UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

FRANCISCO OTACÍLIO SILVA ASSIS

TERNOS PITAGÓRICOS E QUASE PITAGÓRICOS

REDENÇÃO - CE

2020

FRANCISCO OTACÍLIO SILVA ASSIS

TERNOS PITAGÓRICOS E QUASE PITAGÓRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

REDENÇÃO - CE

2020

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Assis, Francisco Otacilio Silva.

A848t

Ternos pitagóricos e quase pitagóricos / Francisco Otacilio Silva Assis. - Redenção, 2020.
58f: il.

Dissertação - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. Matemática - Estudo e ensino - Pesquisa. 2. Lei dos cossenos. 3. Teorema de Pitágoras. 4. Ternos pitagóricos. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 372.7

FRANCISCO OTACÍLIO SILVA ASSIS

TERNOS PITAGÓRICOS E QUASE PITAGÓRICOS

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 30/09/2020

BANCA EXAMINADORA

João F.co da S. Filho

Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Maria Cristiane M. Brandão.

Dra. Maria Cristiane Magalhães Brandão
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Dedico este trabalho a meu pai Raimundo Guedes de Assis (em memória), que sempre foi meu maior incentivador.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sua infinita bondade e amor por mim.

Ao professor João Francisco, meu orientador, pela competência e dedicação, tão importante na realização deste trabalho.

A todos os professores do curso PROFMAT, pelo empenho e profissionalismo no decorrer do curso.

A todos os colegas do curso, pelo companheirismo e oportunidade de interação e aprendizado.

Aos meus pais, Raimundo Guedes de Assis (em memória) e Maria Silva Assis por estarem sempre ao meu lado ensinando bons valores e me incentivando.

À minha família, pelo apoio e compreensão, quando mais precisei.

À minha amada esposa, pelo carinho, amor, incentivo e paciência, nesta caminhada. Obrigado por estar sempre ao meu lado.

Às minhas princesas, Isadora e Ísis, por todo amor, carinho e inspiração para seguir em frente.

Aos professores participantes da banca examinadora Doutor Rafael Jorge Pontes Diógenes e Doutora Maria Cristiane Magalhães Brandão, pela acolhida ao convite e pelas valiosas contribuições a este trabalho.

Por fim, a todos aqueles que de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste sonho.

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo."(Galileu Galilei)

RESUMO

Nesse trabalho, temos como finalidade realizar um estudo relacionado às soluções com coordenadas naturais de equações do tipo $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$ com r racional pertencente ao intervalo $(-1, 1)$, designadas por *ternos quase pitagóricos*. Essa equação aparece, por exemplo, aplicando a lei dos cossenos a um triângulo que possui x, y e z como medidas de seus lados e r como cosseno do ângulo interno oposto ao lado de comprimento x. Faremos a apresentação de expressões que fornecem números naturais que satisfazem tal equação, mostrando assim, que a partir de um ângulo convexo com cosseno racional, podemos sempre construir triângulos, cujos lados possuem medidas inteiras. Por fim, faremos uma análise sobre o estudo dos ternos quase pitagóricos, conforme as orientações da Base Nacional Comum Curricular, buscando identificar de que forma este assunto poderá contribuir com o estudo da Matemática no ensino básico.

Palavras-chave: Matemática - Estudo e ensino - Pesquisa. Lei dos cossenos. Teorema de Pitágoras. Ternos pitagóricos.

ABSTRACT

In this work, we aim to conduct a study related to solutions with natural coordinates of equations of the type $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$, where r denotes a rational number that belong to the interval $(-1, 1)$, called *almost Pythagorean triples*. This equation appear, for example, applying the law of cosines to a triangle that has the values x, y and z as measures of their sides and r as cosine of the internal angle opposite to the side of length equal to x. We will present expressions that provide natural number that satisfy such an equation, showing that from an convex angle with rational cosine, we can always build triangles whose sides have whole measures. Finally, we will make an analysis on the study of the almost Pythagorean triples according to the guidelines of the Common Base National Curriculum, seeking to identify how this subject can contribute to the study of mathematics in basic education.

Key words: Mathematics - Study and teaching - Research. Law of Cosines. Pythagorean theorem. Pythagorean triples.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Natural da ilha de Samos, Pitágoras foi um matemático grego que viveu entre 580 e 500 a.C.. Alguns autores acreditam que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales de Mileto, devido à proximidade de Samos e Mileto, seus respectivos lugares de nascimento e a algumas semelhanças nos seus interesses de estudos. Segundo Boyer (2010) essa crença se torna improvável devido a diferença de aproximadamente 50 anos entre suas idades, já a explicação para a semelhança nos seus interesses está no fato de terem viajados pelos mesmos centros em busca de conhecimentos.

Após ter viajado pelo Egito e Babilônia - possivelmente indo até a Índia - Pitágoras retornou à Grécia e estabeleceu-se em Crotona, onde fundou uma sociedade secreta, a escola pitagórica. Pitágoras tem sua história cercada de lendas e mitos, isso está associado à inexistência de documentos daquela época e ao fato de sua ordem ter sido comunitária além de secreta, onde o conhecimento e propriedade eram comuns, assim as descobertas não eram atribuídas a Pitágoras nem a nenhum outro membro específico, mas sim aos pitagóricos. Embora naquela época fosse um hábito dar-se todo o credito ao mestre.

O teorema ligado ao nome de Pitágoras, já era conhecido pelos babilônios, a cerca de aproximadamente 1000 anos antes de seu nascimento, é o que sugere a tableta Plimpton 322 na Universidade de Colúmbia, datada do período babilônico antigo (1900 a 1600 a.C. aproximadamente). A Plimpton 322 é parte de uma tableta maior, essa parte que resta apresenta uma tabela, com quatro colunas e 15 (quinze) linhas, os pesquisadores descobriram que em cada linha as 03 (três) primeiras colunas continham ternos pitagóricos, ou seja, números inteiros que correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo.

O nome Teorema de Pitágoras foi atribuído à proposição que relaciona os lados de um triângulo retângulo, devido à possibilidade dos pitagóricos terem sido os primeiros a apresentarem uma demonstração para o mesmo, mas vale lembrar que não há registros ou documentos que comprovem a veracidade dessa suposição. Esse teorema é de fundamental importância para o presente trabalho, pois a busca por valores naturais que satisfazem a relação fornecida pelo referido resultado, culminou com a obtenção de expressões que fornecem medidas inteiras dos lados de triângulos retângulos, tais como as expressões de Pitágoras e Euclides. Essas expressões motivaram nossa busca e obtenção de expressões mais gerais, que fornecem medidas inteiras dos lados de triângulos que possuem um dos ângulos internos com cosseno racional.

Nessa perspectiva, faremos um estudo sobre as soluções com coordenadas naturais da equação

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz, \tag{1}$$

onde $r \in (-1, 1)$ é uma constante racional, mostrando que tal equação sempre admite soluções com coordenadas naturais. Concluindo assim que a partir de um ângulo $\alpha \in (0, \pi)$ com cosseno racional é sempre possível construir triângulos cujos lados possuem medidas inteiras.

No segundo capítulo, iniciaremos abordando alguns resultados básicos sobre geometria de triângulos, servindo de base para as demonstrações do Teorema de Pitágoras. Posteriormente, faremos um breve estudo da equação pitagórica, apresentando relações que fornecem suas soluções com coordenadas naturais, conhecidas como *ternos pitagóricos*. Concluiremos o capítulo com uma breve revisão de trigonometria, identificando o surgimento dos conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo, definindo essas três razões no triângulo retângulo e na circunferência trigonométrica, obtendo como aplicação as relações conhecidas como lei dos senos e lei dos cossenos.

Ainda no terceiro capítulo, apresentaremos as relações que fornecem ternos de números naturais que satisfazem (1), que serão chamados *ternos quase pitagóricos*, enfatizando a relação existente com a lei dos cossenos e a interpretação geométrica dos referidos ternos. No quarto capítulo faremos uma apresentação da nova Base Nacional Comum Curricular - BNCC, ressaltando suas principais orientações e identificando as dez competências gerais consideradas essenciais para o desenvolvimento pessoal e intelectual dos alunos, além disso iremos relacionar os ternos quase pitagóricos com as orientações da nova BNCC.

2 PRELIMINARES

No presente capítulo apresentaremos duas demonstrações do Teorema de Pitágoras, sendo a primeira do tipo geométrica que utiliza-se comparação de áreas e a segunda do tipo algébrica que dispõem-se das relações métricas no triângulo retângulo. Em seguida faremos um estudo relacionado aos ternos pitagóricos que representam medidas inteiras dos lados de um triângulo retângulo, apresentando ainda as relações que fornecem tais ternos, finalizando com um breve resumo sobre trigonometria e as principais razões trigonométrica (seno, cosseno e tangente).

2.1 TEOREMA DE PITÁGORAS

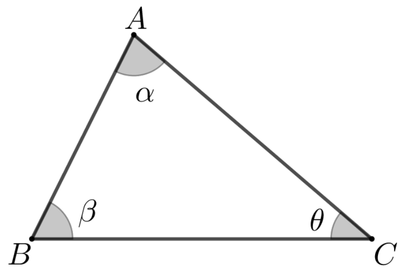
A seguir apresentaremos alguns resultados que irão nos auxiliar na demonstração do Teorema de Pitágoras.

Lema 2.1. *Dado um triângulo qualquer, que tem α, β e θ como medidas de seus ângulos internos, temos que*

$$\alpha + \beta + \theta = 180^{\text{o}}.$$

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer, com medidas dos ângulos internos representadas por α, β e θ, como mostra a Figura 1.

Figura 1: Triângulo ABC



Fonte: Autor, 2020

Se traçarmos um reta $\overleftrightarrow{XY}$ passando pelo vértice A, tal que $\overleftrightarrow{XY}$ seja paralela a reta que contém o lado BC, teremos então a Figura 2.

Aplicando o teorema dos ângulos alternos internos, de acordo com Dolce (1993), segue que

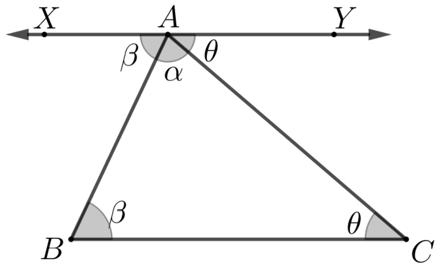
$$A\widehat{C}B \equiv C\widehat{A}Y = \theta$$

e

$$A\widehat{B}C \equiv B\widehat{A}X = \beta,$$

logo a união dos três ângulos postos de forma adjacentes corresponde a um ângulo raso,

Figura 2: Triângulo/soma dos ângulos internos



Fonte: Autor, 2020

implicando que

$$\alpha + \beta + \theta = 180^{\text{o}}. \qquad \square$$

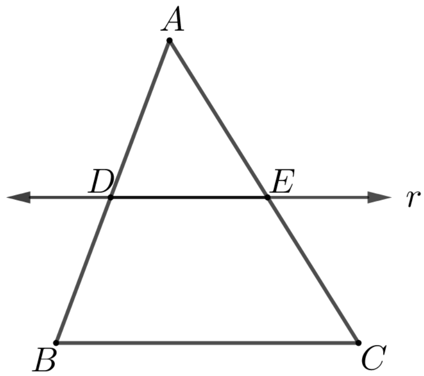
Definição 2.1. *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes quando existir uma correspondência entre seus vértices, de modo que os lados correspondentes sejam proporcionais e os ângulos correspondentes sejam congruentes entre si.*

Lema 2.2. *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

Demonstração. De acordo com a Definição 2.1, para provarmos que dois triângulos são semelhantes, precisamos demonstrar que eles têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais. Portanto nossa demonstração será composta de duas partes.

1ª Parte (Ângulos correspondentes congruentes) Considere um triângulo $\triangle ABC$ e uma reta r, paralela ao lado BC, que corta os outros dois lados nos pontos D e E, determinando assim um novo triângulo $\triangle ADE$, como mostra a Figura 3.

Figura 3: Demonstração/ 1ª parte



Fonte: Autor, 2020

Sabendo que $DE \parallel BC$, temos que

$$A\widehat{D}E \equiv A\widehat{B}C$$

e

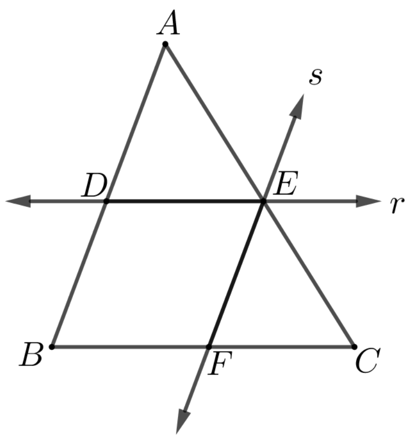
$$A\widehat{E}D \equiv A\widehat{C}B,$$

pois são pares de ângulos correspondentes, já o ângulo $\widehat{A}$ é comum aos dois triângulos. Portanto os dois triângulos possuem ângulos correspondentes congruentes.

Observação 2.1. *Dados os pontos A e B no plano usaremos as seguintes notações: AB para representar o segmento que tem tais pontos como suas extremidades e $\overline{AB}$ para o comprimento do mesmo.*

2ª Parte (Lados correspondentes proporcionais) Partindo da Figura 3 traçamos uma reta s paralela ao lado AB passando pelo ponto E, marcamos F que é o ponto de interseção da reta s com o lado BC, como mostra a Figura 4.

Figura 4: Demonstração/ 2ª parte



Fonte: Autor, 2020

Sendo $DE \parallel BC$, pelo Teorema de Tales temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}. \tag{2}$$

Por outro lado temos $EF \parallel AB$, daí segue que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}. \tag{3}$$

Podemos também observar que o quadrilátero $BDEF$ é um paralelogramo, pois $EF \parallel BD$ e $DE \parallel BF$. De acordo com a Proposição 2.30 de Muniz Neto (2013), concluímos que

$$\overline{DE} = \overline{BF}. \tag{4}$$

De (3) e (4), obtemos

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}. \tag{5}$$

Das equivalências (2) e (5), dispomos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

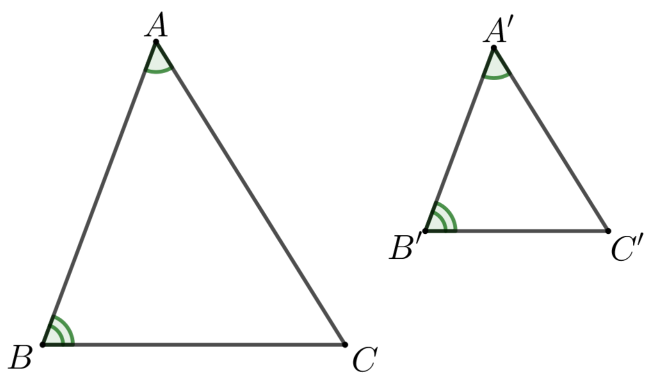
Portanto, como mostramos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais, podemos então concluir que eles são semelhantes. $\square$

Algumas proposições estabelecem as condições suficientes para a determinação de semelhança entre dois triângulos, tais proposições são conhecidas como critérios de semelhança de triângulos. A seguir iremos abordar e demonstrar apenas um desses critérios.

Proposição 2.1 (**Caso de semelhança** AA). *Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.*

Demonstração. Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, com $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, como mostra a Figura 5.

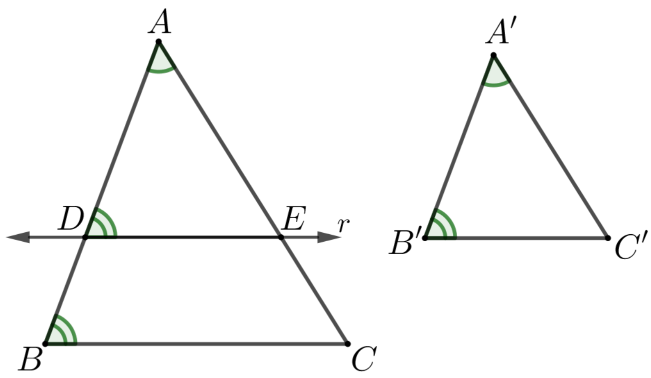
Figura 5: Triângulos ABC e $A'B'C'$



Fonte: Autor, 2020

Sabendo que $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, então o Lema 2.1 implica diretamente na congruência $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que os triângulos acima não são congruentes e que $\overline{A'B'} < \overline{AB}$, portanto marcamos um ponto D sobre o lado AB, tal que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$. Em seguida, traçamos uma reta r passando por D e paralela a BC, para marcarmos o ponto E de interseção com o lado AC, como mostra a Figura 6.

Figura 6: Caso de semelhança (AA)



Fonte: Autor, 2020

Sendo $DE \parallel BC$ temos que $\widehat{B} \equiv \widehat{D}$, pois são ângulos correspondentes, como $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, podemos afirmar que $\widehat{D} \equiv \widehat{B'}$. De acordo com o Axioma 2.5 de Muniz Neto (2013), os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes pelo caso de congruência ALA, pois $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \overline{AD} = \overline{A'B'}$ e $\widehat{D} \equiv \widehat{B'}$. Finalmente, temos pelo Lema 2.2 que $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são semelhantes, pois $DE \parallel BC$, daí concluímos que $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ também são semelhantes, visto que $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$. $\square$

Apresentaremos a partir de então, o Teorema de Pitágoras usado na dedução de diversos resultados em geometria teórica e soluções de problemas práticos. Segundo Barbosa (1993), o professor de matemática Elisha Scott Loomis do estado de Ohio, nos Estados Unidos, reuniu na segunda edição de seu livro "The Pythagorean Proposition"de 1940 um total de 370 demonstrações para tal teorema.

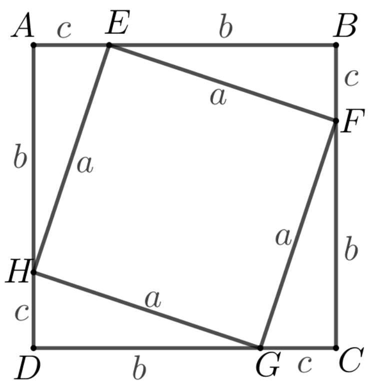
A seguir apresentaremos duas dessas demonstrações, sendo a primeira baseada em comparações de áreas, que trata-se do tipo de prova geométrica, já a segunda demonstração é um tipo de prova algébrica, a qual se baseia nas relações métricas de um triângulo retângulo.

Teorema 2.1 (**Teorema de Pitágoras**). *Dado um triângulo retângulo, que tem a como medida da hipotenusa, b e c como medidas dos catetos, então vale a seguinte relação*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Demonstração 1. Partiremos de um quadrado $ABCD$ com lados medindo $b+c$, o qual será nosso quadrado base, sobre cada lado marcamos um ponto dividindo-os assim em dois segmentos, um de comprimento igual a b e outro de comprimento igual a c. Em seguida traçamos segmentos de reta ligando tais pontos e assim construímos um quadrilátero $EFGH$ inscrito em $ABCD$, como mostra a Figura 7.

Figura 7: Quadrado base - Configuração 1



Fonte: Autor, 2020

Podemos observar na Figura 7 que os quatros triângulos são congruentes, pelo caso de congruência LAL, pois ambos apresentam um lado de comprimento b, um ângulo reto e outro lado de comprimento c. Segue então que $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE} = a$, assim o quadrilátero $EFGH$ possui quatro lados com a mesma medida de comprimento, por outro lado, o mesmo apresenta quatro ângulos retos, pois ambos correspondem ao suplemento da soma de dois complementares. Assim chegamos à conclusão que $EFGH$ é um quadrado de lado com comprimento igual a a.

Portanto a área do nosso quadrado base é composto pela união da área do quadrado $EFGH$ com as áreas dos quatros triângulos retângulos congruentes, que têm a como medida da hipotenusa e como catetos os segmentos de comprimentos b e c, podendo ser calculada pela expressão

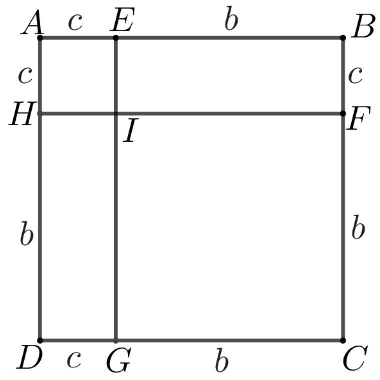
$$\text{Área}(ABCD) = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}bc = a^2 + 2bc. \tag{6}$$

Agora apresentaremos uma nova configuração para o nosso quadrado base $ABCD$, em que iremos traçar uma reta paralela ao lado AB, para marcarmos os pontos H e F de interseção com os lados AD e BC respectivamente e outra paralela ao lado AD para marcarmos os pontos E e G de interseção com AB e CD, respectivamente. O ponto I será a interseção entre as duas retas traçadas, os pontos marcados sobre cada lado do quadrado base divide ambos em dois segmentos de comprimentos b e c (cf. Figura 8).

Podemos notar que na Figura 8 temos o mesmo quadrado base $ABCD$ apresentado na Figura 7, pois seus lados têm como comprimento a soma de dois segmentos de medidas b e c. Nesta última configuração a área do quadrado $ABCD$ é composta pela união da área do quadrado $AEIH$, cujo lado mede c, com a área do quadrado $CFIG$, com lado de comprimento igual a b e duas vezes a área do retângulo de dimensões b e c, podendo ser encontrada pela expressão

$$\text{Área}(ABCD) = b^2 + c^2 + 2bc. \tag{7}$$

Figura 8: Quadrado base - Configuração 2



Fonte: Autor, 2020

Portanto, como as expressões (6) e (7) representam ambas a área do nosso quadrado base $ABCD$, temos que

$$a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc,$$

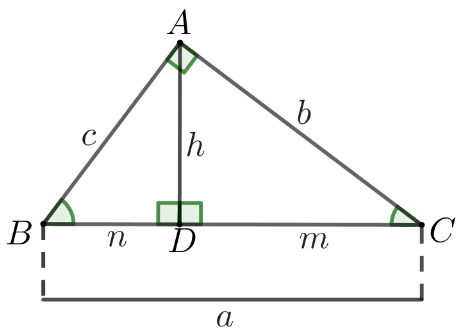
consequentemente obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

onde a é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo, cujos catetos possuem medidas b e c, provando assim o Teorema de Pitágoras. □

Demonstração 2. Seja o triângulo $\triangle ABC$ retângulo em A, traçamos a altura h relativa ao lado BC e marcamos o ponto D, o qual divide BC em dois segmentos de comprimentos m e n, como mostra a Figura 9.

Figura 9: Relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: Autor, 2020

Podemos então observar a existência de três triângulos, o primeiro é o nosso triângulo $\triangle ABC$ e os outros dois surgiram ao traçarmos a altura relativa ao lado BC, que são os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$ ambos retângulos em D. Além disso concluímos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$ são semelhantes, pelo critério de semelhança (AA), pois ambos são retângulos e têm o ângulo $\widehat{C}$ em comum, logo

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m},$$

daí conclui-se

$$am = b^2. \tag{8}$$

Por outro lado temos, pelo mesmo critério, que os triângulo $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ também são semelhantes, pois ambos são retângulos e têm o ângulo $\widehat{B}$ em comum, assim dispomos

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n},$$

consequentemente

$$an = c^2. \tag{9}$$

Agora somando as equivalências (8) e (9) membro a membro, como segue

$$am + an = b^2 + c^2,$$

colocando a em evidência no primeiro membro, obtemos

$$a(m + n) = b^2 + c^2.$$

Como podemos ver na Figura 9 a soma das medidas dos segmentos m e n equivalem a a, fazendo a substituição temos

$$a \cdot a = b^2 + c^2,$$

concluímos então que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Assim mostramos mais uma vez a veracidade do Teorema de Pitágoras. □

Apresentaremos a seguir o enunciado da proposição recíproca ao Teorema de Pitágoras, segundo Barbosa (1993, p. 23).

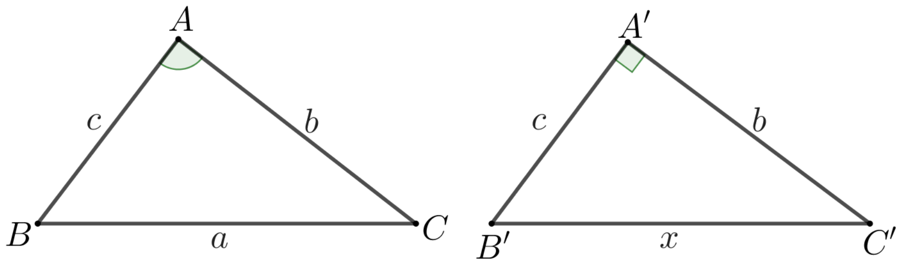
Proposição 2.2. *Se em um triângulo o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o ângulo oposto é reto.*

Demonstração. Considere um triângulo $\triangle ABC$ para o qual temos, por hipótese,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Consideremos também um outro triângulo $\triangle A'B'C'$ retângulo em A', de catetos b e c e hipotenusa x, como mostra a Figura 10.

Figura 10: Recíproca do Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor, 2020

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo $\triangle A'B'C'$, colhemos

$$x^2 = b^2 + c^2,$$

e comparando com a hipótese temos

$$x^2 = a^2$$

ou

$$x = a.$$

Segue que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, portanto temos que $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$, ou que o ângulo $\widehat{A}$ é reto. Logo o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo. $\square$

2.2 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO

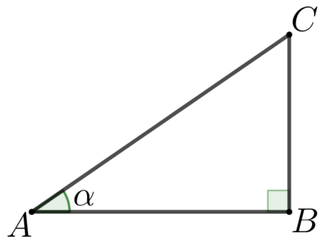
A trigonometria consiste essencialmente em associar a um ângulo qualquer certos valores, como por exemplo seno, cosseno (que serão as funções trigonométricas que iremos destacar neste tópico) e tangente, de modo que cada um desses valores representa uma espécie de medida do ângulo. Esse ramo da Matemática teve sua fundamentação baseada na semelhança de triângulos. A seguir iremos definir seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

Definição 2.2. *Dado um triângulo retângulo, que tem α como medida de um dos seus ângulos agudos, então a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa é chamada de seno de α, denotado por* $\operatorname{sen}\alpha$.

Definição 2.3. *Dado um triângulo retângulo, que tem α como medida de um dos seus ângulos agudos, então a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa é chamada de cosseno de α, denotada por* $\cos\alpha$.

Definição 2.4. *Dado um triângulo retângulo, que tem α como medida de um dos seus ângulos agudos, então a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e o cateto adjacente ao ângulo de medida α é chamada de tangente de α, denotado por* $\operatorname{tg}\alpha$.

Figura 11: Triângulo retângulo



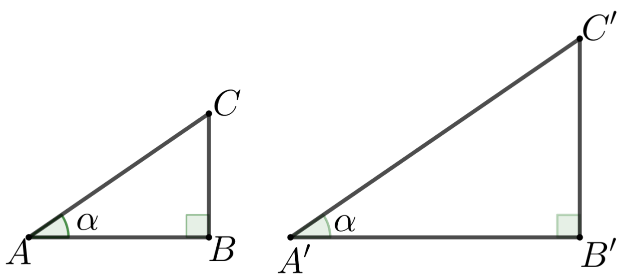
Fonte: Autor, 2020

No triângulo retângulo da Figura 11, se aplicarmos as definições citadas acima, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}, \quad \cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \tag{10}$$

Agora se pensarmos em um triângulo retângulo $A'B'C'$ com ângulo reto em B' e com $\widehat{A'} = \widehat{A} = \alpha$, como mostra a Figura 12.

Figura 12: Triângulos retângulos



Fonte: Autor, 2020

Temos pelo caso de semelhança AA que o $\triangle A'B'C'$ é semelhante ao $\triangle ABC$, logo

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}, \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}},$$

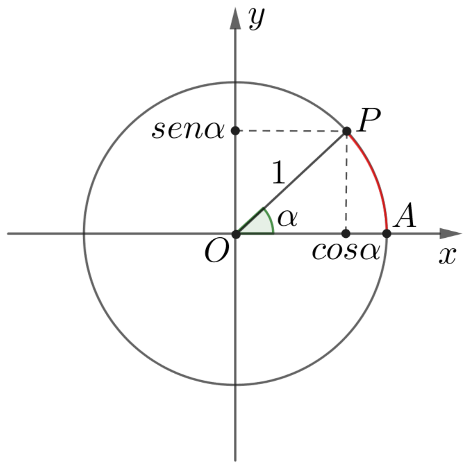
assim podemos concluir que para $\widehat{A'} = \widehat{A} = \alpha$ temos

$$\operatorname{sen}\widehat{A'} = \operatorname{sen}\widehat{A}, \qquad \cos\widehat{A'} = \cos\widehat{A} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\widehat{A'} = \operatorname{tg}\widehat{A}.$$

Portanto, podemos concluir a partir dessas relações que o seno, o cosseno e a tangente dependem somente do ângulo, e não do triângulo que o contém. As relações constantes em (10) definem seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo qualquer, já que todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo.

Para as demonstrações das próximas relações, serão necessárias as definições de seno e cosseno para ângulos obtusos. Como um triângulo retângulo não apresenta ângulo obtuso, usaremos a circunferência trigonométrica, encontrada em Iezzi *et al.* (2016) e apresentada na Figura 13, para definirmos seno e cosseno de um ângulo $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Figura 13: Circunferência trigonométrica



Fonte: Autor, 2020

Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário, então para o arco $(\widehat{AP})$ no sentido anti-horário, temos que a $med(\widehat{AP}) = \alpha \; rad$. A seguir enunciaremos as seguintes definições.

Definição 2.5. *Seja P um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, definimos o seno de α como a ordenada do ponto P.*

Definição 2.6. *Seja P um ponto da circunferência trigonométrica, imagem de um número real α com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, definimos o cosseno de α como a abscissa do ponto P.*

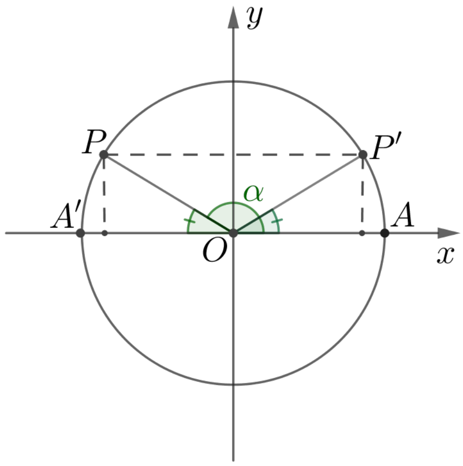
Dado P imagem de um número real α na circunferência trigonométrica, tal que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Seja P' um ponto da circunferência, simétrico de P com relação ao eixo vertical, como mostra a Figura 14, temos que

$$(\widehat{AP}) + (\widehat{PA'}) = \pi,$$

logo

$$(\widehat{PA'}) = \pi - (\widehat{AP}).$$

Figura 14: Circunferência trigonométrica/ Ângulos obtusos



Fonte: Autor, 2020

Como $(\widehat{PA'}) = (\widehat{AP'})$, segue então que

$$(\widehat{AP'}) = \pi - (\widehat{AP}),$$

consequentemente

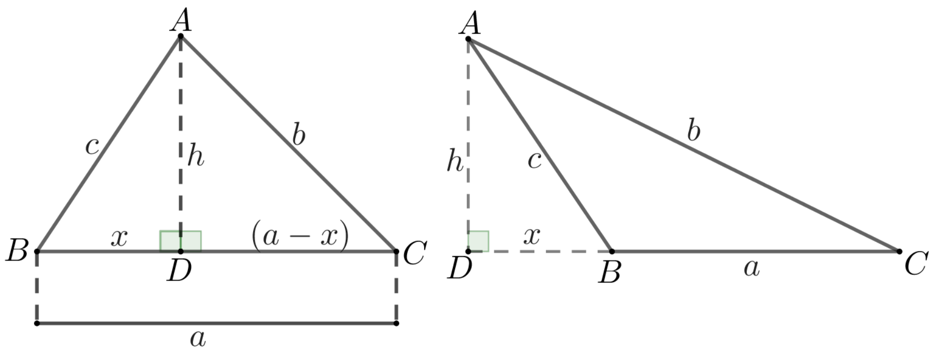
$$(\widehat{AP'}) = \pi - \alpha.$$

Portanto, para um ângulo α, com $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$$

Dispondo de algumas das relações já apresentadas anteriormente, como Teorema de Pitágoras, seno e cosseno no triângulo retângulo, vamos agora apresentar duas relações importantes da trigonometria. Essas relações são conhecidas como lei dos senos e lei dos cossenos e para demonstrá-las, devemos considerar duas possibilidades como mostra a Figura 15.

Figura 15: Trigonometria num triângulo qualquer



Fonte: Autor, 2020

Proposição 2.3. *Seja ABC um triângulo qualquer com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ temos*

$$\frac{a}{sen\widehat{A}} = \frac{b}{sen\widehat{B}} = \frac{c}{sen\widehat{C}}$$

Demonstração. No primeiro caso aplicando a relação do seno no triângulo retângulo ABD temos

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{h}{c},$$

segue que

$$h = c\operatorname{sen}\widehat{B}. \tag{11}$$

Agora aplicando a relação do seno no triângulo retângulo ADC, alcançamos

$$\operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{h}{b},$$

logo

$$h = b\operatorname{sen}\widehat{C}. \tag{12}$$

Comparando então as relações (11) e (12), temos

$$c\operatorname{sen}\widehat{B} = b\operatorname{sen}\widehat{C},$$

consequentemente, temos

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}.$$

No segundo caso em que o ponto D não pertence ao lado BC, mas sim ao seu prolongamento, aplicando relação do seno no triângulo retângulo ADC, ganhamos

$$\operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{h}{b},$$

multiplicando os dois lados da igualdade por b, obtemos

$$h = b\operatorname{sen}\widehat{C}. \tag{13}$$

Ainda no segundo caso, aplicando a relação do seno no triângulo retângulo ADB adquirimos

$$\operatorname{sen}(\pi - \widehat{B}) = \frac{h}{c},$$

consequentemente

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{h}{c},$$

portanto

$$h = c\operatorname{sen}\widehat{B}. \tag{14}$$

Comparando (13) e (14) chegamos na mesma relação que obtivemos no primeiro caso, como segue

$$c \operatorname{sen} \widehat{B} = b \operatorname{sen} \widehat{C},$$

logo

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}.$$

Se nos dois casos tomarmos a altura relativa ao lado AC, com o uso do mesmo argumento chegamos a relação

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}},$$

assim concluímos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}. \qquad \square$$

A expressão acima nos diz que em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante, esta relação é conhecida como a **lei dos senos**.

Proposição 2.4. *Seja ABC um triângulo qualquer com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, então vale as seguintes relações*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B} \quad e \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}.$$

Demonstração. Continuando com os triângulos da Figura 15, aplicando a definição do cosseno no triângulo retângulo ABD, no primeiro caso, temos

$$\cos \widehat{B} = \frac{x}{c},$$

daí segue que

$$x = c \cos \widehat{B}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao mesmo triângulo dispomos

$$c^2 = h^2 + x^2,$$

agora isolando o termo h^2, adquirimos

$$h^2 = c^2 - x^2. \tag{15}$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADC, nos leva a expressão

$$b^2 = h^2 + (a - x)^2,$$

decorre da aplicação dos produtos notáveis que

$$b^2 = h^2 + a^2 + x^2 - 2ax,$$

substituindo x por $c\cos\widehat{B}$, colhemos

$$b^2 = h^2 + a^2 + x^2 - 2ac\cos\widehat{B},$$

agora substituindo h^2 de acordo com a relação (15), obtemos

$$b^2 = c^2 - x^2 + a^2 + x^2 - 2ac\cos\widehat{B},$$

logo

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}.$$

No segundo caso, aplicando a relação do cosseno no triângulo ABD retângulo em D, adquirimos

$$\cos(\pi - \widehat{B}) = \frac{x}{c},$$

multiplicando os dois lados da igualdade acima por c, temos

$$x = c\cos(\pi - \widehat{B}),$$

segue então que

$$x = -c\cos\widehat{B}. \tag{16}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABD, ganhamos

$$c^2 = h^2 + x^2. \tag{17}$$

Aplicando também o Teorema de Pitágoras no triângulo ADC, colhemos

$$b^2 = h^2 + (x + a)^2,$$

consequentemente

$$b^2 = h^2 + x^2 + a^2 + 2ax.$$

Substituindo x de acordo com (16) no último termo do lado direito da expressão acima, segue que

$$b^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ac\cos\widehat{B},$$

substituindo $h^2 + x^2$ de acordo com (17), obtemos novamente

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}.$$

Logo, a igualdade acima é válida para qualquer triângulo. Traçando a altura relativa ao lado AC e aplicando a relação do cosseno no triângulo retângulo para os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$, obtemos também que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

e

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C},$$

concluindo a demonstração. □

2.3 TERNOS PITAGÓRICOS

Inicialmente falaremos sobre a condição necessária para que três números reais positivos x, y e z correspondam aos comprimentos dos lados de um triângulo. Segundo Frezza (2017), pela desigualdade triangular, se os valores x, y e z correspondem às medidas dos lados de um triângulo qualquer, então serão verificadas as seguintes desigualdades:

$$x < y + z \quad (I),$$

$$y < x + z \quad (II),$$

$$z < x + y \quad (III).$$

Porém, se x representar a medida do lado de maior comprimento, basta verificarmos a primeira desigualdade, pois as outras serão consequências dela. Portanto, podemos definir como terno triangular o conjunto de três números reais positivos e indicaremos por (x, y, z) que satisfaçam (I), com x sendo o maior entre eles.

Sendo (x, y, z) um terno de números reais positivos que satisfazem a equação

$$x^2 = y^2 + z^2, \tag{18}$$

daí concluímos que $y^2 < x^2$ ou $y < x$ e de modo análogo chegamos a conclusão de que $z < x$, logo x é o maior elemento do terno. Agora somando $2yz$ aos dois membros da equação, obtemos

$$x^2 + 2yz = y^2 + z^2 + 2yz,$$

consequentemente,

$$x^2 + 2yz = (y + z)^2.$$

Da expressão obtida acima concluímos que

$$x^2 < (y + z)^2$$

ou ainda,

$$x < y + z,$$

implicando que o terno (x, y, z) é triangular. Portanto, se um terno de números reais positivos (x, y, z) satisfaz a equação (18), então o terno é triangular. Por outro lado, observe que a Proposição 2.2 garante que se um terno triangular satisfaz a equação (18), então este corresponde às medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Agora pensando apenas em ternos de números naturais, apresentaremos a seguinte definição.

Definição 2.7. *Se um terno de números naturais (x, y, z) satisfaz a equação*

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

então este será denominado terno pitagórico.

Lema 2.3. *Se um terno (x, y, z) é pitagórico e $k \in \mathbb{N}$, então o terno (kx, ky, kz) também é pitagórico.*

Demonstração. Seja o terno de naturais (x, y, z) tal que

$$x^2 = y^2 + z^2.$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por k^2, temos

$$k^2x^2 = k^2(y^2 + z^2) = (ky)^2 + (kz)^2.$$

Logo, o terno (kx, ky, kz) é também pitagórico. $\square$

Definição 2.8. *Um terno pitagórico cujas coordenadas são naturais primos entre si, será denominado terno pitagórico primitivo.*

A equação (18) provocou o interesse de matemáticos em buscar suas soluções naturais, pois as relações que determinam tais soluções são fórmulas que fornecem as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Devido à relação com o Teorema de Pitágoras, a igualdade

$$x^2 = y^2 + z^2$$

recebe o nome de equação pitagórica e o próprio Pitágoras teria sido um dos primeiros a apresentar um conjunto de soluções para essa equação.

Observação 2.2. *As soluções dadas por Pitágoras são expressas por*

$$x = \frac{n^2+1}{2}, \quad y = n, \quad z = \frac{n^2-1}{2}$$

onde n é um natural ímpar diferente da unidade. Porém essas relações não obtêm todas as soluções, por exemplo, o terno $(17, 15, 8)$ satisfaz a equação pitagórica, mas não pode ser obtido pelas relações acima.

O resultado que iremos apresentar agora, nos dará suporte para chegarmos as relações que fornecem todos os ternos pitagóricos primitivos.

Lema 2.4. *Sendo a e $b \in \mathbb{N}$ com $mdc(a,b) = 1$, tais que o produto ab é uma potência n-ésima, então tanto a como b são potências n-ésimas.*

Demonstração. Para demonstrarmos tal resultado, usaremos o Teorema Fundamental da Aritmética, que pode ser encontrado em Hefez (2016). Sem perda de generalidade, vamos supor que o produto ab seja uma potência n-ésima de $c > 1$, ou seja

$$ab = c^n,$$

então existem números primos $t_1, t_2, ..., t_m$, tais que

$$c = t_1^{\lambda_1} \ . \ t_2^{\lambda_2} \ ... \ t_m^{\lambda_m},$$

daí substituímos c na igualdade anterior pela sua decomposição em fatores primos, obtendo

$$ab = \left(t_1^{\lambda_1} \ . \ t_2^{\lambda_2} \ ... \ t_m^{\lambda_m}\right)^n.$$

Sabendo que $mdc(a,b) = 1$, temos que os fatores primos de a diferem dos fatores primos de b. Dessa forma, podemos afirmar que se t_i (com $i = 1, 2, ..., m$) é um fator primo de a, então $t_i^{n\lambda_i}$ é um fator de a, como isso vale para qualquer fator primo de a, então a é uma potência n-ésima. Analogamente, conclui-se que b também é uma potência n-ésima. $\square$

A partir de agora vamos concentrar nossa atenção em obter relações que forneçam todos os ternos pitagóricos primitivos, pois eles dão origem a todos os outros ternos pitagóricos.

Observação 2.3. *Se (x, y, z) é um terno pitagórico e d é o maior divisor comum de x, y e z, então*

$$\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right)$$

é um terno pitagórico primitivo.

Sendo x, y e z inteiros primos entre si e que satisfazem a relação

$$x^2 = y^2 + z^2, \tag{19}$$

então do Lema 2.3 e da Observação 2.3 podemos concluir que eles são dois a dois primos entre si. Dessa forma, não podemos ter dois números pares entre eles, pois teriam o número 2 como fator comum, nem podemos ter os três ímpares, pois um número inteiro elevado ao quadrado apresenta um resultado de mesma paridade e o resultado da soma de dois ímpares é par. Logo, se os números $x, y,$ e z formam um terno pitagórico primitivo, dois desses números são ímpares e o outro é par.

Lema 2.5. *Dado um terno pitagórico primitivo (x, y, z), então y e z têm paridade distintas, além disso x é ímpar.*

Demonstração. Se x é um inteiro par ou ímpar, então ele será respectivamente da forma

$$x = 2q \quad \text{ou} \quad x = 2q + 1,$$

com $q \in \mathbb{Z}$, daí segue que

$$x^2 = (2q)^2 = 4q^2$$

ou

$$x^2 = (2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4(q^2 + q) + 1,$$

logo, o quadrado de um número inteiro quando dividido por 4, deixa resto igual a 0 ou 1. Agora supondo que y e z são ambos números inteiros ímpares, temos então que $y = 2r+1$ e $z = 2s + 1$, assim

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= (2r + 1)^2 + (2s + 1)^2 \\ &= 4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1 \\ &= 4(r^2 + s^2 + r + s) + 2 \end{aligned}$$

Portanto, $y^2 + z^2$ quando dividido por 4 deixa resto igual a 2, logo pelo que foi visto anteriormente essa soma não corresponde a um quadrado de um inteiro. Desta forma concluímos então que y e z têm paridades distintas e consequentemente x terá que ser ímpar, pois o resultado da soma de um inteiro par com outro ímpar é sempre ímpar. □

Proposição 2.5. *Um terno pitagórico (x, y, z) é primitivo se, e somente se, assume a forma*

$$x = m^2 + n^2, \qquad y = 2mn, \qquad z = m^2 - n^2,$$

onde m e n são naturais primos entre si e de paridades distintas.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Supondo, sem perda de generalidade, que y é par e z ímpar segue da equação (19) que

$$x^2 - z^2 = y^2.$$

Aplicando os produtos notáveis na expressão acima, dispomos

$$(x+z)(x-z) = y^2.$$

Como x e z são ambos ímpares, então a soma $(x+z)$ assim como a diferença $(x-z)$ ambas corresponderão a um inteiro par, e sendo y par temos que y^2 é divisível por 4. Assim, dividindo os dois membros da equação acima por 4, obtemos

$$\frac{(x+z)(x-z)}{4} = \frac{y^2}{4},$$

segue então que

$$\frac{(x+z)}{2}\,\frac{(x-z)}{2} = \left(\frac{y}{2}\right)^2 \tag{20}$$

Os inteiros que correspondem ao valor de cada fator do primeiro membro da equação (20) são primos entre si, pois seu *mdc* deve dividir a sua soma x e sua diferença z, que são primos entre si. Portanto, pelo lema 2.4 existem números m e n, com $m > n$ e $mdc(m, n) = 1$ e de paridades distintas, tais que

$$\frac{(x+z)}{2} = m^2 \quad \text{e} \quad \frac{(x-z)}{2} = n^2. \tag{21}$$

Substituindo em (20), os fatores do primeiro membro de acordo com as expressões de (21), obtemos uma relação que fornece y em função de m e n, veja

$$m^2n^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2,$$

segue então que

$$mn = \frac{y}{2},$$

logo

$$y = 2mn.$$

Agora somando membro a membro, as relações de (21) obteremos a relação que fornece x, como segue

$$\frac{(x+z)}{2} + \frac{(x-z)}{2} = m^2 + n^2,$$

efetuando a soma no primeiro membro, obtemos

$$\frac{2x}{2} = m^2 + n^2,$$

daí lucramos

$$x = m^2 + n^2.$$

Por outro lado, subtraindo membro a membro as relações de (21), obtemos a relação que fornece z, como segue

$$\frac{(x+z)}{2} - \frac{(x-z)}{2} = m^2 - n^2,$$

efetuando a subtração no primeiro membro, colhemos

$$z = m^2 - n^2.$$

Portanto para m e $n \in \mathbb{N}$ e de paridade distintas, com $m > n$ e $mdc(m,n) = 1$, temos que o conjunto dos elementos $(m^2+n^2,\ \ 2mn,\ \ m^2-n^2)$, representam soluções da equação pitagórica

$$x^2 = y^2 + z^2.$$

($\Longleftarrow$) Primeiramente vamos verificar que $(m^2+n^2,\ 2mn,\ m^2-n^2)$ é um terno pitagórico, pois

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= (2mn)^2 + (m^2-n^2)^2 \\ &= 4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2+n^2)^2 = x^2. \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que esses números são dois a dois primos entre si, começamos com os valores de x e z. Como o $mdc(m,n) = 1$, temos $mdc(m^2, m^2+n^2) = 1$, logo

$$\begin{aligned} mdc(z,x) &= mdc(m^2-n^2, m^2+n^2) \\ &= mdc(2m^2, m^2+n^2) \\ &= mdc(2, m^2+n^2) \end{aligned}$$

que é igual a 1, pois $m^2+n^2 = x$ é um número ímpar. Sendo $y = 2mn$ temos que os divisores de y são 2, os divisores de m e os divisores de n, que não dividem $x = m^2+n^2$ e $z = m^2-n^2$, pois são ambos ímpares e o $mdc(m,n) = 1$. Portanto x, y e z são primos entre si. $\square$

Assim, para $mdc(m, n) = 1$, com $m > n$ e de paridades distintas, temos que os ternos do tipo $(m^2+n^2,\ \ 2mn,\ \ m^2-n^2)$ representam todos os ternos pitagóricos primitivos e multiplicando os elementos destes por uma constante natural, adquirimos todos os demais ternos pitagóricos. Por fim, convém fazer uma última observação cmparativa entre as expressões de Pitágoras e Euclides.

Observação 2.4. *Note que o terno pitagórico* $(17, 8, 15)$ *pode ser obtido através das expressões de Euclides, fazendo* $m = 4$ *e* $n = 1$*, porém não pode ser obtido através das expressões de Pitágoras.*

3 OS TERNOS QUASE PITAGÓRICOS

No presente capítulo, apresentaremos um estudo relacionado às soluções com coordenadas naturais de equações do tipo

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz, \tag{22}$$

onde $r \in (-1, 1)$ é um número racional. Mais precisamente, apresentaremos expressões que fornecem ternos de números naturais (x, y, z) que satisfazem a equação (22) e uma caracterização de todas as soluções. Deve-se ressaltar que os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em Assis e Silva Filho (2020)

3.1 DEFINIÇÕES E LEMAS CHAVE

Primeiramente, vamos introduzir um novo conceito de *ternos quase pitagóricos*, estendendo a noção de ternos pitagóricos, que foram previamente descritos na última seção do Capítulo 2.

Definição 3.1. *Se um terno de números naturais (x, y, z) satisfaz a equação*

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz,$$

para algum $r \in (-1, 1)$ racional, então este será denominado terno r-quase pitagórico.

Na sequência, apresentamos alguns lemas a serem usados na demonstração dos resultados principais do trabalho.

Lema 3.1. *Sejam $r \in (-1, 1)$ um número racional e (x, y, z) um terno de números reais positivos satisfazendo*

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz,$$

então existe um triângulo cujos lados medem x, y e z.

Demonstração. Sabendo que (x, y, z) satisfaz a relação

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$$

para uma constante racional $r \in (-1, 1)$, temos que

$$-2yz < 2ryz < 2yz,$$

segue então que

$$y^2 + z^2 - 2yz < y^2 + z^2 - 2ryz < y^2 + z^2 + 2yz.$$

Da última desigualdade, obtemos

$$(y-z)^2 < x^2 < (y+z)^2,$$

ou ainda

$$|y-z| < x < y+z,$$

implicando pela Proposição 5.12 de Barbosa (2011) que x, y e z correspondem às medidas dos lados de um triângulo. □

Lema 3.2. *Se um terno de números reais (x_0, y_0, z_0) é solução da equação*

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz,$$

então para todo $k \in \mathbb{R}$, temos que o terno (kx_0, ky_0, kz_0) também é solução.

Demonstração. Sendo $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ solução da equação $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$, então

$$x_0^2 = y_0^2 + z_0^2 - 2ry_0z_0,$$

multiplicando ambos os membros da igualdade acima por k^2, temos

$$k^2x_0^2 = k^2\left(y_0^2 + z_0^2 - 2ry_0z_0\right),$$

aplicando a distributividade, obtemos

$$k^2x_0^2 = k^2y_0^2 + k^2z_0^2 - 2rk^2y_0z_0,$$

Segue então que

$$(kx_0)^2 = (ky_0)^2 + (kz_0)^2 - 2r(ky_0)(kz_0).$$

Portanto (kx_0, ky_0, kz_0) também é solução da equação $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$. □

Observação 3.1. Decorre dos Lemas 3.1 e 3.2 que:
a) Ternos quase pitagóricos correspondem às medidas dos lados de um triângulo;
b) Multiplos de ternos r-quase pitagóricos por naturais são ternos r-quase pitagóricos.

Encerramos a seção com o nosso último lema, que será fundamental na demonstração do Teorema 3.1.

Lema 3.3. *Sejam $r \in \mathbb{Q}$ e $a, b \in \mathbb{Z}$, então as expressões*

$$x_r = a^2 + b^2 + 2rab, \qquad y_r = a^2 - b^2, \qquad t_r = r(a^2 + b^2) + 2ab,$$

fornecem soluções com coordenadas racionais para equação $x^2 = (1 - r^2)y^2 + t^2$.

Demonstração. Sendo $x_r = a^2 + b^2 + 2rab$, segue que

$$(x_r)^2 = [(a^2 + b^2) + 2rab]^2,$$

aplicando os produtos notáveis no segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} (x_r)^2 &= (a^2 + b^2)^2 + (2rab)^2 + 2(a^2 + b^2)2rab \\ &= a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + 4r^2a^2b^2 + 4rab(a^2 + b^2) \\ &= a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + 4r^2a^2b^2 + 4ra^3b + 4rab^3. \end{aligned} \tag{23}$$

Sendo $y_r = a^2 - b^2$, temos

$$(1 - r^2)(y_r)^2 = (1 - r^2)(a^2 - b^2)^2,$$

aplicando os produtos notáveis e a distributividade no segundo membro da igualdade acima, lucramos

$$\begin{aligned} (1 - r^2)(y_r)^2 &= (1 - r^2)(a^4 + b^4 - 2a^2b^2) \\ &= a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - r^2a^4 - r^2b^4 + 2r^2a^2b^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Sendo $t_r = r(a^2 + b^2) + 2ab$, então

$$(t_r)^2 = [r(a^2 + b^2) + 2ab]^2,$$

aplicando os produtos notáveis e a distributividade, adquirimos

$$\begin{aligned} (t_r)^2 &= [r(a^2 + b^2)]^2 + (2ab)^2 + 2r(a^2 + b^2)2ab \\ &= r^2(a^4 + b^4 + 2a^2b^2) + 4a^2b^2 + 4ra^3b + 4rab^3 \\ &= r^2a^4 + r^2b^4 + 2r^2a^2b^2 + 4a^2b^2 + 4ra^3b + 4rab^3. \end{aligned} \tag{25}$$

Agora somando as expressões (24) e (25) membro a membro, obtemos

$$(1 - r^2)(y_r)^2 + (t_r)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2 + 4r^2a^2b^2 + 4ra^3b + 4rab^3. \tag{26}$$

Por fim, comparando as expressões (23) e (26), podemos concluir que

$$x_r = a^2 + b^2 + 2rab, \quad y_r = a^2 - b^2, \quad t_r = r(a^2 + b^2) + 2ab,$$

satisfazem a equação $x^2 = (1 - r^2)y^2 + t^2$. $\square$

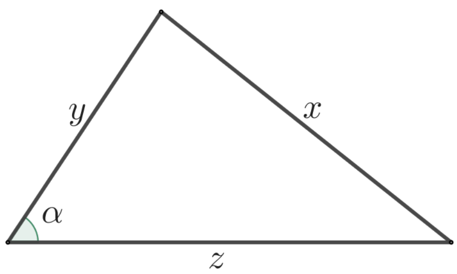
3.2 CARACTERIZANDO OS TERNOS QUASE PITAGÓRICOS

Nesta seção, apresentamos os resultados principais do trabalho, que consistem em apresentar expressões que fornecem e caracterizam os ternos quase pitagóricos, ou seja, os ternos de números naturais que satisfazem a equação

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz, \tag{27}$$

para algum $r \in (-1, 1)$ racional. Esse tipo de equação aparece, por exemplo, quando aplicamos a lei dos cossenos a um triângulo e nesse contexto, os valores x, y e z correspondem às medidas dos seus lados e r corresponde ao cosseno do ângulo oposto ao lado de medida x (cf. Lema 3.1), conforme ilustra a Figura 16.

Figura 16: Lei dos Cossenos



Fonte: Autor, 2020

Nesse momento, apresentamos nosso primeiro teorema, que garante a existência de ternos r-quase pitagóricos e estende as expressões obtidas por Euclides.

Teorema 3.1. *Dado um número racional* $r = \frac{m}{n} \in (-1, 1)$ *com* $m \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se para quaisquer* $a \in \mathbb{N}$ *e* $b \in \mathbb{Z}$ *que*

$$x_r = n(a^2 + b^2) + 2mab, \qquad y_r = n\left(a^2 - b^2\right), \qquad z_r = 2a\left(ma + nb\right),$$

são inteiros que satisfazem a equação $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$. *Supondo que*

$$a > |b| \qquad e \qquad b > -ra, \tag{28}$$

então (x_r, y_r, z_r) *é um terno* r*-quase pitagórico.*

Demonstração. Partindo da equação $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$, somando e subtraindo o termo $(ry)^2$ no segundo membro, temos

$$x^2 = y^2 - (ry)^2 + z^2 - 2ryz + (ry)^2,$$

consequentemente, alcançamos

$$x^2 = (1 - r^2)y^2 + (z - ry)^2.$$

Fazendo $z - ry = t$, obtemos

$$x^2 = (1 - r^2)y^2 + t^2, \tag{29}$$

implicando pelo Lema 3.3 que as expressões

$$\tilde{x}_r = a^2 + b^2 + 2rab, \qquad \tilde{y}_r = a^2 - b^2, \qquad \tilde{t}_r = r(a^2 + b^2) + 2ab,$$

fornecem soluções racionais para a equação (29).

Decorre da substituição $z - ry = t$ que

$$\begin{aligned}\tilde{z}_r &= r\tilde{y}_r + \tilde{t}_r \\ &= r(a^2 + b^2) + 2ab + r(a^2 - b^2) \\ &= 2a\,(ra + b)\,,\end{aligned}$$

daí temos que as expressões

$$\tilde{x}_r = a^2 + b^2 + 2rab, \qquad \tilde{y}_r = a^2 - b^2, \qquad \tilde{z}_r = 2a\,(ra + b)$$

fornecem soluções racionais para a equação $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$.

Pelo Lema 3.2, conclui-se ainda que

$$x_r = n(a^2 + b^2) + 2mab, \qquad y_r = n(a^2 - b^2), \qquad z_r = 2a(ma + nb),$$

fornecem soluções inteiras para a referida equação.

Desde que $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$ e $n > |m|$, segue que

$$n(a^2 + b^2) > 2|mab| \geq -2mab,$$

logo

$$x_r = n(a^2 + b^2) + 2mab > 0,$$

portanto x_r é natural.

Observe que a hipótese $a > |b|$ implica que

$$y_r = n(a^2 - b^2) > 0,$$

então y_r também é natural. Por fim, temos que a hipótese $b > -ra$ implica que

$$z_r = 2a(ma + nb) = 2an(ra + b) > 0,$$

donde obtemos que z_r também é natural e a demonstração está concluída. $\square$

Como consequência do Teorema 3.1, deduzimos o seguinte corolário:

Corolário 3.1. *Todo ângulo convexo com cosseno racional é ângulo interno de um triângulo com lados de medidas inteiras.*

Demonstração: Dado um ângulo convexo $B\widehat{A}C$ com cosseno racional r, temos pelo Teorema 3.1 que

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$$

admite soluções com coordenadas naturais dadas por

$$x_r = n(a^2 + b^2) + 2mab, \qquad y_r = n\left(a^2 - b^2\right), \qquad z_r = 2a\left(ma + nb\right),$$

onde $a, b \in \mathbb{Z}$ satisfazem $a > |b|$ e $b > -ra$.

Decorre do Lema 3.1 que x_r, y_r e z_r correspondem às medidas dos lados de um triângulo, onde o ângulo interno oposto ao lado de medida x_r é congruente a $B\widehat{A}C$. Por fim, basta marcar sobre as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pontos B' e C', respectivamente, de modo que

$$\overline{AB'} = y_r \qquad \text{e} \qquad \overline{AC'} = z_r,$$

implicando que $\overline{B'C'} = x_r$, consequentemente o triângulo $AB'C'$ cumprirá as condições enunciadas. $\square$

Nosso segundo teorema mostra que as expressões enunciadas no Teorema 3.1 caracterizam os ternos quase pitagóricos. Mais precisamente, temos que:

Teorema 3.2. *Dados um número racional $r = \frac{m}{n} \in (-1, 1)$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ e um terno $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{N}^3$, que satisfaz a equação*

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz,$$

então existe $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$kx_o = n(a^2 + b^2) + 2mab, \qquad ky_0 = n(a^2 - b^2), \qquad kz_0 = 2a(ma + nb),$$

onde $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Sabendo que (x_0, y_0, z_0) satisfaz $x_0^2 = y_0^2 + z_0^2 - 2ry_0z_0$, tem-se que

$$x_0^2 = (1 - r^2)y_0^2 + (z_0 - ry_0)^2,$$

ou ainda,

$$x_0^2 = (1 - r^2)y_0^2 + t_0^2, \tag{30}$$

onde $t_0 = z_0 - ry_0$.

Tomando $k = 2n[m(nt_0 + my_0) + n^2(x_0 - y_0)]$ e notando que $nt_0 = nz_0 - my_0$ é inteiro, segue que k é um inteiro. Por outro lado, temos que

$$kx_0 = 2n[m(nt_0 + my_0) + n^2(x_0 - y_0)]x_0,$$

consequentemente,

$$kx_0 = 2mn^2t_0x_0 + 2m^2nx_0y_0 + 2n^3x_0^2 - 2n^3x_0y_0,$$

escrevendo o termo $2n^3x_0^2$ como soma de duas parcelas iguais, temos

$$kx_0 = 2mn^2t_0x_0 + 2m^2nx_0y_0 + n^3x_0^2 + n^3x_0^2 - 2n^3x_0y_0,$$

Substituindo (30) na igualdade anterior, como segue

$$kx_0 = 2mn^2t_0x_0 + 2m^2nx_0y_0 + n^3\left[(1-r^2)y_0^2 + t_0^2\right] + n^3x_0^2 - 2n^3x_0y_0,$$

obtemos

$$kx_0 = 2mn^2t_0x_0 + 2m^2nx_0y_0 + n^3y_0^2 - m^2ny_0^2 + n^3t_0^2 + n^3x_0^2 - 2n^3x_0y_0.$$

Observe que a expressão anterior pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} kx_0 &= n^3t_0^2 + 2mn^2t_0y_0 + m^2ny_0^2 + n^3x_0^2 - 2n^3x_0y_0 + n^3y_0^2 + 2mn^2t_0x_0 \\ &+ 2m^2nx_0y_0 - 2m^2ny_0^2 - 2mn^2t_0y_0, \end{aligned}$$

colocando n e $2m$ em evidência, chegamos na expressão

$$\begin{aligned} kx_0 =& n\left[\left(n^2t_0^2 + 2mnt_0y_0 + m^2y_0^2\right) + \left(n^2x_0^2 - 2n^2x_0y_0 + n^2y_0^2\right)\right] \\ &+ 2m\left(n^2t_0x_0 + mnx_0y_0 - mny_0^2 - n^2t_0y_0\right). \end{aligned}$$

Aplicando os produtos notáveis à igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} kx_0 &= n\left[(nt_0 + my_0)^2 + (nx_0 - ny_0)^2\right] + 2m\,(nt_0 + my_0)\,(nx_0 - ny_0) \\ &= n\left[(nz_0)^2 + (nx_0 - ny_0)^2\right] + 2mnz_0\,(nx_0 - ny_0), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$kx_0 = n(a^2 + b^2) + 2mab, \tag{31}$$

onde $a = nz_0 \in \mathbb{N}$ e $b = n(x_0 - y_0) \in \mathbb{Z}$.

Desde que $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$ e $n > |m|$, segue que

$$n(a^2 + b^2) > 2|mab| \geq -2mab,$$

logo

$$kx_0 = n(a^2 + b^2) + 2mab > 0,$$

portanto k é natural.

Dando continuidade, temos que

$$ky_0 = 2n[m(nt_0 + my_0) + n^2(x_0 - y_0)]y_0,$$

pode ser escrito na forma

$$ky_0 = 2mn^2t_0y_0 + 2m^2ny_0^2 + 2n^3x_0y_0 - n^3y_0^2 - n^3y_0^2,$$

Da igualdade (30), obtemos

$$y_0^2 = x_0^2 + r^2y_0^2 - t_0^2, \tag{32}$$

que substituída na igualdade anterior torna-se

$$ky_0 = 2mn^2t_0y_0 + 2m^2ny_0^2 + 2n^3x_0y_0 - n^3\left(x_0^2 + r^2y_0^2 - t_0^2\right) - n^3y_0^2,$$

ou ainda,

$$ky_0 = 2mn^2t_0y_0 + m^2ny_0^2 + 2n^3x_0y_0 - n^3x_0^2 + n^3t_0^2 - n^3y_0^2.$$

Colocando n em evidência e organizando os termos de forma conveniente, temos

$$ky_0 = n\left[\left(n^2t_0^2 + 2mnt_0y_0 + m^2y_0^2\right) - \left(n^2x_0^2 - 2n^2x_0y_0 + n^2y_0^2\right)\right],$$

que pode ser reescrito na forma

$$ky_0 = n\left[(nt_0 + my_0)^2 - (nx_0 - ny_0)^2\right],$$

ou simplesmente,

$$ky_0 = n(a^2 - b^2).$$

Por um cálculo direto, obtemos ainda

$$\begin{aligned} kz_0 &= 2n[m\,(nt_0 + my_0) + n^2(x_0 - y_0)]z_0 \\ &= 2nz_0[m\left(nz_0\right) + n^2(x_0 - y_0)\big] = 2a(ma + nb), \end{aligned}$$

onde $a = nz_0 \in \mathbb{N}$ e $b = n(x_0 - y_0) \in \mathbb{Z}$, concluindo a demonstração. $\square$

Observação 3.2. No trabalho de Blez e Silva Filho (2019) encontra-se uma maneira alternativa de obter ternos quase pitagóricos, porém os autores não fornecem nenhuma caracterização dos referidos ternos.

3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS A PARTIR DE EXEMPLOS

A seguir apresentaremos alguns exemplos, tendo como objetivo mostrar a aplicabilidade das relações que fornecem os ternos quase pitagóricos e a partir daí identificarmos as principais diferenças, com relação aos ternos pitagóricos .

Exemplo 3.1. *Determine um triângulo que possui lados com medidas inteiras e um ângulo interno cujo valor do cosseno é igual a* $-\frac{1}{3}$.

Solução: Sabendo que r corresponde ao cosseno do ângulo dado, temos então que $r = -\frac{1}{3}$, daí segue que $m = -1$ e $n = 3$. Agora utilizando as relações que fornecem os ternos quase pitagóricos, obtemos

$$x_r = 3(a^2 + b^2) - 2ab; \qquad y_r = 3(a^2 - b^2) \qquad \text{e} \qquad z_r = 2a(-a + 3b).$$

Fazendo $a = 2$ e $b = 1$, temos

$$\begin{aligned} x_r &= 3(2^2 + 1^2) - 2.2.1 = 3.5 - 4 = 15 - 4 = 11 \\ y_r &= 3(2^2 - 1^2) = 3.3 = 9 \\ z_r &= 2.2(-2 + 3.1) = 4.1 = 4 \end{aligned}$$

Temos assim que $11^2 = 9^2 + 4^2 - 2.\left(-\frac{1}{3}\right).9.4$, o que implica, pela lei dos cossenos, que esses valores correspondem as medidas dos lados de um triângulo cujo ângulo interno oposto ao lado $x_r = 11$ tem valor do cosseno igual a $-\frac{1}{3}$.

Exemplo 3.2. *Determine um triângulo que possui lados com medidas inteiras e um ângulo interno medindo* $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Solução:

Sendo $r = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, assim temos $m = 1$ e $n = 2$ substituindo nas relações, obtemos

$$x_r = 2(a^2 + b^2) + 2ab, \qquad y_r = 2(a^2 - b^2), \qquad \text{e} \qquad z_r = 2a(a + 2b).$$

Agora fazendo $a = 3$ e $b = 2$, temos

$$
\begin{aligned}
x_r &= 2(3^2 + 2^2) + 2.3.2 = 2.13 + 12 = 38\\
y_r &= 2(3^2 - 2^2) = 2.5 = 10\\
z_r &= 2.3(3 + 2.2) = 6.7 = 42.
\end{aligned}
$$

Assim temos que $38^2 = 10^2 + 42^2 - 2.\left(\frac{1}{2}\right).10.42$, isso implica, pela lei dos cossenos, que tais números correspondem as medidas dos lados de um triângulo que tem $\frac{\pi}{3}$ como medida do ângulo interno oposto ao lado $x_r = 38$.

Observação 3.3. Os elementos do terno $(38, 10, 42)$ são todos pares. Se dividirmos cada elemento por 2 obtemos o terno $(19, 5, 21)$ cujos elementos são primos entre si e que satisfazem a mesma relação, pois

$$19^2 = 5^2 + 21^2 - 2.\frac{1}{2}.5.21,$$

logo, esses valores também representam as medidas de um triângulo que tem $\frac{\pi}{3}$ como medida do ângulo interno oposto ao lado $x_r = 19$.

Exemplo 3.3. *A partir de um ângulo com valor do cosseno igual a $\frac{3}{4}$ construa um triângulo com lados de medidas inteiras.*

Solução: Sendo $r = \frac{3}{4}$ temos $m = 3$ e $n = 4$, substituindo nas relações, obtemos

$$x_r = 4(a^2 + b^2) + 6ab, \qquad y_r = 4(a^2 - b^2), \qquad \text{e} \qquad z_r = 2a(3a + 4b).$$

Agora fazendo $a = 4$ e $b = -2$, temos

$$
\begin{aligned}
x_r &= 4(4^2 + (-2)^2) + 6.4.(-2) = 4.20 - 48 = 32\\
y_r &= 4(4^2 - (-2)^2) = 4.12 = 48\\
z_r &= 2.4(3.4 + .4(-2)) = 8.4 = 32
\end{aligned}
$$

Assim temos que $32^2 = 48^2 + 32^2 - 2.\left(\frac{3}{4}\right).48.32$, isso implica, pela lei dos cossenos, que tais números correspondem as medidas dos lados de um triângulo que tem $\frac{3}{4}$ como cosseno do ângulo interno oposto ao lado $x_r = 32$.

Exemplo 3.4. *Determine um triângulo que possui lados com medidas inteiras e um ângulo interno medindo $\alpha = \frac{\pi}{3}$.*

Solução:

Sendo $r = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, assim temos $m = 1$ e $n = 2$ substituindo nas relações, obtemos

$$x_r = 2(a^2 + b^2) + 2ab, \qquad y_r = 2(a^2 - b^2), \qquad \text{e} \qquad z_r = 2a(a + 2b).$$

Agora fazendo $a = 3$ e $b = 0$, temos

$$\begin{aligned} x_r &= 2(3^2) + 2.3.0 = 2.9 = 18 \\ y_r &= 2(3^2) = 2.9 = 18 \\ z_r &= 2.3(1.3) = 6.3 = 18 \end{aligned}$$

Assim temos que $18^2 = 18^2 + 18^2 - 2.\left(\dfrac{1}{2}\right).18.18$, isso implica, pela lei dos cossenos, que tais números correspondem as medidas dos lados de um triângulo que tem $\dfrac{\pi}{3}$ como medida do ângulo interno oposto ao lado $x_r = y_r = z_r = 18$.

Exemplo 3.5. *A partir de um ângulo com valor do cosseno igual a $\frac{3}{4}$ construa um triângulo com lados de medidas inteiras.*

Solução: Sendo $r = \frac{3}{4}$ temos $m = 3$ e $n = 4$, substituindo nas relações, obtemos

$$x_r = 4(a^2 + b^2) + 6ab, \qquad y_r = 4(a^2 - b^2), \qquad \text{e} \qquad z_r = 2a(3a + 4b).$$

Agora fazendo $a = 4$ e $b = -1$, temos

$$\begin{aligned} x_r &= 4(4^2 + (-1)^2) + 6.4.(-1) = 4.17 - 24 = 44 \\ y_r &= 4(4^2 - (-1)^2) = 4.15 = 60 \\ z_r &= 2.4(3.4 + .4(-1)) = 8.8 = 64 \end{aligned}$$

Assim temos que $44^2 = 60^2 + 64^2 - 2.\left(\dfrac{3}{4}\right).60.64$, isso implica, pela lei dos cossenos, que tais números correspondem as medidas dos lados de um triângulo que tem $\frac{3}{4}$ como cosseno do ângulo interno oposto ao lado $x_r = 44$.

Observação 3.4. Sendo $mdc(44, 60, 64) = 4$, se dividirmos cada coordenada desse terno por 4 obtemos o terno $(11, 15, 16)$ cujos elementos são primos entre si e que satisfazem a mesma relação, pois

$$11^2 = 15^2 + 16^2 - 2.\frac{3}{4}.15.16,$$

logo, esses valores também representam as medidas de um triângulo que tem ângulo interno oposto ao lado $x_r = 11$ com valor do cosseno igual a $\dfrac{3}{4}$.

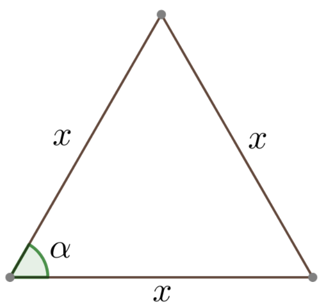
Nesse momento, faremos uma análise baseada nos ternos quase pitagóricos obtidos nos exemplos e observações apresentados nesta seção, comentando algumas diferenças quando relacionados com os ternos pitagóricos, buscando assim identificar o que os resultados principais, apresentados neste trabalho, vêm acrescentar.

Podemos observar que os ternos quase pitagóricos possibilitam construirmos diversos tipos de triângulos com lados de medidas inteiras, os quais apresentam características não encontradas em ternos pitagóricos. Nos ternos pitagóricos, por exemplo, tomando x como medida do lado oposto ao ângulo reto, este sempre corresponderá à coordenada de maior valor do terno, o que não necessariamente ocorre nos ternos quase pitagóricos em geral, conforme pode ser observado nos ternos $(11, 9, 4)$ do Exemplo 3.1, $(38, 10, 42)$ do Exemplo 3.2 ou $(44, 60, 64)$ do Exemplo 3.5.

Uma outra diferença é que podemos obter ternos quase pitagóricos de números primos entre si com as três coordenadas ímpares, por exemplo, o terno $(19, 5, 21)$ da Observação 3.3, enquanto que um terno pitagórico de números primos entre si terá sempre dois ímpares e um par. Classificando os triângulos com relação as medidas dos lados, notamos que os ternos quase pitagóricos possibilitam a construção de triângulo escaleno $(11, 9, 4)$ do Exemplo 3.1, isósceles $(32, 48, 32)$ do Exemplo 3.3 e equilátero $(18, 18, 18)$ do Exemplo 3.4, já nos ternos pitagóricos teremos sempre três coordenadas distintas, nesse caso obtemos somente triângulo escaleno.

Convém ressaltar que no caso do triângulo equilátero, sua construção através das expressões que fornecem os ternos quase pitagóricos, ocorrerá sempre que tivermos $r = \frac{1}{2}, a \in \mathbb{N}$ e $b = 0$, Como veremos a seguir

Figura 17: Triângulo Equilátero



Fonte: Autor, 2020

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo equilátero acima, temos

$$
\begin{aligned}
& x^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos\,\alpha \\
\Rightarrow\ & 2x^2 \cos\alpha = x^2 \\
\Rightarrow\ & \cos\alpha = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Sendo $r = \frac{1}{2}$ temos $m = 1$ e $n = 2$, substituindo m e n nas expressões que fornecem os ternos quase pitagóricos, temos

$$x_r = 2(a^2 + b^2) + 2ab, \qquad y_r = 2(a^2 - b^2), \qquad \text{e} \qquad z_r = 2a(a + 2b),$$

daí podemos verificar que para $a \in \mathbb{N}$ e $b = 0$ obtemos nas expressões acima

$$x_r = y_r = z_r = 2a^2,$$

portanto representam medidas dos lados de um triângulo equilátero.

Uma outra diferença interessante é que nos ternos pitagóricos, para um valor fixado da coordenada x, obtemos um único par de naturais para os valores de y e z, enquanto nos ternos quase pitagóricos podemos ter de uma à três combinações distintas para as coordenadas y e z, fixado o valor da coordenada x e da constante r. Por exemplo, observe que os ternos $(44, 60, 64)$, $(44, 36, 64)$ e $(44, 60, 26)$ satisfazem a equação

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz,$$

para $r = 3/4$, ou seja, mantendo a coordenada x e a constante r, conseguimos 3 (três) combinações distintas para as coordenadas y e z.

4 ANÁLISE CRÍTICA

Neste capítulo falaremos sobre a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, fazendo uma apresentação e reflexão sobre as orientações dispostas no capítulo introdutório da nova base, que se refere ao ensino básico de um modo geral. Apresentaremos as dez competências gerais que a BNCC propõe para serem desenvolvidas no decorrer de todas as etapas (Educação Infantil, Ensinos Fundamental e Médio), além disso, faremos uma reflexão acerca dos principais objetivos da base, que trata-se de garantir o acesso e permanência na escola e também um patamar comum de aprendizagens aos estudantes.

Faremos ainda um estudo voltado às orientações da BNCC para a área de Matemática no ensino básico. Daremos maior destaque as orientações referentes a área de Matemática e suas tecnologias do Ensino Médio, estabelecendo relações entre tais orientações e os ternos quase pitagóricos, que é o assunto principal dos estudos desse trabalho.

4.1 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR - BNCC

A partir de agora, discorreremos sobre a nova BNCC, que trata-se de um documento de caráter normativo que serve de base para toda a educação básica brasileira, definindo as aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas pelos alunos durante todas as etapas da educação básica, seja qual for a modalidade, garantindo assim, de acordo com o que recomenda o Plano Nacional de Educação (PNE), o direito de aprendizagens e desenvolvimento dos alunos. A nova BNCC que começou a ser construída desde 2015, teve a primeira parte, que se refere ao Ensino Fundamental, homologada em 20 de dezembro de 2017, sendo o documento finalizado um ano mais tarde, em dezembro de 2018, com a aprovação e homologação das normas referentes ao Ensino Médio.

A estrutura da BNCC traz de forma bem organizada, os conhecimentos e habilidades essenciais para serem desenvolvidos no decorrer de toda educação básica, dividindo e especificando as aprendizagens de acordo com o nível (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), série e componente curricular, ficando assim muito fácil a sua compreensão. Desta forma qualquer pessoa que se proponha a estudar a nova base, não encontrará nenhuma dificuldade em identificar aquilo que deve ser comum a todos os estudantes em cada etapa da educação básica, devendo assim ser o mínimo que os currículos, tanto de escolas públicas como privadas, devem apresentar.

A nova base foi elaborada por especialistas de todas as áreas do conhecimento, em seguida foi apresentada e discutida pela sociedade por meio do portal Base Nacional Comum e das audiências públicas, que aconteceram em todas as regiões do país, permitindo assim que diversas representações dessem suas contribuições, possibilitando então a elaboração de um documento que estabeleça conhecimentos, habilidades e competências comuns a todos os estudantes do ensino básico, respeitando as particularidades do meio em que vivem. Portanto, a nova BNCC não vem para substituir o currículo, mas para ser referência na sua construção ou na sua reformulação, em casos de já existentes, além de contribuir para outras políticas e ações nas três esferas de governo. Será também um instrumento fundamental para se alcançar os principais objetivos das políticas educacionais, que é a garantia de acesso e permanência na escola, além de um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes.

> Referência nacional para a formulação dos currículos dos sistemas e das redes escolares dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios e das propostas pedagógicas das instituições escolares, a BNCC integra a política nacional da Educação Básica e vai contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação.
> Nesse sentido, espera-se que a BNCC ajude a superar a fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação. Assim, para além da garantia de acesso e permanência na escola, é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental.(BRASIL, 2018, p.8)

A Base Nacional Comum Curricular indica dez competências gerais que os alunos devem desenvolver ao longo das três etapas da educação básica, o desenvolvimento dessas competências busca a concretização de uma educação integral, que não pode ser confundida com educação em tempo integral, pois estamos falando de uma educação que contemple todas as dimensões do desenvolvimento humano, ou seja, a parte cognitiva, o desenvolvimento físico, social, emocional e cultural. Portanto, elas deverão apontar para a compreensão das escolhas curriculares e foram definidas a partir dos direitos éticos, estéticos e políticos assegurados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais e de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores considerados essenciais para a vida no século XXI.

As competências gerais que reúnem o conjunto de fatores essenciais para resolver demandas complexas do cotidiano, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho foram divididas, de acordo com Brasil (2018, p.9), da seguinte forma:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens - verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital -, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo- se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, inclusivos, democráticos, sustentáveis e solidários.

O desenvolvimento dessas dez competências ao longo de todas as etapas da educação básica, busca como resultado final desse processo garantir que os alunos alcancem ao final da última etapa (Ensino Médio), uma formação humana integral que vise à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. As competências gerais da BNCC não devem ser trabalhadas de forma particular como uma disciplina, pois seus objetivos só serão alcançados com êxito, se houver uma interação entre os componentes curriculares, ou seja, a interdisciplinaridade será essencial no decorrer de toda essa caminhada.

É verdade que nos últimos anos grande parte dos estados e municípios brasileiros, além de outros países, tiveram a construção de seus currículos focados no desenvolvimento de competências, isso se deve ao fato de que as principais avaliações são elaboradas nessa perspectiva. Assim, ao explicitar as competências, a BNCC indica referências para o fortalecimento de ações que garantam as aprendizagens essenciais que possibilitem os alunos, através desses conhecimentos, resolverem problemas complexos do cotidiano, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Como falamos anteriormente a nova base contou com a contribuição da sociedade, através das audiências públicas e por meio do portal Base Nacional Comum, onde qualquer membro podia dar sua contribuição de forma individual, por meio da rede (fruto das discussões entre comunidade, professores e demais profissionais), e por organizações como instituição de ensino ou grupos da sociedade civil. Para que a sua implementação seja bem sucedida, se faz necessário que esse regime de colaboração permaneça, pois só assim os seus objetivos serão alcançados.

Dessa forma, a implementação da nova base trata de uma tarefa que irá exigir a colaboração entre união, estados, distrito federal e municípios. Sendo que as responsabilidades dos entes federados serão diferentes e complementares, ficando a união responsável por coordenar o processo e elaborar ações para corrigir as desigualdades. Por exemplo, serão de responsabilidade da união, a revisão da formação inicial e continuada do professor, assim como coordenar e promover ações referentes à avaliação, elaboração de materiais pedagógicos e oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação. Já os estados e municípios terão como uma de suas atribuições, apoiar as instituições escolares orientando-as e dando suportes para que estas elaborem ou reformulem seus currículos e projeto político pedagógico (PPP) de acordo com as orientações da nova base, buscando assim o desenvolvimento das competências gerais nela explicitas.

O desenvolvimento de cada competência está relacionado a aquisição de quatro fatores, que são: o conhecimentos (que corresponde a conteúdo, conceito e procedimento), a habilidades (que trata-se das práticas, cognitiva e socioemocionais, ou seja, usar um determinado conhecimento para resolver uma situação problema do cotidiano), atitudes (ter a atitude de resolver um problema, seja para si próprio ou para a comunidade em que vive) e valores (que é ser capaz de resolver problemas do seu cotidiano com base em valores éticos, sociais, culturais sem ofender nem desrespeitar alguém).

> Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p.8)

Portanto, para que o aluno desenvolva uma determinada competência, terá como ponto de partida a obtenção de conhecimentos que o leve a desenvolvê-la, e isso está diretamente ligado ao planejamento de aula, cabendo ao professor identificar qual competência aquele conteúdo que será trabalhado em sala está associado, e a partir dessa identificação traçar metodologias e práticas pedagógicas que venham contribuir para desenvolvimento da mesma. Assim percebemos que é necessário muitas mudanças na educação básica, para que aquilo que a BNCC propõe chegue efetivamente até cada aluno, possibilitando melhorias em sua vida e consequentemente na comunidade em que vive.

Essas mudanças não se restringem somente à escola e sala de aula, elas devem contemplar todo o sistema educacional em todas as esferas. O fato de uma instituição ter seu currículo elaborado ou reformulado seguindo as orientações da base, assim como o professor de uma disciplina planejar sua aula adotando metodologia e práticas que contribuam para o desenvolvimento das aprendizagens consideradas essenciais, não garante que todos alcancem um patamar comum de aprendizagem, que trata-se do objetivo principal da nova base, por conta da diversidade presente em cada turma, escola ou comunidade, como salienta Alessio Costa Lima, presidente da Undime, "A escola brasileira é um reflexo da sociedade brasileira. Ela é marcada por profundas desigualdades. (...) A gente tem que ter clareza de que a base por si só não vem resolver todos os problemas da educação, ela é apenas um elemento que regulamenta o que tem que ser aprendido."(MORENO, 2017).

Assim, a construção e implementação da BNCC são apenas os passos iniciais de um percurso circular, que tem como principal objetivo alcançar uma formação integral dos alunos no ensino básico. Nessa caminhada, sempre encontraremos um ponto de recomeço, na busca por uma educação de qualidade para todos, tendo em vista a diversidade presente em uma nação, comunidade ou escola, e as mudanças que acontecem constantemente nos dias atuais, impulsionadas pelas novas descobertas tecnológicas. Desta forma, o sistema educacional deve ficar atento as mudanças, a começar pelo professor que precisa contar com uma formação continuada buscando sempre aprimorar suas metologias, para que suas práticas pedagógicas estejam sempre de acordo com a contemporaneidade de seus alunos.

4.2 MATEMÁTICA E BNCC

Nesta seção, falaremos sobre as principais orientações da BNCC para a área de Matemática no ensino básico. Tal documento define o conhecimento matemático como necessário para a formação de cidadãos críticos e responsáveis.

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. (BRASIL, 2018, p.265)

De acordo com a nova Base o Ensino Fundamental deve ter o compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, que trata-se da capacidade individual do aluno em raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, facilitando assim, através da utilização de procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas, a formulação e resolução de problemas em diversos contextos. As aprendizagens consideradas essenciais para a Matemática do Ensino Fundamental, estão distribuídas entre as habilidades a serem desenvolvidas em cada série dessa etapa de escolaridade, essas habilidades estão divididas e agrupadas em unidades temáticas (números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística). A aquisição dessas habilidades contribuem para o desenvolvimento das competências específicas da área de Matemática que se inter-relacionam com as competências gerais da BNCC.

A organização dos conhecimentos matemáticos, indicados para as séries do Ensino Fundamental, por unidade temática acaba delimitando os objetos de conhecimentos e habilidades, isso possibilita que as noções Matemáticas sejam retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. Desta forma, ao retomar uma habilidade em anos posteriores, o uso de novas ferramentas e a apresentação de situações problemas mais complexas contribui para uma progressão a cada ano, atingindo assim uma melhor compreensão e consequentemente potencializando os conhecimentos básicos necessários para as etapas seguintes.

Com o objetivo de estimular o desenvolvimento do pensamento computacional, nos anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC propõe o uso das tecnologias, como calculadora e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais. Vale ressaltar que este uso deve ser de forma consciente, ou seja, não apenas para obter resultados de determinados problemas, mas sim para possibilitar ao aluno a oportunidade de investigar, interpretar e elaborar algoritmos, a partir dos resultados obtidos. A utilização das tecnologias digitais e aplicativos estará mais presente no Ensino Médio, pois esta etapa tem como finalidade, além de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos nas etapas anteriores, preparar o jovem para o pleno exercício da cidadania e para sua inserção no mundo do trabalho.

Iremos a partir de agora concentrar nossos estudos nas orientações da nova Base para a área de Matemática e suas tecnologias do Ensino Médio. Nesta fase, o currículo deve ser mais diversificado e flexível, a sugestão é que ele seja composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, o que possibilita diversos arranjos curriculares, dando relevância ao contexto em que a escola está situada.

Os itinerários formativos podem ser estruturados dando foco a uma área de conhecimento, possibilitando assim uma melhor compreensão e aprofundamento, pode também focar na formação técnica e profissional, contribuindo assim para o direcionamento dos jovens ao mercado de trabalho, ou ainda, focar na mobilização de competências e habilidades de diferentes áreas. Portanto, os itinerários formativos trazem a possibilidade de diversificar os currículos do Ensino Médio, cabendo a escola conhecer a realidade e os anseios da juventude que acolhe, para dessa forma escolher e estruturar itinerários que venham atender as necessidades de seus alunos e consequente da comunidade a qual ela está inserida.

A área de Matemática e suas tecnologias, tem como finalidade aproveitar todo o potencial construído no Ensino Fundamental, e a partir desses conhecimentos já adquiridos ampliar o letramento matemático, buscando desta forma o desenvolvimento, por parte dos alunos, de habilidades que os levem a um modo próprio de raciocinar, representar, comunicar e argumentar. A seguir apresentaremos as competências específicas para a área de matemática e suas tecnologias, de acordo com a BNCC.

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O desenvolvimento de cada competência apresentada acima, está relacionado à obtenção de um conjunto de habilidades. No Ensino Médio a BNCC não define uma série para se trabalhar o desenvolvimento de determinadas habilidades e competências, assim as possibilidades de organização curricular para as aprendizagens que a nova base propõe para a Matemática nesta etapa são várias, podendo o sistema de ensino ou a própria escola utilizar tanto as habilidades definidas na BNCC como outras que contemplem as suas demandas e especificidades. No entanto, é fundamental que se preserve a articulação entre os vários campos da Matemática e de outras áreas, buscando assim conduzir o aluno a construção de uma visão integrada de Matemática, aplicada à realidade.

4.3 TERNOS QUASE PITAGÓRICOS E A BNCC

Discorreremos agora sobre os ternos quase pitagóricos, fazendo uma relação com o que orienta a nova Base Nacional Comum Curricular, buscando assim identificar qual unidade de conhecimento e habilidade de Matemática este assunto está ligado e assim concluirmos que o mesmo contribui para desenvolvimento das competências gerais da BNCC. Nesse sentido destacaremos a seguir algumas habilidades da área de Matemática.

(EM13MAT308) - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

No código **(EM13MAT308)**, o primeiro par de letras indica que tal habilidade deve ser trabalhada no Ensino Médio, o primeiro par de números aponta que a mesma pode ser desenvolvida em qualquer série dessa etapa, a segunda sequência de letras diz que é uma habilidade de Matemática, na última sequência de números, o primeiro revela que está relacionada com a competência especifica 3 e os dois últimos indicam que trata-se da oitava habilidade relativa a esta competência.

O estudo dos ternos quase pitagóricos dará suporte ao desenvolvimento da habilidade mencionada acima, pois estes possibilitam mais que resolver problemas a partir de um triângulo conhecidos alguns de seus elementos usando, por exemplo, a lei dos cossenos, eles facilitam nossos trabalhos na elaboração de problemas envolvendo triângulos em diversos contextos. Portanto o conhecimento das expressões que fornecem tais ternos se torna relevante tanto para o professor, que pode fazer uso das mesmas na elaboração de questões a serem utilizadas como exemplos ou atividades, quanto para o aluno que também se depara com situações em que precisa elaborar problemas envolvendo triângulos.

Por outro lado, o uso das expressões que fornecem os ternos quase pitagóricos, possibilita a determinação de diversos triângulos com lados de medidas inteiras, como por exemplo, triângulos isósceles, equiláteros, acutângulos e obtusângulo, os quais apresentam características que não podem ser encontradas em triângulos determinados a partir dos ternos pitagóricos, pois estes são sempre retângulos e escalenos. Desta forma, ao construirmos triângulos a partir dos ternos quase pitagóricos, podemos paralelamente trabalhar a classificação dos mesmos quanto aos lados e quanto aos ângulos.

Um outro ponto que podemos destacar é que ao determinarmos um terno quase pitagórico (x, y, z), para uma constante racional $r \in (-1, 1)$, podemos ao final verificar que o triângulo cujos lados correspondem as coordenadas desse terno, satisfaz a lei dos cossenos para o ângulo que tem valor do cosseno igual a r que é oposto ao lado de comprimento igual a x. Logo, o estudo dos ternos quase pitagóricos poderá ser uma ferramenta pedagógica no ensino da lei dos cossenos.

Podemos também enfatizar a importância dos ternos quase pitagóricos para álgebra, já que estes representam soluções de equações do tipo $x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz$, com $r \in (-1, 1)$ racional. Além disso, os mesmos são obtidos pelo cálculo do valor numérico de expressões algébricas, contemplando assim uma habilidade de álgebra apresentada abaixo.

(EF08MA06) - Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

O código quer dizer que trata-se da sexta habilidade de Matemática que deve ser desenvolvida no oitavo ano do Ensino Fundamental II, mas vale ressaltar que de acordo com as orientações da BNCC o Ensino Médio deve consolidar e dar continuidade ao que foi trabalhado nas etapas anteriores. Nesse sentido os ternos quase pitagóricos contemplam também a unidade de conhecimento de números e álgebra.

Portanto, as relações que nos propomos a apresentar neste trabalho, contribuem de forma direta para o desenvolvimento das competências específicas da área de Matemática, colaborando assim para o desenvolvimento integral dos estudantes do ensino básico, que é o objetivo principal da BNCC.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, introduzimos uma nova generalização dos ternos pitagóricos, designados por *ternos r-quase pitagóricos* (ou simplesmente, *ternos quase pitagóricos*), ou seja, ternos de números naturais que satisfazem a equação

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2ryz, \tag{33}$$

para algum $r \in (-1, 1)$ racional. Mais precisamente, mostramos a existência de ternos quase pitagóricos, através de expressões que nos permitem obter exemplos e caracterizar os referidos ternos.

Devemos ressaltar que a equação mencionada pode ser obtida através da lei dos cossenos, aplicada a um triângulo que possui x, y e z como medidas de seus lados e r como o valor do cosseno do ângulo interno oposto ao lado de medida x. Nesse contexto, podemos reescrever a referida equação na forma

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\theta,$$

onde θ denota a medida do ângulo que opõe-se ao lado de medida x. Diante do exposto, concluímos que a partir de qualquer ângulo convexo com cosseno racional, podemos construir triângulos com lados de medidas inteiras.

No último capítulo fizemos uma análise crítica relacionada aos ternos quase pitagóricos, conforme orientações constantes na BNCC. Neste sentido direcionamos nossos estudos para orientações relacionadas a área de Matemática no ensino básico, buscando identificar de que forma esse assunto poderia contribuir para o desenvolvimento integral dos jovens estudantes, .

Observamos que, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular, os ternos quase pitagóricos contempla o estudo da álgebra, possibilitando a obtenção de soluções para equações quadráticas do tipo (33). Por outro lado, observa-se que o cálculo dos valores numéricos fornecidos pelas expressões algébricas irá também auxiliar os alunos a desenvolverem habilidades em resolver e elaborar problemas, em diversos contextos envolvendo triângulos.

Por fim, constata-se que o estudo dos ternos quase pitagóricos irá contribuir diretamente para o desenvolvimento das competências específicas da área de Matemática e suas tecnologias, que complementadas com as competências específicas das outras áreas promovem o desenvolvimento integral dos alunos.

REFERÊNCIAS

ASSIS, F. O. S.; SILVA FILHO, J. F. *Lei dos Cossenos e Ternos Quase Pitagóricos.* Redenção, 2020 (Artigo em Elaboração).

BARBOSA, R. M. *Descobrindo Padrões Pitagóricos.* São Paulo: Atual, 1993.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana.* 12 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

BLEZ, M. A.; SILVA FILHO, J. F. *Generalizando os Ternos Pitagóricos.* Revista do professor de Matemática: n.98, p. 3 - 5, 2019.

BOYER, C. B. *História da Matemática* - Trad. de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC, 2018.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. *Matemática Discreta* - Coleção PROFMAT. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

CARVALHO, P. C. P. et al. *A Matemática do Ensino Médio* - Coleção PROFESSOR DE MATEMÁTICA. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

DOLCE, O. *Fundamentos de Matemática Elementar 9.* 7 ed. São Paulo: Atual, 1993.

FREZZA, E. A. *Geometria plana.* Londrina: Editora e Distribuidora Educacional s.a., 2017.

HEFEZ, A. *Aritmética* - Coleção PROFMAT. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

IEZZI, G. *et al. Matemática: ciência e aplicação.* 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática.* 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais* - Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

LOOMIS, E. S. *The Pythagorean Proposition.* USA: NCTM, 1940.

MORENO, A. C. *Base Nacional Curricular não apaga com 'mágica' as desigualdades na educação, dizem especialistas.* G1: 2017. Disponível em:< https://g1.globo.com/educacao/noticia/base-nacional-curricular-nao-apaga-com-magica-as-desigualdades-na-educacao-dizem-especialistas.ghtml>. Acesso em: 09 de jul. de 2020.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria* - Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SANTOS, A. E. dos. *Semelhança de triângulos e suas aplicações.* 2018. 65 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia. Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2018.

WAGNER, E. *Teorema de Pitágoras e Áreas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. (Programa de Iniciação Científica da OBMEP)