UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA - ICEN
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JOSÉ EVERARDO GOMES DOS SANTOS

A UTILIZAÇÃO DA TÉCNICA DE ORIGAMI (DOBRADURAS) COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA PARA A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

REDENÇÃO-CE
2020

JOSÉ EVERARDO GOMES DOS SANTOS

A UTILIZAÇÃO DA TÉCNICA DE ORIGAMI (DOBRADURAS) COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA PARA A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Danila Fernandes Tavares

REDENÇÃO-CE

2020

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Santos, José Everardo Gomes Dos.

S237u

A utilização da técnica de origamis dobraduras como estratégia facilitadora para a aprendizagem de geometria no ensino fundamental / José Everardo Gomes Dos Santos. - Redenção, 2020.
85f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Prof.ª Dra. Danila Fernandes Tavares.

1. Origami. Aprendendo com dobraduras. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Geometria. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 372.7

JOSÉ EVERARDO GOMES DOS SANTOS

A Utilização da Técnica de Origami (Dobraduras) como Estratégia Facilitadora para a Aprendizagem de Geometria no Ensino Fundamental

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab — Campus Auroras.

Aprovada em: 13/10/2020

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Danila Fernandes Tavares (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Joserlan Perote da Silva
Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

EDNEY FREITAS GREGORIO
Prof. **Me. Edney** Freitas Gregório

Universidade Estadual do Ceará - UECE

Dedico este trabalho aos meus mestres, que desde a infância sempre me incentivaram nos caminhos do conhecimento científico.

AGRADECIMENTOS

Ao Eterno, pelo dom da vida e pela alegria de viver.

Aos meus pais por me fazerem ver materializado o amor e em especial a minha mãe, Maria Gomes dos Santos, minha irmã, Maria Erenilde Gomes dos Santos e minha esposa Hélvia Rocha Gomes, aos meus filhos, Micaela e Erasmo, que me incentivaram e investiram na minha formação.

Aos meus amigos, pelo apoio incondicional.

A minha família e amigos pelas mensagens de encorajamento constantes.

Aos meus professores pelo estímulo que me fizeram perseguir meus objetivos.

E por último e não menos importante, ao auxílio financeiro da CAPES, cuja bolsa viabilizou meus estudos nesse período.

Um agradecimento especial a minha Orientadora, Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares, pelo excelente trabalho feito, com muito profissionalismo e com muita dedicação, sempre intervindo no momento exato para esclarecer dúvidas e nortear novas ideias. Muito obrigado Professora!

Um agradecimento à banca pela disposição em analisar a Dissertação, e suas sugestões foram muito pontuais no enriquecimento e melhoramento do trabalho, meu muito OBRIGADO!

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”

Lobachevsky

RESUMO

O presente trabalho apresenta o relato de uma experiência sobre a utilização de dobraduras como recurso didático para o ensino de geometria na Educação Básica, vivenciadas aulas de 7º, 8º e 9º anos, aplicadas principalmente em aulas de laboratório de matemática como prática de ludicidade. As atividades tiveram como objetivo principal construir os pontos notáveis do triangulo (incentro, circuncentro, baricentro, ortocentro e suas propriedades), construção de alguns polígonos: quadrado, triângulo equilátero, hexágono regular, pentágono regular, octógono regular, por meio de dobraduras, buscando, ao longo das construções, relembrar conceitos vistos em geometria plana. Os resultados mostraram que o uso de dobraduras em sala de aula com uma abordagem investigativa possibilitou um trabalho lúdico da geometria, a motivação dos alunos para a aprendizagem, a participação ativa durante o desenvolvimento da atividade, a socialização entre os colegas e a mudança na postura do docente que, de detentor do conhecimento passou a mediador da aprendizagem dos alunos. Observou-se, também, que alunos que não tiveram interesse pelas aulas tradicionais, se integram mais e tiverem uma participação empolgada. Observou-se uma maior interação como grupo, e acabaram os desentendimentos em sala.

Palavras-chave: Origami. Aprendendo com dobraduras. Matemática – Estudo e ensino. Geometria.

ABSTRACT

The present paper presents the report of an experience on the use of folds as a didactic resource for the teaching of geometry in Basic Education, experienced classes of 7th, 8th and 9th years, applied mainly in mathematics laboratory classes as a playful practice. The main objective of the activities was to build the notable points of the triangle (incenter, circumference, barycenter, orthocenter and its properties), construction of some polygons: square, equilateral triangle, regular hexagon, regular pentagon, regular octagon, using folds, looking for, throughout the constructions, remember concepts seen in plane geometry. The results showed that the use of folding in the classroom with an investigative approach enabled a playful work of geometry, the motivation of students for learning, active participation during the development of the activity, socialization among colleagues and change in posture from the teacher who, from the holder of knowledge, became a mediator of the students' learning. It was also observed that students who were not interested in traditional classes, integrate more and have an excited participation. Greater interaction was observed as a group, and the fights ended in the classroom.

Keywords: Origami. Learning with folding. Mathematics - Study and teaching. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A aprendizagem de matemática nas escolas públicas brasileiras tem sido um grande desafio para educadores, gestores e especialistas, uma vez que as avaliações internas e externas comprovam resultados muito aquém daqueles esperados. Muitos fatores explicam essa baixa avaliação: desde a abissal desigualdade socioeconômica que afeta milhões de brasileiros e, por conseguinte, os serviços públicos aos quais essa população tem acesso até razões metodológicas, sobretudo se considerarmos a utilização de estratégias que já não atendem as expectativas dos estudantes de hoje, já familiarizados com as modernas tecnologias de informação e comunicação (TIC) e que se deparam com uma verdadeira "viagem no tempo" ao entrarem nas salas de aula, com o professor detentor exclusivo do conhecimento e no qual o aluno assiste, passivo, a transmissão das informações que serão cobradas no exame mensal ou bimestral que avaliará se ele ou ela são suficientemente inteligentes.

Diante desse cenário diversas estratégias têm sido desenvolvidas no sentido de facilitar a aprendizagem da matemática nas escolas públicas, tais como a contextualização de problemas cotidianos, o uso de tecnologias da informática, ações interdisciplinares, aprendizagem colaborativa, dentre outras ações válidas que procuram romper o velho estigma da matemática como o "bicho papão" da escola.

Procurando contribuir para a superação desse problema, neste trabalho busca-se investigar as potencialidades pedagógicas de uma proposta de intervenção para o ensino do conteúdo da Matemática, especificamente utilizando a técnica de "ORIGAMIS" (dobraduras), considerando as diversas aplicações e vantagens dessa ação pedagógica. A proposta baseia-se na construção colaborativa de origamis e sua aplicação utilizando noções básicas de geometria plana (reta, ponto, bissetriz, diagonais, mediatriz, ângulos), reconhecimento de polígonos regulares e suas propriedades, fazendo interações com o cotidiano e ainda, utilização adequada da linguagem matemática.

A experiência piloto foi realizada com alunos de uma escola pública municipal de Fortaleza/CE, da qual o professor-pesquisador faz parte. A motivação para este estudo foi a de demonstrar a possibilidade de agregar ao fazer pedagógico cotidiano estratégias que adotem uma perspectiva ancorada na realidade dos estudantes atualmente.

Além disso, espera-se que o docente também seja beneficiado, uma vez que, fortalecido o vínculo ensino-aprendizagem, o professor poderá adotar novas estratégias pedagógicas que enriquecerão suas aulas.

A partir desta pesquisa, procurou-se responder a seguinte questão: a utilização da técnica de origamis (dobraduras), associadas à metodologia da aprendizagem colaborativa, irá contribuir para o aprendizado dos conceitos básicos de geometria e suas aplicações?

Para responder a essa questão, foram realizados estudos teórico-metodológicos que embasaram as atividades práticas realizadas pelos estudantes e, mediante análise dos resultados obtidos, foi possível apontar caminhos que podem ser seguidos pelo professor com foco em uma aprendizagem colaborativa.

A atual geração de adolescentes e jovens recebe diferentes denominações. Para o grupo de indivíduos nascidos entre os anos de 1995 e 2010, definiu-se chamá-los de Geração Z, Gen Z e iGeneration. Essa denominação, de caráter sociológico, reflete a realidade dos garotos e garotas nascidos no mesmo período do surgimento da World Wide Web (Rede Mundial de Computadores), a partir do início da década de 1990 (KAMPF, 2011).

Trata-se de um grupo populacional muito mais atento às questões práticas e tangíveis. Se por um lado estão concatenados com as denominadas TICs, por outro não conseguem ver sentido naquilo que aparentemente não apresenta aplicabilidade à sua realidade. Os conceitos matemáticos são, muitas vezes, distanciados da realidade dos estudantes diante das arraigadas metodologias de ensino que privilegiam o papel do professor como exclusivo detentor do conhecimento.

Dessa forma, é preciso considerar alternativas e estratégias que possam transformar métodos de ensino meramente expositivos em algo mais contextualizado, como já indicam os autores, e que estimule o sentimento de pertencimento por parte dos discentes.

Procurou-se desenvolver a estratégia de construção colaborativa de origamis, o que poderia tornar mais concreta a possibilidade de aproveitamento desse potencial. Pretende-se, assim, avaliar o potencial pedagógico dessa estratégia no espaço escolar e ampliar esse aproveitamento.

No presente trabalho, procuro relatar uma abordagem pedagógica do conteúdo geometria plana, a partir de uma perspectiva pragmática. Após a justificativa e os objetivos, delinearei a fundamentação teórica que embasou o relatório. Posteriormente uma breve demonstração da utilização dos origamis e aplicabilidade considerando o conteúdo proposto e, finalmente, uma demonstração a partir de uma enquete, realizada junto aos estudantes sobre os efeitos da utilização dessa metodologia na aprendizagem.

1.1.1 Justificativa

A história da evolução da espécie humana comprova que esta tem sido pródiga em desenvolver as mais variadas ferramentas com o objetivo de facilitar o cotidiano. Atualmente, as tecnologias promovem agilidade, economia, interação e, sobretudo, qualidade de vida.

Na área da educação, isso também é uma realidade. Ao longo do tempo foram criadas, alternativas, metodologias e mecanismos (tanto materiais quanto imateriais) para tornar as aulas mais atrativas aos estudantes e, ao mesmo tempo, maximizar o aprendizado.

A escola, como instituição social, necessita fazer com que os jovens encontrem múltiplas formas de interagir com o conhecimento das diferentes áreas, a exemplo dos conhecimentos básicos sobre Geometria. Desta forma, pode-se fazer com que os discentes superem a mera preparação para o mundo do trabalho, e, com isso, sejam estimulados a uma aprendizagem mais promissora.

Na proposta apresentada neste trabalho, visualiza-se que o uso de estratégias inovadoras, como é o caso do uso de origamis, podem se configurar como um dos caminhos para fortalecer uma aprendizagem mais ativa e participativa de conteúdo da geometria. Seu uso tende a estimular o interesse do aluno, na medida em que se enquadra em um perfil mais dinâmico, atual e interativo, despertando a curiosidade discente a partir de uma estratégia que envolva o jovem estudante no processo ensino-aprendizagem.

A escola, então, além de ensinar os conteúdos habituais, precisa ser um lugar de ampliação de uso dessas novas perspectivas de aprendizado, com procedimentos que sejam contínuos e capazes de suprir as demandas que surgem para auxiliar o aluno.

De acordo com Fainguelernt, “a geometria exige uma maneira específica de raciocinar, uma maneira de explorar e descobrir. Não é suficiente conhecer bem aritmética, álgebra ou análise para conseguir resolver situações em Geometria” (1999, p. 49). Desse modo, trabalhar a Geometria de forma adequada no Ensino Fundamental, pode ajudar a desenvolver o raciocínio abstrato e a resolução de problemas, bem como a tomada de decisão e interpretação lógico-matemática dos discentes.

2 OBJETIVOS

2.1 GERAL

Desenvolver um processo de construção de uma estratégia pedagógica utilizando a técnica de ORIGAMI, baseada na estratégica de aprendizagem colaborativa, para o ensino de conteúdos sobre geometria.

2.2 ESPECÍFICOS

- Propor mecanismos para viabilizar o uso de estratégias pedagógicas alternativas no ensino de geometria, suas propriedades e aplicabilidades;
- Desenvolver um conjunto de ações, como produto da experiência desse trabalho, para difundir o ensino da geometria;
- Ampliar a compreensão e o interesse do aluno do Ensino Básico no tocante ao aprendizado de Geometria, com ênfase em alguns princípios básicos, com aplicações no cotidiano;
- Mostrar as ferramentas utilizadas no processo de construção da estratégia pedagógica, a partir de uma perspectiva docente, de sorte a promover seu papel de facilitador na aprendizagem do tema "geometria e suas aplicações";
- Divulgar a ideia da utilização de estratégias pedagógicas, tais como a aprendizagem colaborativa, para a compreensão de conteúdos científicos escolares.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Geometria é por sua natureza prática, uma ciência necessária para o entendimento do mundo, da sociedade e da cultura, uma vez que trata as construções humanas. Trata-se de uma área do conhecimento que vai facilitar a resolução de problemas e está presente em nosso dia a dia, na natureza, na arquitetura, casas, escolas, embalagens, design em geral.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2016), em seus objetivos gerais para o ensino fundamental, refere-se à necessidade de interpretar, descrever, representar e argumentar, construindo assim, uma comunicação matemática e fazendo o uso de variadas linguagens que estabelecem relações entre elas e suas representações matemáticas.

Johnson (2016), explica um pouco sobre essas relações entre diferentes representações da matemática:

> Há uma tendência internacional em direção à inclusão de um eixo de processos matemáticos nos currículos de matemática. A inclusão de um eixo de processos matemáticos garante um desenvolvimento direcionado e sistemático das habilidades e competências necessárias para a matemática em todas as áreas do conteúdo e em todos os anos da formação básica, tais como: raciocinar, resolver problemas e comunicar. (p. 04)

De modo geral o autor aponta que as orientações para a área da matemática presentes na BNCC atendem ao que está acontecendo no mundo, especialmente no que se refere à garantia das condições para o desenvolvimento das habilidades e competências matemáticas.

No que diz respeito aos anos finais do ensino fundamental, orienta que os conteúdos geométricos sejam desenvolvidos a partir de representações de localização e/ou de movimentação de objetos no plano e no espaço, incluindo-se o plano cartesiano nesse processo.

Convém ressaltar, porém, que há uma necessidade de continuidade em relação a aprendizagens anteriores, especialmente no que se refere à compreensão de características e propriedades das figuras geométricas, às construções geométricas com uso de materiais manipuláveis como também tecnologias e as aplicações em outras áreas do conhecimento, construindo uma aprendizagem mais significativa e articulada como, por exemplo, a geometria em outras unidades da matemática, como grandezas, aproximando essas unidades curriculares.

Com efeito, é inegável o papel que a geometria obteve no currículo escolar nos últimos tempos. Segundo Ponte:

> As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e testes de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e evolução da matemática. (PONTE, 2006, p. 71)

Nesse aspecto convém ressaltar a relevância de discutir a percepção de espaço e a manipulação de formas como diferenciais que potencialmente proporcionam ao discente uma visão completa da Geometria, criando condições para a abstração de fórmulas e a capacidade de representação das mais variadas formas geométricas, assim como a resolução de problemas envolvendo cálculos de área e perímetros.

Isso representará, também, uma importante mudança de paradigma por parte do professor, na medida em que caberá ao docente a adoção de metodologias eficazes que deem significado aos saberes, fazendo com que o conhecimento de fato chegue até o aluno, como nos indica Ponte ao descrever sobre a diferenciação entre a matemática acadêmica e a matemática escolar.

> Uma das distinções importantes entre a matemática acadêmica e a matemática escolar é a que se refere ao papel e aos significados das definições e demonstrações em cada um desses campos do conhecimento matemático. Embora em ambos, exista certamente a necessidade de bem caracterizar os respectivos objetos, de validar as afirmações a eles referidas e de explicar as razoes pelas quais certos fatos são aceitos como verdadeiros e outros não, a formulação das definições e das provas e o papel que desempenham em cada um dos contextos são, todavia, diferentes. (PONTE, 2006, p.23)

Trata-se, portanto, de traçar estratégias que representem uma diversificação do fazer pedagógico do professor que, motivado na busca por novas tecnologias, tenderá a enriquecer suas aulas com foco na obtenção de êxito dos alunos.

No caso da utilização das dobraduras como recurso pedagógico tem-se uma possibilidade de enriquecer as aulas, produzindo com os discentes o saber geométrico e matemático, dando sentido ao que estão fazendo e, em último aspecto, dando real sentido ao saber.

3.1 A GEOMETRIA – ASPECTOS HISTÓRICOS

O termo "geometria" deriva do grego *geometrein*, que significa medição da terra (*geo* = terra, *metrein* = medição). Com efeito, a provável origem da Geometria data do século V a.c. e estão relacionadas as antigas práticas de agrimensura ou medição de terrenos, como apontam relatos do historiador grego Heródoto de Halicarnasso, muito embora relatos da época apontam que civilizações antigas possuíam conhecimentos de natureza geométrica, da Babilônia à China, passando pelas civilizações Hindu. (UNIVERSIDADE DE LISBOA, 2020)

Originalmente, a Geometria era uma ciência empírica, uma coleção de regras práticas para obter resultados aproximados. Apesar disso, estes conhecimentos foram utilizados nas construções das pirâmides e templos Babilônios e Egípcios.

Mas é sem dúvida com os geômetras gregos, começando com Tales de Mileto (624-547a.c.), que a geometria é estabelecida como teoria dedutiva. Tempos depois, Platão interessa-se pela matemática, em especial pela geometria, evidenciando, ao longo do ensino, a necessidade de demonstrações rigorosas dedutivas, e não pela verificação experimental. Esta concepção é desenvolvida pelo discípulo da escola platônica Euclides de Alexandria (325-285a.c.), no tratado Elementos publicado por volta de 300 a.c., em treze volumes ou livros.

A geometria denominada de Euclidiana surge assim em homenagem a Euclides. Nos seus treze livros, Euclides baseia-se nos seus precedentes gregos: os pitagóricos, Eudóxio, Taeteto. Mas Euclides mais do que expor as teorias destes mestres organiza as matérias de um modo sistemático a partir de princípios e definições, procedendo ao seu desenvolvimento por via dedutiva. Inaugurava assim o que, de maneira brilhante, domina o mundo matemático durante mais de vinte séculos, o chamado método axiomático, que inspiraram a humanidade, ao longo dos tempos e em muitos outros campos do saber, da moral, da política, a organizar as suas ideias segundo os mesmos princípios. (UNIVERSIDADE DE LISBOA, 2020).

3.2 A HISTÓRIA DO ORIGAMI

ORIGAMI é uma palavra japonesa composta do verbo dobrar (折り = ori) e do substantivo papel (紙 = kami). Significa literalmente, "dobrar papel". Os registros sobre a sua origem não são claros, mas a ideia de que teria surgido na China junto com a invenção do papel é descartada, pois as evidências sugerem que lá a sua função foi para escrever (Hatori em K's Origami). Para se fazer o ORIGAMI, tradicionalmente, começa-se com um papel cortado em forma de um quadrado perfeito. A inspiração dos origamistas (as pessoas que se dedicam à arte do Origami) está, principalmente, nos elementos da Natureza e nos objetos do dia a dia. Para o origamista, o ato de dobrar o papel representa a transformação da vida e ele tem a consciência de que esse pedaço, um dia, foi a semente de uma planta que germinou, cresceu e se transformou numa árvore. E que depois, o homem transformou a planta em folhas de papel, cortando-as em quadrados, dobrando-as em várias formas geométricas representando animais, plantas ou outros objetos. Onde os outros viam apenas uma folha quadrada, o origamista pode ver a origem de todas as formas se transbordando. Tradicionalmente, nada é cortado, colado ou desenhado. Para o mestre origamista, Akira Yoshisawa, o origami é um diálogo entre o artista e o papel.

No Japão, o papel foi introduzido pelos monges budistas coreanos, em torno do ano de 610 e os japoneses desenvolveram a sua própria tecnologia usando fibras vegetais extraídas de plantas nativas: o kozo para papel resistente, o gampi para os nobres e mitsumata, para os mais delicados. O papel tipicamente japonês ficou conhecido como washi e sobre ele podia-se escrever ou usá-lo para várias finalidades, inclusive para o origami.O registro mais antigo sobre dobradura papel está num poema de Ihara Saikaku datado de 1680, quando a palavra "orisue" (forma arcaica) referente ao origami foi utilizada. A prática da dobradura era restrita às cerimônias religiosas e festivas. Como exemplo de origami cerimonial tem o casal de borboletas (ocho e mecho) que enfeitam a garrafa de saquê (vinho de arroz) nos casamentos. Tem ainda o noshi cuja dobradura é colocada nos envelopes cerimoniais ou em presentes de grande valor. No livro de Ise Sadatake, "Tsutsumi-no Ki" (1764) os origamis cerimoniais foram criados no Período Muromac, (Figura 1) - Origamihi (1336 a 1573).

No Período Edo (1603 a 1867), o papel tornou-se mais abundante, os origamis tradicionais que conhecemos hoje se tornaram populares. Foram publicadas duas obras contendo as orientações para a execução de origamis: "*Hidem Sembazuru Orikata*" por Akisato Rito (1797) e "*Kayaragusa*" por Adachi Kazuyuki (1845). Essa última obra ficou conhecida como "*Kan no Mado*". O grou-japonês ou *tsuru*, uma ave considerada tradicionalmente sagrada, tornou-se o símbolo do origami (Figura 1). Ninguém sabe quem é o autor da sua criação. O grou tem uma vida longa e por isso foi associado à prosperidade, saúde e felicidade. Nas festividades, o grou está presente nos papeis de presente ou na forma de dobraduras.

Figura 1: Tsuru ou grou japonês

Fonte: próprio autor.

Figura 2: Pajarita

Fonte: próprio autor.

Há relatos, contudo que indicam que os mouros (que já conheciam a produção de papel) eram exímios dobradores de papel e influenciaram fortemente a cultura espanhola. Eles faziam apenas figuras geométricas, pois a religião muçulmana não permitia que os animais fossem representados e essas dobraduras fascinaram o filósofo Miguel de Unamuno, reitor da Universidade de Salamanca. Durante a inauguração da Torre Eiffel (1889), conheceu as dobraduras japonesas e passou a promover a "papiroflexia" palavra espanhola para a arte de dobrar papel. Na Espanha, por coincidência ou não, uma dobradura de ave muito popular, a "pajarita" é sinônimo de papiroflexia (Figura 2) Entretanto, Hatori (blogue K's Origami) acredita que as regras básicas da dobradura japonesa e moura são muito distintas e, podem de ter surgido de forma independente nas duas culturas. Veja como dobrar a "pajarita" (Figura 2) e compare. No Brasil o origami foi introduzido pelos imigrantes japoneses e na Argentina, pelos colonizadores espanhóis.

3.2.1 O Origami como Recurso Didático Pedagógico

O Origami proporciona ao aluno a manipulação das formas, uma vez que, ao dobrar, desdobrar ele constrói suas próprias relações e percepções da Geometria, comparando-a as formas de seu cotidiano.

A esse respeito Lorenzato descreve:

> Usando régua e compasso é possível traçar linhas retas, construir um ângulo e sua bissetriz, obter retas perpendiculares, paralelas, diagonais e muitas outras figuras. Várias dessas construções podem ser feitas com as dobraduras, o que possibilita ao professor de matemática, em sala de aula, enfatizar a importância do lúdico na construção, comparação, estabelecimento de relações, medições, visualização e resolução de problemas. (LORENZATO, 2006, p.99)

Tratando-se de uma construção motora, o origami proporciona ao aluno a apropriação do espaço e a sala de aula torna-se o espaço privilegiado de situações proveitosas e interativas, dando significado ao aprendizado.

Também, nesse caso, será possível estabelecer relações entre a Geometria e a Álgebra, quando analisamos a quantidade ou a parte de papel utilizada na dobradura, ou seja, o aluno estará construindo o seu próprio saber matemático, fundamentado na sua práxis.

Assim, promove-se a interação entre o educando e o conhecimento sobre fatos de suas vivências. Para Ferreira (2016), os professores assumem papel fundamental neste processo, uma vez que “precisarão decidir como irão atuar nesse processo” (FERREIRA, 2016).

No presente estudo, reflete-se sobre alguns pressupostos dos estudos de Vygotsky (1987, p. 17), tal como: “a colaboração entre pares ajuda a desenvolver estratégias e habilidades gerais de solução de problemas pelo processo cognitivo implícito na interação e comunicação”. Nas ideias do autor, percebe-se que a linguagem assume papel de destaque na elaboração do pensamento. Desse modo, o trabalho, quando realizado em colaboração com o outro, segundo suas ideias, enfatiza a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) – que, por sua vez, é “algo coletivo”. Assim, o conhecimento acontece através de compartilhamento.

A ZDP é a distância entre o nível de desenvolvimento real – constituído por funções já consolidadas pelo sujeito, que lhe permitem realizar tarefas com autonomia – e o nível de desenvolvimento potencial, caracterizado pelas funções que estariam em estágio embrionário e não amadurecidas (Vygotsky, 1987, p. 97). Esse conceito foi desenvolvido com a intenção de estudar a relação entre desenvolvimento e aprendizagem, uma vez que as aprendizagens vividas pelo sujeito e mediadas por sujeitos mais experientes geram mudanças qualitativas que estimulam o desenvolvimento do indivíduo.

Nesse contexto, a análise da ZDP se entrelaça profundamente com outro aspecto caro ao Vygotsky: a mediação, pilar central de sua teoria, segundo a qual o autor considera que a apropriação, pelo sujeito, dos elementos culturais produzidos pela humanidade, amplia sua compreensão do mundo. Desta forma, orientado pelo outro, o sujeito investe esforços na tarefa de entender e dar sentido a objetos da sua realidade e, nessa dinâmica, passa a ter domínio sobre suas ações e escolhas.

O processo de interação e mediação assume, nessa perspectiva, papel e função primordial no desenvolvimento dos indivíduos e na organização da vida em sociedade. No caso presente, quanto à construção de um produto cultural audiovisual, percebe-se o destaque da interação como elemento fundamental, possibilitando processos colaborativos de aprendizagem, a fim de ressaltar o papel da linguagem e os aspectos da mediação.

O uso da técnica de origami está intrinsecamente ligado a atividade colaborativa, na medida em que propõe que o estudante seja o autor de atividades, conteúdos e assuntos que podem ser trabalhados e desenvolvidos coletivamente.

Desse modo, discentes e docentes interagem, participam, buscam soluções e refletem, em cooperação, por soluções para o grupo, estabelecendo soluções, resultados e compartilhando novos conhecimentos. Isso levará o estudante a percorrer um caminho no qual o professor provocará um desequilíbrio, estimulando o interesse sobre as situações abordadas, levando os alunos por caminhos que conduzem à demonstração e à reflexão.

Para essa pesquisa, foram observados aspectos da concepção sócio interacionista presente na obra de Vygotsky (1987), em que este afirma que o desenvolvimento humano se dá por meio de relações sociais entre indivíduos de um mesmo grupo cultural através de processos de interação e mediação. Também foram buscados pressupostos e experiências da denominada aprendizagem colaborativa. Em trabalhos de Torres (2004), entende-se que a aprendizagem colaborativa é uma iniciativa que estimula a participação do aluno no processo de aprendizagem, visto que se torna protagonista na produção do conhecimento.

No contexto atual, é razoável imaginar que a reunião dos preceitos sócio interacionistas se encaixa perfeitamente nas premissas da aprendizagem colaborativa, e que esta estratégia só tem a ganhar com a adição de ferramentas pedagógicas inovadoras, auxiliando os professores na tarefa de mediação.

Tal iniciativa favorece, também, mecanismos de aproximação professor-aluno ao adotar instrumentos e linguagens mais próximas da realidade e práticas imediatas do aluno de nossa época, destacando a importância da denominada distância transacionais na aprendizagem, como aponta Kenski (2005):

> "A partir da proposta de Moore e, levando-se então em consideração que a aprendizagem será mais significativa quanto maior for o grau de interação e comunicação entre os participantes do processo, novas técnicas e tecnologias vêm sendo desenvolvidas, visando-se obter o máximo de aproximação nas atividades realizadas à distância, no ciberespaço (Kenski, 2005, p. 74)."

3.2.2 A Utilização da Estratégia da Aprendizagem Colaborativa

Desde o início desta pesquisa, houve um empenho para definir a estratégia pedagógica que seria utilizada com os alunos para obter os resultados esperados. Nesse sentido, pareceu oportuna uma abordagem que focasse na aprendizagem colaborativa, por se tratar de um conjunto de ações que promove uma interação entre os participantes de um grupo e entre os grupos, com ganhos para todos os envolvidos.

A escola é um ambiente propício para a realização de atividades de grupo, uma vez que esse tipo de trabalho oportuniza ao discente a possibilidade de desenvolver diversas competências, tais como a capacidade de organização, a busca para solução de problemas, a cooperação e o compartilhamento dos resultados e experiências, tornando, assim, a aprendizagem mais significativa.

Nesse aspecto, a obtenção de conhecimento se dá no momento em que os estudantes participam ativamente do processo de aprendizagem, interagindo com os colegas e com o professor, formando uma aprendizagem colaborativa, o que é, para Alcântara (2000, p.3), "uma nova ação docente na qual o professor e alunos participam de um processo conjunto para aprender de forma criativa, dinâmica, encorajadora que tenha como essência o diálogo e a descoberta".

No caso específico do projeto ORIGAMI, desenvolvido junto aos alunos, tem-se a técnica como fator agregador, na medida em que essa inovação estabelece laços solidários entre os estudantes e entre estes e o professor, como indica Behrens (1999, p. 97): "estimular o acesso à informação e à pesquisa individual e coletiva, favorecendo processos para aumentar a interação entre eles".

Objetivamente, se a estratégia da aprendizagem colaborativa foi desenvolvida de forma a destacar a interação e a integração entre os próprios discentes, e entres estes e os docentes, nada mais salutar do que trabalhar em ambientes que proporcionem essa interação. Dessa maneira, o conhecimento é construído de forma cooperativa e integrada e pode, pela tipologia da plataforma *Youtube*, contribuir para a disseminação dos resultados obtidos, estimulando também o protagonismo juvenil.

Para Vygotsky (1987, p. 17), “a colaboração entre pares ajuda a desenvolver estratégias e habilidades gerais de solução de problemas pelo processo cognitivo implícito na interação e na comunicação”, reforçando, assim, a importância do conhecimento como algo coletivo e que acontece através do compartilhamento.

Já para Echeita e Martins (1995, p. 37), a interação “constitui o núcleo da atividade, já que o conhecimento é gerado, construído, ou melhor, dito construído conjuntamente exatamente porque se produz interatividade entre duas ou mais pessoas que participam dele”, ou seja, a interação promove as condições para a construção do conhecimento.

Em termos gerais, podemos concluir que a estratégia de aprendizagem colaborativa se adequa ao tipo de trabalho ora realizado, considerando o uso das TIC e de seus recursos como forma de potencializar o aprendizado.

4 A ESTRATÉGIA PEDAGÓGICA DO ENSINO DE GEOMETRIA ATRAVÉS DAS DOBRADURAS – IMERSÃO NO CONTEÚDO

Ao longo desse capítulo demonstraremos as possibilidades da utilização da técnica de dobraduras para o ensino da geometria plana, a partir de uma estratégia interativa e que permite ao discente uma maior “proximidade” em relação ao conteúdo, na medida em que ele mesmo manipulará os recursos utilizados para o ensino do conteúdo.

4.1 ENSINANDO GEOMETRIA COM DOBRADURAS: PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

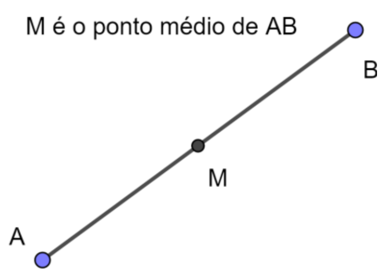
Nesta seção vamos estudar os pontos notáveis do triângulo: baricentro (ponto de encontro das medianas) ortocentro (ponto de encontro das alturas), incentro (ponto de encontro das bissetrizes internas) e circuncentro (ponto de encontro das mediatrizes) e algumas propriedades desses pontos

4.1.1 Construção da Mediana e do Baricentro

4.1.1.1. Ponto médio de um segmento

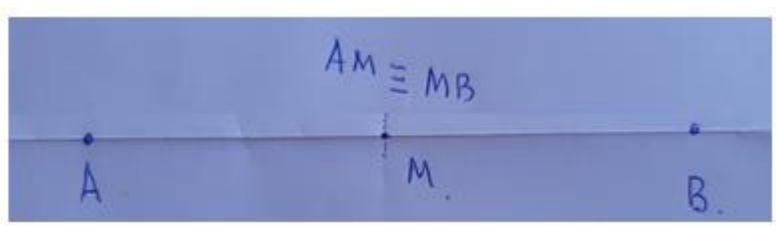
Ponto médio de um segmento é um ponto interno ao segmento, que o divide em dois segmentos congruentes, isto é, com as mesmas medidas.

Figura 3: Ponto médio do segmento AB



Fonte: próprio autor.

Figura 4: Ponto médio construído com dobraduras



Fonte: próprio autor.

Construção com dobraduras com dobraduras.

1º Passo: Dobra-se o segmento AB, de forma que o ponto A coincida com o ponto B

2º Passo: Obtém-se um ponto M entre A e B, que é o ponto médio, pois o segmento $\overline{AM}$ é congruente ao segmento $\overline{MB}$, por sobreposição. (Figura 4)

4.1.1.2 Definição de mediana

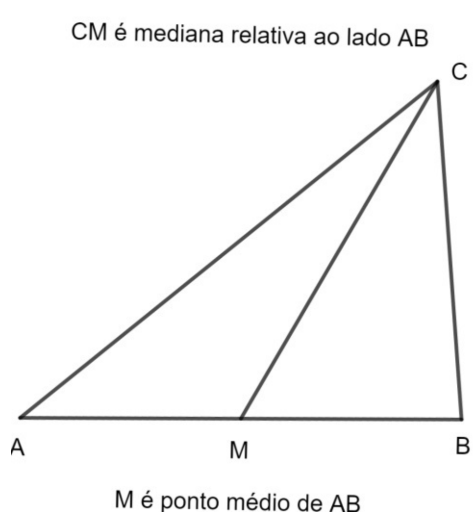
Mediana de um triângulo é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto (Figura 5). Na figura temos um triangulo ABC, M o ponto médio do lado AB e CM a mediana relativa ao lado AB.

4.1.1.3. Passos para a construção da mediana por dobraduras

1º Passo: Encontre o ponto médio (M) do lado que vai receber a mediana ($\overline{AB}$).

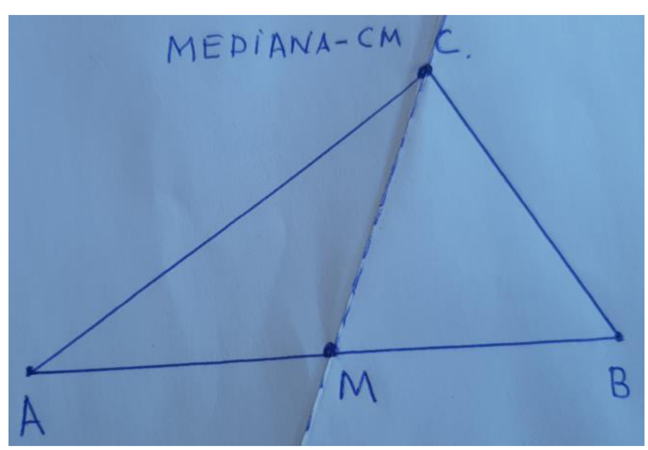
2º Passo: Faça uma dobradura passando pelo vértice (C) do triângulo e seu ponto médio (M) do lado oposto a esse vértice. O segmento $\overline{CM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ Do triângulo ABC (Figuras 5 e 6).

Figura 5: Mediana do lado AB



Fonte: próprio autor.

Figura 6: Mediana do lado AB feita por dobraduras



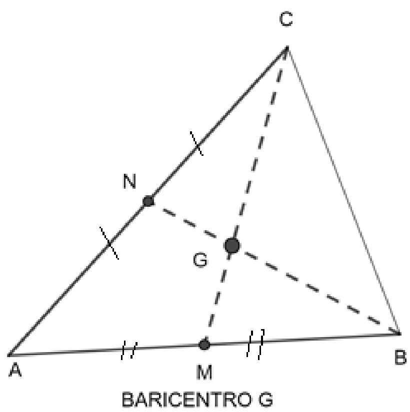
Fonte: próprio autor.

4.1.1.4. Definição de baricentro

Baricentro é o ponto de encontro das três medianas de um triângulo, para encontrá-lo basta construir duas medianas do triângulo, o ponto de encontro dessas duas medianas é o baricentro. Na figura 7 temos um triangulo ABC, com duas medianas BN e CM e o seu baricentro G

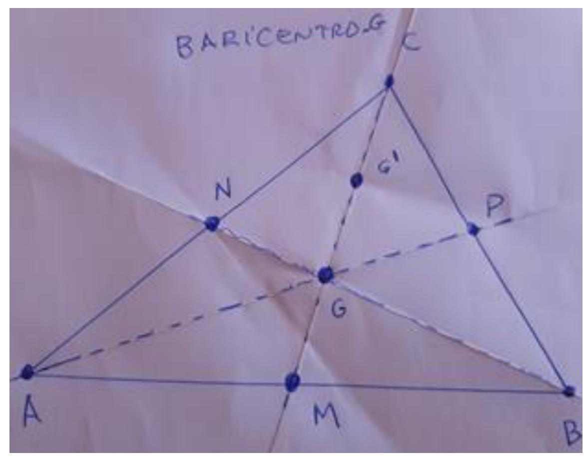
4.1.1.5. Passos para a construção do baricentro com dobraduras

Figura 7: Baricentro do triângulo ABC



Fonte: próprio autor.

Figura 8: Baricentro construído por dobraduras



Fonte: próprio autor.

Para encontrá-lo, basta construir duas medianas do triângulo, o ponto de encontro dessas duas medianas é o baricentro G (Figura 7).

1º passo: Constrói-se as medianas $\overline{CM}$ e $\overline{BN}$ (Figura 8);

2º passo: Desfaz-se as dobraduras e ponto de encontro dessas duas dobraduras é o baricentro (G).

3º passo: Encontrando o ponto médio P de $\overline{BC}$, e fazendo uma dobradura de passando pelos pontos P e A, observa-se que essa dobradura, também passa por G, daí conclui-se que as três medianas se interceptam em um único ponto.

4.1.1.6. Propriedade do baricentro – ponto G

O baricentro (G) divide a mediana, na razão de 2 para 1, isto é, o segmento que contém o vértice é o dobro do segmento que contém o ponto médio do lado oposto a esse vértice, ou seja: $\overline{CG}$=2$\overline{GM}$ (Figura 8). Vamos mostrar usando dobradura.

Encontrado o baricentro, o ponto G, sobre a mediana $\overline{CM}$ encontra-se o ponto médio de $\overline{CG}$ e chamamos esse ponto de G' (ver Figura 8), logo $\overline{CG'}$ $\equiv\overline{G'G}$ possuem a mesma medida. Resta mostrar que G é ponto médio de $\overline{G'M}$. Dobra-se o segmento$\overline{G'M}$ de tal forma que o ponto G' coincida com o ponto M, dessa forma encontrando o ponto médio de $\overline{G'M}$, que coincide com o ponto G, isto é, $\overline{G'G}$≡$\overline{GM}$. Portanto temos: $\overline{CG}$' ≡ $\overline{G'G}$≡$\overline{GM}$.

Como $\overline{CG}$ = $\overline{CG}$' + $\overline{G'G}$ = $\overline{GM}$ + $\overline{GM}$ = 2. $\overline{GM}$, isto é, $\overline{CG}$ =2. $\overline{GM}$.

4.1.2 Construção da Mediatriz e do Circuncentro

4.1.2.1 Retas perpendiculares

Duas retas são perpendiculares quando o ângulo formado entre elas for um ângulo reto, isto é, um ângulo de medida 90º. As retas r e s são perpendiculares.

Temos nos dois casos um ponto dado e uma reta dada, queremos traçar uma reta perpendicular a essa reta dada passando pelo ponto dado.

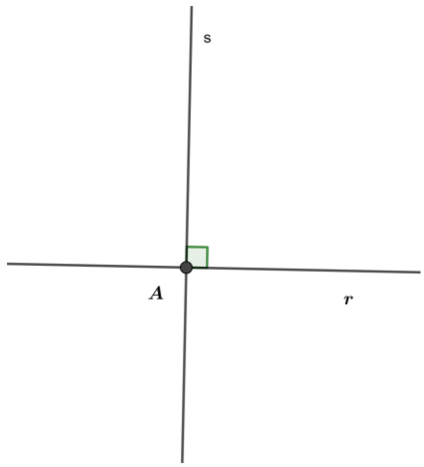
Agora, construiremos com dobraduras

1º caso: Ponto pertence à reta r.

Seja A um ponto pertencente à reta r. vamos passar uma reta s, perpendicular à reta r, passando pelo ponto A.

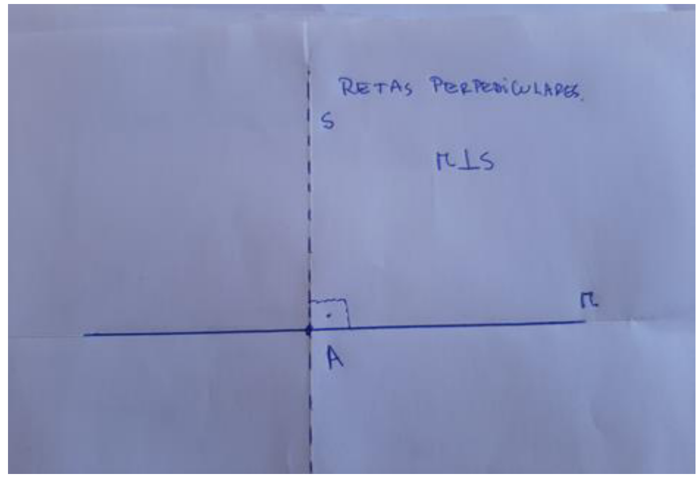
O ponto A divide a reta r em duas semirretas. Faça uma dobradura passando pelo ponto A, tal que, as duas semirretas de sentidos opostos em relação ao ponto A, coincidam. A dobradura formada é uma reta (s) perpendicular à reta r. Pois temos dois ângulos de mesma medida que somados dá 180º, cada um mede 90º. Logo r e s são perpendiculares.

Figura 9: Retas perpendiculares r e s



Fonte: próprio autor.

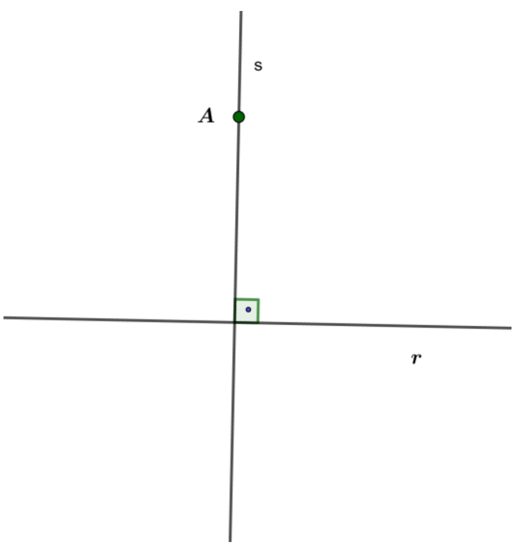
Figura 10: Retas perpendiculares por dobraduras



Fonte: próprio autor.

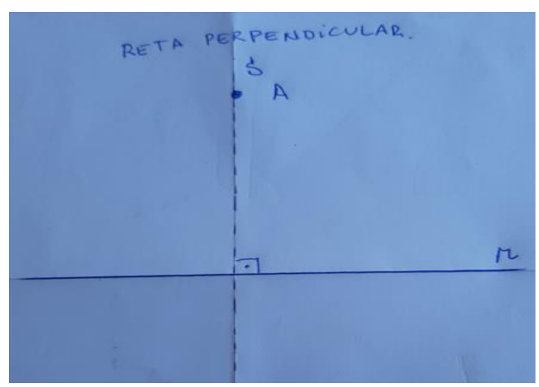
2ºcaso: O ponto A não pertence à reta r. Seja A um ponto no plano.

Figura 11: Retas perpendiculares



Fonte: próprio autor.

Figura 12: Retas perpendiculares por dobradura



Fonte: próprio autor.

Passo 1: Faça uma dobradura passando pelo ponto A, na direção que a reta r.

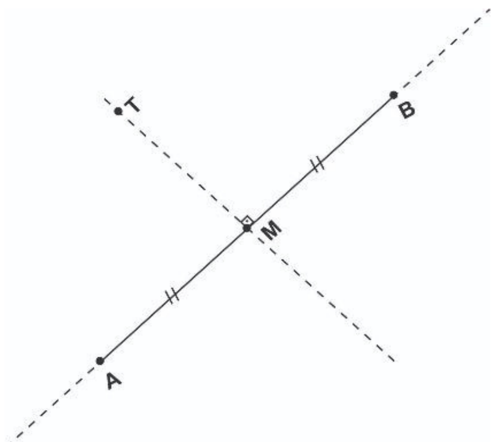
Passo 2: Essa dobradura deve ser feita de tal forma que as semirretas determinadas pela reta r coincidam.

Passo 3: Essa dobradura determina a reta s, passando por A e perpendicular à reta r (Figura 12).

4.1.2.2 Definição de mediatriz

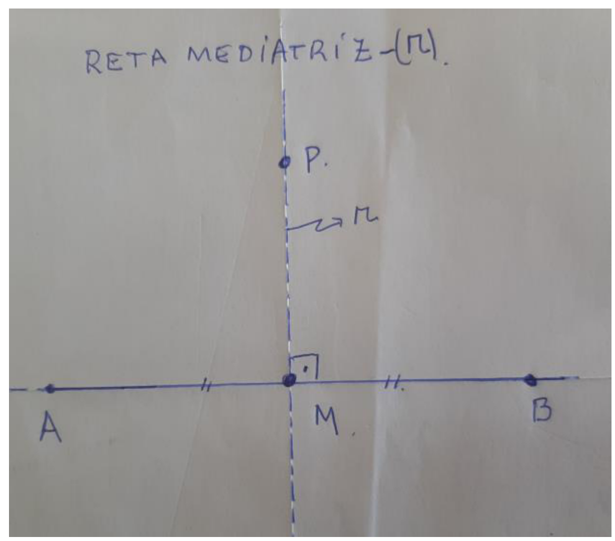
Chamamos de reta mediatriz de um segmento $\overline{AB}$, uma reta que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$, perpendicularmente, a ele. (Figura 13)

Figura 13: Mediatriz do segmento AB



Fonte: próprio autor.

Figura 14: Mediatriz construída por dobraduras



Fonte: próprio autor.

4.1.2.3 Construção da mediatriz por meio de dobraduras

Passo 1: Marque na folha dois pontos distintos A e B. Faça uma dobradura passando pelos pontos A e B, desse modo temos o segmento de reta $\overline{AB}$. (Figura 14)

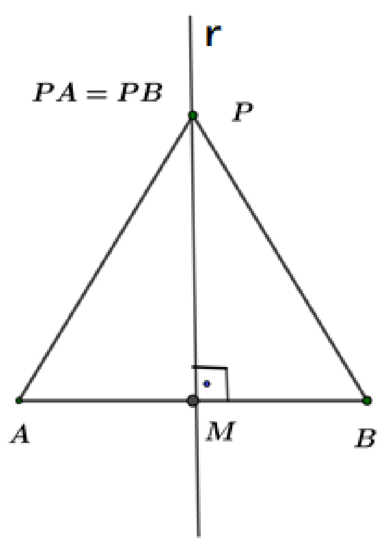
Passo 2: Dobre a folha de modo que os pontos A e B coincidam. Portanto temos o ponto médio M, e uma reta r que passa pelo ponto M. Essa reta é a reta mediatriz, procurada

Passo 3: Tomamos um ponto C nessa reta r com T diferente de M, então $A\widehat{M}T \equiv B\widehat{M}T$ (por superposição da dobradura) logo Med($A\widehat{M}T) = Med(B\widehat{M}T)$. Como Med($A\widehat{M}T) + Med(B\widehat{M}T)$=180º, logo os ângulos $A\widehat{M}T$ e $B\widehat{M}T$ são retos. Desse modo a reta r passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$, perpendicularmente, portanto concluímos que a reta r é a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

4.1.2.4 Propriedade da mediatriz

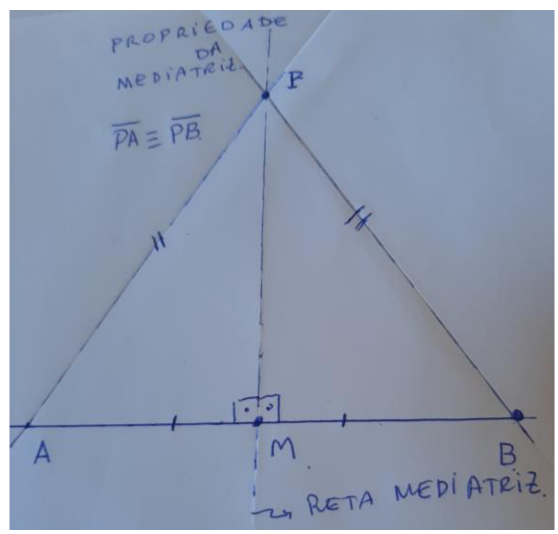
"Se uma reta é mediatriz de um segmento $\overline{AB}$, então qualquer ponto pertencente à ela, é equidistante dos pontos A e B".

Figura 15: Propriedade da mediatriz do segmento AB



Fonte: próprio autor.

Figura 16: Propriedade da mediatriz feita por dobraduras



Fonte: próprio autor.

Vamos construir por dobraduras:

Seja P um ponto qualquer da reta mediatriz.

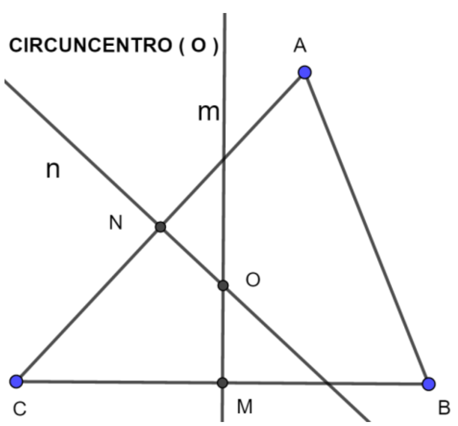
Passo 1: Faça duas dobraduras, uma, passando por A e P e outra passando por P e B.

Passo 2: Faça uma dobradura sobrepondo ponto A ao ponto B e teremos a sobreposição superposição dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, logo eles são congruentes, portanto, o ponto P é equidistante dos pontos A e B.

4.1.2.5. Definição do circuncentro

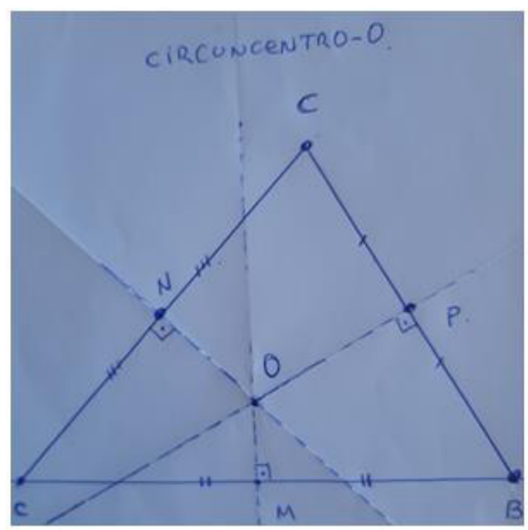
Chamamos de circuncentro de um triângulo o ponto de encontro das três mediatrizes dos lados do triângulo. Na figura17 temos as retas m e n que são as retas mediatrizes, respectivamente, dos lados BC e AC e seus respectivos pontos médios M e N.

Figura 17: Circuncentro (O) do triângulo ABC



Fonte: próprio autor.

Figura 18: Circuncentro do triângulo ABC feito por dobraduras

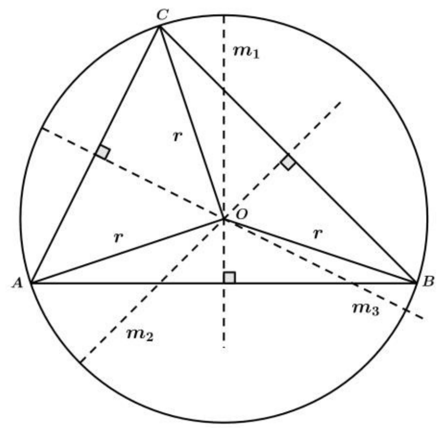


Fonte: próprio autor.

O circuncentro equidista dos vértices do triângulo.

Vamos construir por dobraduras. (Figura 18).

Figura 19: Circuncentro equidistando dos vértices do triângulo



Fonte: próprio autor.

Passo 1: Encontre a mediatriz de cada lado do triângulo;

Passo 2: O ponto de interseção de duas das três mediatrizes determina um ponto (O) que é o circuncentro;

Antes de prosseguir com os casos de circunscrito, vamos lembrar que de acordo com a classificação dos triângulos quanto aos ângulos, temos:

a) Retângulo: quando um dos internos for reto, isto é, medir 90º

b) Acutângulo: quando cada ângulo interno possuir medida menor que 90º

c) obtusângulo: quando possuir um ângulo maior que 90º.

O circuncentro pode ser um ponto sobre um dos lados, dentro ou fora do triângulo.

a) Se o triângulo for retângulo.

Passo 1: Constrói-se o ponto médio de cada lado triângulo ABC.

Passo 2: Constrói-se a mediatriz de cada lado do triângulo ABC.

Passo 3: Essas mediatrizes se interceptam no ponto médio da hipotenusa BC, equidistantes dos vértices.

b) Se o triângulo for acutângulo.

Passo 1: Constrói-se o ponto médio de cada lado triângulo ABC.

Passo 2: Constrói-se a mediatriz de cada lado do triângulo ABC.

Passo 3: Essas mediatrizes se interceptam no ponto equidistante dos vértices no interior do triângulo.

c) Se o triângulo for obtusângulo.

Passo 1: Constrói-se o ponto médio de cada lado triângulo ABC.

Passo 2: Constrói-se a mediatriz de cada lado do triângulo ABC.

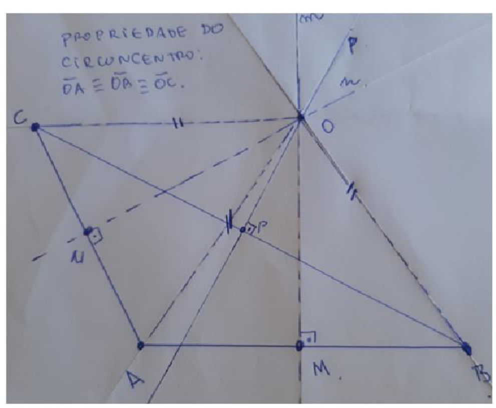
Passo 3: Essas mediatrizes se interceptam no ponto que é equidistantes dos vértices, exterior do triângulo.

4.1.2.6 Propriedade do circuncentro

O circuncentro equidista dos vértices do triângulo, pois na seção 4.1.2.4(Propriedade da reta mediatriz) “Se a reta é mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$, então qualquer ponto pertencente à mediatriz, é equidistante dos pontos A e B” (Figura 15). Como o ponto P pertence a cada uma das mediatrizes dos lados do triângulo ABC (Figura 16), então P é equidistante dos vértices A, B e C do triangulo ABC. Podemos dizer que P é o centro de uma circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Na figura temos o triângulo ABC e o seu circuncentro O, e as distâncias ($\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$) dos vértices ao circuncentro O, as mediatrizes m, n, p e os pontos médios dos lados por onde elas interceptam os lados nos quais elas são mediatrizes.

Figura 20: Propriedades do circuncentro

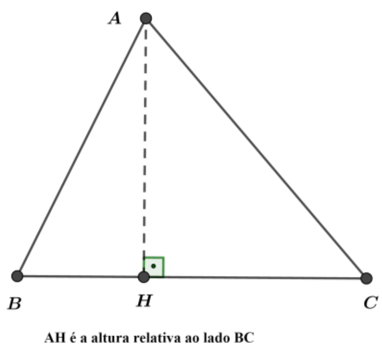


Fonte: próprio autor.

4.1.3. Construção da Altura e do Ortocentro

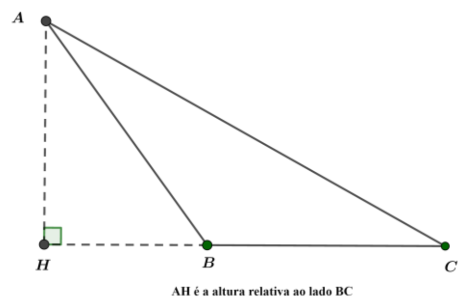
Altura de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto. Esse lado é chamado base da altura, e o ponto onde a altura encontra a base, ou o seu prolongamento, é chamado de pé da altura. O ponto de encontro das três alturas é chamado de ortocentro. As Figuras 21, 22 e 23 ilustram a altura relativa ao vértice A de um triângulo ABC acutângulo, obtusângulo e retângulo, respectivamente.

Figura 21: Altura no triângulo Acutângulo



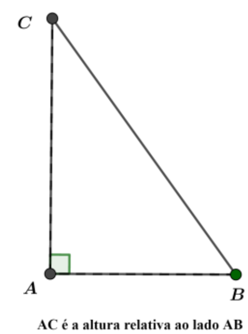
Fonte: próprio autor.

Figura 22:– Altura no triângulo Obtusângulo



Fonte: próprio autor.

Figura 23: Altura no triângulo Retângulo



Fonte: próprio autor.

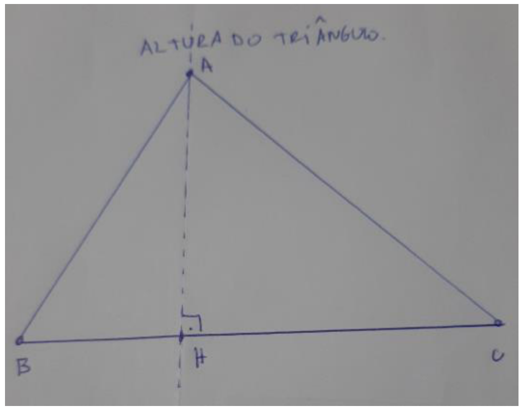
4.1.3.1. Passos para construção da altura por dobraduras

No tópico 4.1.2.1 (Retas Perpendiculares) vimos o processo para traçar uma reta perpendicular à uma reta dada, passando por um ponto também dado. Basta repetir esse processo para cada vértice do triângulo em relação ao lado oposto ou ao seu prolongamento.

Passo 1: Pelo ponto A do triângulo ABC, constrói-se, por dobraduras, uma reta perpendicular à reta que passa pelos pontos B e C do triângulo ABC (ver seção 4.1.2.1).

Passo 2: A dobradura entre os pontos A e H é a altura relativa do lado BC do triangulo ABC.

Figura 24: Construção da altura

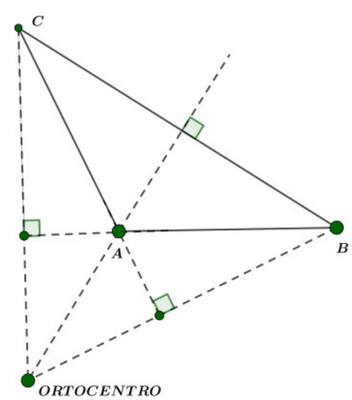


Fonte: próprio autor.

4.1.3.2. Figuras do ortocentro feitas no computador

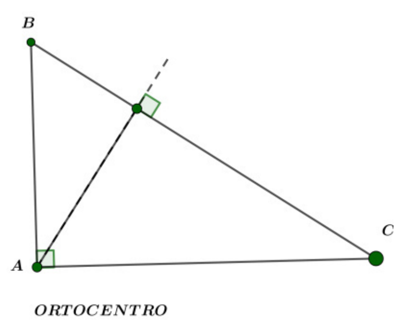
Ortocentro: é o ponto de encontro das três alturas do triângulo.

Figura 25: Ortocentro no triângulo obtusângulo



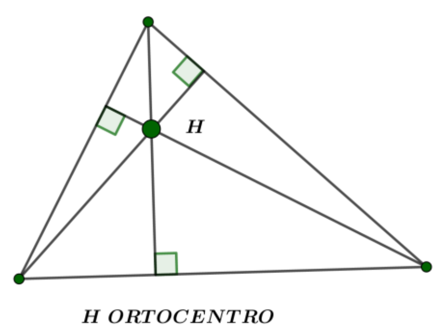
Fonte: próprio autor.

Figura 26: Ortocentro no triângulo retângulo



Fonte: próprio autor.

Figura 27: Ortocentro no triângulo acutângulo



Fonte: próprio autor.

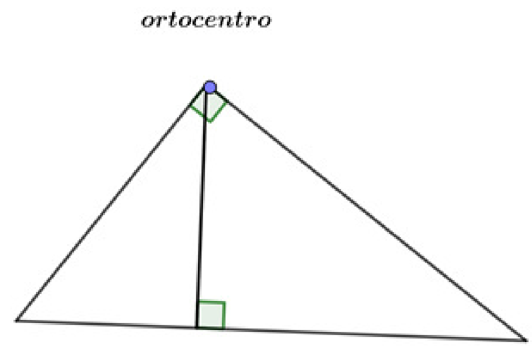
4.1.3.3 Figuras do ortocentro do triângulo ABC construídas por dobraduras

As Figuras 25, 26 e 27 mostram o ortocentro dos triângulos obtusângulo, retângulo, e acutângulo, respectivamente.

Por dobraduras, basta construir as alturas que partem de cada vértice, isto é, traçar uma perpendicular a uma reta dada por um ponto fora dessa reta dada.

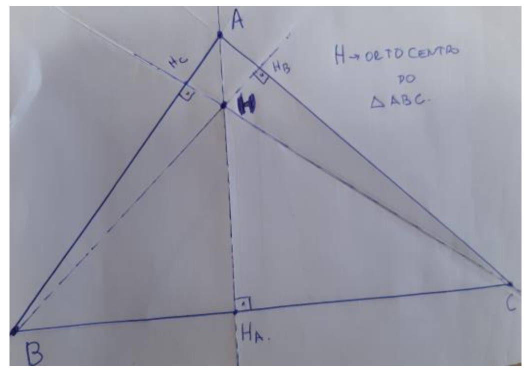
Se o triângulo for retângulo, o ortocentro está no vértice do ângulo reto (Figura 26).
Se o triângulo for acutângulo, o ortocentro está no interior do triângulo (Figura 27).
Se o triângulo for obtusângulo, então o ortocentro é exterior ao triângulo (Figura 25).

Figura 28: Ortocentro sobre o lado do triângulo



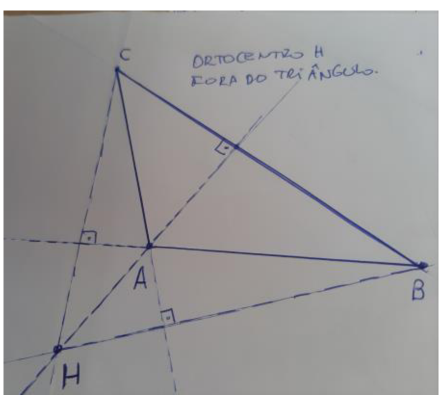
Fonte: próprio autor.

Figura 29: Ortocentro no interior do triângulo



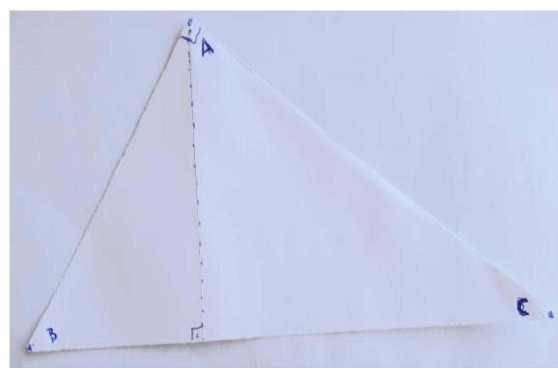
Fonte: próprio autor.

Figura 30: Ortocentro no exterior do triângulo



Fonte: próprio autor.

Figura 31: Ortocentro do triângulo retângulo feito por dobraduras



Fonte: próprio autor.

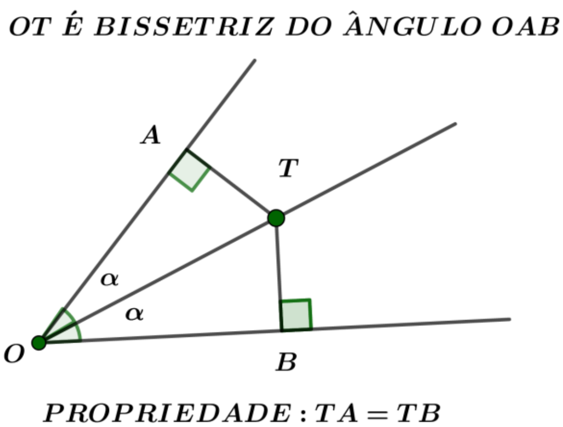
4.1.4. Construção da Bissetriz Interna e do Incentro de um Triângulo

4.1.4.1. Bissetriz de um ângulo e sua propriedade

Chamamos de bissetriz do ângulo uma semirreta de origem no vértice do ângulo que divide o ângulo em outros dois ângulos congruentes, isto é, de mesma medida. E tem como propriedade: cada ponto pertencente à bissetriz equidista dos lados ($\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$) dos ângulo A$\hat{O}$B.

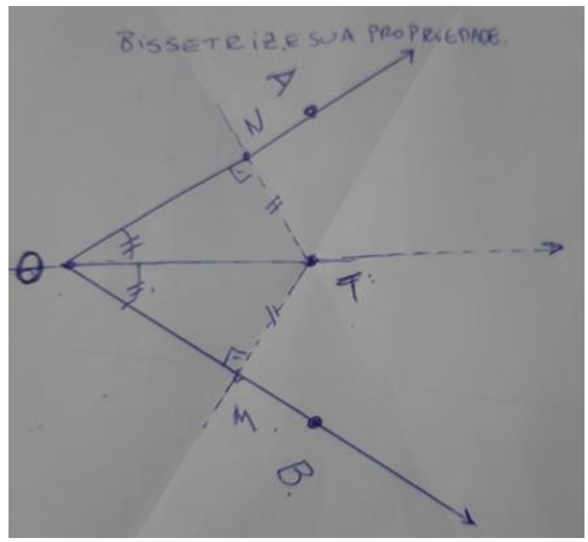
Na Figura 32 temos o ângulo A$\hat{O}$B, com seu vértice O e seus lados ($\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$) e a bissetriz $\overrightarrow{OT}$

Figura 32: Bissetriz do ângulo A$\hat{O}$B



Fonte: próprio autor.

Figura 33: Bissetriz construída por dobraduras



Fonte: próprio autor.

4.1.4.2. Construção da bissetriz por dobraduras

Passo 1: Faça uma dobradura de tal forma que os lados ($\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$) do ângulo fiquem sobrepostos (coincidam). Figura 33.

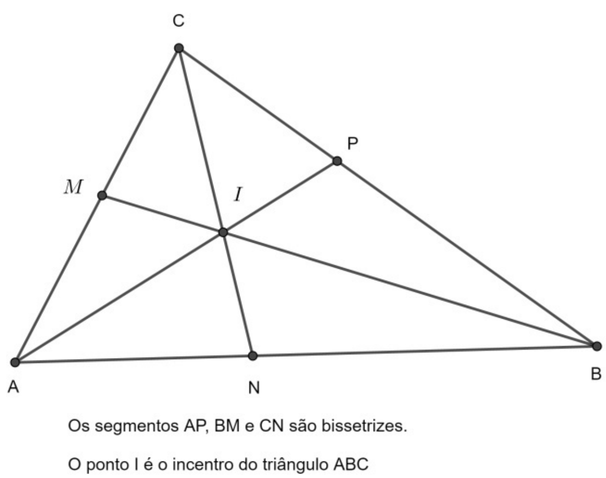
Passo 2: A dobradura formada é a bissetriz $\overrightarrow{OT}$ do ângulo $A\hat{O}B$.

Passo 3: propriedade da bissetriz: Por qualquer ponto T da bissetriz $\overrightarrow{OT}$, faça duas dobraduras perpendiculares aos lados,$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente , do ângulo $A\hat{O}B$. Chame de N e M (Figura 33) as interseções, respectivamente, com os lados do ângulo. Faça uma dobradura em toda bissetriz e sobreponha os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e observe que $\overrightarrow{TN}$ e $\overrightarrow{TM}$ ficam sobreposto, portanto são congruentes, isto é $\overline{TM} \equiv \overline{TN}$, portanto possuem a mesma medida.

4.1.4.3. Incentro

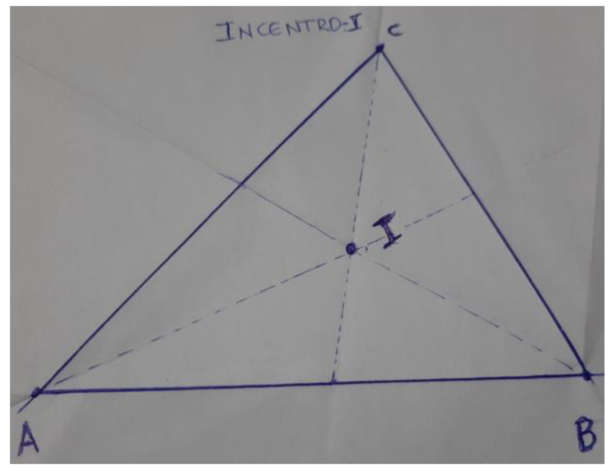
Chamamos de incentro de um triângulo o ponto de encontro das três bissetrizes internas dos ângulos internos do triângulo.

Figura 34: Incentro do triângulo ABC



Fonte: próprio autor.

Figura 35: Incentro construído por dobraduras



Fonte: próprio autor.

4.1.4.4 Construção do incentro usando dobraduras

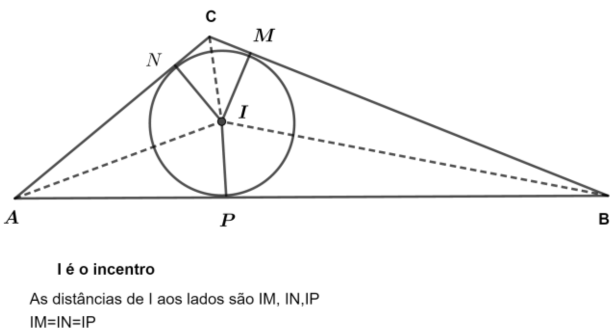
Passo 1: Constrói-se a bissetriz de cada lado do triângulo (ver seção 4.1.4.1 - Figura 33).
Passo 2: As dobraduras feitas anteriormente se interceptam em um ponto, que será o incentro do triângulo.

4.1.4.5 Construção da propriedade do incentro por dobraduras

Seja ABC um triângulo e o ponto I seu incentro (Figura 37): constrói-se pelo ponto I retas perpendiculares aos lados do triângulo (seção 4.1.2.1). Chamamos a interseção do lado $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ com as perpendiculares construídas a partir do ponto I de N, M e P, respectivamente. Faça uma dobra sobre a bissetriz $\overline{AI}$ verificando que as duas distâncias $\overline{IM}$ e $\overline{IN}$, por superposição coincidem, logo são congruentes. De modo análogo faz para a outra distância $\overline{IP}$. Portanto podemos concluir que $\overline{IN}$=$\overline{IM}$=$\overline{IP}$ e $\overline{NA}$=$\overline{AP}$, logo o ponto I é equidistante dos lados do triângulo. Desse modo podemos construir uma circunferência tangente aos lados do triângulo (inscrita ao triângulo ABC) com centro em I.

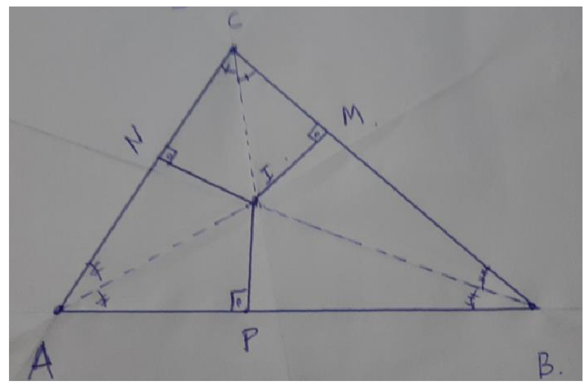
Pela propriedade das bissetrizes, um ponto qualquer da bissetriz equidista dos lados do triângulo então o incentro equidista dos três lados do triângulo, portanto pode ser considerado o centro de uma circunferência de raio igual à distância do incentro aos dos lados do triângulo. O incentro desse modo é o centro de uma circunferência inscrita no triangulo ABC.

Figura 36: Propriedade do incentro



Fonte: próprio autor.

Figura 37: Propriedade do incentro por dobraduras



Fonte: próprio autor.

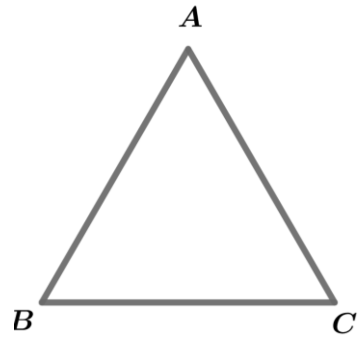
4.2. CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS COM DOBRADURAS

Vamos aplicar o uso das dobraduras nas construções dos principais polígonos regulares usadas no ensino da geometria: Quadrado, Triângulo Equilátero, Pentágono regular, Hexágono regular, Octógono regular. Mostrando os passos para a construção. Vamos mostrar a relação do número de ouro com o pentágono, o jogo de sinuca, soma dos ângulos internos de triângulo qualquer e outros problemas envolvendo o hexágono regular com polígono estrelado.

4.2.1. Triângulo Equilátero

É todo triângulo que possui os três lados congruentes, isto é, com a mesma medida, portanto $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$. A Figura 38 mostra um triângulo equilátero.

Figura 38: Triângulo equilátero



Fonte: próprio autor.

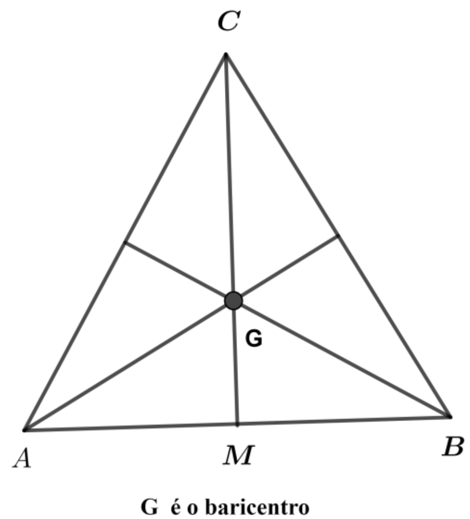
4.2.1.1 Construção do triângulo equilátero por dobradura

1º passo: Seja um retângulo, sobre o lado menor do retângulo tomam-se os vértices A e B (já temos dois vértices do triângulo equilátero). Vamos determinar o terceiro vértice, que chamaremos de C.
2º passo: Constrói-se a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, e chamamos de M o ponto de interseção da mediatriz com o lado $\overline{AB}$.
3º passo: Toma-se o vértice A (ou B) e desloca-se esse vértice até ficar sobreposto à mediatriz de $\overline{AB}$, o ponto C será o ponto deslocado sobre a mediatriz. Desse modo, tem-se uma reta feita por dobradura passando por A e C. Faz-se outra dobradura de C para B, desse modo está construído um triângulo equilátero de lado $\overline{AB}$=$\overline{BC}$=$\overline{AC}$, por dobraduras (Figura 40).

4.2.1.2 Triângulo equilátero e os pontos notáveis

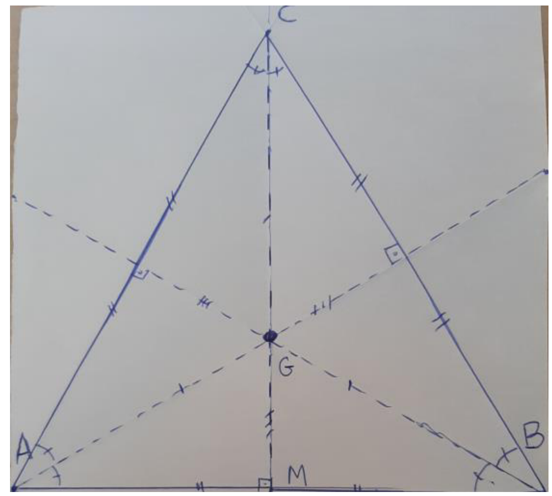
Na construção realizada acima, temos algumas observações: o ponto G, é o baricentro do triângulo, portanto as dobraduras internas são alturas, bissetrizes e medianas.

Figura 39: Triângulo equilátero e o baricentro



Fonte: próprio autor.

Figura 40: Triângulo equilátero por dobraduras

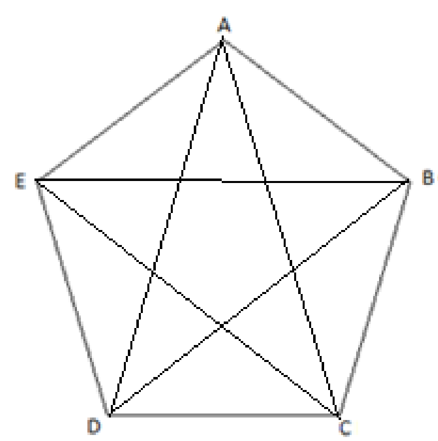


Fonte: próprio autor.

4.2.2. Pentágono Regular

É um polígono convexo que possui todos os cinco lados com a mesma medida e todos os ângulos internos com a mesma amplitude. Na figura 41 temos um pentágono regular ABCD e suas cinco diagonais congruentes ($\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BE}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$).

Figura 41: Pentágono regular



Fonte: próprio autor.

4.2.2.1. Construção do pentágono regular por dobradura

1º passo: Tome uma folha de papel ofício. Dobre ao meio a menor dimensão da folha, juntando as duas maiores dimensões da folha, formando um retângulo igual a metade do retângulo anterior. Dobre ao meio novamente, de tal forma que tenha condições de fazer um nó.
2º passo: Feita a tira, entrelaçando as duas pontas, dando um nó, puxe as duas pontas apertando o laço até formar o pentágono regular.
3º Passo: Chegamos no pentágono regular feito por dobradura.
4º passo: faz as dobraduras ligando os vértices não consecutivos do pentágono, desse modo temos as diagonais do pentágono regular construídas por dobradeiras.

Figura 42: Nó para obtenção do pentágono regular

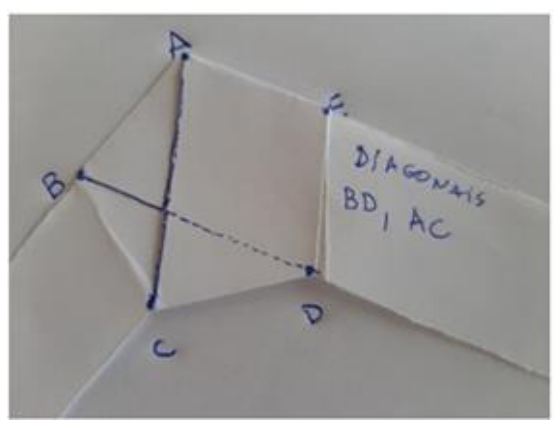
Fonte: próprio autor.

Figura 43: Construindo o pentágono regular I

Fonte: próprio autor.

.

Figura 44: Construindo o pentágono regular II



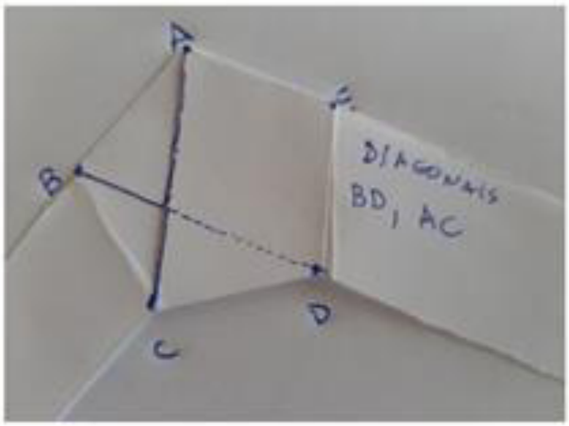
Fonte: próprio autor.

4.2.2.2. Diagonais do pentágono regular por dobraduras

Nesse tópico vamos construir, por dobraduras o pentágono regular e suas cinco diagonais congruentes.

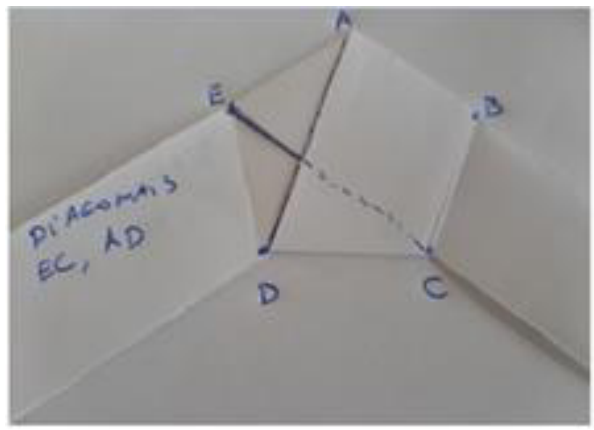
Com dobraduras temos as cinco diagonais do pentágono regular, basta virar a figura, uma dobradura de lado vai construir a outra na face oposta.

Figura 45: Diagonais AC e BD do pentágono



Fonte: próprio autor.

Figura 46: Diagonais AD e CE do pentágono



Fonte: próprio autor.

4.2.3. O Número de Ouro

É um número irracional misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão, o que chamamos de razão áurea. A designação adaptada para este número, (Phi maiúsculo), é a inicial do nome de Fídias que foi escultor e arquiteto encarregado da construção do Parthenon, em Atenas. A representação numérica da razão áurea Φ pode ser encontrada como $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1.61803399.... . Mas por que esse número é tão importante? Por que ele representa a perfeição, a beleza da natureza? A resposta é simples: porque ele aparece em quase todo lugar na natureza e nas coisas que consideramos mais belas.

No século XIII, o matemático italiano Leonardo Fibonacci estava estudando o crescimento de uma população de coelhos e se questionou a respeito de quantos coelhos teria no final de um ano, se tivesse somente um casal no início do ano e se nenhum coelho morresse nesse período. Ele se surpreendeu ao descobrir que a partir do terceiro mês, a quantidade de coelhos no mês seguinte era igual à soma dos dois meses anteriores. E dessa forma ele teria 144 coelhos no final do ano. Fibonacci ficou tão intrigado com essa relação que começou a estudar essa sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...).

4.2.3.1 Cálculo do número de ouro

O número de ouro é um número irracional e pode ser obtido a partir de um segmento de reta $\overline{AB}$ qualquer. Considere um ponto C, dividindo esse segmento em dois segmentos menores $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ de modo que a razão entre a medida do comprimento $\overline{AB}$, pela medida do comprimento do segmento $\overline{AC}$ seja igual à razão do comprimento da medida do segmento $\overline{AC}$ pela medida do comprimento de $\overline{CB}$.

Veja como fica em termos matemáticos.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \Phi \qquad \text{(Eq.1)}$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \qquad \text{(Eq. 2)}$$

$$.\frac{b}{a} + 1 = \frac{a}{b}, \qquad \text{(Eq. 3)}$$

$$\Phi + 1 = \frac{1}{\Phi} \qquad \text{(Eq. 4)}$$

$$\Phi^2 + \Phi - 1 = 0 \qquad \text{(Eq. 5)}$$

$$\Delta = 1^2 - 4.1.(-1) = 5 \qquad \text{(Eq. 6)}$$

$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \text{(Eq. 7)}$$

Escolherei o valor positivo pois se trata de uma razão de medidas de segmentos

Número de ouro: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, (valor irracional) (Eq. 8)

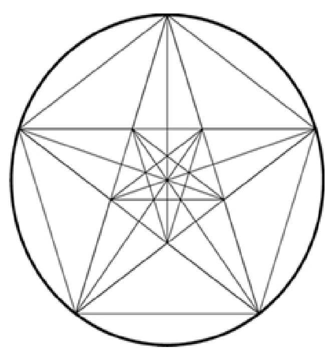
Valor racional com aproximação com duas casas decimais: $\Phi \cong 1{,}61$ (Eq. 9)

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61$ (Eq.10)

Essa razão corresponde à proporção divina, chamada assim, pois alguns estudiosos acreditavam que o número Φ apresentasse alguma mensagem de Deus, já que está presente em distintos lugares na natureza. Até no ser humano podemos encontrar a razão áurea se, por exemplo, dividirmos a altura de uma pessoa pela medida do seu umbigo até o chão.

Os gregos, na escola pitagórica, representavam o número de ouro através do pentagrama, que contém a proporção áurea em todos os segmentos.

Figura 47: Número de ouro (Pentagrama)



Fonte: próprio autor.

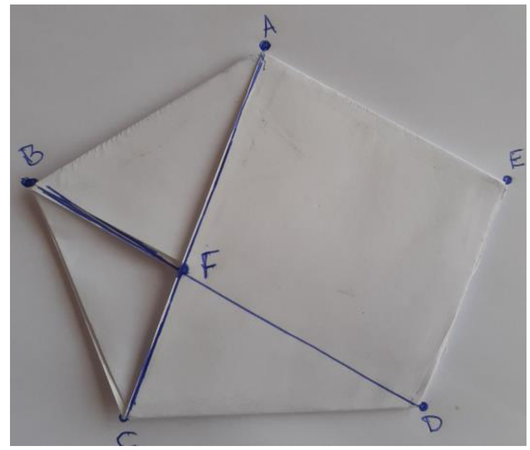
4.2.3.2 A relação entre o número de ouro e o pentágono regular

Nesta seção vamos mostrar que a razão áurea está presente no pentágono regular.
Seja o pentágono regular ABCDE.

Figura 48: Pentágono ABCDE

Fonte: próprio autor.

Figura 49: Construindo o pentágono por dobraduras



Fonte: próprio autor.

$\Delta ABC \sim \Delta BCF$, portanto temos a proporção:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{BF} \qquad \text{(Eq.11)}$$

Chamando $\overline{AF}$= l e $\overline{BF}$=$\overline{FC}$= x, temos: $\frac{l+\mathrm{x}}{l} = \frac{l}{\mathrm{x}}$, separando as frações temos: (Eq.12)

$$1 + \frac{x}{l} = \frac{l}{x} \qquad \text{(Eq.13)}$$

Chamando K= $\frac{l}{x}$, teremos: 1+ $\frac{l}{\mathrm{k}}$ =k, multiplica por k (k$\neq$ 0) chegamos na equação: (Eq.14)

$$\mathrm{k}^2 - \mathrm{k} - 1 = 0 \qquad \text{(Eq.15)}$$

Completando o quadrado temos:

$\mathrm{k}^2 - 2.\mathrm{k}.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$ (Eq.16)

$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0.$ Isola o quadrado (Eq.17)

$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$ (Eq.18)

$k - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$ Extrai a raiz quadrada em ambos os membros (Eq.19)

$k = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Isola o k (Eq.20)

K=$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Valores de k (Eq.21)

Portanto k = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pois k = $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ não convém pois é negativo. Mas na (Eq.7) vimos que k = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro. Logo,

$$k = \frac{l}{x} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (Número de Ouro).} \quad \text{(Eq.22)}$$

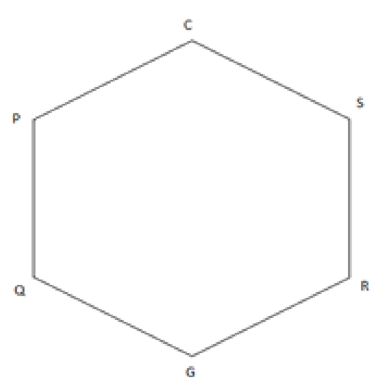
Conclusão: as diagonais de um pentágono regular, se interceptam na razão áurea. Ou seja, o ponto F divide a diagonal AC, na razão áurea, mais precisamente $\frac{AF}{FB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = Φ (Figura 48).
Entende-se por diagonal de um polígono, ao segmento de reta, que liga dois lados não consecutivos, desse polígono.

4.2.4. Hexágono Regular

É um polígono convexo que possui todos os seis lados com a mesma medida e todos os ângulos internos com a mesma medida.

Na figura abaixo temos um hexágono regular ABCDEF convexo.

Figura 50: Hexágono regular



Fonte: próprio autor.

Agora vamos construir o hexágono regular por dobraduras.

1º passo: Toma-se uma folha retangular e constrói a mediatriz do menor lado dessa folha que chamamos de AB.

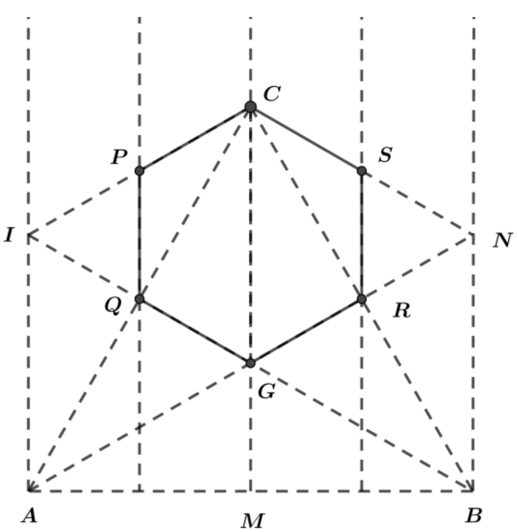
2º passo: Constrói-se a mediatriz do segmento AB, chama de M o ponto médio AB.

3º passo: Constrói-se por dobradura as mediatizes dos segmentos AM e BM, desse modo, dividirá o retângulo maior em quatro retângulos menores de bases menores. Observe que construímos por dobradura três retas perpendiculares ao segmento AB.

4º Passo: Fixa-se o ponto A e transporte o ponto B, de modo que ele fique sobre a mediatriz que passa pelo ponto M, chame esse ponto de C. Quando isso ocorrer, faça uma dobradura ligando C ao A e outra ligando C ao B. Temos então o triângulo equilátero ABC. Quando é feita dobradura para obtenção do ponto C obtemos os pontos G, R, H, I e Q.

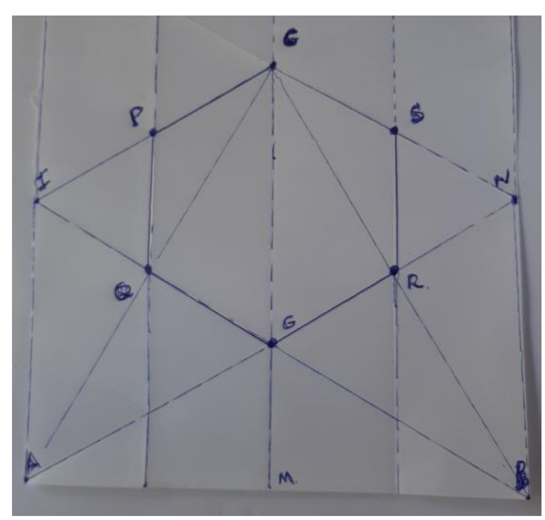
5º passo: Faça uma dobradura ligando os pontos I e C, obtenha o ponto P e faça uma dobradura ligando C a H e obtenha o ponto S. Desse modo chegamos ao final do processo, pois obtemos os seis pontos (vértices) que compõe o hexágono regular, que são os pontos G, R, S, C, P e Q.

Figura 51: Hexágono regular feito no Paint



Fonte: próprio autor.

Figura 52: Hexágono regular feito por dobraduras



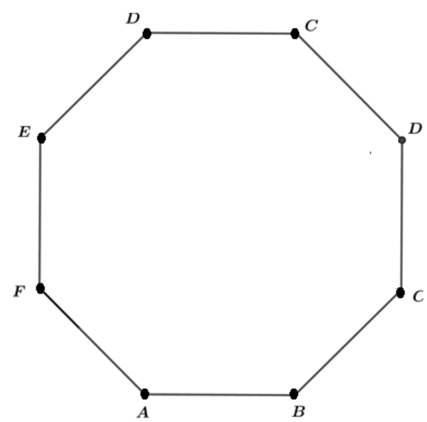
Fonte: próprio autor.

4.2.5. Octógono Regular

É um polígono convexo que possui todos os oito lados com a mesma medida e todos os ângulos internos com a mesma medida.

Na figura abaixo temos um octógono regular convexo.

Figura 53: Octógono regular



Fonte: próprio autor.

4.2.5.1 Construção do octógono regular usando dobradura

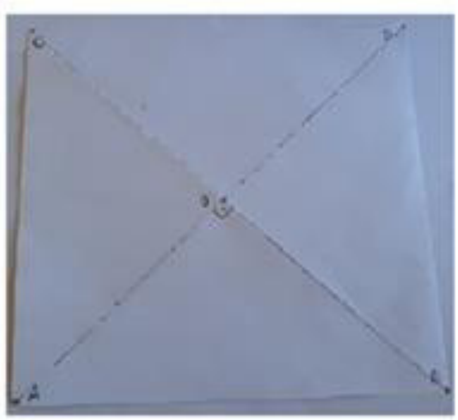
1º Passo: Toma-se uma folha retangular, dobra-se a folha de tal forma que o lado menor $\overline{AB}$, do retângulo, fique sobreposto ao maior lado. Marca-se o vértice levado sobre o maior lado, chama-se esse ponto de D. Desse modo temos os três pontos do quadrado, logo o quadrado está bem determinado. Traça-se uma paralela ao lado $\overline{AB}$ passando por D e temos o vértice C na diagonal que sai do ponto A, desse modo o quadrado ABCD está bem determinado. Basta recortar o retângulo menor que está ao lado do quadrado. Temos desse modo a construção de um quadrado por dobradura.

Figura 54: Construção do quadrado ABCD por dobraduras

Fonte: próprio autor.

2º Passo: Faz-se dobraduras ligando os pontos médios opostos dos lados opostos do quadrado. Liga-se os vértices opostos do quadrado, assim determinando as diagonais por dobraduras. Essas dobraduras estão dividindo quadrado em oito triângulos retângulos e isósceles (Figura 54).

Figura 55: Quadrado ABCD por dobraduras



Fonte: próprio autor.

3º Passo: Toma-se um dos vértices do quadrado, por exemplo, o vértice C. Transporte o lado $\overline{CB}$ e $\overline{CD}$ para a diagonal $\overline{BD}$, obtendo assim os pontos I e F respetivamente (Figura 59), e faça uma dobradura, em seguida volte o ponto C para seu local tendo o quadrado novamente com a dobradura feita. Repita esse processo para os três outros vértices (A, B, D) ou seja, fixe o vértice e dobre dois lados do quadrado que parte dele para cima da diagonal que sai do vértice fixo.

Figura 56: Dobradura: deslocamento de um vértice para a diagonal

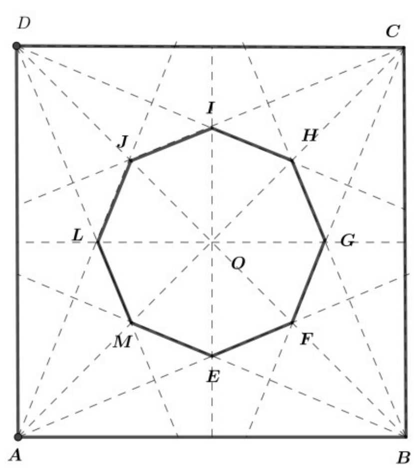
Fonte: próprio autor.

Figura 57: Dobradura: deslocamento de dois vértices para a diagonal

Fonte: próprio autor.

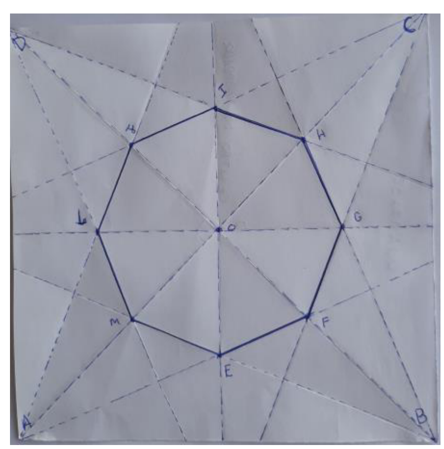
4º Passo: Planifique a folha, pois estará toda amassada, e verá que o octógono está no centro do quadrado. Desse modo temos um octógono regular construído por dobraduras.

Figura 58 – Construção do octógono regular



Fonte: próprio autor.

Figura 59 – Construção do octógono regular por dobraduras



Fonte: próprio autor.

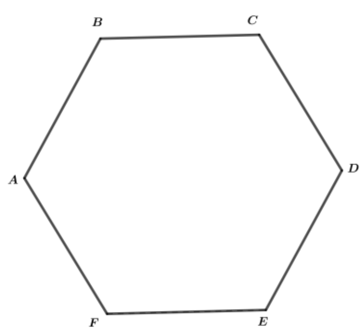
4.2.6 Problemas Envolvendo Dobraduras

4.2.6.1 Problema envolvendo o hexágono regular

Nessa seção exploraremos das figuras feitas por dobraduras, algumas soluções podem ser expostas nas séries do ensino fundamental. A questão do hexágono já foi explorada pelo vestibular da Universidade Federal do Ceará nas décadas de 80 e 90 e vamos propor para ser resolvida por dobradura.

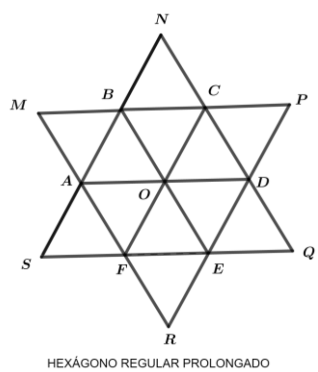
Problema 1: Prolongando-se os lados do hexágono ABCDEF regular qualquer, nos dois sentidos, obtemos um polígono estrelado MNPQRS (Figura 61). Se a área do hexágono é S, determine em função de S a área da estrela.

Figura 60: Hexágono regular



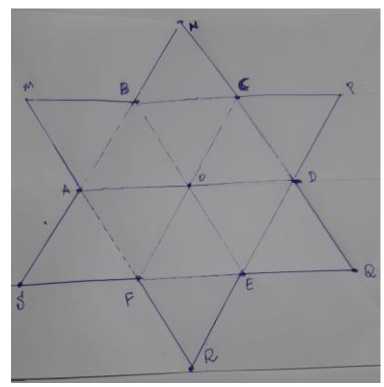
Fonte: próprio autor.

Figura 61: Hexágono estrelado



Fonte: próprio autor.

Figura 62: Hexágono regular feito por dobraduras



Fonte: próprio autor.

Solução da questão:

Constrói-se por dobraduras a estrela MNPQRS, em seguida destaca a estrela do papel e dobra os triângulos de vértices M, N, P, Q, R e S, conforme (Figura 62) e por superposição conclui-se que eles são iguais a cada triângulo equilátero, no qual o hexágono regular ABCDEF (Figura 61) foi decomposto, logo a área da estrela MBNCPDQERFS é duas vezes a área do hexágono regular ABCDEF

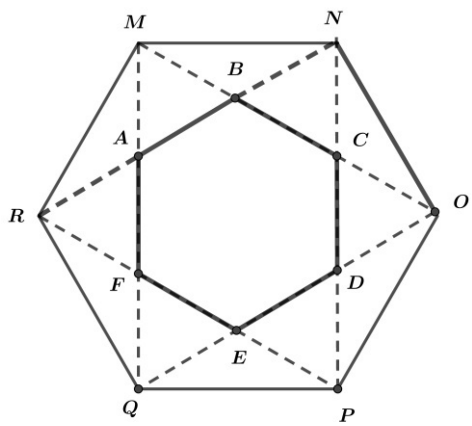
Resposta da questão: 2S

Problema 2: Ligando os vértices da estrela obtemos um outro hexágono regular, conforme a Figura

64. Se S é a mediada da área do hexágono regular regular menor, calcule a área do hexágono maior em função de S.

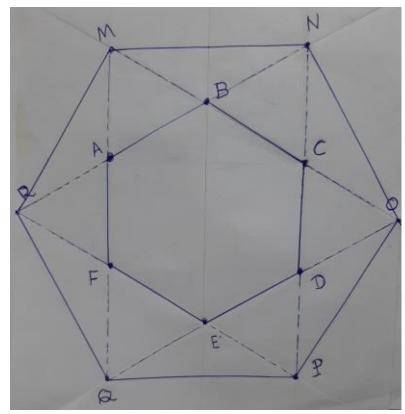
Resposta da questão: 3S

Figura 63: Hexágonos por prolongamento



Fonte: próprio autor.

Figura 64: Hexágono por dobraduras



Fonte: próprio autor.

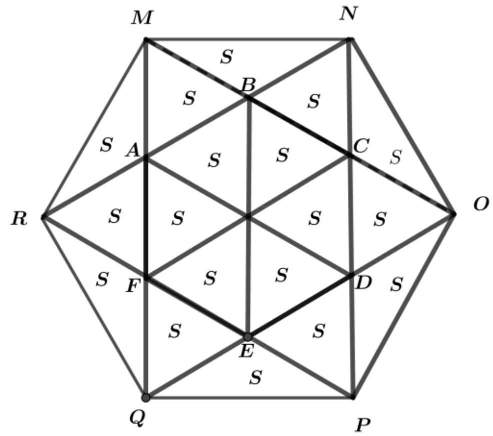
$$\acute{A}rea\ do\ hex\acute{a}gono\ (ABCDEF) = T = 6S$$

$$\acute{A}rea\ do\ hex\acute{a}gono(MNOPQR) = 3.(6S)$$

$$\acute{A}rea\ do\ hex\acute{a}gono(MNOPQR) = 3.T$$

OBS: A área $[\Delta RFA] = \acute{A}REA[\Delta RAM]$ pois possuem a mesma base e a mesma altura, pois a $\boldsymbol{A_{\Delta} = \frac{base\ X\ altura}{2}}$

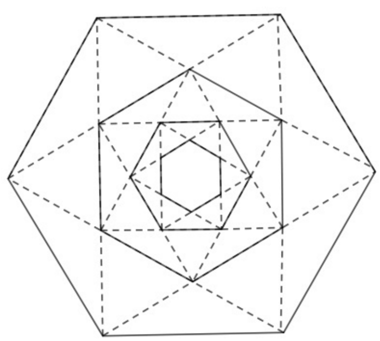
Figura 65: Hexágono regular (representação)



Fonte: próprio autor.

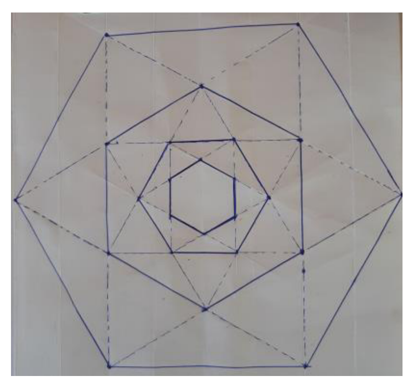
b) Prosseguindo essa sequência: prolongando os lados do hexágono regular e ligando os vértices da estrela assim formada e obtendo outro hexágono regular. Determine a razão, do maior para o menor, entre as áreas de dois hexágonos regulares consecutivos. Determine se é uma progressão aritmética ou progressão geométrica.

Figura 66: Hexágonos regulares obtidos por prolongamentos



Fonte: próprio autor.

Figura 67: Hexágonos regulares obtidos por dobraduras



Fonte: próprio autor.

Solução:

Como no processo de dobradura independe do tamanho do lado da figura, logo baseando-se no processo de dobradura do problema (b), tem-se que dois hexágonos consecutivos, feitos na condicões do prolongamento dos lados do menor nos dois sentidos, para a obtenção do maior, a área do maior é o tríplo da área do menor. Como Progressão Geométrica é toda sequência, tal que, cada termo, a partir do segundo é igual ao seu antecessor multiplicado por uma constante, não nula, chamada razão da progressão geométrica. Logo a sequência formada pelos hexágonos é uma progresão geométrica.

4.2.6.2 Problema do octógono regular

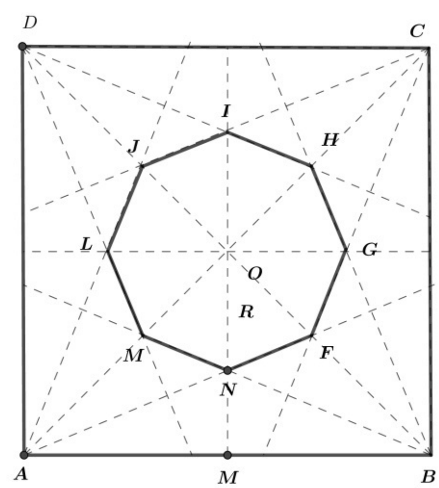
Problema 1:

Um carpinteiro deseja construir a moldura de um espelho em forma octogonal e bolou a estratégia da dobradura descrita na seção (4.2.5.1), na (Figura 58). Determine a razão e a porcentagem aproximada da área do octógono regular área do quadrado no qual o octógono foi inserido.

Solução:

A Figura 68 representa o problema proposto.

Figura 68: Octógono regular feito no Paint

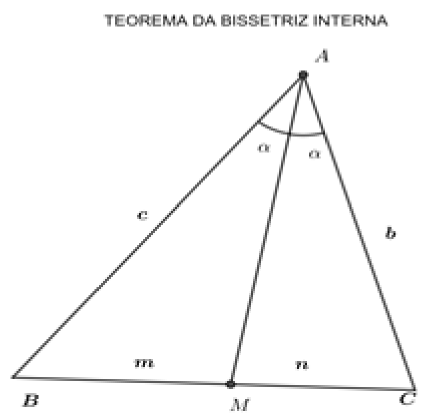


Fonte: próprio autor.

4.2.6.2.1 Teorema da bissetriz interna

Seja ABC um triângulo qualquer, a bissetriz interna AD, do ângulo $A\hat{B}C$, divide o lado oposto BC, em dois segmentos BD e DC proporcionais aos lados AB e AC, respectivamente (Figura 69).

Figura 69: Teorema da bissetriz interna



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \text{ ou seja } \frac{c}{m} = \frac{b}{n} \qquad \text{(Eq.23)}$$

Fonte: próprio autor.

a) Determinação do segmento $\overline{NM}$, no triângulo AOM.

No quadrado ABCD da Figura 68, chamaremos AM = y, AO = y$\sqrt{2}$, ON = R, então NM = y – R, pois o triângulo AMO é um triângulo retângulo em M, portanto $\overline{AM} \equiv \overline{OM}$. Por dobraduras e superposição, verifica-se que em cada vértice do quadrado ABCD da Figura 68 tem-se quatro bissetrizes, logo $\overrightarrow{NA}$ é bissetriz do ângulo O$\hat{A}$M do triângulo AMO.

b) Calculando a razão $\frac{R}{y}$

Aplicando-se o teorema da bissetriz interna (Eq.23) no triângulo AOM (Figura 68), temos:

$$\frac{AO}{ON} = \frac{AM}{MN} \qquad \text{(Eq.24)}$$

$$\frac{y\sqrt{2}}{R} = \frac{y}{y-R}$$

$$R = \sqrt{2}(y - R)$$

$$R = \sqrt{2}y - \sqrt{2}R$$

$$R + \sqrt{2}R = \sqrt{2}y$$

$$R(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}y$$

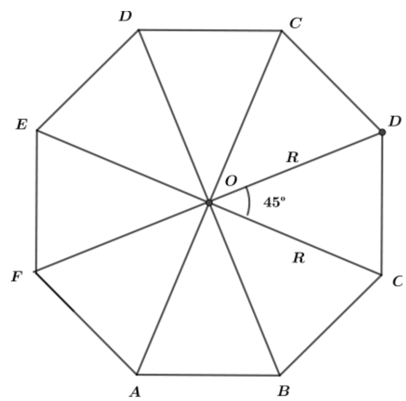
$$\frac{R}{y} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}.\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{R}{y} = 2-\sqrt{2}\ . \qquad \text{(Eq.25)}$$

c) Cálculo das áreas

1º) Área do octógono regular

Figura 70: Problemas com octógono regular



Fonte: próprio autor.

Conhecendo-se de um triângulo, dois de seus lados, e o ângulo α entre eles, sua área é dada por:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}.\text{a}.\text{b}.\text{sen}(\alpha) \qquad \text{(Eq.26)}$$

Fazendo nessa fórmula a=b=R e $\alpha = \frac{\pi}{4}$, teremos a área do triângulo ODC (Figura 70) dada por:

$$Área\ do\ triângulo(ODC) = \frac{1}{2}.R.Rsen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.R^2.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4} \qquad \text{(Eq.27)}$$

Todo octógono regular (lados e ângulos iguais) pode ser decomposto em triângulos (Figura 70). Logo a área do octógono (ABCDEGHF) = 8. Área do triângulo (ODC) (Figura 70).

$$Área\ do\ octógono(\text{ABCDEGHF}) = 8.\frac{R^2\sqrt{2}}{4} = 2R^2\sqrt{2}. \qquad \text{(Eq.28)}$$

$$Área\ do\ octógono(\text{ABCDEGHF}) = 2R^2\sqrt{2} \qquad \text{(Eq.29)}$$

onde R é o raio do círculo circunscrito ao octógono.

2º) Área do Quadrado ABDC

$Área$ Quadrado ABDC $= (2y)^2 = 4y^2$,onde y é a metade do lado quadrado.

c) Razão das áreas:

Substituindo os valores das áreas encontradas, do octógono por $2R^2\sqrt{2}$ e do quadrado por $4y^2$, teremos a razão das áreas dada por:

$\frac{A_8}{A_4} = \frac{2R^2\sqrt{2}}{4y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{R}{y}\right)^2$, logo teremos: $\frac{A_8}{A_4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\left(\frac{R}{y}\right)^2$.

$\frac{A_8}{A_4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\left(2-\sqrt{2}\right)^2$,

$\frac{A_8}{A_4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(6-4\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left(3-2\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}-4$, portanto a razão entre as áreas do octógono e do quadrado é $3\sqrt{2}-4$, isto é, $\frac{A_8}{A_4} = 3\sqrt{2}-4 \approx 0{,}24$.

Portanto a porcentagem ocupada pelo octógono em relação ao quadrado e de aproximadamente 24%

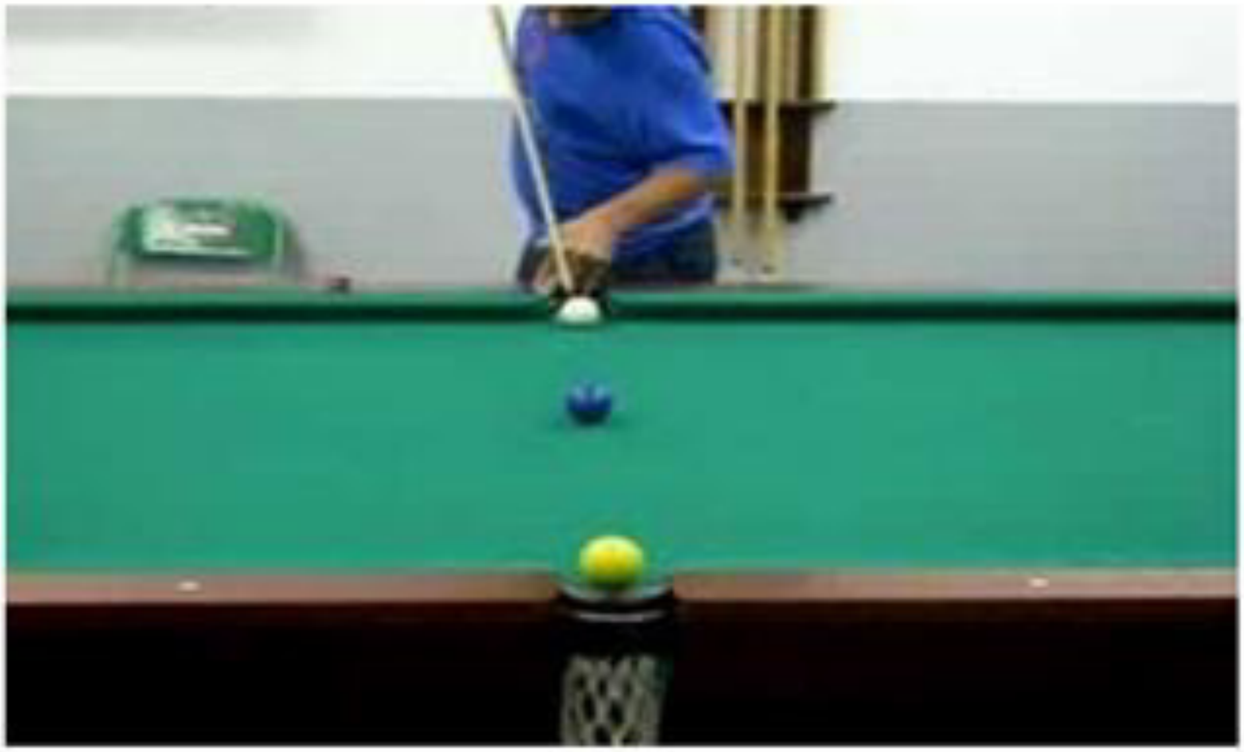
Resposta:

A razão entre as áreas é $3\sqrt{2}-4$ é a área ocupada pelo octógono no quadrado é de aproximadamente 24%.

4.2.6.3 Problema do jogo de sinuca

Sinuca é um esporte de mesa, taco e bolas praticado no Brasil, e constitui uma variante do pool, um jogo de mesa inventado em 1875 na Grã-Bretanha. Neste jogo dois adversários tentam colocar num dos seis buracos da mesa as bolas coloridas (não brancas) na sequência definida pelas regras. Na Figura 71 temos uma situação em que o adversário tenta dificultar a jogada do outro, impedindo que este bata a bola branca diretamente na bola amarela. Esta situação é chamada de “estar de sinuca”. Vamos resolver esse problema usando a Geometria plana, via dobradura.

Figura 71: Problema do jogo de sinuca



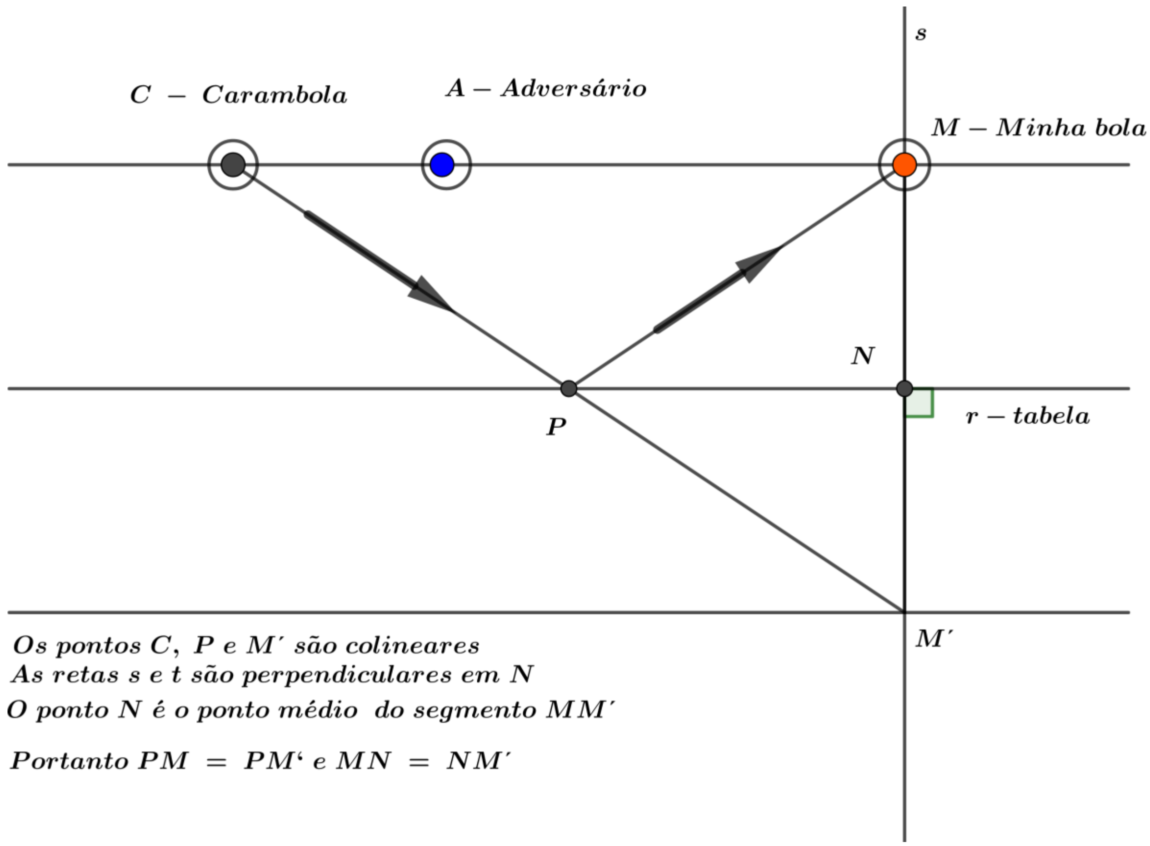
Fonte: próprio autor.

Tirar uma sinuca ou sair da sinuca, significa bater a bola C na bola M, sem tocar na bola A, e não pode-se jogar a bola C por cima da bola A, isto é uma infração grave.

Resolver esse problema, geometricamente, consiste em encontrar um ponto P na reta r (tabela ou borda da sinuca), tal que, o caminho seja o menor possível.

O problema será resolvido quando encontrarmos o ponto P.

Figura 72: Problema do jogo de sinuca (demonstração)



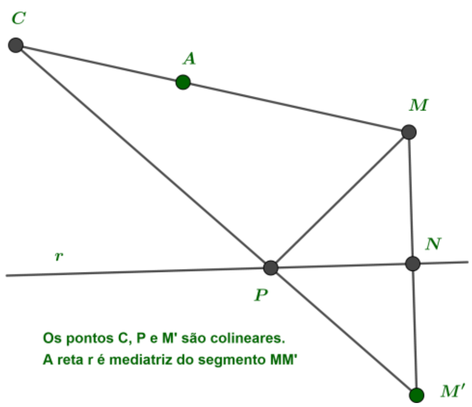
Fonte: próprio autor.

O caminho que a bola C deve percorrer para se encontrar com a bola M deve ser o menor possível, e este caminho deve ser feito em duas etapas: a primeira indo até a reta r, batendo a bola no ponto P, e em seguida para M. O ponto P da reta r (Figura 73), deve estar alinhado com os pontos C e M', este deve ser o simétrico de M em relação à reta r.

. Construção por dobraduras

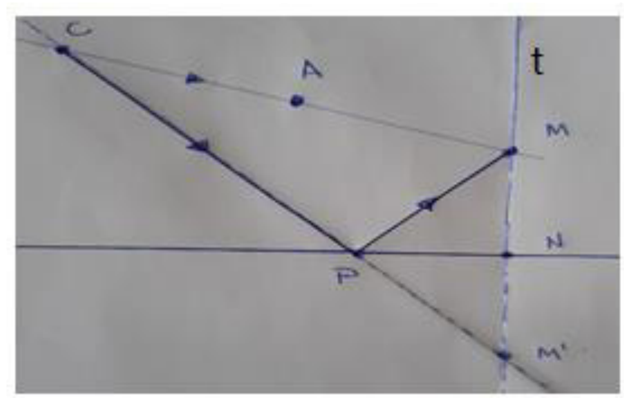
Por M, constrói-se, por dobradura, uma reta t perpendicular à reta r, em N (Figura 74), em seguida dobra-se a folha na reta r e marca sobre t, um segmento de medida MN, então teremos sobre a reta t, o ponto M', simétrico ao ponto M, isto é, a distância de M a N é igual á distância de N a M`. Constrói-se uma reta uma fazendo uma dobradura passando por M' e C, a interseção dessa reta com a reta r nos dá o ponto P, que é a solução do problema. Isto resolve o problema, pois os segmentos PM e PM’ são congruentes pelo fato deles se coincidirem na dobradura. O caminho da bola C é CP+PM= CP+PM’, já que PM≡PM’.

Figura 73: Esquema da sinuca



Fonte: próprio autor.

Figura 74: Esquema da sinuca feito por dobraduras



Fonte: próprio autor.

4.2.6.4 A soma dos ângulos internos de um triângulo e de um quadrilátero

a) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º

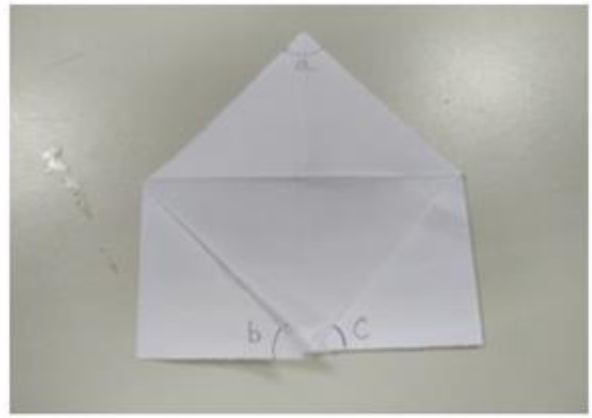
Passos para construção por dobraduras: iremos mostrar que a + b + c = 180º (Figura 75).

1º passo: Toma-se um triângulo e escolhe um dos lados do triângulo e dobra os dois vértices, simultaneamente, para dentro do triângulo de tal forma que os dois vértices se coincidam, sobre este lado.
2º passo: Dobra-se o terceiro vértice para dentro do triângulo de tal forma que os três vértices se coincidam e formem um ângulo raso, cuja medida é de 180º, logo, chegamos ao nosso objetivo de mostrar através de dobraduras, que a soma dos três ângulos internos de triângulo é igual a 180º (Figura 77).

Figura 75: Triângulo e seus ângulos internos por dobraduras

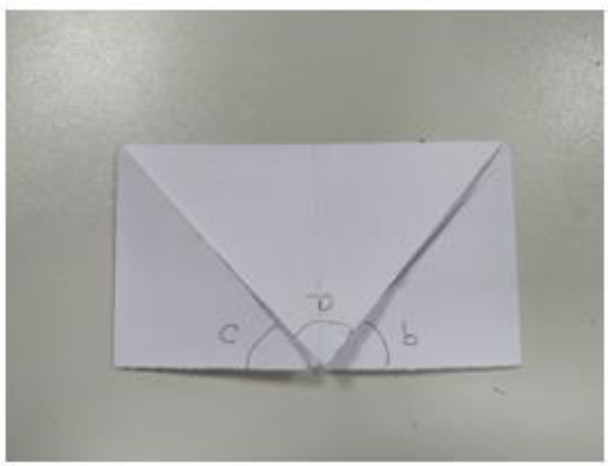
Fonte: próprio autor.

Figura 76: Dobraduras de dois vértices sobre um dos lados



Fonte: próprio autor.

Figura 77: Os três ângulos coincidindo com um ângulo de uma volta



Fonte: próprio autor.

b) Soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º.

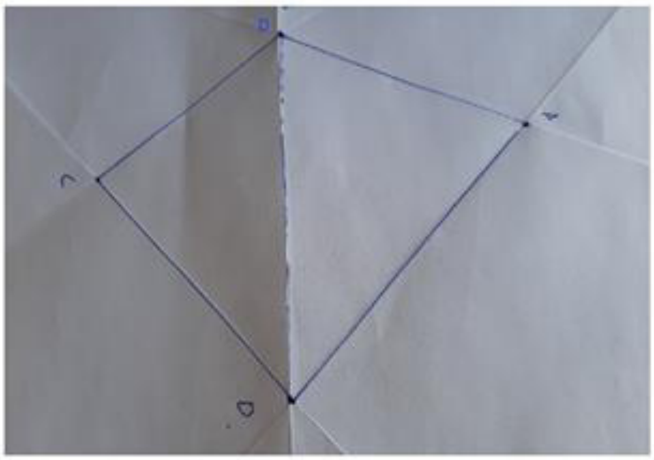
Passos para construção dom dobraduras.

1º passo: Tome um quadrilátero e dobre-o sobre uma das diagonais, desfaça a dobradura, desse modo teremos dois triângulos separados por essa diagonal

2º passo: Repetindo o processo do triângulo, duas vezes temos que os quatro ângulos somados é igual a 360º.

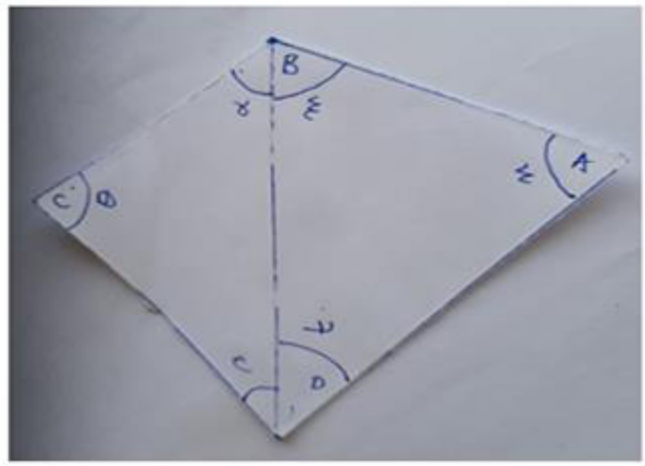
Portanto, chegamos no nosso objetivo de mostrar através de dobraduras que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360º.

Figura 78: Quadrilátero feito por dobradura



Fonte: próprio autor.

Figura 79: Quadrilátero divido em dois triângulos



Fonte: próprio autor.

De acordo com a Figura 78, e o resultado obtido na Figura 79, temos que:

$\begin{cases} \propto +\beta + \theta = 180\ ^{o} \\ m + t + n = 180^{o} \end{cases}$, somando as duas equações, membro a membro, temos

$\propto +\beta + \theta + m + t + n = 360\ ^{o}$, organizando a equação temos:

$(\propto +m) + (\beta + t) + (n + \theta) = 180\ ^{o}$, como $\hat{B} = \propto +\mathrm{m}$ e $\widehat{D} = \beta + t$, substituindo chegamos no nosso objetivo: $\widehat{B}\ +\ \widehat{D} +\ \ \widehat{A}\ +\ \widehat{C}$ = 360º, isto é a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é igual a 360º (Figura79).

5 PERCURSO METODOLÓGICO

5.1 TIPO DE PESQUISA

Em relação à metodologia adotada, optou-se pela pesquisa qualitativa, em que se estabelece como objeto de investigação uma situação social, bem como os problemas relacionados a ela. A pesquisa qualitativa pode ser definida como:

> "Aquela que se preocupa com um nível de realidade que não pode ser quantificado e que trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes que, por sua vez, correspondem a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis (MINAYO, 1994, p. 9-29)."

Na pesquisa qualitativa, a particularidade reside no fato de ela ser, conforme Thiollent (2002), "uma forma de pesquisa social fundamentada em experiências e resoluções de problemas da coletividade de forma cooperativa ou participativa", o que se enquadra perfeitamente nas estratégias adotadas na nossa investigação.

O uso dessa metodologia é adequado na medida em que o trabalho foi estruturado com a participação coletiva e ativa dos alunos e do professor orientador, atendendo as premissas estabelecidas na concepção da ideia de uma pesquisa qualitativa.

No caso presente, coletamos os dados relevantes do questionário diagnóstico (APENDICES I), elaborados para responder a questões relativas ao uso de dobraduras (como instrumento auxiliar para o aprendizado da geometria, suas características e propriedades.

Por se tratar de um estudo específico, com foco delimitado e contornos definidos, podemos afirmar que se trata de uma pesquisa qualitativa (OLIVEIRA, 2010) que, segundo o autor:

> "As contribuições desse tipo de investigação estão presentes na sua capacidade de compreensão dos fenômenos relacionados à escola, uma vez que retrata toda a riqueza do dia-a-dia escolar. Assim, os estudos qualitativos são importantes por proporcionar a real relação entre teoria e prática, oferecendo ferramentas eficazes para a interpretação das questões educacionais" (OLIVEIRA, 2010, p. 16)

De fato, no tocante ao ambiente em que o trabalho foi realizado, o uso da pesquisa qualitativa se justifica, como aponta o mesmo autor:

> "Os investigadores que tomam o ambiente de educação como objeto de pesquisa, entendendo que nesse lugar o processo das relações humanas é dinâmico, interativo e interpretativo, devem construir seu arcabouço metodológico alicerçado pelas técnicas qualitativas. Dessa forma, essa escolha teoria fica justificada quando pensamos nos agentes interpretativos, de Prus (apud MOREIRA, 2002), ou seja, as pessoas interpretam seu mundo, compartilhando o seu modo de ver com outros que, por sua vez, também interpretam" (OLIVEIRA, 2010, p. 15)

5.2 SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada com turmas de 7º, 8º e 9º ano de ensino fundamental de uma escola pública da rede estadual de Fortaleza, composta em média por 30 alunos cada, que após etapa de sensibilização consentiram em participar do projeto. Para isso, aplicamos os instrumentos de coleta de dados já mencionados anteriormente, no ano de 2020. Dentre estes instrumentos, o questionário diagnóstico (após a aplicação das atividades com dobraduras), foi construído com uma série de questões objetivas e subjetivas voltadas a responder nossas questões de estudos relacionadas aos recursos e procedimentos metodológicos utilizados no processo de ensino-aprendizagem da geometria.

5.3 INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

A intervenção foi realizada em três etapas:

- A primeira consistiu na sensibilização e engajamento dos alunos. Ela demandou um período de 4 aulas de 50 minutos cada, correspondendo ao momento das aulas expositivas (dialogadas com alunos), quando tivemos a oportunidade de apresentar a história e aplicabilidade das dobraduras. As equipes de alunos foram formadas e de acordo com o interesse dos próprios alunos. Estabeleceu-se que caberia a cada grupo de alunos a produção de um relatório de atividades, onde os mesmos discorreriam sobre todas as ações vinculadas a realização do trabalho.

- Na segunda etapa, abrangendo (duas aulas de 50 minutos), iniciaram-se trabalhos de produção do material (dobraduras). Esse momento foi especialmente interessante pois pudemos discutir o processo de produção dos ORIGAMIS, a partir das premissas das características das figuras geométricas,

- A última etapa foi desenvolvida em 2 aulas de 50 minutos. Ela foi destinada a exibição do material produzido pelos alunos, socialização dos conhecimentos e discussão sobre os métodos utilizados. Ao final desse processo, aplicamos o questionário diagnóstico (APÊNDICE I) que teve como objetivo captar a percepção dos discentes quanto a utilização da metodologia de aprendizagem colaborativa, cujos resultados serão expostos adiante.

Durante todo o processo, a maior preocupação foi a de estabelecer um modelo que fosse utilizado por todos os alunos envolvidos no processo. Pretendemos também, que este modelo pudesse orientar atividades similares, até mesmo em atividades de outras disciplinas com outros estudantes e professores. Essa ação partiu daquilo que constatamos nos resultados do questionário diagnóstico (APÊNDICE I) somado às percepções dos alunos e ao relatório de acompanhamento (APÊNDICE II), que serviu de base para a produção do deste trabalho, considerando para uma Aprendizagem Colaborativa da Geometria, utilizando a estratégia de ORIGAMIS (dobraduras).

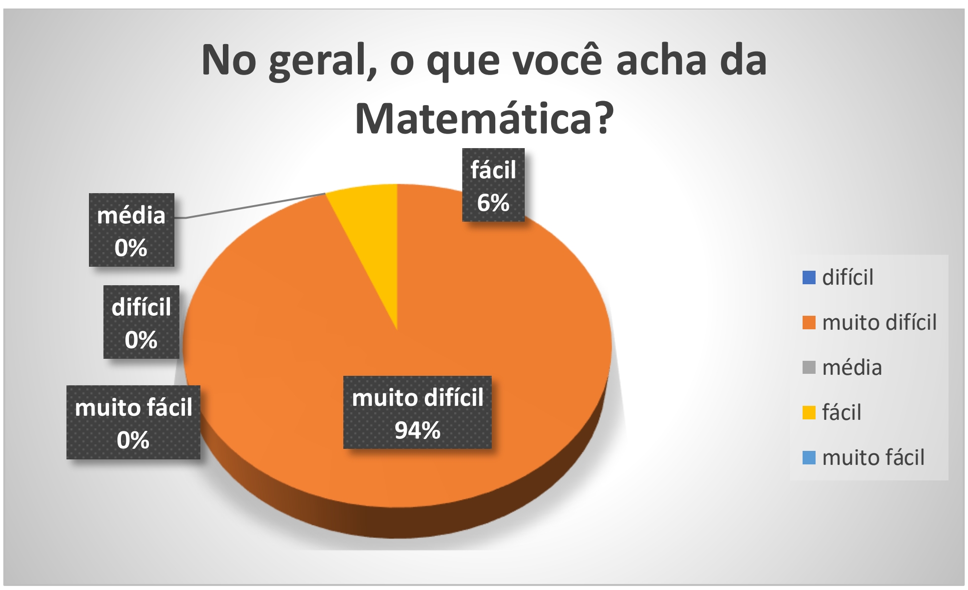
Ao desenvolvermos os itens dos questionários, o foco foi a possibilidade de obter dos alunos opiniões sobre o processo de aprendizado, levando em conta os objetivos propostos para a realização do presente estudo. Nossas interpretações das respostas aos questionários e dos relatórios, entretanto, se situaram no campo exploratório e descritivo dos resultados, com potencial para aprofundamentos mais analíticos em próximas intervenções que utilizem a experiência desta pesquisa como modelo.

Com efeito, a aplicação da estratégia de ensino proposta, ancorada na metodologia da aprendizagem colaborativa lança luzes sobre o nosso fazer pedagógico de maneira a contemplar novas demandas discentes, ávidos por uma visão mais abrangente, cooperativa, inclusiva e contextualizada do conhecimento.

6 RESULTADOS

A seguir expomos os resultados obtidos na pesquisa diagnóstica realizadas com os estudantes. Convém ressaltar que o questionário diagnóstico foi elaborado com o objetivo de apontar as percepções dos discentes quanto ao uso de materiais e estratégias didáticas alternativas, como instrumento facilitador do processo de aprendizado do conteúdo geometria, a disponibilidade de recursos para aplicação das atividades, o papel do professor como facilitador/mediador do processo de construção e apropriação do conhecimento. Para facilitar essa compreensão, demonstramos adiante um panorama com as respostas do diagnóstico e após cada gráfico segue um detalhamento dos resultados obtidos, devidamente embasados por referenciais teóricos, a fim de servir de subsídio para as ponderações dos interessados em consultar o trabalho.

Gráfico 1: Percepção dos alunos com relação à matemática

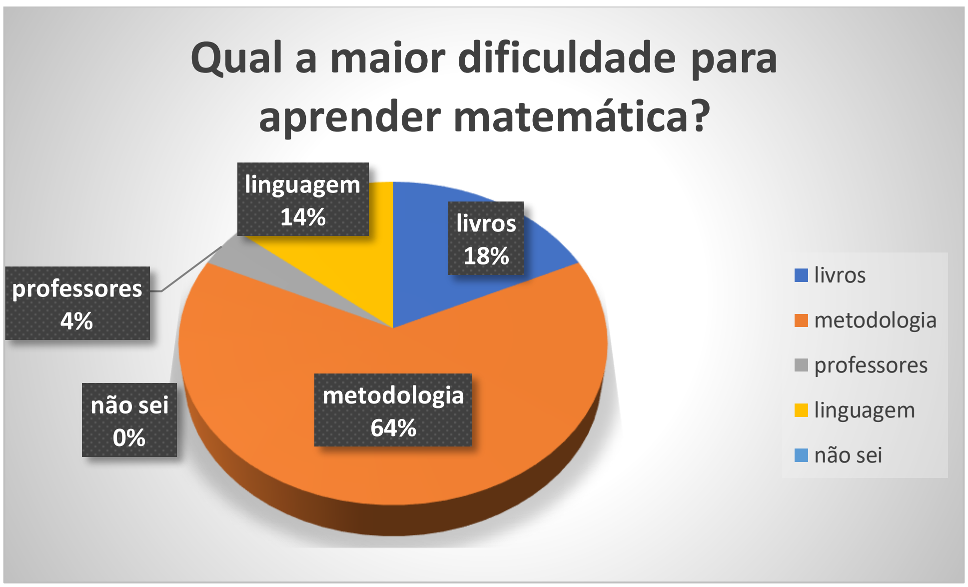


Fonte: próprio autor.

Observando o resultado expresso no Gráfico 1, temos uma confirmação de que a matemática ainda é vista como uma disciplina que impõe grandes dificuldades aos discentes. Isso corrobora a ideia de que se faz necessário a utilização de estratégias que podem ser utilizadas pelo professor como ferramenta pedagógica efetiva e com possibilidade de alcançar um número maior de estudantes, pelas já citadas características de possibilidade de interação entre o estudante e o conhecimento produzido.

Lembramos que, ao utilizar um recurso auxiliar do processo de construção do conhecimento (internet), com a necessidade da escola de adaptar-se a estes novos recursos, numa estratégia inovadora, sem desprezar a importância do livro didático, mas dando a todo o processo novo significado (Ferreira e colaboradores, 2016, p. 351).

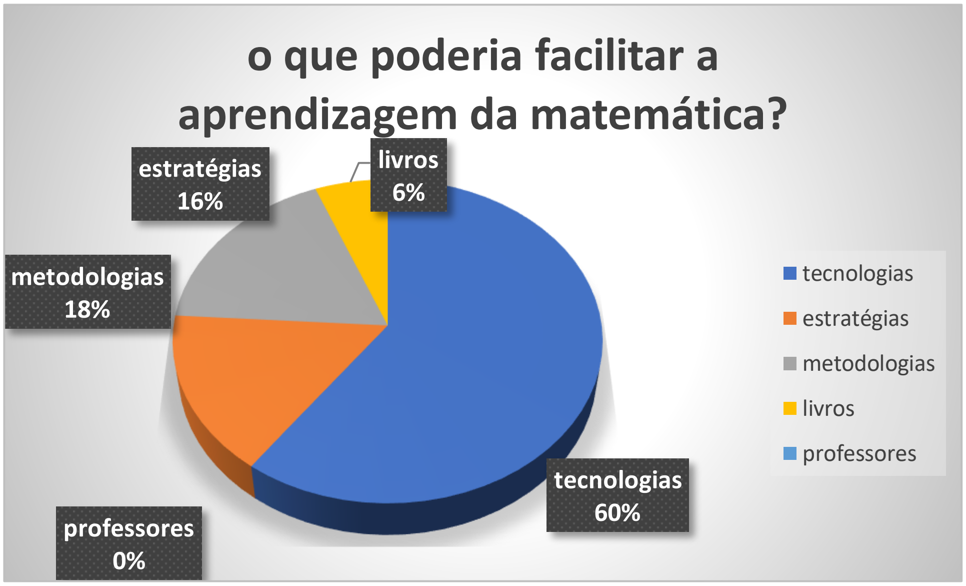
Gráfico 2: Dificuldades quanto ao aprendizado da matemática



Fonte: próprio autor.

Os resultados obtidos se coadunam com as experiências relatadas na bibliografia pesquisada e referenciada, tais como em Ferreira (2016), quando discute a importância da utilização de estratégias de ensino que considerem a realidade dos estudantes. Também em Junior (2016), quando este, debate a importância do professor se empoderar, desse conhecimento, ao trazer à tona a discussão sob o aspecto da percepção de que vivemos em uma nova era, em que a informação flui em velocidades inimagináveis.

Gráfico 3: Mecanismos de facilitação da aprendizagem



Fonte: próprio autor.

No que se refere ao item sobre a realização de aulas mais significativas com o uso de estratégias inovadoras, entende-se que nas disciplinas científicas parece ser necessário promover nos estudantes o pensamento analítico, científico, criativo e crítico e a habilidade de comunica-lo, estimulando neles a capacidade para diferenciar entre informações e conhecimentos objetivos, transcendentes, substantivos e úteis e aqueles banais, superficiais, efêmeros e desnecessários.

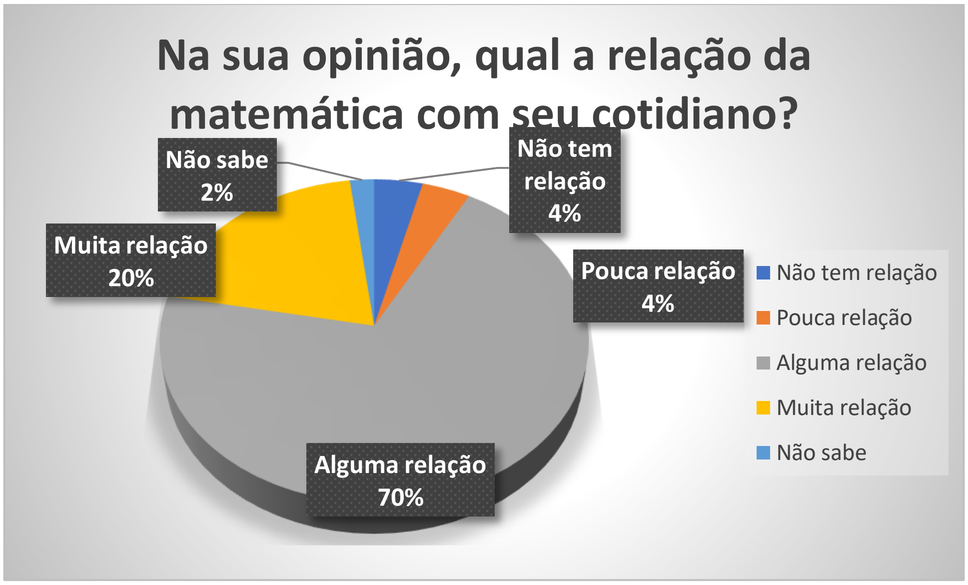
Nesse ponto, percebe-se claramente uma tendência dos estudantes no que se refere a utilização das chamadas Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs).

Trata-se, de uma geração que já nasceu nesse novo mundo globalizado e tecnológico onde se apresenta um mundo multicolorido e interativo, por vezes mais atraente do que aquele que se apresenta nas salas de aula e nas estratégias há muito arraigadas.

Não se trata, contudo, de uma substituição do papel do professor, mas sobretudo de uma renovação de suas ideias e expectativas onde a tendência é que tanto o docente quanto o discente sejam beneficiados.

.

Gráfico 4: Relação da matemática com o cotidiano



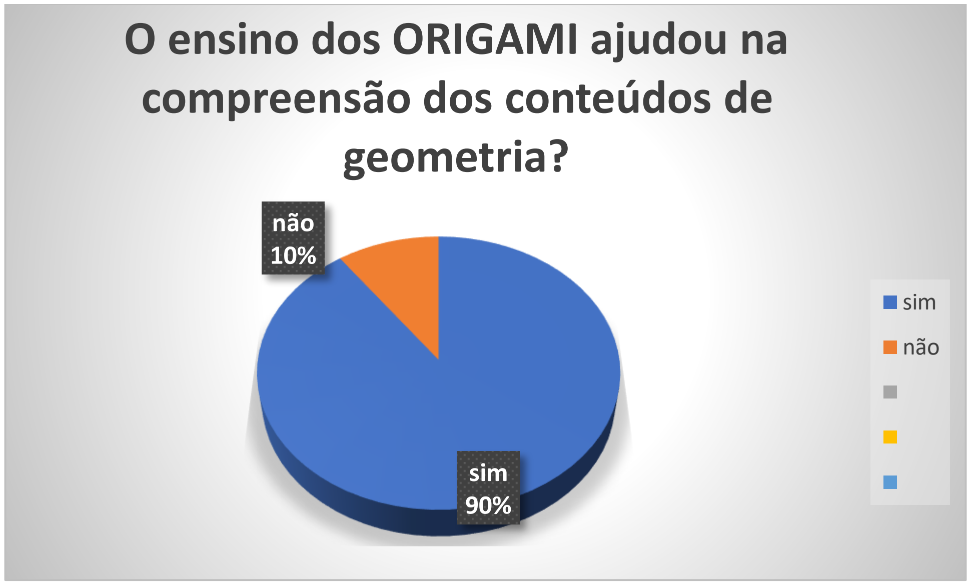
Fonte: próprio autor.

Esse ponto reforça a ideia já muito conhecida de um distanciamento entre o conhecimento matemático (extremamente prático e útil) e a visão dos estudantes como se o que se aprende na escola estivesse distante da sua realidade.

Os dados obtidos e expostos nos Gráficos 5 e 6, adiante expostos reforçam a relevância da utilização de uma estratégia alternativa para a aprendizagem da matemática. Note-se que além da utilização da técnica dos origamis também utilizamos a aprendizagem colaborativa o que enriqueceu a experiência discente.

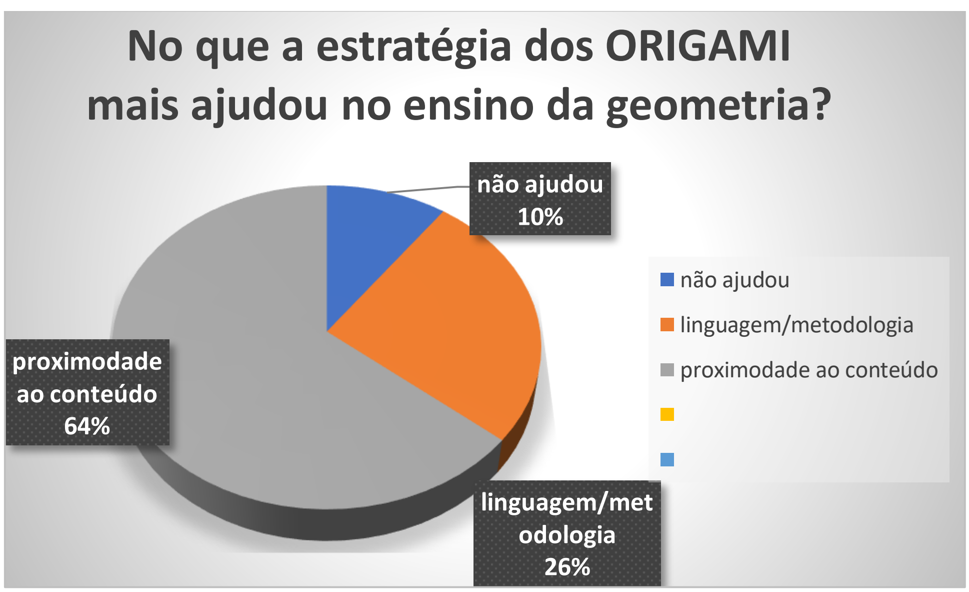
Como aponta Vygotsky (1987, p. 17), "a colaboração entre pares ajuda a desenvolver estratégias e habilidades gerais de solução de problemas pelo processo cognitivo implícito na interação e na comunicação". O mesmo autor reflete que a linguagem é fundamental na estruturação do pensamento, sendo importante comunicar esse conhecimento. Novamente o trabalho em colaboração com o outro merece destaque na proporção em que enfatiza a ZDP (Zona de Processamento Proximal), permitindo que o conhecimento ocorra através do compartilhamento.

Gráfico 5: Percepção quanto ao uso dos origamis para a aprendizagem



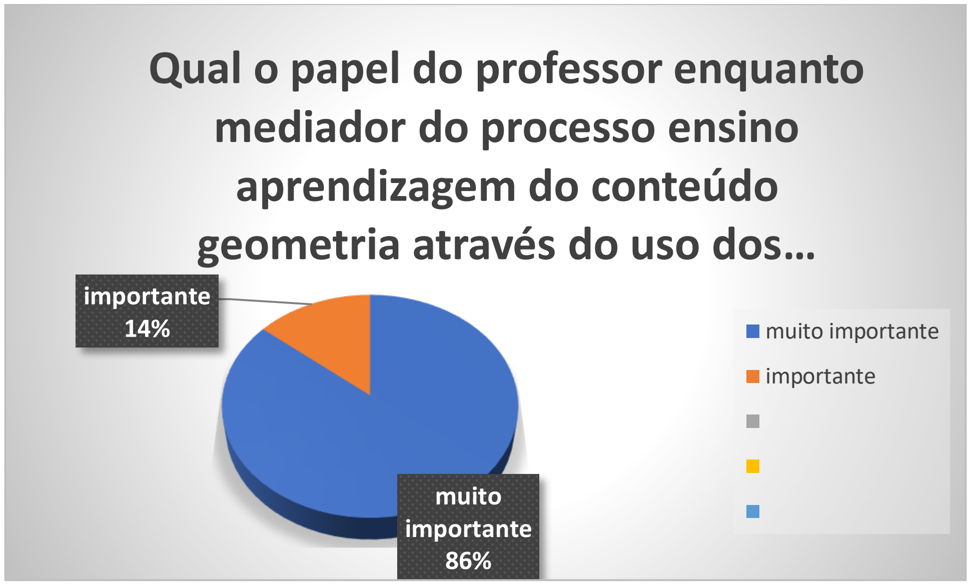
Fonte: próprio autor.

Gráfico 6: Estratégia dos origamis como ferramenta para a aprendizagem



Fonte: próprio autor.

Gráfico 7: O papel do professor na estratégia aplicada



Fonte: próprio autor.

Os dados expostos nos Gráficos 7 e 8 permitem verificar a opinião dos alunos no que diz respeito a metodologia aplicada, considerando o papel do professor, no caso do presente estudo, a aprendizagem colaborativa, associada aos mecanismos do uso dos origamis.

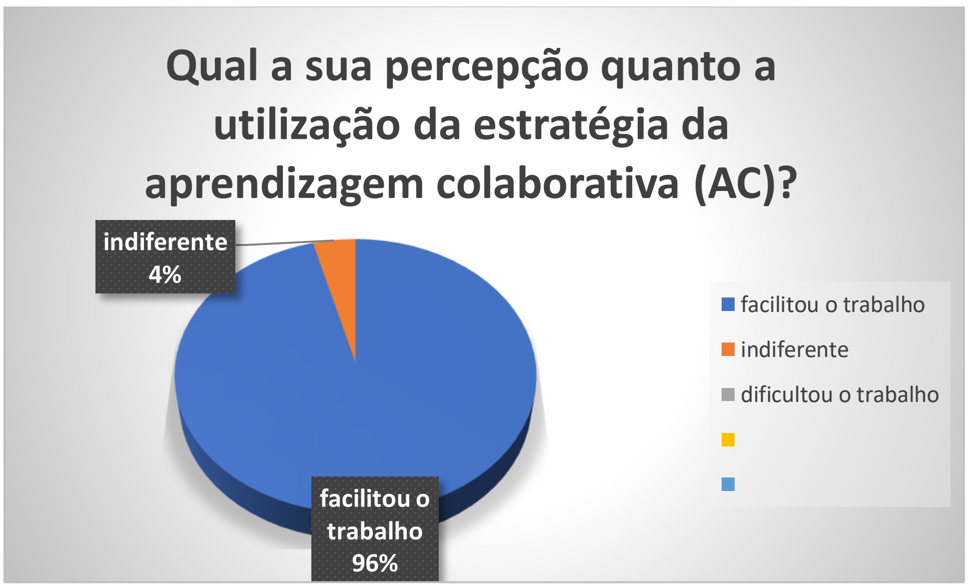
Por se tratar do objetivo principal do trabalho, julgamos importante citar no questionário diagnóstico junto aos estudantes, com o item sobre o papel do professor considerando a metodologia aplicada, uma vez que assumimos a função de um observador crítico em boa parte do trabalho, num claro estímulo aos critérios de autonomia e protagonismo que são pilares da aprendizagem colaborativa. De acordo com Vygotsky (1987), a linguagem é fundamental nesse processo de estruturação do conhecimento socialmente produzido. O trabalho em colaboração com o outro, segundo essa teoria, enfatiza a denominada zona de desenvolvimento proximal, sendo que o conhecimento acontecerá através do compartilhamento.

Nesse ponto, é importante considerar o papel da Aprendizagem Colaborativa (AC) no processo de condução dos trabalhos e como sua associação com as estratégias utilizadas impactou positivamente a execução das atividades propostas ao longo do percurso.

Com efeito, por sua natureza essencialmente interativa, as estratégias em grupo são ferramentas colaborativas, uma vez que pressupõem a interação entre seres humanos, individualmente ou em grupo e permitem a comunicação e a socialização de conhecimentos numa velocidade estonteante, utilizando interfaces agradáveis e que formam um novo significado a expressão “estar conectado” (Gráfico 8).

No desenrolar do trabalho, a interação associada a possibilidade de usar mecanismos cotidianos, permitiu uma ressignificação da ideia da produção de conhecimento por parte dos discentes, uma vez que associamos uma informação costumeira (geometria) às técnicas interativas.

Gráfico 8: Sobre a Aprendizagem Colaborativa (AC)



Fonte: próprio autor.

7 CONCLUSÕES

O presente estudo nasceu de uma inquietação sobre os resultados obtidos pelos estudantes mesmo após longos períodos de ensino dos conteúdos, aulas de exercício e plantões de dúvida. As notas da maioria sempre estavam no limite da média (quando não abaixo) e a disciplina continuava a conviver com o estereótipo de “bicho papão” dos alunos.

Com o passar do tempo, apesar da tentativa de introdução de novas tecnologias praticamente as dificuldades permaneciam as mesmas, uma vez que notava um certo distanciamento entre o conteúdo ministrado em sala de aula e a realidade do aluno.

Paradoxalmente, apesar de tratar-se de uma ciência prática e cuja aplicabilidade se faz sentir no cotidiano de todos nós, crianças e jovens ainda não percebem isso e tratam a matemática como algo intangível e distante.

Desse cenário a utilização da estratégia do uso de ORIGAMIS nas aulas de geometria vem a se somar a tantas outras metodologias que buscam de fato aproximar o discente desse importante conteúdo, desfazendo preconceitos e contribuindo de alguma forma para uma aprendizagem mais efetiva e rica de significado.

Nesse aspecto foi fundamental a utilização, também de estratégia baseada na metodologia da Aprendizagem Colaborativa de sorte a promover uma interação entre os estudantes e destes com o professor, numa relação onde todos são beneficiados.

Outro ponto que consideramos importante discutir é sobre o papel do professor em todo o processo, uma vez que ele de fato assume uma função de mediador, descendo do tablado em que por vezes somos tentados a nos portar como únicos detentores do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALCÂNTARA, Paulo. Aprendizagem colaborativa com tecnologias interativas: Projeto PACTO. Projeto de pesquisa Curitiba, 2000

ALMEIDA, M. E. B.; PRADO, M.E.B.B. Criando situações de aprendizagem colaborativa. São Paulo: Avercamp, 2002

ASCHENBACH, M.H.C. V; FAZENDA, I.C.A.; ELIAS, M.D.C. A arte-magia das dobraduras. São Paulo: Scipione, 1992

BEHRENS, Marilda Aparecida. Projetos de aprendizagem colaborativa num paradigma emergente. IN: MORAN E MASETTO. Novas tecnologias e mediação pedagógica.São Paulo: Papirus, 2000, p. 67-132.

BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 10 de fevereiro de 2020

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997. 126p.

_______. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio ; volume 2)

CASTELLS, Manuel. A sociedade em rede. São Paulo, Editora Paz e Terra, 1999.

ECHEITA, G., MARTIN, E. Interação social e aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas,1995

FAINGUELERNT, E. K. Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FERREIRA, Naura S. Carapeto (org.). Gestão Democrática da Educação: Atuais tendências, novos desafios. 5. Ed. São Paulo, Cortez, 2006.

HAYASAKA, Enio Yoshinori. NISHIDA, Silvia Mitiko. Pequena História sobre ORIGAMI. Disponível em: https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm#:~:text=ORIGAMI%20%C3%A9%20uma%20palavra%20japonesa,literalmente%2C%20%22dobrar%20papel%22.&text=E%20que%20depois%2C%20º%20homem,animais%2C%20plantas%20ou%20outros%20objetos. Acesso em 05 de janeiro de 2020.

JOHNSON, Susan Barton. Análise da Base Nacional Comum Curricular de Matemática.Versão 2. *ACARA*. Disponível em: http://movimentopelabase.org.br/wp-content/uploads/2016/08/5.2-Matema%CC%81tica_Ana%CC%81lise-da-ACARA.pdf. Acesso em 14 de abril de 2020.

KAMPF, C. (2011). A geração z e o papel das tecnologias digitais na construção do pensamento.*Rev. Comunicação e Ciência*, (131). Recuperado: 18 set. 2014. Disponível: http://comciencia.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1519-76542011000700004 &lng=não&nrm=não

KENSKI, V.M. Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação. 3ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2008

LÉVY, Pierre. Cibercultura. Carlos Irineu da Costa (tradução). São Paulo: Ed. 34. 1999.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? In : Educação Matemática em Revista SBEM , ano 3, p.3-13, jan/jun.1995.

MASETTO, M. T. Mediação pedagógica e o uso da tecnologia. *In:* MORAN, J.M. Novas tecnologias e mediação pedagógica. São Paulo: Papirus, 2000.

MELO, José Marques de. Mídia & Educação. Belo Horizonte. Autentica Editora. 2008

MINAYO, M. C. S. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. *In*: MINAYO, M C. S. (Org.). Pesquisa social: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes; 1994. P. 9-29.

MORAN, José Manuel, MASSETTO, Marcos T., BEHRENS Marilda Aparecida. Novas Tecnologias e mediações pedagógicas. Campinas, SP, Papirus, 2012

MORAN, J. M. Como utilizar a internet na educação. São Paulo: Revista Ciência da Informação. Vol. 26 n.2, maio-agosto 1997, pág. 146-153.

NOVACK, T.C.U.N; PASSOS, A.M. A utilização do origami no ensino de geometria: relatos de uma experiência. Disponível em: HTTP://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/719-4.pdf. Acesso em 23 de março de 2020.

OLIVEIRA, F.F. Origami : Matemática e Sentimento. Disponível em http://www.educared.org/educa/img_conteudo/File/CV_132/2004-10-18_-_Origami-Matem_tica_e_sensibilidade1.pdf. Acesso em 05 de abril de 2020.

OLIVEIRA, Cristiano Lessa de . Educacão, Cultura, Linguagem e Arte. Cascavel: Revista Travessias. V. 4, n. 2. P. 1-16, 2010

OLIVEIRA, Vilma Bragas de. Tabela Periódica: uma Tecnologia Educacional Histórica. Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica. V. 5, nº 4, p. 168-186, dezembro, 2015

PONTE, J.P. (1992) Concepções de professores de matemática e processos de formação. In: PONTE, J.P., MATOS, J.F., FERNANDES, D., BROWN, M. Educação Matemática: Temas de Investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, p.185-239.

PONTE, J.P. (2001) O início da carreira profissional de professores de matemática e ciências. Revista de Educação, v.10, n.1, p.31-44.

PORTUGAL. A História da Geometria. Universidade de Lisboa. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm16/historia.htm. Acesso em 10 de janeiro de 2020.

RIBEIRO, Elisa Antônia. A perspectiva da entrevista na investigação qualitativa. Evidência: olhares e pesquisa em saberes educacionais, Araxá/MG, n. 04, p.129-148, maio de 2008.

SELBACH, Simone (sup.). Ciências e Didática. Petrópolis: Vozes, 2010.

SILVA, Marco (2001). Sala de aula interativa: a educação presencial e a distância em sintonia com a era digital e com a cidadania. In: CONGRESSO BRASILEIRO DA COMUNICAÇÃO, 24., 2001, Campo Grande. Anais do XXIV Congresso Brasileiro da Comunicação, Campo Grande: CBC, set. 2001.

THIOLLENT, M. Metodologia da pesquisa-ação. São Paulo: Cortez & Autores Associados, 1988.

TORRES, Patrícia Lupion; ALCANTARA, Paulo R.; IRALA, Esrom Adriano Freitas. Grupos de consenso: uma proposta de aprendizagem colaborativa para o processo de ensino-aprendizagem. Revista diálogo educacional, v. 4, n. 13, p 129-145, 2004.

VIEIRA, Rosângela Souza. O papel das tecnologias da informação e comunicação na educação: um estudo sobre a percepção do professor/aluno. Formoso, BA: UNIVASF, 2011, v. 10, p. 66-72

VYGOTSKY, Lev. A Formação Social da Mente. São Paulo: Martins Fontes, 1987, p.17

APÊNDICE I –QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

Informações de Identificação
1. Nome 2. Idade
3. E-mail 3. Sexo M ( ) F ( )
Informações de Diagnose

4. No geral, o que você acha da Matemática?
( ) fácil ( ) muito fácil ( ) difícil ( ) muito difícil
( ) média

11. Qual sua maior dificuldade em aprender Matemática?
( ) Metodologia ( ) Linguagem ( ) livro ( ) professores ( ) Não sei

11. Na sua opinião, o que poderia facilitar a aprendizagem de Matemática?
( ) Tecnologias ( ) Novas estratégias ( ) Novas metodologias ( ) Livros ( ) Professores

7. Qual a sua percepção do uso da Matemática no cotidiano:
( ) Alguma relação ( ) Muita relação ( ) Nenhuma relação ( ) pouca relação ( ) não sabe

8. O uso de ORIGAMIS ajudou na aprendizagem?
( ) Sim ( ) Não

9. No que o uso dos ORIGAMIS ajudou na aprendizagem?
( ) proximidade ao conteúdo ( ) metodologia ( ) não ajudou ( ) outros

10. Qual o papel do professor no projeto?
( ) muito importante ( ) importante ( ) não foi importante

11. O que você achou da utilização da estratégia de aprendizagem colaborativa (AC)?
( ) facilitou o trabalho ( ) não facilitou o trabalho ( ) dificultou o trabalho ( ) indiferente

APENDICE II – PROTOCOLO DE OBSERVAÇÃO

DATA DAS AULAS:

OBJETIVO:

ATIVIDADES:

RECURSOS PEDAGÓGICOS/TECNOLÓGICOS UTILIZADOS:

PLANEJAMENTO PARA O DIA: .

OBSERVAÇÕES DO PÓS-AULA: