasse um dado dez vezes, anotando o resultado, sempre que ele fosse menor que 5. Ao realizar o experimento, a equipe formada por João, Lucas, Marcos, Maria e Mateus, registraram os resultados na tabela a seguir:

Tabela 3.3 – Resultados do experimento realizado pela equipe de João

Alunos	Quantidade de resultados menores que 5	Quantidade de lançamentos realizados
João	5	10
Lucas	7	10
Marcos	6	10
Maria	5	10
Mateus	6	10
Total	29	50

Fonte: Autor

Com base nos resultados do experimento, responda os seguintes questionamentos:

- Qual a estimativa de probabilidade de sair um número menor que 5?
- Qual a estimativa de probabilidade de sair um número igual ou maior que 5?

- Qual a probabilidade clássica de se obter um resultado menor que 5? Represente-a utilizando as formas fracionária, decimal e percentual.
- A probabilidade clássica foi igual a obtida no experimento?
- Se considerarmos os resultados de todos os lançamentos de todos os grupos formados na sala de João, a estimativa de probabilidade será a mesma? O que poderá ocorrer com essa estimativa?

Comentário: A habilidade estabelecida pela BNCC para o 7º Ano do Ensino Fundamental trata da capacidade de planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências. Para tanto, a Atividade 3.9 apresenta uma sugestão de situação problema, que se baseia na realização e análise dos resultados de um experimento aleatório realizado com um dado. Experimento esse que pode ser realizado com a própria turma em que se trabalha o tema, fazendo com que os alunos obtenham seus próprios resultados e façam comparações entre esses resultados e a probabilidade clássica para o problema apresentado. Ao se fazer a análise dos resultados, a atividade apresenta alguns questionamentos pertinentes que levarão os alunos a concluir que a probabilidade clássica não determina a quantidade de vezes que um determinado evento irá acontecer. Além disso, perceberão que ao se realizar os experimentos um número grande de vezes, a estimativa de probabilidade se torna mais próxima da probabilidade clássica. Através da realização de experimentos, como o apresentado nesta atividade, é possível através de questionamentos, observar que aprendizagens os alunos já desenvolveram, bem como conduzi-los a superação das dificuldades que ainda apresentam.

Atividade 3.10 – Habilidade EF08MA22 (PATARO E BALESTRI, 2018)

Um restaurante decidiu fazer uma promoção em que o cliente participante era beneficiado com uma refeição. Para compor essa refeição, o cliente sorteava um tipo de salada, um de carne e um de acompanhamento. No quadro a seguir estão representadas as opções que poderão compor a refeição sorteada.

Tabela 3.4 – Opções para a refeição

Saladas	Carnes	Acompanhamentos
Salada de brócolis	Filé de frango	Creme de milho
Salada de agrião	Alcatra grelhada	Purê de batata
Salada mista	Filé de peixe	Mandioca frita
		Abobrinha Refogada

Qual a probabilidade de um cliente sortear uma refeição contendo como acompanhamento o purê de batata?

Atividade 3.11 – Habilidade EF08MA22

Em um sorteio em que são considerados todos os números naturais de quatro algarismos distintos que podem ser formados pelos algarismos 2, 3, 4, 5 e 6, utilize o princípio multiplicativo para determinar quantos números é possível formar. Em seguida responda os seguintes questionamentos:

- Qual a probabilidade de obtermos cada um dos elementos do espaço amostral?
- Qual a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral?
- Qual a probabilidade de se obter um número par? E um número ímpar?
- Qual a soma das probabilidades do item anterior?
- Utilizando o princípio multiplicativo é possível determinar a quantidade de eventos em que o número formado inicia por 2, por 3, por 4, por 5 ou por 6. Assim, qual a probabilidade de obter no sorteio, um número iniciado por:
    - 2?
    - 3?
    - 4?
    - 5?
    - 6?
- Qual a soma das probabilidades obtidas no item anterior?

Comentário: No 8º ano, os alunos devem desenvolver a habilidade de determinar a probabilidade utilizando o princípio multiplicativo para obter o número de elementos do espaço amostral e/ou dos eventos descritos no problema, tendo em vista que em algumas situações não é possível construir o espaço amostral, devido à grande quantidade de elementos que o compõem. Para tanto, a Atividade 3.10 propõe uma situação problema para se iniciar o desenvolvimento dessa habilidade. O professor deve orientar os alunos a obter o número de elementos do espaço amostral, e do evento pedido, utilizando o princípio multiplicativo. Porém, é possível que o aluno construa o espaço amostral utilizando outros procedimentos, como por exemplo, a árvore de possibilidades, permitindo-o confirmar os valores obtidos através do princípio multiplicativo. A atividade sugerida aqui, é apenas uma atividade inicial onde é possível obter o número de elementos do espaço amostral a partir da construção do mesmo ou da utilização do princípio multiplicativo. A realização de outras atividades, em seguida, que aumentem o nível de dificuldade em relação a determinação do espaço amostral e permitam a ele concluir que em algumas situações só será possível obter a probabilidade com a utilização do princípio multiplicativo, vem a ser necessário. Além disso, a habilidade EF08MA22 também estabelece que o aluno do oitavo ano deve reconhecer que a soma das probabilidades de todos os eventos de um espaço amostral é igual a 1. Assim, a Atividade 3.11 é apresentada como modelo de problema que pode ser utilizado para o desenvolvimento de tal habilidade.

Atividade 3.12 – Habilidade EF09MAT20 (Adaptado de ÁTICA, 2018)

Lançando simultaneamente dois dados e calculando o produto entre eles, obtemos a tabela abaixo.

Tabela 3.5 – Produto de dois dados

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Fonte: Autor

- Os eventos “produto par” e “produto múltiplo de 5” são dependentes ou independentes?
- Os eventos “produto ímpar” e “produto maior que 24” são dependentes ou independentes?
- Os eventos “produto múltiplo de 4” e “produto menor que 20” são dependentes ou independentes?

Atividade 3.13 – Habilidade EF09MAT20 (SANTOS, 2018)

Em uma competição de Ginástica Olímpica, 2 dos 8 competidores da equipe A e 3 dos 8 competidores da equipe B ingeriram drogas estimulantes, cujo consumo não é permitido pelas regras. O regulamento da competição prevê que dois competidores sejam sorteados aleatoriamente de cada equipe para realizarem o exame, chamado de antidoping. Após o exame, são válidas as seguintes regras:

- Caso o exame não acuse a presença de drogas proibidas no material colhido dos quatro competidores sorteados, vale o resultado da disputa.

- Caso o exame acuse a presença de drogas proibidas no material colhido de pelo menos um dos competidores de uma determinada equipe, essa equipe será eliminada.
- Quanto à competição, os especialistas estimam: a chance de vitória de A em 30%, a chance de vitória de B em 20% e a chance de empate em 50%.

Admitindo que há independência entre o resultado da competição e os resultados dos exames, calcule a probabilidade de que a equipe A seja considerada vencedora.

Comentário: No 9º ano, os alunos devem desenvolver a habilidade de diferenciar eventos dependentes e independentes, além de calcular a probabilidade em ambos os casos. Assim, apresentamos acima duas atividades que podem ser utilizadas para o desenvolvimento de tal habilidade. Entendendo a necessidade de o aluno saber identificar se eventos são ou não independentes, antes de calcular a probabilidade, a Atividade 3.12 trabalha com aluno apenas a capacidade de identificar a dependência ou independência dos eventos. A atividade propõe uma situação problema cuja reflexão e discussão entre os alunos, mediada pelo professor através de questionamentos, levarão os alunos a chegar a tal conclusão. Por outro lado, a Atividade 3.13 vai um pouco além, exigindo que dentro de uma situação problema bem mais complexa, o aluno determine a probabilidade de ocorrência de eventos independentes. Nessa atividade o professor pode, além de estimular a discussão e compartilhamento das estratégias utilizadas para resolução do problema, trabalhar os três tipos de representação de probabilidade.

3.3 ENSINO MÉDIO

O Ensino Médio corresponde a última etapa da educação básica, e para ela a BNCC propõe, para a área de Matemática, que as aprendizagens essenciais desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, sejam ampliadas e aprofundadas. Essa ampliação e aprofundamento deve acontecer de tal modo que essas aprendizagens sejam novamente exploradas, mas de modo inter-relacionado, levando os estudantes a construírem uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade.

Para que isso aconteça, o documento estabelece que os estudantes dessa etapa de ensino devem desenvolver um conjunto de habilidades que estão relacionadas aos atos de investigar, construir modelos e resolver problemas. Para tanto, deve-se valorizar o modo próprio do aluno de raciocinar, representar e comunicar, para que através de discussões e validações aprofundem as aprendizagens essenciais já desenvolvidas.

No que diz respeito a Probabilidade, no Ensino Fundamental os estudantes aprenderam a construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, através da árvore de possibilidades, do princípio multiplicativo ou de simulações, para assim estimar a probabilidade de um determinado evento acontecer. Agora, no Ensino Médio, as habilidades relacionadas ao tema, requerem a mobilização dos conceitos e habilidades já desenvolvidas para a elaboração e resolução de problemas, bem como a utilização de métodos de contagem mais sofisticados para a identificação e descrição do espaço amostral e do número de eventos favoráveis, tendo em vista que em algumas situações não é viável a utilização de estratégias vistas no Ensino Fundamental, como por exemplo, a árvore de possibilidades. Além disso, as noções de probabilidade são ampliadas, pois o estudante deve também desenvolver a habilidade de reconhecer os diferentes tipos de espaços amostrais, sejam eles discretos ou não, eventos não equiprováveis, bem como analisar as implicações dessas características no cálculo de probabilidade.

A tabela a seguir, apresenta todas as habilidades relacionadas ao tema, que devem ser desenvolvidas ao longo do Ensino Médio, bem como a competência a ela relacionada.

Tabela 3.6 – Habilidades correspondentes ao Ensino Médio

Competências	Habilidades
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.
	(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular – BNCC

Como já foi citado anteriormente, cada uma das habilidades descritas na BNCC, são identificadas por um código alfanumérico, que no Ensino Médio é formado por duas letras que indicam a etapa educacional, um par de números que indicam a que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio, um segundo par de letras indica a área ou o componente curricular e três números finais, onde o primeiro indica a qual competência esta habilidade está relacionada, e o par formado pelos dois últimos números que indica a posição da habilidade na numeração sequencial de cada competência.

Se tomarmos, por exemplo, os códigos EM13MAT511 e EM13CNT308, o primeiro corresponde a décima primeira habilidade relacionada a quinta competência, proposta para a área de Matemática e suas Tecnologias, enquanto o segunda corresponde a oitava habilidade relacionada a terceira competência, proposta para a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, ambas podendo ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio.

Dessa forma deseja-se explorar nesta seção as competências e habilidades apresentados na Tabela 3.6 propondo uma sequência de problemas para cada uma das habilidades, que podem ser utilizados em sala de aula para proporcionar o aprofundamento e ampliação dos conhecimentos já adquiridos no ensino fundamental, através do raciocínio, da argumentação, da comunicação e das discussões com os colegas acerca das soluções dos problemas, bem como dos procedimentos utilizados na solução.

Dessa forma, será apresentado três blocos de atividades, um para cada habilidade, bem como uma solução para cada um dos problemas apresentados nas atividades, seguidos de uma reflexão acerca de como os mesmos favorecem o desenvolvimento da habilidade.

Atividade 3.14 – Habilidade EM13MAT311

Joga-se um dado não viciado duas vezes. Determine a probabilidade condicional de se ter obtido 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados é 7.

Solução: Ao lançar o dado duas vezes pode-se obter 36 resultados. Esses resultados estão expressos na tabela a seguir:

Tabela 3.7 – Possíveis resultados para o lançamento de dois dados

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Fonte: Autor

Os possíveis resultados, que apresentam soma 7 e nessa situação correspondem ao espaço amostral, são (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) e (6,1). Destes, apenas (3,4) apresenta 3 na primeira jogada. Assim, a probabilidade pedida é $\frac{1}{6}$.

■

Atividade 3.15 – Habilidade EM13MAT311 (Adaptado de ASSUNÇÃO E GONÇALVES, 2014)

O Bridge é um jogo de baralho jogado por quatro jogadores, em duas duplas. Os jogadores da mesma dupla sentam-se frente a frente e as 52 cartas do baralho (retirando-se os coringas) são necessárias para o jogo. Inicialmente todas as cartas são embaralhadas e distribuídas aos jogadores, de modo que cada um fica com 13. As cartas que o jogador tem são denominadas MÃO. Desse modo, com um baralho bem embaralhado, qual é a chance que uma pessoa tem de tirar uma mão perfeita (13 cartas do mesmo naipe)?

Solução: A probabilidade pedida corresponde a razão entre a quantidade de possibilidades de mãos perfeitas e o total de possibilidades de mãos, sejam elas perfeitas ou não. Assim temos:

- Número de resultados favoráveis ao evento desejado: 4 (uma mão de paus, uma de ouro, uma de copas e uma de espadas);
- Espaço amostral (Número total de possibilidades de mãos):
- Para a primeira carta temos 52 possibilidades, para a segunda 51, para a terceira 50, e assim por diante, até que para a décima terceira temos 40 possibilidades. Porém, há 13!

configurações para cada conjunto de 13 cartas, que representam uma mesma mão. Assim, o número de possibilidades de se obter as 13 cartas é dado por

$$\frac{52!}{39! \cdot 13!}.$$

Portanto, a probabilidade de se obter uma mão perfeita é

$$\frac{4}{\frac{52!}{39! \cdot 13!}} = \frac{4 \cdot 13! \cdot 39!}{52!} \cong 6{,}3 \cdot 10^{-12}.$$

■

Atividade 3.16 – Habilidade EM13MAT311

Quatro dados são jogados simultaneamente. Determine a probabilidade de se obter:

a. um par.
b. dois pares.
c. uma trinca.
d. uma sequência.

Solução: Inicialmente convém identificarmos o espaço amostral, tendo em vista ser o mesmo para os quatro itens. Para cada um dos dados há seis resultados possíveis. Logo, o total de possibilidades para o lançamento dos quatro dados é 6^4.

Analisando o número de casos favoráveis para cada um dos eventos, temos:

a. O par formado pode ser de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, ou seja, há seis modos de escolher o tipo de par. Além disso, há quatro dados, e destes, apenas dois formarão o par, ou seja, há C_4^2 (combinação de 4 elementos dois a dois) modos de escolher os dois dados. Logo, a probabilidade de se um par é de

$$\frac{6 \cdot C_4^2}{6^4} = \frac{6 \cdot 6}{6^4} = \frac{1}{36}.$$

b. Há C_6^2 modos de escolher os dois pares, pois os mesmos podem ser: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), ... ,(4, 6) e (5, 6). Além disso, há quatro dados, e destes, apenas dois formarão o par menor, ou seja, há C_4^2 modos de escolher os dois dados que o formarão, sendo que os dois restantes formarão o par maior. Logo, a probabilidade de se obter dois pares é de

$$\frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{6^4} = \frac{15 \cdot 6}{1296} = \frac{5}{72}.$$

c. A trinca pode ser de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, ou seja, há seis modos de escolher o tipo de trinca. Além disso, há quatro dados, e destes, apenas três formarão a trinca, ou seja, há C_4^3 modos de escolher os três dados que a formarão, sendo que o resultado do outro dado pode ser escolhido de 5 modos distintos (deve ser diferente do resultado da trinca). Logo a probabilidade de se obter uma trinca é de

$$\frac{6 \cdot C_4^3 \cdot 5}{6^4} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 5}{1296} = \frac{5}{54}.$$

d. Há três sequências possíveis: (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5) e (3, 4, 5, 6). Analisando a primeira sequência, temos que há 4 modos de escolher o dado cujo resultado é 1, 3 modos de escolher o dado cujo resultado será 2, 2 modos de escolher o dado cujo resultado será 3 e o último dado será o de resultado 4. Logo, há 4! = 24 modos distintos de se obter a primeira sequência. De modo análogo, temos que há 120 modos de se obter a segunda e a terceira sequência. Portanto a probabilidade de se obter uma sequência é de

$$\frac{24 \cdot 3}{6^4} = \frac{72}{1296} = \frac{1}{18}.$$

■

Atividade 3.17 – Habilidade EM13MAT311

Maria deseja conhecer uma pessoa que faça aniversário no mesmo dia que ela. Qual a probabilidade de que ela encontre alguém ao perguntar a data de nascimento de cem pessoas?

Solução: Ao perguntar a data de nascimento de cem pessoas, o número de resultados possíveis que Maria poderá obter é 365^{100}, pois há 365 possibilidades de respostas para cada uma das cem pessoas. Este corresponde ao número de elementos do espaço amostral. Destes 365^{100} resultados possíveis, desejamos os que há 1, 2, 3, ..., 99 ou 100 pessoas que fazem aniversário no mesmo dia que Maria, ou seja, todos os resultados, com exceção dos que ninguém aniversaria no mesmo dia que ela. A quantidade de resultados em que ninguém aniversaria no mesmo dia é 364^{100}, pois há 364 possibilidades de respostas para cada uma das 100 pessoas. Assim, o número de eventos favoráveis é $365^{100} - 364^{100}$, e a probabilidade pedida é de

$$\frac{365^{100} - 364^{100}}{365^{100}} = 1 - \frac{364^{100}}{365^{100}} \cong 1 - 0{,}76 = 0{,}24.$$

■

É importante ressaltar, que os alunos que hoje estão no Ensino Médio podem não ter visto probabilidade nas etapas de ensino anteriores, e que irá demorar alguns anos para que os que viram probabilidade desde o 1º ano do Ensino Fundamental, como estabelece a BNCC, cheguem ao Ensino Médio. Por isso é necessário abordar antes das atividades acima os conceitos fundamentais relacionados ao tema, tais como:

- Experimentos Aleatórios – Experimentos que mesmo realizado um grande número de vezes, e em condições idênticas, não é possível prever dentre os resultados possíveis, o que irá ocorrer;
- Espaço Amostral – Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório;
- Evento – Qualquer subconjunto do espaço amostral de experimento aleatório;
- Probabilidade de ocorrência de um evento, em que todos os resultados possíveis do experimento aleatório sejam equiprováveis – razão entre o número de resultados favoráveis ao evento, e o número de resultados possíveis no experimento.

Após a compreensão dos conceitos acima, através do desenvolvimento das habilidades referentes ao Ensino Fundamental, e levando em consideração que os estudantes ao realizarem as atividades já devem ter estudado análise combinatória, ou seja, já devem ter desenvolvido a habilidade de resolver problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento, as atividades acima favorecem o desenvolvimento da habilidade EM13MAT311, de forma gradativa.

A Atividade 3.14 sugere um problema simples em que é possível descrever em uma tabela ou em uma árvore de possibilidades todos os resultados possíveis do experimento (espaço amostral), e a partir delas fazer a contagem dos casos favoráveis ao evento, permitindo assim determinar a probabilidade pedida facilmente.

Já nos problemas apresentados em Atividade 3.15 e Atividade 3.16, não é viável descrever o espaço amostral por meio do diagrama de árvore. Assim, o estudante precisa compreender o problema, identificar as possibilidades para o espaço amostral e para o evento desejado, lançando mão de outros procedimentos de contagem adequados a situação. A partir daí é que é possível que ele calcule a probabilidade de ocorrência do evento.

Por fim, a Atividade 3.17 permite a introdução de um novo conceito, o de evento complementar. O problema apresentado é uma situação clara em que é mais viável calcular o número de possibilidades para o evento complementar, que para o evento pedido. A solução apresentada, utilizou essa estratégia, identificou e determinou o número de possibilidades para o evento complementar, e subtraindo esse valor do número de resultados possíveis, obteve o número de resultados favoráveis ao evento, e em seguida sua probabilidade de ocorrência. Após a realização desta e de mais atividades semelhantes, é possível levar os alunos a observarem que em todos os casos a probabilidade do evento pedido corresponde à diferença entre "1" e a probabilidade do evento complementar, e em seguida através de discussões entre os alunos, leva-los a fazer uma generalização, verificando sua validade.

Atividade 3.18 – Habilidade EM13MAT312

Ao se lançar uma moeda honesta, há dois resultados possíveis (Cara ou Coroa). Qual a probabilidade de ao lançá-la quatro vezes, obtermos como resultado uma cara e três coroas?

Solução: Considerando que o resultado "cara" venha a acontecer no primeiro lançamento e que nos três lançamentos seguintes se obtenha "coroa "como resultado, temos um evento favorável. Para tanto, a probabilidade de que esse evento aconteça, pode ser calculada da seguinte forma:

$$\frac{1}{\underbrace{2}_{Cara}} \cdot \frac{1}{\underbrace{2}_{Coroa}} \cdot \frac{1}{\underbrace{2}_{Coroa}} \cdot \frac{1}{\underbrace{2}_{Coroa}} = \frac{1}{16}.$$

Porém, não necessariamente o resultado "cara" deve acontecer no primeiro lançamento, para termos um evento favorável. Tal resultado pode acontecer em qualquer um dos outros lançamentos, contanto que este seja o único dos lançamentos com esse resultado. Assim, temos que a quantidade de resultados possíveis em que há apenas uma cara, corresponde a permutação de quatro elementos com três elementos repetidos, ou seja,

$$\mathrm{P}_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4.$$

Para cada um desses quatro resultados possíveis, temos uma probabilidade de $\frac{1}{16}$. Logo, a probabilidade de se obter um desses quatro resultados, ou seja, obter uma cara no lançamento de uma moeda quatro vezes, é de

$$\frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

■

Atividade 3.19 – Habilidade EM13MAT312

Obtenha uma generalização para o problema descrito na Atividade 3.18, considerando para o cálculo da probabilidade, um número n de lançamentos, e assim, construa um modelo matemático para o cálculo da probabilidade de se obter um número x de caras, de tal forma que $x \in [0, n]$.

Solução: A probabilidade de se obter cara ou de se obter coroa, é a mesma, $\frac{1}{2}$. Assim, partir da solução da Atividade 3.18 , podemos concluir que a probabilidade de se obter x caras, para uma determinada configuração de caras e coroas, é de $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$. Por outro lado, para determinamos a quantidade de configurações em que se obtém x caras em n lançamento de uma moeda, basta calcularmos o número de permutações de n elementos com repetição de x caras e $(n - x)$ coroas:

$$\mathrm{P}_n^{x,(n-x)} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{x}.$$

Portanto, a probabilidade de se obtermos x caras no lançamento de uma moeda n vezes é de

$$\frac{1}{2^n} \cdot \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{x}.$$

■

Atividade 3.20 – Habilidade EM13MAT312 (ENEM 2017)

Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos. Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

Solução: Considerando um evento favorável, em que o sinal na cor verde, seja o primeiro, e representando as cores verde e vermelho pelos símbolos $\odot$ e $\otimes$, respetivamente, temos que a probabilidade de que esse evento aconteça, pode ser calculada da seguinte forma:

$$\underbrace{\frac{2}{3}}_{\odot} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\otimes} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\otimes} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\otimes} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\otimes} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\otimes} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\otimes} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\otimes} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\otimes} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\otimes} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{2}{3^{10}}.$$

Porém, não é necessário que o sinal verde seja o primeiro, para se obter um evento favorável. O sinal verde pode ser qualquer um dos outros sinais. Assim, a quantidade de configurações possíveis, ou seja, a quantidade de eventos favoráveis, pode ser obtida calculando a permutação de 10 elementos, com 9 elementos (sinais vermelhos) repetidos:

$$\mathrm{P}_{10}^{9} = \frac{10!}{9!} = 10.$$

Para cada um dos 10 eventos favoráveis, há uma probabilidade de ocorrência de $\frac{2}{3^{10}}$. Logo, a probabilidade de ocorrer um desses 10 eventos é de

$$\frac{2}{3^{10}} \cdot 10 = \frac{20}{3^{10}}.$$

■

Atividade 3.21 – Habilidade EM13MAT312 (Adaptado de DANTE, 2016)

A probabilidade de um atleta de salto à distância atingir seu objetivo é de $\frac{2}{5}$ em cada salto. Calcule a probabilidade de em 9 saltos, ele conseguir seu objetivo em 5 deles.

Solução: Inicialmente, temos que probabilidade de o atleta não atingir o objetivo equivale a

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Representando por S os saltos em que o atleta atingiu o objetivo, e por N os saltos em que ele não atingiu o objetivo, temos que um dos resultados possíveis para os 9 saltos é que ele tenha atingido o objetivo apenas nos 5 últimos saltos, cuja probabilidade é de

$$\underbrace{\frac{3}{5}}_{\mathrm{N}} \cdot \underbrace{\frac{3}{5}}_{\mathrm{N}} \cdot \underbrace{\frac{3}{5}}_{\mathrm{N}} \cdot \underbrace{\frac{3}{5}}_{\mathrm{N}} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\mathrm{S}} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\mathrm{S}} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\mathrm{S}} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\mathrm{S}} \cdot \underbrace{\frac{2}{5}}_{\mathrm{S}} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{3^4 \cdot 2^5}{5^9}.$$

Porém, há outras configurações possíveis para o resultado dos nove saltos, em que o atleta tenha conseguido o objetivo em cinco deles. A quantidade de configurações possíveis, ou seja, eventos favoráveis, é obtida calculando uma permutação de nove elementos, em que N se repete quatro vezes e S se repete cinco vezes:

$$P_9^{5,4} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = \frac{9!}{5! \cdot (9-5)!} = C_9^5 .$$

Para cada uma das C_9^5 configurações possíveis, há uma probabilidade de ocorrência de $\frac{3^4 \cdot 2^5}{5^9}$. Portanto, a probabilidade de esse atleta atingir seu objetivo em 5 dos 9 saltos que irá realizar, é de

$$\frac{3^4 \cdot 2^5}{5^9} \cdot C_9^5.$$

■

Atividade 3.22 – Habilidade EM13MAT312

Um experimento aleatório é realizado n vezes de forma independente, de tal modo que em cada uma das n vezes, um evento A tem probabilidade p de ocorrer, e probabilidade (1- p) de não ocorrer. A partir do raciocínio utilizado na resolução do problema da Atividade 3.21, obtenha um modelo matemático para o cálculo da probabilidade de que, ao se realizar esse experimento n vezes, se obtenha como resultado o evento A, um número x de vezes, onde $x \in [0, n]$.

Solução: Considerando um determinado evento favorável, ou seja, um evento em que A ocorre x vezes, temos que a probabilidade de esse evento acontecer, é de

$$p^x \cdot (1-p)^{n-x}.$$

Por outro lado, para se obter a quantidade de configurações em que A ocorre x vezes, basta calcularmos a permutação de n elementos, em que A se repete x vezes e B (eventos diferentes de A) se repete $(n-x)$ vezes:

$$P_n^{x,(n-x)} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} = C_n^x .$$

Daí temos que, a probabilidade de que o evento A ocorra um número x de vezes, é de

$$p^x \cdot (1-p)^{n-x} \cdot C_n^x .$$

■

A habilidade EM13MAT312 está relacionada ao cálculo de probabilidade de ocorrência de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. A sequência de atividades composta por Atividade 3.18, Atividade 3.19, Atividade 3.20, Atividade 3.21 e Atividade 3.22, busca o desenvolvimento dessa habilidade, ao mesmo tempo em que se aborda o cálculo de probabilidade utilizando o método binomial.

Ao invés de apresentar a definição de probabilidade binomial e em seguida resolver exemplos, o que se propõe aqui nessa sequência de cinco atividades, é que através da resolução dos problemas, cujo nível de dificuldade evolui de forma gradativa, leve o aluno a compreender o método binomial.

A Atividade 3.18 inicia a sequência de atividades com um problema simples em que a probabilidade de que um evento aconteça é igual a probabilidade de ele não acontecer, e se pede a probabilidade de que ele ocorra uma única vez.

Tendo o aluno, compreendido e solucionado o problema da Atividade 3.18, propõe-se na atividade seguinte (Atividade 3.19) uma generalização desse problema, onde se deseja, que o aluno construa um modelo matemático para o cálculo da probabilidade de que em n realizações sucessivas de um experimento aleatório, um determinado evento aconteça um número x de vezes, sendo que a probabilidade de esse evento ocorrer é igual a probabilidade de ele não ocorrer.

Em seguida, os problemas apresentados em Atividade 3.20 e Atividade 3.21 apresentam problemas semelhantes aos dois anteriores. Porém, são problemas em que a probabilidade que um determinado evento aconteça, é diferente da probabilidade de ele não acontecer.

Por fim, a Atividade 3.22 propõe a construção de um modelo matemático para o cálculo de probabilidade através do método binomial, a partir do raciocínio utilizado nas atividades anteriores. Acredita-se que as quatro atividades anteriores sejam suficientes para que o aluno possa compreender o conceito de probabilidade binomial e construir o modelo matemático pedido nesta atividade. Porém, cabe ao professor analisar a necessidade da resolução de mais problemas particulares antes de se propor a Atividade 3.22, pois o que se apresenta aqui é apenas uma sugestão de abordagem de probabilidade binomial, visando o desenvolvimento da habilidade EM13MAT312.

Atividade 3.23 – Habilidade EM13MAT311 (GOMES, 2016)

Retirando-se uma carta de um baralho comum e sabendo que saiu uma dama, qual a probabilidade de que a carta seja de ouros?

Solução: Ao se retirar uma carta de um baralho comum, temos que o espaço amostral é de 52 cartas. Porém, ao sabermos que a carta retirada é uma dama, o espaço amostral se reduz a quatro cartas (dama de paus, dama de copas, dama de espadas e dama de ouros), e destas apenas uma corresponde ao evento pedido (dama de ouros). Logo, a probabilidade de que a carta seja de ouros, tendo saído uma dama, é de

$$\frac{1}{4}.$$

■

Atividade 3.24 – Habilidade EM13MAT311 (Adaptado de INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA, 2020)

Testes diagnósticos para detectar uma doença não são infalíveis. Para analisar o desempenho de um desses testes, realizam-se estudos em populações, contendo pessoas sãs e portadoras da doença. Assim, quatro situações distintas podem ocorrer

- a pessoa TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
- a pessoa TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
- a pessoa NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
- a pessoa NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

A tabela a seguir refere-se a um teste diagnóstico para a doença X, aplicado em uma amostra composta por duzentas pessoas, sendo 100 sadias e 100 portadoras da doença X.

Tabela 3.8 – Resultado do Teste

Resultado do Teste	**Doente**	**Sadia**
Positivo	95	15
Negativo	5	85

Fonte: (IMPA, 2020, p. 40)

Uma pessoa entre as duzentas dessa amostra será sorteada.

a) Qual a probabilidade de que a pessoa sorteada tenha a doença, se o resultado do teste foi positivo?
b) Qual a probabilidade de que a pessoa sorteada tenha a doença, se o resultado do teste foi negativo?
c) Sabendo que a pessoa sorteada tem a doença, qual a probabilidade de seu teste ter resultado positivo?
d) Sabendo que a pessoa sorteada não tem a doença, qual a probabilidade de seu teste ter resultado negativo?

Solução:

a) Se o resultado do teste da pessoa sorteada foi positivo, temos uma redução do espaço amostral para a quantidade de pessoas com resultado positivo, ou seja, 110 pessoas. Logo, a probabilidade de que ela tenha a doença é

$$\frac{95}{110} = \frac{19}{22}.$$

b) Se o resultado do teste da pessoa sorteada foi negativo, temos uma redução no espaço amostral para a quantidade de pessoas com resultado negativo, ou seja, 90 pessoas. Logo, a probabilidade de que ela tenha a doença é

$$\frac{5}{90} = \frac{1}{18}.$$

c) Se a pessoa sorteada tem a doença, o espaço amostral se reduz a 100 pessoas. Logo, a probabilidade de o teste ter resultado positivo é

$$\frac{95}{100} = \frac{19}{20}.$$

d) Se a pessoa sorteada não tem a doença, o espaço amostral se reduz a 100 pessoas. Logo, a probabilidade de o teste ter resultado negativo é

$$\frac{85}{100} = \frac{17}{20}.$$

■

Atividade 3.25 – Habilidades: EM13MAT312 e EM13MAT511 (Adaptado de WAGNER; CARVALHO; MORGADO, 2016, p.114)

Uma urna contém 6 bolas brancas e 9 bolas azuis. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade de a primeira ser azul e a segunda ser branca.

Solução: Sejam A_1= {a primeira bola é azul} e B_2= {a segunda bola é branca}. Temos que

$$P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) \cdot P(B_2|A_1) = \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} = \frac{9}{35}.$$

■

Atividade 3.26 – Habilidades: EM13MAT312 e EM13MAT511 (Adaptado de WAGNER; CARVALHO; MORGADO, 2016, p.114)

Uma urna contém 6 bolas brancas e 9 bolas azuis. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade de a primeira ser azul, sabendo que a segunda é branca.

Solução: Sejam $\mathrm{A_1}$= {a primeira bola é azul}, $\mathrm{B_2}$= {a segunda bola é branca} e $\mathrm{C_1}$= {a primeira bola é branca}. Temos que

$$\mathrm{P(A_1 \cap B_2) = P(A_1|B_2) \cdot P(B_2)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P(A_1|B_2)} = \frac{\mathrm{P(A_1 \cap B_2)}}{\mathrm{P(B_2)}}.$$

Da Atividade 3.25, temos que $\mathrm{P(A_1 \cap B_2)} = \frac{9}{35}$. Por outro lado, para determinarmos $\mathrm{P(B_2)}$, é preciso considerar que a primeira bola pode ter sido branca ou azul. Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{P(B_2)} &= \mathrm{P[(A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2)]} \\ &= \mathrm{P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2)} \\ &= \frac{9}{35} + \mathrm{P(C_1) \cdot P(B_2|C_1)} \\ &= \frac{9}{35} + \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{P(A_1|B_2)} = \frac{\mathrm{P(A_1 \cap B_2)}}{\mathrm{P(B_2)}} = \frac{\frac{9}{35}}{\frac{2}{5}} = \frac{9}{14}.$$

■

O bloco de atividades composto por Atividade 3.23, Atividade 3.24, Atividade 3.25 e Atividade 3.26, apresenta uma sequência de problemas relacionados a probabilidade condicional, buscando propiciar o desenvolvimento das três habilidades.

A Atividade 3.23 e a Atividade 3.24, apresentam problemas em que o aluno é levado a identificar o espaço amostral de um determinado experimento aleatório, levando em consideração uma condição apresentada. Tal condição faz com que o espaço amostral não seja composto por todos os resultados possíveis desse experimento. Assim, o aluno precisa observar a condição apresentada, e a partir dela identificar o espaço amostral e em seguida determinar a probabilidade para o evento desejado.

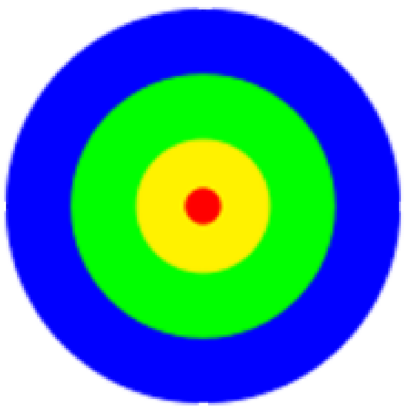
Por outro lado, a Atividade 3.25 e a Atividade 3.26, são sugestões de problemas que buscam o desenvolvimento da habilidade de calcular probabilidade de um evento em experimentos aleatórios sucessivos (EM13MAT312), bem como a habilidade de reconhecer eventos não equiprováveis e investigar a as implicações dessa característica no cálculo de probabilidade (EM13MAT511).

As soluções apresentadas para as atividades sugeridas, levam em consideração que alguns conceitos, como a definição de probabilidade condicional, o cálculo da probabilidade de ocorrência de dois ou mais eventos, tenham sidos abordados antes da resolução das atividades.

Atividade 3.27 – Habilidades: EM13MAT312 e EM13MAT511

Um dardo acerta aleatoriamente um alvo composto de círculos concêntricos de raios 1 dm, 2 dm, 3 dm e 4 dm. Sabendo que o dardo atingiu o alvo, qual a probabilidade de ter acertado a região determinada pelo círculo menor?

Figura 3.11 – Alvo



Fonte: Autor

Solução: Devemos considerar inicialmente que a probabilidade de o dardo atingir uma determinada região do alvo, é diretamente proporcional a área dessa região. Quanto menor a área, menor será a chance de o dardo acertar essa região. Assim, a tabela a seguir apresenta a área de cada uma das regiões do dardo, as identificando pela cor:

Tabela 3.9 – Área das regiões do alvo

Região	Área
Vermelha	$\pi\ dm^2$
Amarela	$3\pi\ dm^2$
Verde	$5\pi\ dm^2$
Azul	$7\pi\ dm^2$

Fonte: Autor

Além disso, temos que o espaço amostral corresponde a área total do alvo, ou seja, $16\pi\ dm^2$. Logo, a probabilidade de o dardo atingir a região determinada pelo menor círculo, ou seja, a região vermelha, é de

$$\frac{1}{16}.$$

■

A Atividade 3.27 finaliza esse capítulo com problema que aborda probabilidade em espaços amostrais não discretos, na perspectiva de desenvolvimento das habilidades EM13MAT312 e EM13MAT511. Novamente, convém ressaltar que essa atividade, por si só, não leva o aluno a desenvolver tais habilidades ou saber calcular probabilidades em espaços amostrais contínuos. Porém, é uma sugestão de atividade que pode compor sequencias didáticas relacionadas ao tema, ou ser utilizada pelos professores durante a abordagem do conteúdo em sala de aula. Dessa forma, a resolução do problema trazido por ela, contribuirá para o desenvolvimento dessas habilidades.

4 CONCLUSÃO

Este estudo nos faz perceber a necessidade de que os professores de Matemática, principalmente os do Ensino Fundamental, busquem estudar a BNCC para compreender as mudanças ocorridas nos currículos, e entender o impacto delas em sua prática docente. Além disso a inserção de probabilidade nessa etapa de ensino, requer que os professores que atuam nela, busquem formações que lhes permitam estudar o conteúdo probabilidade e metodologias de ensino alinhadas à BNCC, tendo em vista que a maioria dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental não possuem formação acadêmica em Matemática.

Assim, foi possível explicar com este trabalho, com base no entendimento do autor sobre o texto da BNCC, e em referências bibliográficas relacionadas ao ensino de probabilidade, a forma como cada uma das habilidades relacionadas ao tema pode ser desenvolvida em sala de aula. Para cada habilidade, foi apresentado sugestões de atividades que servem de exemplo para que o professor elabore ou pesquise outras situações problemas para compor uma sequência didática que favoreça o desenvolvimento das habilidades. A maioria das atividades sugeridas foram elaboradas pelo próprio autor, figurando como uma das grandes contribuições desse trabalho.

Este estudo é uma ferramenta para auxiliar professores de Matemática no processo de ensino e aprendizagem de probabilidade a luz do que estabelece a BNCC, pois mostra de que forma é possível desenvolver esse conteúdo em cada uma das etapas de ensino. No Ensino Fundamental – Anos iniciais, com foco na compreensão dos conceitos básicos de probabilidade, no Ensino Fundamental – Anos finais, com foco no cálculo de probabilidade, sob a perspectiva clássica e frequentista, e aprofundando estudo do tema no Ensino Médio, com a resolução problemas mais complexos.

Portanto, este trabalho traz uma grande contribuição para os professores que estão atuando no ensino de Matemática na educação básica, que precisam de ferramentas para melhorar sua prática de ensino e alinhá-las a BNCC, de forma específica, o ensino de probabilidade, que é o tema abordado.

REFERÊNCIAS

ASSUNÇÃO, G.; GONÇALVES, F. *50 desafios em probabilidade*. 2014. 39f. Trabalho de Iniciação Científica – Universidade Federal de Minas Gerais, [S. l.], 2014.

ÁTICA. *Sequência didática 3 – Jogos e Probabilidades*. Projeto Teláris. Disponível em: <https://plurall-content.s3.amazonaws.com/oeds/NV_ORG/PNLD/PNLD20/Telaris_Matematica/9ano/04_BIMESTRE/08_VERSAO_FINAL/03_PDFS/27_TEL_MAT_9ANO_4BIM_Sequencia_didatica_3_TRTAT.pdf>. Acesso em: 06 jan. 2020.

BRASIL. Constituição (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil*: promulgada em 5 de outubro de 1988, atualizada até a Emenda Constitucional nº 101 de 03/07/2019. Brasília, 2019. Disponível em: <https://www.senado.leg.br/atividade/const/con1988/con1988_03.07.2019/ind.asp>. Acesso em: 02 out. 2019.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*: Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, atualizada até a Lei Nº 13.868, de 3 de setembro de 2019. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 02 out. 2019

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 09 out. 2019.

BRASIL. *Plano Nacional de Educação*: Lei N° 13.005, de 25 de junho de 2014. Brasília, 2014. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2011-2014/2014/Lei/L13005.htm>. Acesso em: 03 out. 2019.

DANTE, L. R. *Contexto e Aplicações - Volume 2*. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2016. 252 p.

DINIZ, M. I. *Matemática na BNCC*. Produção: Movimento pela Base. [S. l.; S. l.], 2018. 1 vídeo (5 min). Publicado pelo canal Movimento pela Base. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=HrychTmv7vQ>. Acesso em: 14 dez. 2019.

GOMES, G. M. *Trabalhando o Conteúdo de Probabilidade Através de Exercícios*. 2016. 41f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. *Probabilidade*. Projeto Livro Aberto de Matemática. Disponível em: <https://www.umlivroaberto.org/BookCloud/Volume_1/master/view/PE511.html>. Acesso em: 12 fev. 2020.

PATARO, P. M; BALESTRI, R. *Coleção Matemática Essencial – 8º Ano*. 1ª ed. São Paulo: Scipione, 2018. 197p.

SANTOS, C. I. *Probabilidade de eventos dependentes e independentes nas Olimpíadas, 2018*. Nova Escola. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/606/probabilidade-de-eventos-dependentes-e-independentes-nas-olimpiadas>. Acesso em: 07 fev. 2020.

SANTOS, G. B. T. Onde posso aplicar a probabilidade?, *Nova Escola*. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/355/onde-posso-aplicar-a-probabilidade>. Acesso em: 05 fev. 2020.

SILVA, L. V. Situações possíveis e impossíveis. *Nova Escola*. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/551/situacoes-possiveis-e-impossiveis>. Acesso em: 14 nov. 2019.

WAGNER, E.; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio – Volume 2*. 7ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.