UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA-PROFMAT

KELMA GOMES DE MELO

A Função Gama como Extensão da Função Fatorial e Aplicações

Redenção

2020

KELMA GOMES DE MELO

A Função Gama como Extensão da Função Fatorial e Aplicações

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

Redenção

2020

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Melo, Kelma Gomes de.

M485f

A função gama como extensão da função fatorial e aplicações / Kelma Gomes de Melo. - Redenção, 2020.
74f: il.

Dissertação - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva.

1. Funções gama. 2. Ensino superior. 3. Professores de matemática. I. Título

CE/UF/BSP CDD 510

KELMA GOMES DE MELO

A Função Gama como Extensão da Função Fatorial e Aplicações

Dissertação apresentada como requisito para a obtencão do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 28 / 08/ 2020.

BANCA EXAMINADORA

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

DTavares

Prof.ª Dra. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Edvalter da Silva Sena Filho

Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho
Universidade Estadual Vale do Acarau (UVA)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me proporcionado viver essa experiência. A minha mãe que arduamente me deu suporte nesses dois anos de estudos.

Ao meu esposo Antonio Monteiro que sempre está ao meu lado e me apoiando.

Ao Professor Doutor Joserlan Perote da Silva, pela excelente orientação e dedicação, não medindo esforço para me ajudar quando necessário.

Aos professores Doutor Rafael Diogenes e Doutor João Francisco, sempre bem recepetivos em me ajudar e acreditarem em mim, ao professor Doutor Alisson Guimarães que tem uma participação muito importante na minha formação e, em especial na construção do meu aprendizado no programa tex.

Aos professores e alunos que contribuiram na minha pesquisa de forma tão solícita e desprendida.

Ao meu irmão e amigo Douglas Brasil que tão amavelmente corrigiu meus erros ortográficos e sempre esteve ao meu lado nos momentos bons e difíceis.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões, sempre me encorajando a melhorar a cada dia.

A todo o grupo docente da ciências da natureza e matemática que trabalham na mesma instituição que eu, e colaboraram com minhas análises, eles foram peças valiosas nas minhas conclusões.

Aos professores participantes da banca examinadora Doutora Danila Fernades Tavares e Doutor Evalter da Silva Sena Filho pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

"Quantas vezes os nossos raciocínios são errados! Atrevo-me a afirmar, que somos muito mais freqüentemente enganados por estes do que por nossos sentidos. Mas isso quer dizer que nossos raciocínios são sempre falaciosos, e que não podemos ter nenhuma dependência de qualquer verdade descoberta por nós pela compreensão — Leonhard Euler "

RESUMO

A função Gama (Γ) é uma das funções mais importantes na matemática, estudos nos mostram que ainda se tem poucos trabalhos sobre esse tema, nos levando a mais motivações para escrever e apresentar resultados. Pesquisando foi possivel concluir que a função Gama é essencial em vários trabalhos matemáticos, nos levando a concluir que se Euler não tivesse apresentado seus resultados, e outros matemáticos não tivessem dado continuidade, teria tornado a vida de muitos matemáticos bem difícil. A função Gama é conhecida pela extensão da função fatorial sendo apresentada como uma integral ou como produtório, dependendo da adequação. As pessoas que tem um conhecimento mínimo da função fatorial só conseguem resolver problemas quando se está nos conjuntos do números naturais, o estudo nos permitirá estender um pouco essa concepção levando em conta que a função Gama pode ser relacionada ao fatorial dentro do conjunto dos reais a menos de $\{0, -1, -2, -3 \cdots\}$. Portanto a função Gama surge da necessidade de encontrar uma representação para a função fatorial que funcione não apenas com os naturais, mas sim em intervalos nos reais. Ao longo do texto você perceberá que as aplicações da função Gama são muitas, tanto no campo da pesquisa matemática em si, quanto em áreas afins. A ideia da dissertação é explorar a função em questão, mostrando, suas principais aplicações, fazendo demonstrações não encontradas com facilidade, mostrar possíveis aplicações na educação básica e propor alguns trabalhos que podem ser desenvolvidos de forma mais simples, levando o leitor e os estudiosos a abrangerem seus estudo sobre a extensão do fatorial, e contribuindo assim para facilitar as soluções de estudo que envolvam este tema.
palavra chave: Funções gama. Ensino superior. Professores de matemática.

ABSTRACT

The Gamma (Γ) function is one of the most important functions in mathematics, studies and research show that there is still little work on this theme, leading us to more motivations for writing and presenting results. Researching it was possible to conclude that the Gamma function is essential in several mathematical works, leading us to conclude that if Euler had not presented his results, and other mathematicians had not continued, it would have made the life of many mathematicians good difficult. The Gamma function is known by the extension of the factorial function being presented as an integral or as a producer, depending on its suitability. People who have a minimal knowledge of the factorial function can only solve problems when they are in the sets of natural numbers, the study will allow us to extend this conception a little taking into account that the Gamma function can be related to the factorial within the set of real less from $\{0, -1, -2, -3 \cdots\}$. Therefore, the gamma function arises from the need to find a representation for the factorial function that works not only with naturals, but at intervals in reals. Throughout the text you will find that the applications of the Gamma function are many, both in the field of mathematical research itself and in related fields. The idea of the dissertation is to explore the function in question, showing its main applications, making demonstrations that are not easily found, showing possible applications in basic education and proposing some works that can be developed in a simpler way, leading the reader and scholars to cover their studies on the extension of the factorial, and thus contributing to facilitate study solutions involving this theme.

keyword: Gamma functions. University education. Math teachers.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SÍMBOLOS

Γ	Gama
$\mathbb{Z}_-$	Conjunto dos inteiros não positivos
$\prod$	Produtório.
$\sum$	Somatório.
α	Alfa
ϵ	Epsilon
$\sin$	Seno
$\cot$	Cotangente
$\cos$	Cosseno
$\mathbb{N}$	Números naturais
$\mathbb{Z}$	Números inteiros
$\log$	Logaritmo
$\mathbb{R}$	Números reais
β	Beta
$E(x)$	Esperança ou média.
$Var(x)$	Variância
e	Número de Euler, neperiano.
$M(a, b)$	média aritmética-geométrica.
$\int$	Integral.
$\ln$	Logaritmo neperiano.
$\approx$	Aproximadamente.
B	Representa a função beta.
θ	Teta.
%	Porcentagem.
!	fatorial

SUMÁRIO

1 Introdução

Nesta dissertação, faremos uma breve análise da função Gama, a qual uma das suas grandes aplicações é a extensão do cálculo da função fatorial de números naturais e não inteiros levando em conta como ela é suporte para tantas aplicações matemáticas em aréas afins,como na física.

A visão apresentada nos sugere uma nova perspectiva à luz de um assunto que, até então, é tido como algo que ultrapassa os limites do estudo básico, parecendo mais adequado pensar que foge da realidade da sala de aula e dos alunos.

Nossa missão é propor aos docentes da educação básica de matemática que abranjam seus conhecimentos acerca da função fatorial e reconheça a função Gama como uma extensão a ser analisada e abordada de forma mais completa.

No capitulo 2 , relatamos alguns processos históricos decisivos para trabalhos posteriores, mostrando como ocorreu a pesquisa de alguns matemáticos sobre as descobertas da função, abordando temas matemáticos que foram base motivadora para se chegar na forma da função que conhecemos. Seguimos construindo alguns estudos que são essenciais para as demonstrações ao longo do texto.

Posteriormente, no capitulo 3, esplanamos as demonstrações que serão utilizadas ao longo do trabalho e, por bem, é viavel que seja tratada como suporte, recorrendo ao capitulo sempre que necessário.

O capitulo 4 apresenta a construção da função Gama com seus respectivos formatos onde nesta seção veremos de forma detalhada a extensão fatorial e como se analisa esse processo, tendo como contribuições algumas demonstrações e análises desse tema,onde perceberemos como estas facilitarão as problemáticas.

No conteúdo do capitulo 5, provaremos determinados resultados com o uso da função Gama que servirá de suporte para estudos mais detalhados, analisando de forma minuciosa alguns resultados e problemas que auxiliará não só o trabalho em questão mas aos leitores interessados no tema.

No capítulo 6, visitamos a função Beta, onde podemos observar sua particularidade com a função Gama, perceberemos que a função analisada facilitará cálculos que, sem o uso da relação das funções Gama e Beta, tornaria algo bem mais dificultoso.

Apresentaremos no capítulo 7 algumas comprovações no intervalo $]0, 1[$ de cálculos da função Gama e Beta, nesse contexto incluiremos as integrais elípticas relacioandas as funções média aritmetica geometricas, decisivas para a conclusão dos cálculos em questão.

No capitulo 8, discorreremos sobre a função Gama dentro do contexto da estatística e probabilidade. Nesse estudo, perceberemos sua adequação na matemática aplicada, onde analisaremos as distribuições Gama e Beta.

No capitulo 9, relataremos resultados de uma pesquisa com professores da educação básica sobre fatoriais e sua extensão, contribuindo, também, em uma breve sugestão de como podemos, de forma simplificada, estender aos livros da educação básica, mais especificamente na segunda série do ensino médio, o estudo da extensão fatorial, fazendo uso da relação de recorrência que mostraremos ao longo do texto.

Assim sendo, fechamos com a conclusão, podendo dizer que este trabalho nos permitiu verificar o grau de conhecimento sobre as funções destacadas e nesse contexto a função fatorial está inserida. Ressaltamos, também, a fase experimental de analisar as contruções até onde se pode realizar conclusões no momento e, as observações feitas junto com os docentes e discente, concluindo, quanto a formação continuada, é essencial nos mais diversos ambitos, tendo como parâmentro as análises minuciosas feitas com as pesquisas e observações relizadas na analise e formação.

2 Processo histórico

Entende-se que para a construção de uma pesquisa é primordial que passemos um pouco na história onde, assim, possamos descobrir motivações e descobertas que fortaleçam a caminhada dos estudos e comprove o quão difícil e instigador foram a descobertas de grandes feitos matemáticos. É com essa motivação que explanaremos a seguir alguns fatos que levaram a construção da função Gama e os grandes matemáticos por trás dessa história, levando em consideração alguns detalhes que são essenciais para a construção do trabalho que segue.

2.1 Leonard Euler.

Segundo(Dilva, 2016) Leonhard Euler,matemático e físico suíço do século XVII, é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos pelas enormes contribuições. Muitos conceitos da matemática moderna originaram-se das pesquisas deste eminente matemático cujas obras também medem a área da física e astronomia. Seu interesse pela matemática resultou de sua infância, quando seu pai lhe ensinara sobre o assunto. Ao longo de sua carreira profissional, Euler escreveu vários livros e memórias em que introduziu muitos conceitos, especialmente na área de análise matemática.

Um pesquisador prolífico, suas obras abrangem à álgebra, geometria, cálculo, trigonometria e teoria dos números. Ele fez importantes descobertas em campos tão diversos como cálculo infinitesimal e teoria de gráfico, também introduziu muito na matemática moderna, nas terminologias e notações, em especial para a análise.

Euler ficou também conhecido por seu trabalho em mecânica, dinâmica de fluidos, óptica e astronomia, onde também encontrou uma forma para a Função Gama, assim como a Função Beta, que será tratada neste trabalho, estas foram encontradas em 1729 quando ele pesquisava movimentos harmônicos e interpolação fatorial.

Um dos grandes problemas de sua saúde foi a sua visão que piorou ao longo de sua carreira matemática. Três anos depois de sofrer uma fatal febre, em 1735, ele tornou-se quase cego do olho direito. Sua visão naquele olho piorou durante a sua estada na Alemanha, na medida em que Frederico[1] se refere a ele como "Cyclops ". Euler mais tarde desenvolveu uma catarata no olho esquerdo, deixando-o quase totalmente cego em 1766. No entanto, sua condição parece ter tido pouco efeito sobre a sua produtividade, levando em conta que ele as compensou com suas habilidades de cálculo mental e de memória fotográfica. Por exemplo, Euler poderia repetir o Aeneid de Virgil[2] do começo ao fim sem hesitação, e para cada página na edição ele poderia indicar qual a linha foi o primeiro e qual a última.

[1]Frederico II (1712–1786), da Prússia, que viria a ser conhecido como "Frederico o Grande".

[2]Poema épico latino escrito por Virgílio no século I a.C. Conta a saga de Eneias, um troiano, salvo dos gregos em Tróia

Com o auxílio de seus escreventes, a produtividade de Euler em muitas áreas do estudo aumentaram. Ele produzira, em média, um papel de matemática por semana no ano de 1775. Conseguiu continuar seu trabalho sobre óptica, álgebra e movimento lunar, por ter uma memória notável. Espantosamente, após o seu regresso a S. Petersburgo (então com 59 anos), Euler produziu quase metade dos seus trabalhos, apesar da cegueira.

Em Santo Petersburgo no dia 18 de setembro de 1783, depois de um almoço com sua família, Leonhard com 74 anos, estava discutindo sobre a descoberta de um novo planeta da época, chamado Urano e sua órbita, quando sucumbiu por causa de uma hemorragia cerebral.

Euler foi considerado o mestre dos matemáticos do século XVIII e ao morrer o filósofo e matemático francês Marquês de Condorcet[3], escreveu: "ele terminou de calcular e de viver".

2.2 André Marie Legendre

Segundo (Aparecida, 2010) Adrien-Marie Legendre foi um matemático francês que teve importantes contribuições para a estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática. Algumas fontes afirmam que Legendre nasceu em Paris, o que se pode afirmar com certeza é que ele nasceu em 18 de setembro de 1752.

Com uma educação de excelente qualidade no Collège Mazarin em Paris, Legendre elaborou sua tese em física e matemática em 1770. De 1775 a 1780, lecionou na École Militaire, em Paris, e, a partir de 1795, na École Normale, também em Paris. Em 1782, ganhou o prêmio oferecido pela Academia de Berlim por seu trabalho ensaio sobre o caminho de projéteis, levando-se em conta a resistência do ar. Logo no ano seguinte tornou-se membro Adjunto da Académie des Sciences in Paris, e membro associado em 1785.

Os primeiros trabalhos de Legendre foram centrados em mecânica e grande parte de suas obras e trabalhos científicos foi fonte de inspiração para várias teorias matemáticas. Além disso, Legendre estudou a fundo as funções elípticas, publicando, inicialmente três livros sobre o assunto – Exercices du Calcul Intégral – em 1811, 1817 e 1819. Nesses três volumes, tratou das propriedades básicas das integrais elípticas e também das funções Beta e Gama.

Muito mais se poderia falar sobre Legendre, mas finalizamos esta apresentação lembrando que Legendre participou do desenvolvimento do Sistema Métrico Decimal, em 1787, além de ter feito parte da Comissão mista de cientistas que trabalhou no Observatório de Greenwich na determinação de uma nova unidade de longitude.

Legendre morreu em Paris em 9 de janeiro em 1833, após uma longa e dolorosa doença, ele é uma das 72 pessoas com o nome escrito na torre Eiffel.

[3]Filósofo e matemático francês

2.3 O conceito do símbolo fatorial

O conceito de fatorial ($n!$) foi organizado pela primeira vez em 1808 por Cristian kramp[4]($1760 - 1826$), Kramp foi um professor renomado de matemática em Estrasburgo, cidade em que nasceu, ele foi eleito para a seção de geometria da academia francesa de ciências em 1817. Como Legedre, Cristian trabalhou na função fatorial generalizada que se aplica a não inteiros. Este Foi o primeiro a usar a notação $n!$. A palavra factura comunica um trabalho que foi realizado, essa notação bastante simples($n!$) designa o produto de números decrescente de n a unidade, ou seja, $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$. Segundo Aline 2012.

> A simbologia passa a fazer sentido a partir do momento em que é compreendida, esta tem o objetivo de comunicar ideias de forma mais simples, e que sejam compreendidas mais rapidamente do que com as palavras. Contudo, não se deve exagerar na simbologia, fato que pode complicar o entendimento da idéia, ao invés de facilitá-lo.

De fato o conceito mais geral de fatorial foi encontrado ao mesmo tempo por Louis François Antoine Arbogast [5]($1759 - 1803$). Cristian Kramp a princípio chamou o símbolo de "faculdade", Arbogast substitui o nome por "fatorial", que segundo ele é mais claro e francês. Kramp adota a ideia e até então o símbolo de exclamação ficou reconhecido como fatorial na matemática.

A função fatorial é normalmente definida por: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nota-se que esta definição implica em particular que $0! = 1$, porque o produto vazio, isto é, o produto de nenhum número é 1. Deve-se prestar atenção neste valor pois este faz com que a função recursiva $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ funcione para $n = 0$. A função fatorial também pode ser definida como uma integral por partes de uma sequencia numérica utilizada em uma integral especial chamada função Gama: $\int_0^{\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx$ onde esta foi batizada por Legendre [6]($1752 - 1833$) em 1811, mas nesse formato foi encontrada por Euler($1707 - 1783$), em 1730.

O valor numérico de $n!$ pode ser calculado por multiplicação repetida se n não for grande demais, é isto que as calculadoras fazem. O maior fatorial, que a maioria das calculadoras suportam é 69!, porque $70! > 10^{100}$. Quando n é grande demais, $n!$ pode ser calculado com uma boa precisão usando a aproximação de Stirling que provaremos adiante. A formula de Stiling é definida por: $n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot (\frac{n}{e})^n$. Esta foi parcialmente descoberta por Abraham de Moivre[7] que estabeleceu que $n! \approx C \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$, onde C é uma constante não nula. Stiling[8] completou a demonstração mostrando que: $C = \sqrt{2 \cdot \pi}$.

[4]foi um francês matemático, que trabalhou principalmente com factoriais

[5]foi um matemático e político francês que descreveu o fatorial

[6]Foi um matemático francês,que fez importantes contribuições à estatística e análise matemática.

[7]Matemático francês famoso pela fórmula de De Moivre e por seus trabalhos na distribuição normal e na teoria das probabilidades.

[8]Matemático escocês que estabelece uma aproximação assintótica para o fatorial de um número.

3 Preliminares

Mostraremos nesta seção alguns recursos que por vezes será usado em demonstrações e argumentos sobre a função gama ao longo da pesquisa aqui exposta, pensando em possíveis dúvidas de alguns resultados, que tornam inviável provar naquele momento, sendo de suma importância que o leitor possa recorrer a esta seção e compreender melhor as demonstrações ao longo do trabalho.

3.1 Integrais impróprias

O estudo das integral imprópria envolve segundo (Guidorizzi, 2006) o conceito de integral definida para dois casos: o caso em que o intervalo é infinito e o caso em que f tem uma descontinuidade infinita em $[a, b]$.

Definição 3.1 *Seja f integral em $[a, t]$, para todo $t > a$. Definimos:* $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$, *desde que o limite exista e seja finito. Tal limite denomina-se integral imprópria de f estendida ao intervalo $]a, \infty[$.*

Definição 3.2 *Seja f integrável em $[t, a]$ para todo $t < a$. Definimos:* $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)dx$. *Desde que o limite exista e seja finito. Tal limite denomina-se integral imprópria de f estendida ao intervalo $]-\infty, a[$.*

Definição 3.3 *Seja f integrável em $[-t, t]$, para todo $t > 0$. Definimos:* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$. *Desde que as integrais do segundo membro sejam convergentes.*

Definição 3.4 *Descontinuidade infinita: as integrais são finitas mas a função integrada é ilimitada em pelo menos uma(ou duas) das extremidades.*

Exemplo 3.1 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *é imprópria, pode ser estendida como* $\lim\limits_{a \to +0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

3.2 Convergência e divergência de intregrais impróprias.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leqslant 1$.

   Demonstração:

   Seja: $\alpha > 1 \to \alpha - 1 > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx &= \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha}dx \\
&= \lim_{t \to +\infty} \int_1^t x^{-\alpha}dx \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right] \begin{matrix} t \\ 1 \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{-\alpha+1}-\frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]\\
&= \lim_{t\to+\infty}\frac{-(1)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}=\frac{1^{-\alpha+1}}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-1}.
\end{aligned}
$$

Logo converge.

Se $\alpha \leqslant 1 \implies -\alpha+1 \geq 0.$

$$
\begin{aligned}
\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x^\alpha}dx\\
&= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t x^{-\alpha}dx\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^t\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]\\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Logo divergente.

2. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\cdot x}dx$ é convergente para todo $\alpha > 0$.

Demonstração:

Seja $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\alpha\cdot x}dx$. Fazendo uma mudança de base: $-\alpha\cdot x = a \to -\alpha dx = da$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\alpha\cdot x}dx &= \lim_{t\to+\infty}\left[\int_0^{-\alpha t} e^a\cdot\frac{-da}{\alpha}\right]\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{-1}{\alpha}\cdot e^a\right]_{-\alpha t}^{0}\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{-1}{\alpha}\cdot(e^{-\alpha t}-1)\right]\\
&= \frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Portanto Convergente.

3.3 Convergência pelo critério de comparação.

Sejam f e g duas funções integráveis em $[a, t]$, para todo $t > a$ e, tais que, para todo $x \geq 0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Então:

1. $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ é convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ é convergente.

   Demonstração:

   $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t g(x)dx$ é finito pois por hipótese $\int_a^\infty g(x)dx$ é convergente. De $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geq a$, resulta que $0 \leqslant \int_a^t f(x)dx \leqslant \int_a^t g(x)dx \leqslant \int_a^\infty g(x)dx$. Sendo: $\int_a^t f(x)dx$ crescente e limitada resulta que $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$ será finito e, portanto, $\int_a^\infty f(x)dx$ será convergente.

2. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é divergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)dx$ é divergente

   Demonstração:

   Como as funções são positivas, elas são dadas pelas integrais que são crescentes. Portanto, se elas divergem, divergem para mais infinito.De tal forma, a integral dada por f diverge para mais infinito, com isso a integral dada por g também irá para infinito, pois $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

3.4 Integrais por partes

Existem integrais que não podem aplicar as fórmulas das integrais imediatas tampouco integração por substituição. Com isso precisamos utilizar algumas outras metodologias que transformem a integral dada por outra, em que conhecemos sua integral imediata. Uma das propriedades do cálculo que nos permite fazer essas relações, é a integral por partes, algo que utilizaremos comumente ao logo do texto e, por isso, nos motiva a fazer uma pequena demonstração, como a que segue.

A regra do produto na derivada, estabelece que se f e g duas funções diferenciáveis, então:

$$\frac{d[f(x) \cdot g(x)]}{dx} = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x).$$

Integrando ambos os lados, temos que:

$$\int \frac{d[f(x) \cdot g(x)]}{dx} = \int f(x) \cdot g'(x) + \int g(x) \cdot f'(x) \implies$$

$$f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)dx = \int g'(x) \cdot f(x)dx.$$

Teorema 3.1 *Seja a_n uma sequência cujos termos são diferentes de zero. Se $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, então o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.*

Demonstração:

Iniciaremos supondo que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado um $\epsilon > 0$, fixemos K e M tais que $L - \epsilon < K < L < M < L + \epsilon$. Existem $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p \Rightarrow K < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < M$, multiplicando membro a membro as $n-p$ desigualdades $K < \dfrac{a_{p+i}}{a_{p+i-1}} < M$ com $i = 1, \cdots, n-p$, obtemos que: $K^{n-p} < \dfrac{a_n}{a_p} < M^{n-p}$. suponha que $\alpha = \dfrac{a_p}{K^p}$ e que $\beta = \dfrac{a_p}{M^p}$. Então, $K^n \cdot \alpha < a_n < M^n \cdot \beta$. Extraindo as raizes, vem que: $K \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{a_n} < M \cdot \sqrt[n]{\beta}$ para todo $n > p$. Levando em conta que $L - \epsilon < K$,e $M < L + \epsilon$, $\lim \sqrt[n]{\alpha} = 1$ e $\lim \sqrt[n]{\beta} = 1$, concluímos que existe $n_0 > p$ tal que $n > n_0 \Rightarrow L - \epsilon < K \cdot \sqrt[n]{\alpha}$ e $M \cdot \sqrt[n]{\beta} < L + \epsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow L - \epsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$ o que prova o teorema quando $L > 0$.

3.5 Integrais elípticas

Uma integral elíptica é qualquer função f que pode ser expressa na forma $\int \frac{F(x)}{\sqrt{R(x)}}dx$ onde $R(x)$ é um polinômio de terceiro ou quarto grau com nenhuma raiz repetida e $F(x)$ é uma função racional.

As integrais elipticas tem como precursor o grande matemático Legendre $(1752-1833)$, ele verificou que estas integrais não podem ser reduzidas a formas conhecidas, porém seus trabalhos nas reduções originou três novos formatos da integral, a saber: as integrais elípticas de primeira, segunda e terceira espécie. Mas forem os pesquisadores Henrik Abel$(1802 - 1829)$[9] e Jakob Jacobi$(1804 - 1851)$[10], que ganharam notoriedade pelas suas grandes contribuições neste estudo, como as funções inversas das integrais elípticas.

Nessa seção, não nos preocuparemos em fazer muitos resultados sobre tal integral, nosso intuito é apenas definir as integrais elípticas de primeira espécie, algo que faremos a seguir, levando em conta a importância desses cálculos para resultados futuros.

[9] foi um matemático norueguês.

[10] um matemático alemão, que fez contribuições fundamentais para funções elípticas, dinâmica, equações diferenciais e teoria dos números.

3.5.1 Integrais elípticas de primeira espécie

A integral elíptica de primeira espécie é definida por:

$$F(x,k)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)\cdot(1-t^2)}},\quad \text{com}\quad 0<k^2<1,$$

onde o parâmetro k é chamado de módulo.

A partir da mudança de variável $t=\sin\theta$, com $\frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$, podemos converter a integral para sua forma trigonométrica:

$$F(\phi,k)=\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$

quando $\phi=\frac{\pi}{2}$, e consequentemente $x=1$ (pois $x=\sin\phi$) obtemos a integral elíptica completa de primeira espécie em sua forma trigonométrica e algébrica respectivamente dadas por:

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

e

$$K(k)=\int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}}.$$

Mais adiante utilizaremos a integral elíptica de primeiro tipo com uma relação com a média aritmética geométrica, onde esta relação será construída junto com o resultado ao qual esta será uutizada.

3.6 Problemas importantes

3.6.1 Problema 1: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{t}{n})^n=e^t$.

Essa função é monótona e limitada, logo é convergente. E esta afirmação é demonstrada no curso de análise do autor (Elon, 2008). Por hora iremos mostrar que o limite e válido fazendo uso da regra de L'hospital, também mostrado no curso de cálculo do (Elon, 2008) levando em conta que quando necessário iremos considerar que o limite $(1+\frac{t}{n})^n=e^t$.

Definição 3.5 *O objetivo da regra de L'hospital é calcular o limite de frações nos casos em que há indeterminações do tipo* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$. *A regra diz que, nesses casos, o limite da* *fração é igual ao limite da derivada do numerador dividida pela derivada do denominador, supondo funções deriváveis no intervalo de interesse.*

Provaremos o limite proposto fazendo uso da definição e de algumas regras dos logaritmos, onde consideraremos: $(1+\frac{t}{n})^n = a_n$ e aplicaremos ln a ambos os lados :

$$n \cdot \ln(1+\frac{t}{n}) = \ln a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln(1+\frac{t}{n}) = \lim_{n\to\infty} \ln a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{t}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{t}{n}} \cdot \frac{-t}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \ln a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t}{1+\frac{t}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln a_n$$

$$t = \lim_{n\to\infty} \ln a_n \implies \ln \lim_{n\to\infty} a_n = t \implies \lim_{n\to\infty} a_n = e^t.$$

Como: $(1+\frac{t}{n})^n = a_n$, concluímos que : $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{t}{n})^n = e^t$, onde e é a base dos logaritmos naturais, e esta também é chamada de constante de Euler.

3.6.2 Problema 2: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Seja $r > 0$ considere a seguinte mudança:

$$\begin{aligned} I(r) = \int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx = \int_{-r}^{r} e^{-y^2}dy \implies I(r)^2 &= \int_{-r}^{r} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-r}^{r} e^{-y^2}dy \\ &= \int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \end{aligned} \tag{1}$$

Seja B e B_1 os círculos inscrito e circunscrito onde $-r \leqslant x \leqslant r$ e $-r \leqslant y \leqslant r$ o raio de B e B_1 são respectivamente r e $\sqrt{2}r$, portanto:

$$\int\int_B e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leqslant [I(r)]^2 \leqslant \int\int_{B_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy. \tag{2}$$

Fazendo uso das coordenadas polares, onde: $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$, $(x^2+y^2) = \rho^2$ e fazendo uma mudança de variável, onde: $u = -p^2 \implies du = -2pdp$ temos que:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r} e^{-\rho^2}\rho \cdot d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{r} e^{-p^2}pd\rho. \tag{3}$$

$$= 2\pi \cdot (\frac{-1}{2}) \left[\int_0^{-r^2} e^u du \right] = -\pi[e^{-r^2} - e^0] = \pi[1 - e^{-r^2}].$$

De modo análogo para o circunferência B_1.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}\cdot r} e^{-\rho^2} d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{2}r} e^{-p^2} p d\rho \\ &= 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \int_0^{-2r^2} e^u du \right] \\ &= -\pi[e^{-2\cdot r^2} - e^0] = \pi[1 - e^{-2\cdot r^2}]. \end{aligned} \tag{4}$$

Assim: $\pi[1 - e^{-r^2}] \leqslant [I(r)]^2 \leqslant \pi[1 - e^{-2\cdot r^2}]$.

Aplicando limite em ambos os lados, temos que:

$$\lim_{r\to\infty} \pi[1 - e^{-r^2}] \leqslant \lim_{r\to\infty} [I(r)]^2 \leqslant \lim_{r\to\infty} \pi[1 - e^{-2\cdot r^2}] \implies$$

$$\sqrt{\pi} \leqslant \lim_{r\to\infty} I(r) \leqslant \sqrt{\pi} \implies \lim_{r\to\infty} I(r) = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

3.6.3 Problema 3: $\sin(\pi \cdot z) = \pi \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$

Admitindo que: $\pi \cot(\pi \cdot z) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n}$ e seja : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-z^2}$ temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2 - z^2} \\ &= \frac{-1}{2z} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \\ &= \frac{-1}{2z} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z-n} + \sum_{n-1}^{N} \frac{1}{z+n} \right) \\ &= \frac{-1}{2z} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z-n} + \sum_{-n=1}^{-N} \frac{1}{z-n} \right) \\ &= \frac{-1}{2z} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z-n} + \sum_{n=-1}^{-N} \frac{1}{z-n} \right) \\ &= \frac{-1}{2z} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{z-n} + \sum_{-N}^{n=-1} \frac{1}{z-n} \right) \\ &= \frac{-1}{2z} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{z-n} + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{z-n} \right) \\ &= \frac{-1}{2z} \left(\frac{-1}{z} + \pi \cdot \cot(\pi \cdot z) \right). \end{aligned}$$

Logo: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - z^2} = \dfrac{-1}{2z}\left(\dfrac{-1}{z} + \pi \cdot \cot(\pi \cdot z)\right) \implies \dfrac{1}{z} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z}{z^2 - n^2} = \pi \cdot \cot(\pi \cdot z)$.

Utilizando a demonstração acima temos que, uma primitiva de $\pi \cot(\pi \cdot z)$ é $\ln(\sin \pi \cdot z)$. De fato, se derivarmos $\ln(\sin(\pi \cdot z))$ temos que:

$$(\ln \sin(\pi \cdot z))' = \frac{1}{\sin(\pi \cdot z)} \cdot \cos(\pi \cdot z)\pi = \pi \cdot \cot(\pi \cdot z).$$

Relacionando as equações já provadas, teremos que:

$$\ln \sin(\pi \cdot z) = \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2 - z^2}{n^2}\right) + c$$

$$e^{\ln \sin(\pi \cdot z)} = e^{\ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2 - z^2}{n^2}\right) + c}$$

$$\sin(\pi \cdot z) = e^{\ln z} \cdot e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2 - z^2}{n^2}\right)} \cdot e^c$$

$$\sin(\pi \cdot z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - z^2}{n^2}\right) \cdot e^c$$

$$\frac{\sin(\pi \cdot z)}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - z^2}{n^2}\right) \cdot e^c$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin(\pi \cdot z)}{z} = \lim_{z \to 0}(\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - z^2}{n^2}\right) \cdot e^c).$$

Concluindo que $\pi = e^c$, onde utizamos a regra de L'hospital para afirmar que :

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin(\pi \cdot z)}{z} = \pi.$$

Assim, $\quad \dfrac{\sin(\pi \cdot z)}{z} = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - z^2}{n^2}\right) \cdot e^c = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \cdot \pi.$

Portanto, $\quad \sin(\pi \cdot z) = z \cdot \pi \cdot \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \implies \frac{\sin(\pi \cdot z)}{z \cdot \pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$

4 Construção da função Gama, suas extensões, nuance com a trigonometria e fórmula de legendre

Sabemos que a função fatorial na maioria dos livros só está definida nos naturais e, até então não sabemos mais nada além disso, por exemplo, não faz sentido calcular com o recurso dos livros didáticos, $(\frac{1}{2})!$. Nesta seção iremos mostrar a construção da função Gama do ponto de vista da extensão fatorial, chegaremos a resultados que serão indispensáveis ao longo desta dissertação e mostraremos sua relação com a trigonometria.

4.1 Processo de construção da função Gama de Euler

A função Gama (Γ) é uma das funções mais importantes na matemática, o formato dela como integral foi introduzida por Euler em 1730, resultado de uma pesquisa sobre uma forma de interpolação fatorial para números não naturais. Euler comunicou sua descoberta ao professor Golbach dizendo que: "encontrei duas integrais interessantes que persistem em aparecer nos meus estudos. É impressionante, Goldbach[11], a beleza e simplicidade desses objetos". Posteriormente, essa função foi estudada por outros matemáticos, incluindo Adrian Marie Legendre[12] , que, em 1809, a denominou função Gama.

Anos depois, Bernhard Riemann [13](1826-1866) e Karl Weierstrass[14] (1815-1897) soube-se que a função de valor complexo que resulta da substituição por números complexos na integral de Euler é uma função analítica, igualmente da equação do produto de Euler. A função gama desempenha um importante papel em diversas areas entre elas as funções de distribuição probabilísticas, sendo assim, encontram-se aplicações nos campos da probabilidade, estatística e combinatória.

A função Gama de Euler foi, inicialmente, concebida como uma generalização contínua da função fatorial de números naturais $n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$. Essa função $\Gamma(n)$ é definida para todos os números reais para $n \neq \{0, -1, -2, \cdots\}$. Relaciona-se aos fatoriais pelo fato de que satisfaz um relacionamento recursivo similar àquele da função fatorial. A idéia que Euler perseguiu foi a de encontrar uma função K que satisfizesse $K(1) = 1$ e a equação de recorrência $K(x+1) = x \cdot K(x)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_{-}$. Após diversas tentativas, Euler em (1729) concluiu que $\Gamma(x)$ é definida por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} [(1 + \frac{1}{m})^{x} \cdot (1 + \frac{x}{m})^{-1}]$$

De fato, esta expressão satisfaz a recorrência. Analisaremos a seguir este fato.

[11]matemático prussiano Christian Goldbach,

[12]Fez importantes contribuições à estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática. Foi eleito membro da Royal Society em 1789.

[13]foi um matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial.

[14]foi um matemático alemão, professor na Universidade de Berlim.

$$1+x=\frac{1+x}{2+x}\cdot\frac{2+x}{3+x}\cdot\frac{3+x}{4+x}\cdots\frac{n-1+x}{n+x}\cdot\frac{n+x}{n+1+x}\cdots \tag{5}$$

$$1=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots \tag{6}$$

De 5 e 6 temos que:

$$\begin{aligned}(1+x)\cdot 1 &= 2\cdot\frac{1+x}{2+x}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2+x}{3+x}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1+x}{n+x}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\\ &=\prod_{m=1}^{\infty}\left[\frac{m+1}{m}\cdot\frac{m+x}{m+1+x}\right].\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \frac{1}{x+1}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x+1}\cdot\left(1+\frac{x+1}{m}\right)^{-1}\right]\\ &=\frac{x}{x\cdot(x+1)}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{x}{m}\right)^{-1}\right]\cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\prod_{m=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1+\frac{x+1}{m}\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{x}{m}\right)\right]\\ &=\Gamma(x)\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{m+1}{m}\right)\cdot\left(\frac{m+x}{m}\right)\cdot\left(\frac{m}{m+x+1}\right)\right]\\ &=\Gamma(x)\cdot\frac{x}{x+1}\prod_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{m+1}{m}\right)\cdot\left(\frac{m+x}{m+1+x}\right)\right]\\ &=\Gamma(x)\cdot\frac{x}{x+1}\cdot(x+1)\\ &=\Gamma(x)\cdot x\end{aligned}$$

Portanto, satisfaz a condição desejada. Euler estudou diversas propriedades da função definida na expressão citada, que passou posteriormente a ser chamada de Gama. Uma dessas propriedades identificada por Euler foi o fato de que a função Gama pode ser definida como:

$$\Gamma(u)=\int_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^{u-1}du$$

Mais adiante, iremos provar que: $\Gamma(n+1) = n{\cdot}\Gamma(n)$ no estudo da função como uma integral e, que junto com a definição $\Gamma(1) = 1$ e $n! = n \cdot (n-1)!$ analisaremos que isso gera a equação $\Gamma(n+1) = n!$, definida para todo $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$. Devido a este relacionamento, a função gama é frequentemente tida como uma extensão da função fatorial nos naturais onde, por vezes, estenderemos para números fracionários. A principio iremos mostrar os dois formatos da função Gama mecionadas e suas intrínsecas relações.

Proposição 4.1 *Prove que:* $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} dt = \dfrac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} (1+\frac{1}{k})^z \cdot (1+\frac{z}{k})^{-1}$. *para* $z \in \mathbb{R} > 0$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} dt &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left[\int_0^n t^{z-1} \cdot (1 - \frac{t}{n})^n dt \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[(\frac{t^z}{z} \cdot (1-\frac{t}{n})^n)\Big|_0^n + \int_0^n \frac{t^z}{z} \cdot n \cdot (1-\frac{t}{n})^{n-1} \cdot \frac{1}{n} dt \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{z} \int_0^n t^z \cdot (1-\frac{t}{n})^{n-1} \frac{1}{n} dt \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{z} \cdot \int_0^n t^z \cdot (1-\frac{t}{n})^{n-1} dt \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z} \left[\left(\frac{t^{z+1}}{z+1} \cdot (1-\frac{t}{n})^{n-1}\Big|_0^n \right) + \int_0^n \frac{t^{z+1}}{z+1} \cdot (n-1) \cdot (1-\frac{t}{n})^{n-2} \cdot \frac{1}{n} dt \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z} \left[\frac{n-1}{n \cdot (z+1)} \int_0^n t^{z+1} \cdot (1-\frac{t}{n})^{n-2} dt \cdots \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n \cdot z} \cdot \frac{(n-1)}{n \cdot (z+1)} \cdots \frac{(n-(n-2))}{n \cdot (z+(n-2))} \int_0^n t^{z+(n-2)} (1-\frac{t}{n})^{n-(n-1)} dt \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n \cdot z} \cdot \frac{(n-1)}{n \cdot (z+1)} \cdots \left[\frac{t^{z+(n-1)}}{z+(n-1)} \cdot ((1-\frac{t}{n})^{n-(n-1)})\Big|_0^n + \int_0^n \frac{t^{z+(n-1)}}{z+n-1} \cdot \frac{1}{n} dt \right] \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n \cdot z} \cdot \frac{(n-1)}{n \cdot (z+1)} \cdots [\frac{n-(n-2)}{n \cdot (z+(n-2)} \cdot \frac{n-(n-1)}{n \cdot (z+(n-1))} \int_0^n t^{z+n-1} dt] \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n \cdot z} \cdot \frac{(n-1)}{n \cdot (z+1)} \cdots \frac{n-(n-2)}{n \cdot (z+(n-2))} \cdot \frac{n-(n-1)}{n \cdot (z+(n-1))} \cdot \frac{t^{z+n}}{(z+n)}\Big|_0^n \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n! \cdot n^{z+n}}{z \cdot n^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(z+k)} \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^z}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{z+k} \right].
\end{aligned}
$$

Considere que:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z &= \left(1+\frac{1}{1}\right)^z \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^z \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^z \\
&= \frac{2^z}{1} \cdot \frac{3^z}{2^z} \cdots \frac{n^z}{(n-1)^z} \\
&= n^z.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\cdot e^{-t}dt &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{z}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^z\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{z}{k}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{z}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^z\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{z}{k}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^z\cdot\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\\
&= \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^z\cdot\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Uma observação importante é que Gauss[15] reconhecia a função Gama com o formato:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^z}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdots(z+n)}.$$

4.2 Análise da convergência e divergência da integral $\int_0^\infty e^t\cdot t^{x-1}dt$.

Mostraremos que a função Gama é convergente para $x > 0$ e divergente se $x \leq 0$. Primeiro, vamos analisar o cálculo para o caso $x \geq 1$, em seguida o caso $0 < x < 1$ e por fim, $x \leq 0$.

1. Mostre que, para $x \geq 1$, a integral imprópria $\int_0^\infty e^t\cdot t^{x-1}dt$ é convergente.

   Para $x \geq 1$, $f(x) = e^{-t}\cdot t^{x-1}$ é continua em $[0,r]$, para todo $r > 0$, logo a integral é impropria apenas em $+\infty$, temos portanto que : $e^{-t}\cdot t^{x-1} = e^{\frac{-t}{2}}\cdot\left(e^{\frac{-t}{2}}\cdot t^{x-1}\right)$. De $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\frac{-t}{2}}\cdot t^{x-1} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^{x-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = 0$, segue que existe $r > 0$, tal que $e^{\frac{-t}{2}}\cdot t^{x-1}$ < 1 para $t \geq r$. Assim, $e^{-t}\cdot t^{x-1} < e^{\frac{-t}{2}}$ para $t \geq r$, como $\int_0^{+\infty} e^{\frac{-t}{2}}dt=$ $\lim\limits_{k\to+\infty}\int_0^k e^{\frac{-t}{2}}dt= 2$. Segue pelo critério de comparação, a convergência da integral imprópria $\int_0^{+\infty} e^t\cdot t^{x-1}dx$.

2. Mostre que, para $0 < x < 1$, a integral impropria $\int_0^{+\infty} e^t\cdot t^{x-1}dt$ é convergente.

   $$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt = \int_0^1 e^{-t}\cdot t^{x-1}dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt.$$

   Raciocinando como no exemplo 1, conclui-se que : $\int_1^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt$ é convergente. Como e^{-t} é limitada em $[0,1]$, para verificar a convergência de $\int_0^1 e^{-t}\cdot t^{x-1}dt$ basta analisar que $\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge.

[15]foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência

De fato, como $x-1<0$, logo $\int_0^1 t^{x-1}dt$ é imprópria, assim:

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \lim_{k\to 0^+}\int_k^1 t^{x-1}dt = \lim_{k\to 0^+} \frac{t^x}{x}\Big|_k^1 = \lim_{k\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{k^x}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Concluindo pelo critério de comparação a convergência da integral imprópria $\int_0^{+\infty} e^t\cdot t^{x-1}dx$.

3. Mostre que para $x \leqslant 0$, a integral imprópria $\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt$ é divergente.

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt = \int_0^1 e^{-t}\cdot t^{x-1}dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt.$$

A integral $\int_0^1 e^{-t}\cdot t^{x-1}dt$, de $0\leqslant t\leqslant 1$ onde função e^{-t} fica sob controle de $0\leqslant e^{-t}\leqslant 1$ e a convergência ou divergência depende da integral $\int_0^1 t^{x-1}dt$ quando $x\leqslant 0$. De fato,

(a) Para $x=0$ a $\int_0^1 t^{x-1} = \int_0^1 t^{-1}dt = \lim\limits_{k\to 0^+}\int_k^1 \frac{1}{t} = \lim\limits_{k\to 0^+}(\ln 1 - \ln k) = \infty$.

(b) Para $x<0 \implies x-1<-1$ temos que:

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \lim_{k\to 0^+}\int_k^1 t^{x-1}dt = \lim_{k\to 0^+} \frac{t^x}{x}\Big|_k^1 = \lim_{k\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{k^{-x}}\right) = \infty.$$

Portanto pelo item a e b e pelo fato de $0\leq t\leq 1 \implies 0\geq -t\geq -1$ teremos que: $e^{-t}\geq e^{-1} \implies e^{-t}\cdot t^{x-1}\geq e^{-1}\cdot t^{x-1}$, então pelo critério de comparação a integral $\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt$ é divergente para $x\leq 0$.

Assim todo o texto analisado ate aqui sobre a função Gama nos proporciona recursos para estender o domínio em $\Gamma:\mathbb{R}-\mathbb{Z}_-\to\mathbb{R}$, pois sabemos que ela está, na maioria das vezes, definida no intervalo de $(0,\infty)$, ou seja, o conjunto dos x para os quais a integral que a define converge. Ainda percebemos com as construções analisas que a função Gama não só resolve muitos problemas, como possui propriedades bem particulares que permitem sua extensão.

4.3 Primeiro reconhecimento da função integral relacionada ao fatorial

Seja a integral

$$\int_0^\infty e^{-r}dr = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-r}dr = \lim_{n\to\infty}[-e^{-r}] = \lim_{n\to\infty}[-e^{-n}+1] = 1.$$

Seja $r = s \cdot t$ com $t > 0$ temos que $dr = tds$ assim:

$$\int_0^\infty e^{-r} dr = 1 \implies \int_0^\infty e^{-s \cdot t} ds = \frac{1}{t}.$$

Derivando em relação a t na integral anterior:

$$\int_0^\infty -s \cdot e^{-s \cdot t} ds = \frac{-1}{t^2} \implies \int_0^\infty -s \cdot e^{-s \cdot t} ds = \frac{-1}{t^2}.$$

Utilizando o mesmo processo novamente na expressão anterior :

$$\int_0^\infty -s^2 \cdot e^{-s \cdot t} ds = \frac{-1 \cdot 2}{t^3} \implies \int_0^\infty s^2 \cdot e^{-s \cdot t} ds = \frac{1 \cdot 2}{t^3}.$$

Derivando sucessivas vezes em relação a t:

$$\int_0^\infty s^n \cdot e^{-s \cdot t} ds = \frac{n!}{t^{n+1}} \; para \; t > 0 \; .$$

Para $t = 1$:

$$\int_0^\infty s^n \cdot e^{-s} ds = n!.$$

Dessa forma, temos uma extensão da função fatorial definida para quaisquer valores nos $\mathbb{R} > 0$ representada por : $f(x) = \int_0^\infty s^x \cdot e^{-s} ds = x!$. Contudo, consagrou-se a função Gama de Euler definida como: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$, onde $\Gamma(x) = f(x-1)$ e analogamente $\Gamma(x) = (x-1)!$. Esta relação nos permite afirmar que quando calculamos a função Gama de outros números no seu dominio, estamos obtendo o fatorial dele. Analisaremos melhor este fato com o uso da recorrência que provaremos a seguir.

4.4 A função Gama e a extensão da função fatorial nos números reais

Iniciaremos mostrando que $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, com $x > 0$. Essa recorrência tem um papel essencial quando analisamos números não naturais, levando em conta que conseguiremos estabelecer uma relação com o fatorial sem passar pelo clássico processo de se chegar até o 1 como se faz quando $x \in \mathbb{N}$.

Utilizando a integral da função Gama já definida e integrando por partes temos que:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^x dt = \lim_{k \to \infty} \int_0^k e^{-t} \cdot t^x dt.$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{k \to +\infty} \left[[-e^{-t} \cdot t^x]_0^k - \int_0^k -e^{-t} \cdot x \cdot t^{x-1} dx \right] \\
&= x \cdot \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} dt \\
&= x \cdot \Gamma(x).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ para todo $x > 0$. Utilizaremos essa demonstração para verificar de forma mais clara que a recorrência satisfaz: $\Gamma(x) = (x-1)!$, $x \in \mathbb{N}$.

De fato: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x \cdot (x-1) \cdot \Gamma(x-1) \\
&= x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \Gamma(x-2) \\
&= x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \\
&= x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= x!.
\end{aligned}
$$

Podemos provar também por indução que $\Gamma(x) = (x-1)!$ quando $x \in \mathbb{N}$.

- Para $x = 1$, temos que $\Gamma(1) = (0)! = 1$. Logo válido para $x = 1$
- Suponha que: $\Gamma(x) = (x-1)!$
- Provaremos a válidade para $x+1$. De fato: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) = x \cdot (x-1)! = x!$ e pelo principio de indução finita é válido para todo $x \in \mathbb{N}$.

Assim: $\Gamma(x+1) = x!$ para $x \in \mathbb{N}$ e como já foi explanado a relação mostra claramente a extensão fatorial, onde veremos que é possivel estender esse domínio e isto, nos permitirá dizer que: $\Gamma(x) = (x-1)!$ para todo $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$.

Utilizando a integral é possivel constatar que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, com isso podemos utilizar a recorrência demonstrada e provar que é possivel calcular fatoriais de números naturais e não inteiros, por exemplo $(\dfrac{-1}{2})! = \sqrt{\pi}$.

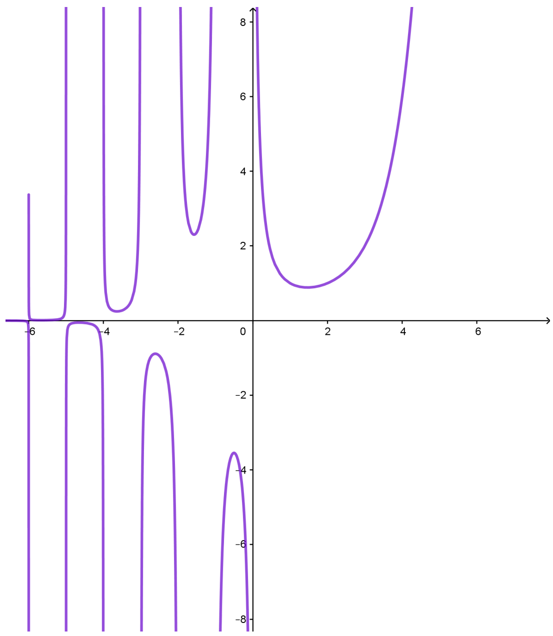
Para realizar os calculos mensionados alem dos inteiros positivos não podemos depender do tamanho de $x!$, pois a simples fórmula $x! = x \cdot (x-1) \cdots 1$ não se aplica a números fracionários. Euler, mostrou que não há uma expressão convencional para fatoriais, no sentido que não se pode ser combinações de finitos termos,nos quais o termo geral não pode ser expresso algebricamente, logo: $\Gamma(n+a) = (a+(n-1)) \cdot (a+(n-2) \cdots (a+2) \cdot (a+1) \cdot a\Gamma(a)$.

A recorrência $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ e $\Gamma(x) \approx \dfrac{1}{x}$ quando $x \to 0$, permite a extensão da definição da função Gama para valores positivos e negativos não inteiros, por exemplo: $(\frac{-3}{2})! = -2 \cdot \sqrt{\pi}$, estendendo o conceito definido por (Guidorizzi, 2006, p.67), onde afirma que $\alpha! = \Gamma(\alpha + 1)$ é definido somente para todo real $\alpha > -1$.

Em geral, para x diferente de um inteiro negativo temos que: $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+m+1)}{x \cdot (x+1) \cdots (x+m)}$, onde m é qualquer inteiro positivo. Segundo (Oliveira, 2005), a fórmula mostra claramente que $\Gamma(x)$ se torna ilimitada quando x tende para qualquer inteiro negativo, mas precisamente, se um inteiro é escolhido de forma que $m - 1 < -x < m + 1$ obtemos que $\Gamma(x) \approx \dfrac{1}{x+m}$, quando $x \to -m$.

Analisando o gráfico da função Gama é possível percebermos de forma inlustrada onde a função está bem definida.

Gráfico 1: Função Gama



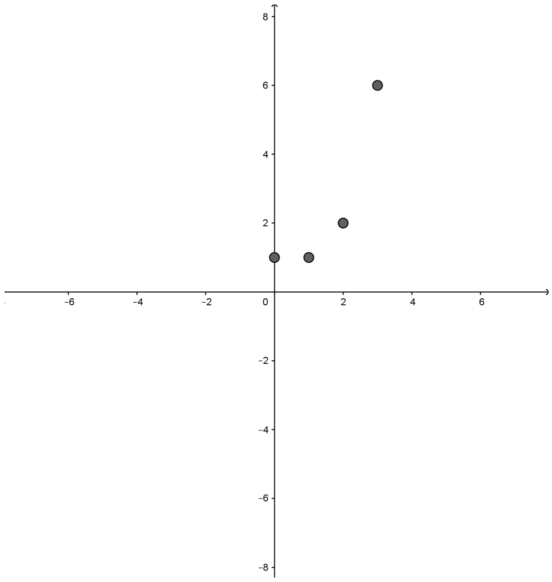
Fonte: Própria Autora.

4.5 Análise gráfica da função Gama e fatorial

Nesta subseção análisaremos as construções gráficas onde utilizamos o programa geogebra, gráficos estes que faz mensão as funções citadas, nos possibilitando observar como elas se comportam de fato e, constatando onde ocorre a interseção entre elas.

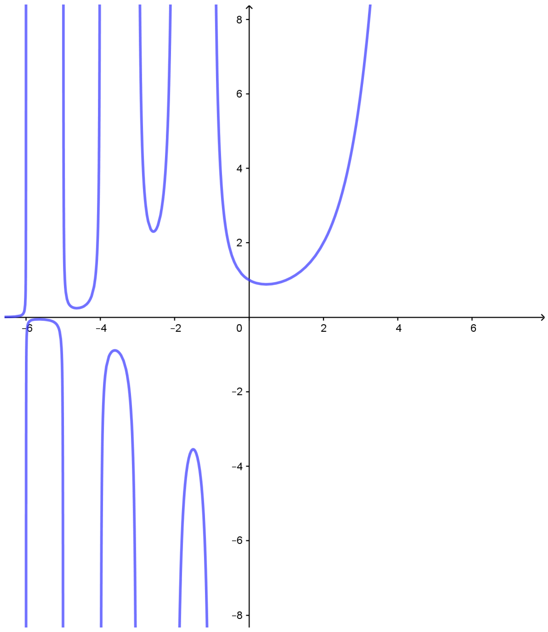
Daremos atenção aos pontos onde eslas estão definidas, observando que suas interseções acontecem nos pontos onde há números naturais.

Gráfico 2: Função Fatorial $g(x) = x!$.



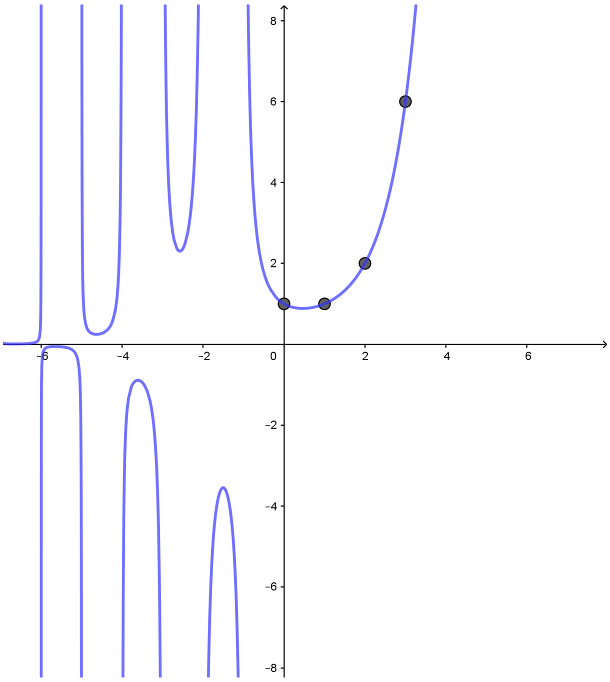
Fonte: Própria Autora.

Gráfico 3: Função $f(x) = \Gamma(x+1)$.



Fonte: Própria Autora.

Gráfico 4: Funções $f(x) \cap g(x)$.



Fonte: Própria Autora.

4.6 Relação da função Gama com a função trigonométrica

Uma identidade importante que relaciona a função Gama às funções trigonométricas é que: $\Gamma(1-x)\cdot\Gamma(x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\cdot x)}$ válida para todo, $x \neq (0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ em particular, a identidade que será provada mostra que a função gama não possui zeros para todos os valores não inteiros de x (para o qual a identidade é válida) e que para valores inteiros de x a função não é nula.

Utilizaremos o fato que: $\dfrac{\sin(\pi\cdot x)}{x\cdot\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ já provado anteriormente e a função Gama na forma de produtório, provado na seção 3.

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{x}{k}\right)}$$

$$\Gamma(-x) = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{x}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-x}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{x}{k}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1-x)\cdot\Gamma(x) &= -x\cdot\Gamma(-x)\cdot\Gamma(x)\\
&= -x\cdot\frac{-1}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-x}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x}{k}\right)}\cdot\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{k}\right)}\\
&= \frac{1}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{x\pi}{\sin(\pi\cdot x)}\\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi\cdot x)}
\end{aligned}
$$

4.7 Fórmula da duplicação de Legendre

A fórmula da duplicação é definida por: $2^{2x-1}\cdot\Gamma(x)\cdot\Gamma(x+\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2x)$, válida para todo $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}_-$ que não seja da forma $-x$ ou $-x-\frac{1}{2}$ com $x=\{0,1,2,3\cdots\}$.

Como já provado anteriormente iremos considerar que: $x\cdot\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$ e $\Gamma(2x+1)=(2x)!$ e, assumiremos que: $\Gamma(x+\frac{1}{2})=\dfrac{(2x)!\cdot\sqrt{\pi}}{4^x\cdot x!}$, onde demonstraremos mais adiante. De fato:

$$
\begin{aligned}
2^{2x-1}\cdot\Gamma(x)\cdot\Gamma(x+\frac{1}{2}) &= 2^{2x-1}\cdot\Gamma(x)\cdot\frac{(2x)!}{4^x\cdot x!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= 2^{2x-1}\cdot\Gamma(x)\cdot\frac{(2x)!}{2^{2x}\cdot x!}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \Gamma(x)\cdot\frac{(2x)!}{x!}\cdot 2^{-1}\sqrt{\pi}\\
&= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+1)}\cdot\frac{\Gamma(2x+1)}{2x}\cdot x\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \frac{\Gamma(x)\cdot x}{\Gamma(x+1)}\cdot\frac{\Gamma(2x+1)}{2x}\cdot\sqrt{\pi}\\
&= \Gamma(2x)\cdot\sqrt{\pi}.
\end{aligned}
$$

5 Resolvendo problemas usando a função Gama

Diante das pesquisas feitas até aqui, percebe-se que muitas questões podem ter seus resultados bem mais sucintos se tivermos conhecimentos das definições da função Gama. Fazendo um apanhado de resultados, foi possível identificar algumas questões que é essencial o uso de tal função. A seguir explanaremos algumas demonstrações que satisfazem conceitos já visto nesse trabalho e fatos novos que podem auxiliar demostrações futuras, deixando como contribuição aos leitores.

1. Calcular a função Gama para valores racionais positivos.

   (a) Mostre que: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

   Sabemos da subseção 2.4 que: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, como e^{-x^2} é uma função par, $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1}.e^{-t}dt = \int_0^{\infty} t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}dt.$$

   Fazendo uma mudança de variável $t = u^2$, temos que: $dt = 2udu$ e

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{-1}{2}}.e^{-t}dt = \int_0^{\infty} u^{-1}.e^{-u^2}2udu = 2.\int_0^{\infty} .e^{-u^2}du = \frac{2.\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

   (b) Calcular: $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$.
   Sabemos que: $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

   (c) Calcular: $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}.$$

   (d) Calcular: $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma(1+\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}\cdot\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

2. Uso da função gama para $n < 0$.
   (a) Calcular: $\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)$.
   Como $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ temos que:

$$\Gamma\left(\frac{-1}{2}+1\right) = \frac{-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) \implies \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-1}{2}} = \Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) \implies -2 \cdot \sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{-1}{2}\right).$$

   (b) Calcular: $\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right)$.

$$\Gamma\left(\frac{-3}{2}+1\right) = \frac{-3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) \implies \Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{-2}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\pi}.$$

   (c) Calcular: $\Gamma\left(\frac{-5}{2}\right)$.

$$\Gamma\left(\frac{-5}{2}+1\right) = \frac{-5}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{-5}{2}\right) \implies \Gamma\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-2}{5} \cdot \Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{-8}{15} \cdot \sqrt{\pi}.$$

3. Encontre uma forma geral para : $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ para $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(n-\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(n-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(n-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(n-\frac{7}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2n-1}{2} . \frac{2n-3}{2} \cdot \frac{2n-5}{2} \cdots \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdots 2}{2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdots 2} \\
&= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2n-3) \cdot (2n-2) \cdot (2n-1) \cdot 2n}{2^n \cdot 2^n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots 1} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n)! \cdot \sqrt{\pi}}{2^{2n} \cdot n!}.
\end{aligned}$$

4. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} \cdot n^{b-a} = 1$ para $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$.

$$\Gamma(n+a) = (a+(n-1)) \cdot (a+(n-2) \cdot (a+(n-3)) \cdots (a+2) \cdot (a+1) \cdot a\Gamma(a).$$

$$\Gamma(n+b) = (b+(n-1)) \cdot (b+(n-2) \cdot (b+(n-3)) \cdots (b+2) \cdot (b+1) \cdot b\Gamma(b).$$

De fato: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} \cdot n^{b-a} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\prod_{n=1}^{n-1}(a+k) \cdot a\Gamma(a)}{\prod_{n=1}^{n-1}(b+k) \cdot b \cdot \Gamma(b)} \cdot n^{b-a}$.

Logo:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{n=1}^{n-1}(a+k)\cdot a\Gamma(a)}{\prod_{n=1}^{n-1}(b+k)\cdot b\cdot\Gamma(b)}\cdot n^{b-a}=\lim_{n\to\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{b+k}\cdot\frac{1}{b}\cdot\Gamma(a)}{\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a+k}\cdot\frac{1}{a}\cdot\Gamma(b)}\cdot n^{b-a}$$
$$=\frac{\Gamma(a)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{b+k}\cdot(\frac{1}{b+n})^{-1}\cdot\frac{1}{b}\cdot n^{b}\right]}{\Gamma(b)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a+k}\cdot(\frac{1}{a+n})^{-1}\cdot\frac{1}{a}\cdot n^{a}\right]}$$
$$=\frac{\Gamma(a)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^b}{b}\left[\prod_{k=1}^{n}\cdot\frac{1}{b+k}\cdot(b+n)\right]}{\Gamma(b)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^a}{a}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a+k}\cdot(a+n)\right]}$$
$$=\frac{\Gamma(a)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k}\frac{n^b}{b}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{b}{k}}\cdot(\frac{b}{n}+1)\right]}{\Gamma(b)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{n^a}{a}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{a}{k}}\cdot(\frac{a}{n}+1)\right]}$$
$$=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(b)\cdot\Gamma(a)}=1.$$

5. Prove que $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{-\ln x}}dx=-\sqrt{\pi}$.
Solução: Fazendo uma mudança de variável : $\ln x=u \implies -\frac{1}{x}dx=du$ logo:

$$\int_0^\infty\frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}}du=-\int_0^\infty e^{-u}\cdot u^{\frac{-1}{2}}du=-\int_0^\infty e^{-u}\cdot u^{\frac{1}{2}-1}=-\Gamma(\frac{1}{2})=-\sqrt{\pi}.$$

6. Mostre que $\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{n-1}dx=-\Gamma(n)$.
Solução: Fazendo uma mudança de variável:

$$\ln\frac{1}{x}=u\implies x^{-1}=e^u\implies -x^{-2}dx=e^udu\implies -e^{2u}dx=e^udu$$
$$\implies dx=-e^{-u}du.$$

Assim:

$$\int_0^1(\ln\frac{1}{x})^{n-1}dx=\int_0^\infty u^{n-1}\cdot -e^{-u}du=\int_0^\infty u^{n-1}\cdot e^{-u}du=-\Gamma(n).$$

7. Prove que : $\int_0^\infty x^m\cdot(\ln x)^n dx=\dfrac{-1^{n+1}\cdot n!}{(m+1)^{n+1}}$.
Solução: Fazendo uma mudança de variável, $x=e^{-y}\implies dx=-e^{-y}dy$,
e quando necessário utilizaremos também que: $\implies y(m+1)=u\implies(m+1)dy=du$

$$\int_0^\infty x^m\cdot(\ln x)^n dx=-\int_0^\infty e^{-ym}\cdot(\ln e^{-y})^n\cdot e^{-y}dy=-\int_0^\infty(e^{-ym})\cdot(-y)^n\cdot e^{-y}dy$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1}\int_0^{\infty} e^{-y(m+1)}\cdot y^n dy\\
&= (-1)^{n+1}\cdot\int_0^{\infty} e^{-u}\cdot\frac{u^n}{(m+1)^n}\cdot\frac{1}{(m+1)}du\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{(m+1)^{n+1}}\int_0^{\infty} e^{-u}\cdot u^n du\\
&= \frac{-1^{n+1}\cdot n!}{(m+1)^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

8. Função com comportamento assintótico de $\Gamma(x)$ para valores grandes de x, diz que: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\Gamma(x+1)}{x^x\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$.

   Explanaremos abaixo alguns recursos que serão decisivos na demonstração proposta.

   - Mostre que o $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

     Utilizando o então resultado já demonstrado: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, então o $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$. Considerando $a_n = \frac{n^n}{n!}$, temos que :

     $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n = e.$$

     Assim : $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

   - Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\big(\frac{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}}{x!}\big)^{\frac{1}{x}} = e$.

     $$\lim_{x\to\infty} x\cdot(\frac{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}}{x!})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[x]{x!}}\cdot\lim_{x\to\infty}(2\cdot\pi\cdot x)^{\frac{1}{2x}} = e.$$

     Sem perda de generalidade, podemos considerar:

     $$x^x\cdot\frac{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}}{x!} = e^x \implies \frac{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}}{x!} = \frac{e^x}{x^x} = (\frac{e}{x})^x \implies \frac{x!}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}} = (\frac{x}{e})^x,$$

   Conhecido como formula de Stiling quando $x > 0$.

   Com os resultados já provados, vamos demonstrar que: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{x^x\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi}$

   $$
   \begin{aligned}
   \lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{x^x\cdot e^{-x}\cdot\sqrt{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x!}{(\frac{x}{e})^x\cdot\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x!}{\frac{x!}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot x}}\cdot\sqrt{x}}\\
   &= \lim_{x\to\infty}\frac{x!\cdot\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{x}}{x!\cdot\sqrt{x}} = \sqrt{2\cdot\pi}.
   \end{aligned}
   $$

9. Prove que: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n!)^2.2^{2n}}{(2n)!.\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$.
Utilizaremos nessa demonstração alguns resultados já provados na questão anterior.

Solução:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{(n!)^2.2^{2n}}{(2n)!.\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2\cdot\pi\cdot n}\cdot(\frac{n}{e})^n)^2\cdot 2^{2n}}{\sqrt{4\cdot\pi\cdot n}\cdot(\frac{2n}{e})^{2n}\cdot\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\pi\cdot n\cdot(\frac{n}{e})^{2n}\cdot 2^{2n}}{\sqrt{4\cdot\pi\cdot n}\cdot 2^{2n}\cdot(\frac{n}{e})^{2n}\cdot\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\pi\cdot n}{\sqrt{4\cdot\pi\cdot n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\pi}{\sqrt{4\cdot\pi}}\\
&= \frac{2\pi}{2\cdot\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

10. Calcule: $\int_0^\infty x^6\cdot e^{-2x}dx$.
Considere a mudançade variável: $2x = a$ assim: $2dx = da$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^6\cdot e^{-2x}dx &= \int_0^\infty(\frac{a}{2})^6\cdot e^{-a}\frac{da}{2}\\
&= \frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-a}\cdot a^6 da\\
&= \frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{6!}{2^7} = \frac{720}{128}.
\end{aligned}$$

11. Prove que: $\lim_{x\to -n}(z+n)\cdot\Gamma(z) = \dfrac{(-1)^{-n}}{n!}$.
Utilizando sucessivas vezes o fato $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$, teremos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -n}(z+n)\cdot\Gamma(z) &= \lim_{x\to -n}(z+n)\cdot\frac{\Gamma(z+n+1)}{z\cdot(z+1)\cdot(z+2)\cdots(z+n-1)\cdot(z+n)}\\
&= \frac{\Gamma(1)}{-n\cdot(-n+1)\cdot(-n+2)\cdots(-n+n-1)}\\
&= \frac{1}{(-1)^n\cdot(n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1)}\\
&= \frac{(-1)^{-n}}{n!}.
\end{aligned}$$

As contribuições das problemáticas resolvidas nesse capítulo abre caminho para que possamos perceber que função Gama facilita cálculos onde os exemplos nos proporcionou uma intimidade com o manejo da integral que compõe tal função. A principal idéia é que consigamos suporte para analisar alguns aprimoramentos e aplicações.

6 A função Beta e sua relação com a função Gama

A função Beta também chamada de integral de Euler de Primeiro tipo, é a função definida pela integral: $B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}\cdot(1-t)^{n-1}dt$ onde $m,n \in \mathbb{R} > 0$. A relação da função Beta e Gama é dada por: $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

Demonstração: considerando $m,n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{m-1}\cdot(1-t)^{n-1}dx &= [\frac{t^m}{m}\cdot(1-t)^{n-1}]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^m}{m}\cdot(1-t)^{n-2}\cdot(-1)\cdot(n-1)dt\\
&= \frac{n-1}{m}\int_0^1 t^m\cdot(1-t)^{n-2}dt\\
&= \frac{n-1}{m}\left[[\frac{t^{m+1}}{m+1}\cdot(1-t)^{n-2}]_0^1 + \int_0^1 (1-t)^{n-3}\cdot\frac{t^{m+1}}{m+1}\cdot(n-2)dt\right]\\
&= \frac{n-1}{m}\cdot\frac{(n-2)}{m+1}\int_0^1 (1-t)^{n-3}\cdot t^{m+1}dx\\
&= \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)}\int_0^1 t^{m+2}\cdot(1-t)^{n-4}dt\\
&= \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)}\cdots\frac{n-(n-1)}{m+n-2}\int_0^1 t^{m+n-2}\cdot(1-t)^{n-n}dt\\
&= \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)}\cdots\frac{n-(n-1)}{m+n-2}\int_0^1 t^{m+n-2}dt\\
&= \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)}\cdots\frac{n-(n-1)}{m+n-2}\cdot\left[\frac{t^{m+n-1}}{m+n-1}\right]_0^1\\
&= \frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+2}\cdots\frac{n-(n-2)}{m+n-2}\cdot\frac{1}{m+n-1}\\
&= \frac{(n-1)!}{m\cdot(m+1)\cdots(m+n-1)}\\
&= \frac{(n-1)!}{m\cdot(m+1)\cdots(m+n-1)}\cdot\frac{(m-1)!}{(m-1)!}\\
&= \frac{(n-1)!\cdot(m-1)!}{(m+n-1)!}\\
&= \frac{\Gamma(n)\cdot\Gamma(m)}{\Gamma(m+n)}.
\end{aligned}$$

Esta relação estende-se para $m,n \in \mathbb{R} > 0$. Podemos estender o domínio dessa expressão analisando a demonstração a seguir, onde utilizaremos a mudança de variável: $x = u^2 \implies dx = 2udu$; $y = v^2 \implies dy = 2vdv$

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)\cdot\Gamma(b) &= \int_0^\infty x^{a-1}\cdot e^{-x}dx\cdot\int_0^\infty y^{b-1}\cdot e^{-y}dy\\
&= 4\cdot\int_0^\infty u^{2a-1}\cdot e^{-u^{-2}}du\cdot\int_0^\infty v^{2b-1}\cdot e^{-v^2}dv.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\cdot\Gamma(b) &= 4\cdot\int_0^{\infty}u^{2a-1}\cdot e^{-u^2}du\cdot\int_0^{\infty}v^{2b-1}\cdot e^{-v^2}dv\\ &= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{2a-1}\cdot v^{2b-1}\cdot e^{-(u^2+v^2)}dudv.\end{aligned}$$

Utilizando coordenadas polares, onde: $u = r\cos(\theta)$ e $v = r\sin(\theta) \implies dudv = rd\theta dr$.

$$\begin{aligned}&= 4\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos(\theta)^{2a-1}\cdot(\sin(\theta))^{2b-1}d\theta)\right)\cdot r^{2a+2b-2}\cdot e^{-r^2}rdr\\ &= \int_0^{\infty}(r^2)^{a+b-1}\cdot e^{-r^2}2rdr\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2(\theta))^{a-1}\cdot(\sin^2(\theta))^{b-1}\cdot sen(\theta)cos(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Realizando mais uma mudança de variável: $r^2 = p \implies 2rdr = dp$.

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\infty}p^{a+b-1}\cdot e^{-p}dp\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2(\theta))^{a-1}\cdot(\sin^2(\theta))^{b-1}\sin(\theta)\cos(\theta)d(\theta)\\ &= \Gamma(a+b)\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2(\theta))^{a-1}\cdot(\sin^2(\theta))^{b-1}\sin(\theta)cos(\theta)d(\theta).\end{aligned}$$

Para concluir utilizaremos que : $k = \sin^2(\theta) \implies dk = 2\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)d(\theta)$.

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\cdot\int_0^1(1-k)^{a-1}\cdot(k)^{b-1}dk = \Gamma(a+b)\cdot B(a,b).$$

Portanto: $\dfrac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(a,b)$ para todo $a, b \in \mathbb{R} > 0$.

A função Beta também obedece algumas relações.

- Comutatividade: $B(m,n) = B(n,m)$.

- Relação de complementar: $B(n, 1-n) = \Gamma(n)\cdot\Gamma(1-n)$.

  De fato: $B(n,1-n) = \dfrac{\Gamma(n)\cdot\Gamma(1-n)}{\Gamma(n+1-n)} = \dfrac{\Gamma(n)\cdot\Gamma(1-n)}{\Gamma(1)} = \Gamma(n)\cdot\Gamma(1-n)$.

- A função Beta pode assumir outras formas de acordo com as transformações:

  Seja, $B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}\cdot(1-t)^{n-1}dt$ se considerarmos $t = \sin^2(\theta)$ temos que: $dt = 2\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\cdot d\theta$ dessa forma:

$$\begin{aligned}B(m,n) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{m-1}\cdot(1-\sin^2(\theta))^{n-1}\cdot 2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta d\theta\\ &= 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{m-1}\cdot(1-\sin^2\theta)^{n-1}\cdot\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta d\theta.\end{aligned}$$

Concluindo que: $B(m,n) = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta d\theta$.

Outra forma que a função Beta pode assumir é: $B(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}} du$.

De fato fazendo a mudança de variável: $t = \dfrac{u}{u+1} \implies 1 - t = \dfrac{1}{1+u} \implies dt = \dfrac{1}{(1+u)^2} du$.

$$\begin{aligned} B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1} \cdot (1-t)^{n-1} &= \int_0^{\infty} \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m-1}} \cdot (\frac{1}{u+1})^{n-1} \cdot \frac{1}{(1+u)^2} du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}} du. \end{aligned}$$

6.1 Alguns exemplos com uso da relação função Gama e Beta

Nesta seção será viável aplicar em problemas a relação da função Gama e Beta mostrando que com o conhecimento da função Beta é possivel resumir alguns cálculos de difíceis conclusões.

1. Calcule: $\int_0^1 x^3 \cdot (1-x)^4 dx$.

   Comparando com a função Beta, temos que: $m - 1 = 3 \implies m = 4$ e $n - 1 = 4 \implies n = 5$ logo:

$$B(4,5) = \int_0^1 x^3 \cdot (1-x)^4 dx.$$

$$\frac{\Gamma(m) \cdot (n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma(4) \cdot (5)}{\Gamma(4+5)} = \frac{\Gamma(3+1) \cdot \Gamma(4+1)}{\Gamma(8+1)} = \frac{6 \cdot 24}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{280}.$$

2. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^3\theta}{\sqrt{\cos}} d\theta$:

   Vamos inicialmente considerar que:
   $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
   $\Gamma(\frac{1}{4}+1) = \frac{1}{4} \cdot \Gamma(\frac{1}{4}) \implies \Gamma(\frac{5}{4}) = \frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})$
   $\Gamma(\frac{5}{4}+1) = \frac{5}{4}\Gamma(\frac{5}{4}) \implies = \Gamma(\frac{9}{4}) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Gamma(\frac{1}{4}) = \frac{5}{16}\Gamma(\frac{1}{4})$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\theta}{\sqrt{\cos}} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cdot \cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta \\ &= \frac{2}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2 \cdot 2-1}\theta \cdot \cos^{2 \cdot \frac{1}{4}-1}\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(2+\frac{1}{4})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(2) \cdot \Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{5}{16}\Gamma(\frac{1}{4})} = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

3. Prove que: $\int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{8-x^3}dx = \dfrac{16\pi}{9\sqrt{3}}$, considere que:

   - $x^3 = 8 \cdot y \implies dx = \dfrac{8dy}{3 \cdot 4 \cdot y^{\frac{2}{3}}}$ onde $x^2 = 4 \cdot y^{\frac{2}{3}}$.
   - $\Gamma(\dfrac{4}{3}) = \dfrac{1}{3} \cdot \Gamma(\dfrac{1}{3})$.
   - $\Gamma(n) \cdot \Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin(n\pi)}$
   - $\Gamma(\dfrac{1}{3}) \cdot \Gamma(1-\dfrac{1}{3}) = \dfrac{\pi}{\sin(\dfrac{\pi}{3})} \implies \Gamma(\dfrac{2}{3}) = \dfrac{\pi}{\Gamma(\dfrac{1}{3}) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 2 \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{8-8y} \cdot \frac{8dy}{3 \cdot 4 \cdot y^{\frac{2}{3}}} &= \frac{32}{12}\int_0^1 y^{\frac{-1}{3}} \cdot (1-y)^{\frac{1}{3}}dy \\ &= \frac{32}{12}\int_0^1 y^{\frac{2}{3}-1} \cdot (1-y)^{\frac{4}{3}-1}dy.\end{aligned}$$

Concluímos que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{8-x^3}dx = \int_0^1 2 \cdot y^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{8-8y} \cdot \frac{8dy}{3 \cdot 4 \cdot y^{\frac{2}{3}}} &= \frac{8}{3} \cdot \frac{\Gamma(\frac{2}{3}) \cdot \Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3}+\frac{4}{3})} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{3})\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \Gamma(\frac{1}{3}) \\ &= \frac{16\pi}{9 \cdot \sqrt{3}}.\end{aligned}$$

4. Calcule: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta d\theta$.

   Se considerarmos que : $B(m,n) = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cdot \cos^{2n-1}\theta d\theta$ e, assumirmos $m = 1$ e $n = 1$, teremos que:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot \cos\theta d\theta &= \frac{2}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\cdot(1)-1}\theta \cdot \cos^{2\cdot(1)-1}\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot B(1,1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(1) \cdot \Gamma(1)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5. Prove que: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}d\theta = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$, onde consideraremos: $\Gamma(\dfrac{3}{4}) \cdot \Gamma(1-\dfrac{3}{4}) = \dfrac{\pi}{\sin(\dfrac{3\pi}{4})}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\theta \cdot \cos^{\frac{-1}{2}}\theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\cdot\frac{3}{4}-1}\theta \cdot \cos^{2\cdot\frac{1}{4}-1}\theta d\theta \\ = \frac{1}{2} \cdot B(\frac{3}{4},\frac{1}{4}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{4}) \cdot \Gamma(\frac{1}{4})}{2 \cdot \Gamma(1)} &= \frac{\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

7 O cálculo da função Gama de alguns valores no intervalo $]0, 1[$

Analisando o que já foi pesquisado sobre o domínio da função Gama, percebemos que alguns valores requer um dispendiosos trabalhos até se chegar a um valor atrativo aos olhos. Com as análises já feitas, é possível se chegar a alguns valores e, relacionar outros para facilitar a compreensão, com isso se fez uso de umas construções, mais especificamente uma sequência e uma integral que nos permitirá utilizar seu formato final e conseguir concluir alguns valores que sem o uso dessas construções não seria possível.

7.1 Cálculo de $\Gamma(\frac{1}{4})$

Utilizaremos as relações da função Gama e Beta e construiremos uma ligação entre as Integrais Elípticas e a teoria da Média Aritmética–Geométrica, onde esta é representada por, $M(a, b)$ de dois números a e b tal que $0 < b < a$. Assim chegaremos a um formato agradável para a função $\Gamma(\dfrac{1}{4})$.

Definição 7.1 *A média aritmética – geométrica define-se da seguinte forma: fixados dois números reais a e b tais que, $0 < b < a$ sejam a_n e b_n as sucessões, onde $a_1 = a$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_1 = b$ e $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Temos que qualquer termo da sucessão a_n, excetuando o primeiro, é a média aritmética dos dois termos de ordem imediatamente anterior das sucessões a_n e b_n e, todo o termo da sucessão b_n de ordem superior a um, é a média geométrica dos termos de ordem imediatamente anterior das mesmas sucessões.*

Proposição 7.1 *Prove que as sucessões a_n e b_n são convergentes e convergem para o mesmo limite:*

Seja a_n e b_n, sequência, onde podemos considerar $a_o = a$ e $b_o = b$, seguindo dessa forma:

$$a_1 = \frac{a_o + b_o}{2} \text{ e } b_1 = \sqrt{a_o \cdot b_o}$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \text{ e } b_2 = \sqrt{a_1 \cdot b_1}$$

$$a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} \text{ e } b_3 = \sqrt{a_2 \cdot b_2}$$

$$\ldots$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ e } b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot b_n} = b_{n+1}.$$

$a_1 \geq b_1$ pela desigualdade das médias, assim: $a \geq a_1 = \dfrac{2a_1}{2} \geq \dfrac{a_1+b_1}{2} = a_2 = \dfrac{2a_2}{2} \geq \dfrac{a_2+b_2}{2} \cdots$

Podemos concluir então que: $a \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq b_n \geq b_{n-1} \geq \cdots \geq b_3 \geq b_2 \geq b_1 \geq b$.

Portanto, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n = M(a,b) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} b_n$, onde $M(a,b)$ é a média aritmético-geométrica de a e b.

Proposição 7.2 *Seja:* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2\theta + b^2 \cdot \sin^2\theta}}$ *uma integral elíptica de segunda ordem, e* a_n *e* b_n *sequências definidas ,anteriormente, então:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2 \cdot \cos^2\theta + b^2 \cdot \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a_n^2 \cdot \cos^2\theta_n + b_n^2 \cdot \sin^2\theta_n)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2} \cdot M^{-1}(a,b).$$

Considere a mudança de variável: $\sin\theta = \dfrac{2 \cdot a \cdot \sin\theta_n}{(a+b) + (a-b)\sin^2\theta_n}$, derivando temos que:

$$\cos\theta d\theta = \frac{2 \cdot a \cdot cos\theta_n \cdot [(a+b) + (a-b)\sin^2\theta_n] - 2a(a-b) \cdot \sin^2\theta_n \cdot \cos\theta_n d\theta_n}{[(a+b) + (a-b)\sin^2\theta_n]^2}. \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= 1 - \frac{4asen^2\theta_n}{[(a+b) + (a-b)\sin\theta_n]^2} \\
&= \frac{[(a+b) + (a-b)\sin\theta_n]^2 - 4asen^2\theta_n}{[(a+b) + (a-b)\sin\theta_n]^2} \\
&= \frac{(a+b)^2 + 2 \cdot (a+b) \cdot (a-b) \cdot \sin^2\theta_n + (a-b)^2 \cdot \sin^4\theta_n - 4a^2\sin^2\theta_n}{[(a+b) + (a-b)\sin^2\theta_n]^2} \\
&= \frac{a^2 + b^2 - 2(a^2+b^2)\sin^2\theta_n + (a^2+b^2)\sin^4\theta_n + 2ab(1 - \sin^4\theta_n)}{[(a+b) + (a-b)\sin^2\theta_n]^2} \\
&= \frac{(a^2+b^2)[1 - \sin^2\theta_n]^2 + 2ab(1 - \sin^2\theta_n) \cdot (1 + \sin^2\theta_n)}{[(a+b) + (a-b)\sin^2\theta_n]^2} \\
&= \frac{(a^2+b^2)[\cos^4\theta_n] + 2ab\cos^2\theta_n(1 + \sin^2\theta_n)}{[(a+b) + (a-b)\sin^2\theta_n]^2} \\
&= \frac{\cos^2\theta_n[(a^2+b^2)\cos^2\theta_n] + 2ab(\cos^2\theta_n + 2\sin^2\theta_n)]}{[(a+b) + (a-b)\sin^2\theta_n]^2} \\
&= \cos^2\theta_n \frac{[(a+b)^2\cos^2\theta_n + 4ab\sin^2\theta_n]}{[(a+b) + (a-b)\sin^2\theta_n]^2} \\
&= \frac{4\cos^2\theta_n}{[(a+b) + (a-b)\sin^2\theta_n]^2}(a_n^2\cos^2\theta_n + b_n^2\sin^2\theta_n).
\end{aligned} \tag{8}$$

Resultando que:

$$\cos\theta = \frac{2\cos\theta_n}{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]}\cdot(a_n\cos^2\theta_n + b_n^2\sin^2\theta_n)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Assim de (7) e (9) concluímos que:

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{2\cdot a\cdot cos\theta_n\cdot([(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]) - 2a(a-b)\cdot\sin^2\theta_n\cdot\cos\theta_n d\theta_n}{\frac{2\cos\theta_n}{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]}\cdot(a_n\cos^2\theta_n+b_n^2\sin^2\theta_n)^{\frac{1}{2}}\cdot[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]^2} \\ &= \frac{2\cdot a\cdot cos\theta_n\cdot([(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]) - 2a(a-b)\cdot\sin^2\theta_n\cdot\cos\theta_n d\theta_n}{2\cos\theta_n\cdot(a_n\cos^2\theta_n+b_n^2\sin^2\theta_n)^{\frac{1}{2}}\cdot[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]}. \end{aligned} \tag{10}$$

Refazendo $a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ agora com as mudanças.

$$\begin{aligned} a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta &= a^2 + (b^2-a^2)\sin^2\theta \\ &= a^2 + (b^2-a^2)\cdot\frac{4a^2\sin^2\theta_n}{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]^2} \\ &= \frac{a^2\cdot([(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]^2) + 4a^2(b^2-a^2)\sin^2\theta_n}{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]^2} \\ &= a^2\cdot\frac{[(a+b)^2 - 2(a+b)(a-b)\sin^2\theta_n + (a-b)^2\sin^2\theta_n]}{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]} \\ &= \frac{a^2}{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]^2}\cdot(a+b)-(a-b)\sin^2\theta_n]^2. \end{aligned} \tag{11}$$

De $7, 8, 9$ e 10:

$$\begin{aligned} &= \left(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right)^{\frac{-1}{2}} d\theta \\ &= \left(\frac{a^2}{\left[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n\right]^2}[(a+b)-(a-b)\sin^2\theta_n]^2\right)^{\frac{-1}{2}} d\theta \\ &= \frac{d\theta}{\left(\frac{a}{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]}[(a+b)-(a-b)\sin^2\theta_n]\right)} \\ &= \frac{\frac{2\cdot a\cdot cos\theta_n\cdot\left(\left[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n\right]\right)-2a(a-b)\cdot\sin^2\theta_n\cdot\cos\theta_n d\theta_n}{2\cos\theta_n\cdot\left(a_n\cos^2\theta_n+b_n^2\sin^2\theta_n\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n\right]}}{\left(\frac{a}{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n]}[(a+b)-(a-b)\sin^2\theta_n]\right)} \\ &= \frac{[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta_n - 2(a-b)\sin^2\theta_n]d\theta_n}{((a+b)-(a-b)\sin^2\theta_n)\cdot(a_n^2\cos^2\theta_n + b_1^2\sin^2\theta_n)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{[((a+b)-(a-b)\sin^2\theta_n]d\theta_n}{((a+b)-(a-b)\sin^2\theta_n)\cdot(a_n^2\cos^2\theta_n + b_n^2\sin^2\theta_n)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{d\theta_n}{(a_n^2\cos^2\theta_n + b_n^2\sin^2\theta_n)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(a^2\cdot\cos^2\theta+b^2\cdot\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta_n}{(a_n^2\cos^2\theta_n+b_n^2\sin^2\theta_n)^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(M^2(a,b)+0)^{\frac{-1}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}\cdot M^{-1}(a,b).$$

Com as duas proposições demostradas, faremos uso desses resultados para chegarmos a solução de $\Gamma(\frac{1}{4})$. Consideremos na proposição 7.2, $a=1$ e $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, logo:

$$\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}=\frac{\pi}{2}\cdot M^{-1}(1,\frac{1}{\sqrt{2}}). \tag{12}$$

Fazendo uma mudança de variável:

$$x=\frac{\sin^2\theta}{2-\sin^2\theta}\implies\sin^2\theta=2x-x\sin^2\theta\implies\sin^2\theta=\frac{2x}{x+1}.$$

Derivando:

$$dx=\frac{((2-\sin^2\theta)\cdot 2\sin\theta\cdot\cos-\sin^2\theta(-2\sin\theta\cdot\cos))d\theta}{(2-\sin^2\theta)^2}=\frac{4\sin\theta\cdot\cos\theta d\theta}{(2-\sin^2\theta)^2}$$
$$=\frac{4\cdot\sqrt{\frac{2x}{x+1}}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}d\theta}{\frac{4}{(x+1)^2}}$$
$$=\sqrt{2x-2x^2}\cdot(x+1)\ d\theta.$$

Portanto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2x-2x^2}\cdot(x+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-\frac{2x}{x+1}}}$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{x-x^2}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}}$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{2\cdot\sqrt{x-x^2}}\cdot\frac{1}{(x+1)^{1-\frac{1}{2}}}$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{2\cdot\sqrt{x-x^3}}$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $x=u^2\implies dx=2udu$ temos que:

$$\int_0^1\frac{dx}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{2udu}{2u\cdot\sqrt{1-u^4}}=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Concluindo assim que:

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}\cdot M(1,\frac{1}{\sqrt{2}})}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}=\int_0^1\frac{dx}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{2udu}{2u\sqrt{1-u^4}}=\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Com os cálculos expostos até aqui, vamos concluir a proposta da subseção, utilizando para isso a relação da função Gama e Beta provada no capítulo 6 e a relação da função Gama com a trigonometria demonstrada na subseção 4.6.

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}=\int_0^1 t^{\frac{-3}{4}}\cdot(1-t)^{\frac{-1}{2}}dt, \tag{13}$$

$$t=u^4\implies du=4u^3du.$$

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{4})}=4\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}du.$$

Como:

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin x\pi}\implies\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{3}{4})=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}.$$

Temos que:

$$\Gamma(\frac{3}{4})=\frac{2\pi}{\sqrt{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{4})}.$$

Da equação 13 :

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}=\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\sqrt{\pi}}{\frac{2\pi}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{4})}}=4\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}du\implies\frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\pi}=4\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}du.$$

Ademais.

$$\begin{aligned}[\Gamma(\frac{1}{4})]^2&=\frac{2\cdot 4\pi}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{2}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}du\\&=\frac{2\pi\cdot 4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^4}}du\\&=\frac{2\cdot\pi\cdot 4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}\cdot M(1,\frac{1}{\sqrt{2}})}=\frac{4\cdot\pi^2}{\sqrt{\pi}\cdot 2\cdot M(1,\frac{1}{\sqrt{2}})}=\frac{2\cdot\pi^{\frac{3}{2}}}{M(1,\frac{1}{\sqrt{2}})}.\end{aligned}$$

Concluímos portanto que: $[\Gamma(\frac{1}{4})]=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot\pi^{\frac{3}{4}}}{M^{\frac{1}{2}}(1,\frac{1}{\sqrt{2}})}.$

7.2 Cálculo de $\Gamma(\frac{1}{3})$

Assim como $\Gamma(\frac{1}{4})$, $\Gamma(\frac{1}{3})$ auxilia em cálculos de alguns resultados de difícil completude. De fato, com a relação da função Gama e a Beta já demonstrada, iniciaremos a construção:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{6})} = \int_0^1 t^{\frac{-2}{3}}\cdot(1-t)^{\frac{-1}{2}}dt. \tag{14}$$

Na subseção 4.7 foi apresentada e provada a conhecida fórmula da duplicação onde esta pode ser suporte para encontrarmos uma relação importante a cerca de $\Gamma(\frac{1}{6})$ assim:

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \pi^{\frac{-1}{2}}\cdot 2^{\frac{-1}{3}}\cdot\sqrt{3}\cdot\Gamma^2(\frac{1}{3}). \tag{15}$$

Sabemos pela relação provada na subseção 4.6 e pela equação 15, que :

$$\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{1}{6})} = \frac{2\pi}{\Gamma^2(\frac{1}{3})\cdot\pi^{\frac{-1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{-1}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}}\cdot\pi^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{-1}{2}}}{\Gamma^2(\frac{1}{3})}. \tag{16}$$

Assim de 14,15 e 16 teremos que:

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{\frac{-2}{3}}\cdot(1-t)^{\frac{-1}{2}}dt &= \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{6})}\\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\sqrt{\pi}}{\frac{2^{\frac{4}{3}}\cdot\pi^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{-1}{2}}}{\Gamma^2(\frac{1}{3})}}\\ &= \frac{\Gamma^3(\frac{1}{3})\sqrt{\pi}}{2^{\frac{4}{3}}\cdot\pi^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{-1}{2}}}\\ &= \frac{\Gamma^3(\frac{1}{3})}{2^{\frac{4}{3}}\cdot\pi\cdot 3^{\frac{-1}{2}}}.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t = u^3$ onde $dt = 3u^2du$ concluímos que:

$$\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{\frac{4}{3}}\cdot\pi\cdot 3^{\frac{-1}{2}}\cdot 3\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = 2^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\pi\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^3}}. \tag{17}$$

Seja: $u = 1+\sqrt{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{1+v} \implies du = \dfrac{2\sqrt{3}}{(1+v)^2}dv$, temos que:

$$1-u^3 = 1-\left[10+6\sqrt{3}-3(4+2\sqrt{3})(\frac{2\sqrt{3}}{1+v})+3(1+\sqrt{3}\cdot\frac{12}{(1+v)^2}-\frac{24\sqrt{3}}{(1+v^3)}\right].$$

$$
\begin{aligned}
&= -9 - 6\sqrt{3} + \frac{24\sqrt{3}}{1+v} + \frac{36}{1+v} - \frac{36}{(1+v)^2} - \frac{36\sqrt{3}}{(1+v)^2} + \frac{24\sqrt{3}}{(1+v)^3} \\
&= \frac{-6\sqrt{3}}{(v+1)^3}\left[(1+v)^3 - 4(1+v)^2 + 6(1+v) - 4\right] \frac{-9}{(v+1)^3}\left[(1+v)^3 - 4(1+v)^2 + 4(1+v)\right] \\
&= \frac{-6\sqrt{3}}{(v+1)^3}\left[(-1+v-v^2+v^3\right] \frac{-9}{(v+1)^3}\left[1-v-v^2+v^3\right] \\
&= \frac{-6\sqrt{3}}{(v+1)^3}\left[(v-1)\cdot(1+v^2)\right] \frac{-9}{(v+1)^3}\left[(1-v)\cdot(1-v^2)\right] \\
&= \frac{3(1-v)}{(1+v)^3}\cdot\left[2\sqrt{3}(1+v^2) - 3(1-v^2)\right] \\
&= \frac{3(1-v)}{(1+v)^3}\cdot\left[(2\sqrt{3}+3)v^2 + (2\sqrt{3}-3)\right].
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} &= \int_{2-\sqrt{3}}^1 \frac{2\sqrt{3}}{(1+v)^2}\cdot\frac{dv}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-v}}{\sqrt{(1+v)^3}}\cdot\sqrt{(2\sqrt{3}+3)v^2+(2\sqrt{3}-3)}} \\
&= \int_{2-\sqrt{3}}^1 \frac{2dv}{\sqrt{1+v}\cdot\sqrt{1-v}\cdot\sqrt{(2\sqrt{3}-3)+(2\sqrt{3}+3)v^2}} \\
&= \int_{2-\sqrt{3}}^1 \frac{2dv}{\sqrt{1-v^2}\cdot\sqrt{(2\sqrt{3}-3)+(2\sqrt{3}+3)v^2}}.
\end{aligned}
$$

Fazendo uma mudança de variável: $v = \cos(\theta) \implies dv = \sin(\theta)d\theta$ temos que: $\theta = 0$ e $2-\sqrt{3} = \cos(\theta) \implies \theta = \arccos(2-\sqrt{3}) = k$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} &= -\int_k^0 \frac{2\sin(\theta)d\theta}{\sin(\theta)\cdot\sqrt{(2\sqrt{3}-3)+(2\sqrt{3}+3)\cdot\cos^2(\theta))}} \\
&= -\int_k^0 \frac{2\cdot d\theta}{\sqrt{(2\sqrt{3}-3)+(2\sqrt{3}+3\cdot\cos^2(\theta))}} \\
&= 2\cdot\int_0^k \frac{d\theta}{\sqrt{(2\sqrt{3}-3)+(2\sqrt{3}+3)-(2\sqrt{3}+3\cdot\sin^2(\theta))}} \\
&= 2\cdot\int_0^k \frac{d\theta}{\sqrt{4\sqrt{3}-(2\sqrt{3}+3)\sin^2(\theta)}} \\
&= 2\cdot\int_0^k \frac{d\theta}{\sqrt{4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{(1-\frac{(2\sqrt{3}+3)}{4\sqrt{3}}\sin^2(\theta))}} \\
&= 2\cdot\int_0^k \frac{d\theta}{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\sqrt{(1-\frac{(2\sqrt{3}+3)}{4\sqrt{3}}\sin^2(\theta))}}.
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^3}}du = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}\int_0^k \frac{d\theta}{\sqrt{1-(\frac{(2+\sqrt{3})}{4})\cdot\sin^2\theta}}. \tag{18}$$

Das equações 17 e 18 e considerando que: $\int_0^k \frac{d\theta}{\sqrt{1-(\frac{2+\sqrt{3}}{4})\cdot\sin^2\theta}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\pi}{3\cdot M(2,\sqrt{2+\sqrt{3}})}$

,

temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right) &= 2^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\pi\cdot\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}}\int_0^k \frac{d\theta}{\sqrt{1-(\frac{(2+\sqrt{3})}{4})\cdot\sin^2\theta}}\\
&= \frac{2^{\frac{4}{3}}\cdot\pi}{3^{\frac{-1}{4}}}\int_0^k \frac{d\theta}{\sqrt{1-(\frac{(2+\sqrt{3})}{4})\cdot\sin^2\theta}}\\
&= \frac{2^{\frac{4}{3}}\cdot\pi}{3^{\frac{-1}{4}}}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\pi}{3\cdot M(2,\sqrt{2+\sqrt{3}})}.
\end{aligned}$$

Concluímos que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2^{\frac{7}{9}}\cdot\pi^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{12}}\cdot M(2,\sqrt{2+\sqrt{3}})^{\frac{1}{3}}}.$$

7.3 Cálculo de $\Gamma(\frac{1}{12})$

Concluiremos essa seção, calculando mais um valor no intervalo $]0,1[$ mostrando de forma mais afirmativa a relação de dependência que muitas questões terão com o $\Gamma(\frac{1}{3})$ e $\Gamma(\frac{1}{4})$.

Utilizando novamente a fórmula da duplicação temos que:

$$2^{2\cdot\frac{1}{12}-1}\cdot\Gamma(\frac{1}{12})\cdot\Gamma(\frac{1}{12}+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\frac{1}{6}).$$

Temos portanto que $\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)$ é definido por:

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{7}{12})\cdot 2^{\frac{-5}{6}}}. \tag{19}$$

Sabemos pela relação provada na subseção 4.6, que :

$$\Gamma\left(\frac{7}{12}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\Gamma(\frac{5}{12})}. \tag{20}$$

Portanto de : 15,19 e 20, temos:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{12}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\frac{1}{6})}{2^{\frac{-5}{6}}\cdot\frac{4\cdot\pi}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\Gamma(\frac{5}{12})}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\frac{1}{6})\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\Gamma(\frac{5}{12})}{2^{\frac{-5}{6}}\cdot 4\pi} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\cdot\pi^{\frac{-1}{2}}\cdot 2^{\frac{-1}{3}}\cdot\sqrt{3}\cdot\Gamma^2(\frac{1}{3})\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\Gamma(\frac{5}{12})}{2^{\frac{-5}{6}}\cdot 4\pi} \\ &= 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-1}\cdot\pi^{-1}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{12}\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Considere que:

$$\Gamma\left(\frac{5}{12}\right) = 2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{-1}{8}}\cdot\pi^{\frac{1}{2}}\cdot(\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}. \tag{22}$$

Assim de 21 e 22:

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}\right) = 2^{\frac{-1}{4}}\cdot 3^{\frac{3}{8}}\cdot\pi^{\frac{-1}{2}}\cdot(\sqrt{3}+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

É possível perceber como as demonstrações dos resultados de $\Gamma(\frac{1}{3})$ e $\Gamma(\frac{1}{4})$ são essenciais para o desenrolar de vários outros resultados, quando trabalhamos com a função Gama de números fracionários, em que os recursos já mencionados não são suficientes para concluir os problemas. Isso nos possibilita reafirmar que a extensão fatorial é válida e muito bem aplicável a números que não são mencionados de forma corriqueira. Um exemplo disso é:

$$\left(\frac{-3}{4}\right)! = \Gamma\left(\frac{-3}{4}+1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot\pi^{\frac{3}{4}}}{M^{\frac{1}{2}}\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

$$\left(\frac{-1}{4}\right)! = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 4^{\frac{-1}{4}}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = M^{\frac{1}{2}}\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\pi^{\frac{1}{4}}.$$

$$\left(\frac{-1}{3}\right)! = \frac{2\pi}{3\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{2^{\frac{2}{9}}\cdot\pi^{\frac{1}{3}}\cdot M^{\frac{1}{3}}\left(2,\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}{3^{\frac{11}{12}}}.$$

Além disso, podemos ver que outros recursos são de suma importância para se concretizar os formatos que chegamos como, a fórmula da duplicação e a relação da função Gama com a seno. Vários outros valores no domínio da função podem ser concluido. Como:

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\cdot\pi}{\sqrt{3}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{-1}{4}\right)=\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\implies\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4}.$$

Alguns resultados foram aqui ressaltados sem muitas demonstrações, para, maiores aprofundamentos consultar, mathematics; 2019 e Wolfram;2019.

8 Uma aplicação da função Gama e Beta no estudo das probabilidades

A Função Gama possui aplicações na física quântica, na astronomia e na dinâmica de fluídos. Ela é muito utilizada em estatística para modelagem de vários tipos de processos, como por exemplo o tempo entre um terremoto e outro. Ainda na matemática, a generalização do produto fatorial apresentado pela Função Gama tem uso imediato na análise combinatória, como na teoria da probabilidade e no cálculo de séries de potências. O coeficiente binomial também pode ser escrito em termos de combinações de fatoriais, produto sucessivo de números inteiros.

O principal motivo pelo qual a função gama é utilizada nesses contextos na física e na matemática é a expressão $f(x)e^{-g(x)}$, que descreve processos que decaem exponencialmente no tempo e no espaço. Integrais dessas expressões podem ser resolvidas em termos de Função Gama quando não existe uma solução elementar.

Neste capítulo iremos abordar o estudo das distribuições Gama e Beta, onde estas são boas referências quando se fala de aplicações da função Gama na probabilidade, mas antes iremos definir alguns temas que são importantes para o bom entendimento do texto que segue.

Definição 8.1 *Seja f uma função definida para todo real x e integrável em todo intervalo $[a, b]$, com a e b reais e a, b. dizemos que f é uma função densidade de probabilidade se as seguintes condições são satisfeitas:*

- $f(x) \geq 0$ *para todo x;*
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

8.1 Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória é uma variável quantitativa, cujo resultado depende de fatores aleatórios. Considere um experimento qualquer, e seja S um espaço amostral associado a tal experimento, suponhamos que cada resultado possível de tal experimento seja associado um número X. Esse X denomina-se variável aleatória, que significa em outras palavras uma regra que associa um valor numérico a cada resultado de um espaço amostral, estas podem ser discreta ou contínua. A seguir iremos definir ambas.

Definição 8.2 *Se X é uma variável aleatória, e os números de valores possíveis de X for enumerável (finito ou infinito) dizemos que X é uma variável aleatória discreta. Isto é, os possíveis valores de X podem ser postos em lista como: $x_1, x_2 \cdots$, no caso finito, a lista possui um valor final x_n e no caso infinito, a lista continua indefinidamente.*

Exemplo: Suponha que após um exame médico, pessoas sejam diagnosticadas como tendo diabetes(D) e não tendo diabetes(N). Admita que três pessoas sejam escolhidas ao acaso e classificadas de acordo com o espaço amostral.

$$\omega = DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DNN, NNN.$$

Nosso interesse é saber quantas pessoas com diabetes foram encontradas, não importando a ordem em que tenham sido selecionadas. Logo, estamos estudando variáveis aleatórias $X = 0, 1, 2, 3$ onde X é discreta.

No ensino básico é comum trabalharmos mesmo que não declarada, variáveis aleatórias discretas. Neste capítulo iremos dissertar um pouco sobre variáveis aleatórias contínuas, variáveis essas que serão essenciais no estudo da distribuição Gama e Beta.

Definição 8.3 *Seja X uma variável aleatória, suponha que o contradomínio (R_x) de X, seja um intervalo ou coleção de intervalos diremos que X é uma variável aleatória contínua,onde esta chamada de absolutamente contínua se admite a função densidade de probabilidade f.*

8.2 Distribuição Gama

Em teoria das probabilidades e estatística, a distribuição Gama é uma família de distribuições contínuas de probabilidade de dois parâmetros. Diversos tipos de distribuições são dependentes, ou são casos específicos dessa distribuição , como a distribuição exponencial e a distribuição qui-quadrado. Esse método é pouco conhecido mas muito utilizado por quem trabalha diretamente com dados probabilísticos. Apesar de terem vários porcessos que podem ser utilizados, ela por vezes se encaixa bem em dados a serem analisados. A distribuição Gama é usada para modelar valores de dados positivos que são assimétricos à direita e maiores que zero, ela é comumente usada em estudos de meteorologia, para descrever distribuição de precipitação, e em engenharia, para obtenção do tempo de retorno de um equipamento com falha e confiabilidade: capacidade de fornecer serviços que podem ser defensivamente confiáveis dentro de um período de tempo.

Os parâmetros α e β tem as funções respectivamente de variar a forma e esticar ou encolher a função densidade gama para a direita e para a esquerda.

Definição 8.4 *Dizemos que uma variável aleatória contínua tal que $(0 < x < \infty)$ tem distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ se a sua função for definida por :*
$f(x) = \dfrac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{\frac{-x}{\beta}}$, *se* $x \geq 0$.
$f(x) = 0 \ x < 0$.

Proposição 8.1 *Verifique que a função: $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{\frac{-x}{\beta}} dx$ se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$ se $x < 0$ é uma função densidade de probabilidade.*

Solução:

Fazendo uma mudança de variável, $u=\dfrac{x}{\beta} \to dx = \beta du$ *, temos então que:*

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{\frac{-x}{\beta}} dx &= \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} (u \cdot \beta)^{\alpha-1} \cdot e^{-u} \beta du \\
&= \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \beta^\alpha \cdot \int_o^{+\infty} u^{\alpha-1} \cdot e^{-u} du \\
&= \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot \beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Como:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} x^\alpha \cdot e^{\frac{-x}{\beta}} dx = 0 + 1 = 1.
$$

Logo provamos que a função é densidade de probabilidade.

Consideremos agora uma variável aleatória com possíveis valores $x_1, x_2 \cdots x_k$ e as probabilidades: $p(x_1)\ p(x_2) \cdots p(x_k)$. Por definição do valor esperado ou média e variância de X é dado respectivamente por: $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$ e variância: $V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x)dx - (E(x))^2$. Provaremos uma relação fixa para calcular a média e variância nas distribuições Gama.

8.2.1 Média ou esperança da distribuição Gama

Em Estatística, o valor esperado, também chamado "esperança matemática"ou "expectância", de uma variável aleatória é a soma do produto de cada probabilidade de saída da experiência pelo seu respectivo valor. Isto é, representa o valor médio "esperado"de uma experiência se ela for repetida muitas vezes. Note-se que o valor em si pode não ser esperado no sentido geral, pode ser improvável ou impossível. Se todos os eventos tiverem igual probabilidade o valor esperado é a média aritmética.

Demonstração de uma relação fixa para calcular a média .

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \cdot e^{\frac{-x}{\beta}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \int_0^{\infty} x^\alpha \cdot e^{\frac{-x}{\beta}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \lim_{t \to \infty} \int_0^{t} x^\alpha \cdot e^{\frac{-x}{\beta}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \lim_{t \to \infty} \left[(-\beta \cdot e^{\frac{-x}{\beta}} \cdot x^\alpha) l_0^t - \int_0^t -\beta \cdot \alpha \cdot e^{\frac{-x}{\beta}} \cdot x^{\alpha-1} dx \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \lim_{t \to \infty} \left[-\beta \cdot e^{\frac{-t}{\beta}} \cdot t^\alpha + \beta \cdot \alpha \int_0^t e^{\frac{-x}{\beta} \cdot x^{\alpha-1}} dx \right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \lim_{t\to\infty} \beta\cdot\alpha \int_0^t e^{\frac{-x}{\beta}} \cdot x^{\alpha-1}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}}\beta\cdot\alpha \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{\frac{-x}{\beta}} \cdot x^{\alpha-1}dx \\
&= u = \frac{x}{\beta} \implies dx = \beta du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \cdot\cdot\beta\cdot\alpha \lim_{t\to\infty} \int_0^{u\cdot\beta} e^{-u}\cdot(u\beta)^{\alpha-1}\beta du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \cdot\beta\cdot\alpha\cdot\beta^{\alpha} \lim_{u\beta\to\infty} \int_0^{u\beta} e^{-u}\cdot u^{\alpha-1}du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \cdot\beta\cdot\alpha\cdot\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha) \\
&= \beta\cdot\alpha.
\end{aligned}
$$

8.2.2 Variância da distribuição Gama

Na teoria da probabilidade e na estatística, a variância de uma variável aleatória ou processo estocástico é uma medida da sua dispersão estatística, indicando “o quão longe”em geral os seus valores se encontram do valor esperado, assim quanto menor é a variância, mais próximos os valores estão da média, mas quanto maior ela é, mais os valores estão distantes da média.

A seguir mostraremos o formato geral da variância que facilita cálculos e esta é comumente usada para quem maneja esta variável.

$$
\begin{aligned}
Var(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx - [E(x)]^2 \\
&= \int_0^{\infty} x^2\cdot f(x)dx - [E(x)]^2 \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_0^t x^2 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1}\cdot e^{\frac{-x}{\beta}}dx\right] \cdot -(\alpha\cdot\beta)^2 \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \left[\int_0^t x^{\alpha+1}\cdot e^{\frac{-x}{\beta}}\right] - (\alpha\cdot\beta)^2 \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \left[(-\beta\cdot e^{\frac{-x}{\beta}}\cdot x^{\alpha+1})_0^t + \beta\int_0^t e^{\frac{-x}{\beta}}\cdot(\alpha+1)\cdot x^{\alpha}\right] - (\alpha\beta)^2 \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}} \left[\beta\cdot(\alpha+1)\int_0^t e^{\frac{-x}{\beta}}\cdot x^{\alpha}dx\right] - (\alpha\beta)^2 \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\beta\cdot(\alpha+1)}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)} \left[(-\beta\cdot e^{\frac{-x}{\beta}}\cdot x^{\alpha})_0^t + \beta\int_0^t e^{\frac{-x}{\beta}}\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}dx\right] - (\alpha\cdot\beta)^2 \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\beta\cdot(\alpha+1)}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\beta\cdot\alpha\int_0^t e^{\frac{-x}{\beta}}\cdot x^{\alpha-1}dx - (\alpha\cdot\beta)^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(x) &= \frac{\beta\cdot(\alpha+1)}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\cdot\beta\cdot\alpha\int_0^{\infty} e^{-u}\cdot(u\cdot\beta)^{\alpha-1}\beta du\\
&= \frac{\beta\cdot(\alpha+1)}{\beta^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)}\beta\cdot\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha}-(\alpha\cdot\beta)^2\\
&= \beta^2\cdot\alpha(\alpha+1)-(\alpha\cdot\beta)^2\\
&= \beta^2\cdot\alpha^2+\beta^2\cdot\alpha-(\alpha\cdot\beta)^2\\
&= \beta^2\cdot\alpha.
\end{aligned}
$$

8.2.3 Exemplos sobre distribuição Gama

A seguir abordaremos exemplos que contextualiza o estudo da distribuição Gama, mostrando de forma mais clara que a função em questão tem um papel importante, quando se trata de processos que decaem exponencialmete no tempo e no espaço.

1. O tempo de vida útil de um equipamento eletrônico de determinado tipo pode ser expresso por uma variável aleatória contínua X, cuja função de densidade tem parâmetros $\alpha = 2$ e $\beta = 2$. Determine a probabilidade de um equipamento durar entre 6 a 18 meses.

   Solução: Fazendo uso da distribuição Gama temos que:

$$
\begin{aligned}
\int_{0,5}^{1,5}\frac{x\cdot e^{\frac{-x}{2}}}{2\cdot\Gamma(2)}dx &= \frac{1}{2}\cdot\int_{0,5}^{1,5} x\cdot e^{\frac{-x}{2}}dx\\
&= \frac{1}{2}\cdot\int_{-0,25}^{-0,75} -2\cdot a\cdot e^{a} - da = -\int_{-0,75}^{-0,25} a\cdot e^{a}da\\
&= -\left\{(a\cdot e^{a})\underset{-0,75}{-0,25} - \int_{-0,75}^{-0,25} e^{a}da\right\}\\
&= -\left\{-0,25\cdot e^{-0,25}+0,75\cdot e^{-0,75}-(e^{-0,25}-e^{-0,75})\right\}\\
&= -\left\{\frac{-0,25}{e^{0,25}}+\frac{0,75}{e^{0,75}}-\frac{1}{e^{0,25}}+\frac{1}{e^{0,75}}\right\}\\
&= -\left\{\frac{-1,25}{e^{0,25}}+\frac{1,75}{e^{0,75}}\right\}\\
&= -(-0,97+0,82) = 0,14.
\end{aligned}
$$

2. Em um banco, a perda em caso de fraude obedece uma distribuição Gama, com parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 2000$. calcule a probabilidade de ocorrer uma fraude com perda superior a \$10.000. Considere $e = 2,718$ e $e^5 = 148,33$

   Solução: Seja X o valor da perda em caso de fraude, então:

$$
\begin{aligned}
P(x > 10000) &= 1 - P(x \leq 10000)\\
&= 1 - \left[\int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{10000}\frac{1}{\Gamma(1)\cdot 2000}\cdot x^{1-1}\cdot e^{\frac{-x}{2000}}dx\right].
\end{aligned}
$$

$$P(x > 10000) = 1 - \left[\int_0^{10000} \frac{1}{2000} \cdot e^{\frac{-x}{2000}} dx \right].$$

Considere que: $\dfrac{-x}{2000} = u \implies \dfrac{-dx}{2000} = du.$

$$\begin{aligned} P(x > 10000) &= 1 - \left[- \int_0^{-5} e^u du \right] \\ &= 1 - \left[\int_{-5}^{0} e^u du \right] \\ &= 1 - \left[e^0 - e^{-5} \right] \\ &= 1 - \left[1 - \frac{1}{e^5} \right] \\ &= 1 - \left[1 - \frac{1}{148,33} \right] = 1 - [1 - 0,00674] \\ &= 1 - 0,99326 = 0,00674 = 0,674\%. \end{aligned}$$

8.3 Distribuição Beta

Em teoria da probabilidade e estatística, a distribuição Beta é uma família de distribuição de probabilidade contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$, parametrizado por dois parâmetros positivos,denotados por α e β que aparecem como expoentes das variáveis aleatórias e controlam o formato da distribuição que é dada por: $\dfrac{x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$ com $x \in (0, 1)$ α, $\beta > 0$ e $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1} du.$

A distribuição Beta tem sido aplicada para modelar o comportamento de variáveis aleatórias limitada a intervalos finitos em uma grande quantidade de disciplinas. A distribuição ainda pode ser usada na análise Bayesiana [16], para descrever conhecimentos iniciais sobre a probabilidade de sucesso , assim como a probabilidade de que um veículo espacial vai completar uma missão especificada. A distribuição em questão é um modelo conveniente para comportamentos aleatórios de porcentagens e proporções.

8.3.1 Média ou esperança da distribuição Beta

A média em estatística tem como umas das definições o valor que demonstra a concentração dos dados de uma distribuição, como o ponto de equilíbrio. A esperança ou média da distribuição Beta da variável aleatória X, com parâmetros α e β, é uma função

[16] estudo elaborado por Thomas Bayes

apenas da razão $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{1} \cdot \frac{x}{B(\alpha,\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}dx.$$

$$\begin{aligned}
E(x) &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha} \cdot (1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot B(\alpha+1,\beta) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{1}{\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\alpha}{\Gamma(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

8.3.2 Variância da distribuição Beta

Uma das maneiras simples de entender a variância é a medida da sua dispersão estatística, indicando o quão longe em geral os seus valores se encontram do valor esperado.Na distribuição Beta a variância é o valor com a distribuição aleatória de variável X com os parâmetros α e β. A saber: $Var(X) = x^2 \cdot E(x) - (E(x))^2 = \dfrac{\alpha\cdot\beta}{(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta+1)}$.

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot x^2 \cdot x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^{\beta-1}dx - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot x^{\alpha+1} \cdot (1-x)^{\beta-1}dx - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+2+\beta)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \frac{(\alpha+1)\cdot\alpha\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\cdot(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+1)\cdot\alpha}{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\cdot\beta}{(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta+1)}.
\end{aligned}$$

8.3.3 Exemplo que contextualize a distribuição Beta

1. A porcentagem de impurezas por lote em um determinado produto quimico é uma variável aleatória com distribuição beta de parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2$. Um lote com mais de 40% de impurezas não pode ser vendida.

(a) Qual a probabilidade de que um lote selecionado ao acaso não pode ser vendido por causa do excesso de impurezas?

Solução:

$P(y > 0,4) = \int_0^\infty f(y)dy = \int_{0,4}^1 + \int_1^\infty 0dy.$

$$\begin{aligned}
P(y > 0,4) &= \int_{0,4}^1 \frac{1}{B(3,2)} \cdot y^{3-1} \cdot (1-y)^{2-1} dy \\
&= \frac{1}{B(3,2)} \int_{0,4}^1 y^2 \cdot (1-y) dy \\
&= \frac{1}{B(3,2)} [\int_{0,4}^1 y^2 dy - \int_{0,4}^1 y^3 dy] \\
&= \frac{1}{\frac{\Gamma(3)\cdot\Gamma(2)}{\Gamma(5)}} \left[\frac{y^3}{3}\Big|_{0,4}^1 - \frac{y^4}{4}\Big|_{0,4}^1 \right] \\
&= \frac{4!}{2! \cdot 1!} \left[\frac{1}{3} - \frac{(0,4)^3}{3} - \frac{1}{4} + \frac{(0,4)^4}{4} \right] \\
&= 12 \cdot \left[\frac{1}{12} + (0,16) \cdot \frac{-1,12}{12} \right] \\
&= \frac{12}{12} \cdot [1 - 0,1792] = 0,8208.
\end{aligned}$$

(b) Quantos lotes em média são selecionados ao acaso até que se encontre um que não pode ser vendido por causa do excesso de impureza?

Solução:

Seja W = números de lotes selecionados ao acaso até que se encontre um que não pode ser vendido por excesso de impurezas. Queremos $E(W)$. Veja que:

$$W \ (p = 0,8208) \implies E(W) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,8208} = 1,218.$$

(c) Qual a porcentagem média de impurezas nos lotes desse produto?

Solução:

De fato como : $E(y) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \implies \dfrac{3}{5} = 0,6.$

(d) Qual a variância de impurezas nos lotes desse produto?

Solução:

Como : $Var(Y) = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{(\alpha+\beta)^2 \cdot (\alpha+\beta+1)} = \dfrac{6}{25 \cdot 6} = \dfrac{1}{25} = 0,04.$

Desta forma, concluímos o estudo das distribuições, reafirmando a importância da função Gama e, de forma mais esclarecedora e consistente, foi perceptível a aplicação da probabilidade nas abordagens de muitos estudiosos que utilizam essas distribuições para confirmar dados e, neste estudo, está a presença da função Gama e Beta que discretamente tem um papel essencial nas pesquisas e aplicações que estão diretamente ligadas a nossa vida e, muitas vezes, não temos conhecimento disso.

9 Análise da extensão da função fatorial sobre o ponto de vista da educação básica

Analisando os livros didático usados na segunda série do ensino médio da rede pública das escolas de Redenção, percebe-se quão pobre é a abordagem feita junto das funções fatoriais sem citar qualquer possível extensão, limitam-se a mostrar que o fatorial só existe para números naturais, no único intuito de seguir com o assunto, pois necessita-se destes conceitos para abordar os assuntos de análise combinatória, consequentemente, percebe-se professores que muitas vezes se indagados sobre se existiria fatorial além dos naturais muitas vezes estes não saberiam responder ou simplesmente diriam o que está nos livros didáticos, livros estes que poderiam instigar mais sobre a pesquisa, por vezes, poderiam ir além do tradicional e mostrar conteúdos além do que está no livro dos discentes. Como podemos observar na subsequente análise descrita segundo (Miorim, 2005):

> O livro do professor torna-se uma reprodução do livro do aluno, acrescido de uma apresentação, em geral sucinta, de seus fundamentos teórico-metodológicos e das respostas aos exercícios e atividades do livro do aluno. (...) os manuais tendem a se organizar como estudos dirigidos, propondo não apenas uma seleção do conteúdo a ser ensinado, mas também um modo de distribuí-lo no tempo escolar (...) terminam, por isso, a se dirigir diretamente ao aluno em enunciados e textos (faça agora o exercício, pergunte a seu professor, leia o texto...), a assumir, sob um ponto de vista discursivo, a voz do professor(...).

Os livros poderiam dissertar sobre os fatoriais de forma mais geral, pois embora a função Gama esteja necessariamente ligada aos estudos do fatorial de números além dos naturais, e esta seja algo de nível um tanto avançado, a recorrência vista na subseção 4.3 facilitaria alguns cálculos para naturais e possibilitaria mostrar alguns fatoriais de números não inteiros.

Logo, se pode explorar o tema de forma mais extensa, permitindo assim que os conhecimentos engessados dos livros da educação básica que a anos não se tem mudanças significativas, consigamos de alguma forma realizar uma repaginada e assim, possibilite aos apreciadores da matemática, que por vezes só se atém aos livros didático, consigam aumentar sua visão e perceber que a função fatorial possui uma extensão. Segundo (Paiva, 2015), no seu livro da educação básica da segunda série do ensino médio, faz uma discreta menção a extensão da função fatorial, abrindo caminho para que se possa vislumbrar que existem fatoriais além dos naturais,quando ele faz um sub-tópico no seu livro dizendo que:

> É necessário definir fatorial de zero e fatorial de um, pois zero e um também fazem parte de contagem. Para garantir a coerência entre as definições desses “novos”fatoriais e a definição de fatoriais de um número natural maior que 1, vamos admitir que possa ser ampliada a validade

da propriedade fundamental dos fatoriais, que, por enquanto, foi restrita para n natural, com $n \geq 3$.

Percebendo assim, que podemos de forma positiva, explanar um pouco sobre o tema, esclarecendo de forma suncinta o que significa a extensão em se tratando de fatoriais, onde esta conversa pode acontecer na aula trabalhada sobre o tema e, explicar a título de conhecimento, deixando margem para os entusiasmandos com a matemática tenham interesse e possam ir além da aula entre as quatro paredes da escola.

Analisando exemplos de alguns livros e sites de busca, percebe-se alguns detalhes a se analisar:

1. No livro fundamentos de matemática, Segundo Taneja 2010 : $\dfrac{2(n+1)!+(n-1)!}{n!-(n-1)!} = 13$ tem solução em $n = 2 \in \mathbb{N}$. Analisando sobre o ponto de vista dos conhecimentos a cerca da extensão fatorial mais especificamente a função Gama, e utilizando os cálculos feitos no primeiro item da seção 5, temos que:

   - $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
   - $(\frac{1}{2})! = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$.
   - $(\frac{3}{2})! = \Gamma(\frac{3}{2}+1) = \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$.
   - $(\frac{5}{2})! = \Gamma(\frac{5}{2}+1) = \Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$.
   - $(\frac{7}{2})! = \Gamma(\frac{7}{2}+1) = \Gamma(\frac{9}{2}) = \frac{7}{2}\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{7}{2}\cdot\frac{15}{8}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}$.
   - $(\frac{9}{2})! = \Gamma(\frac{9}{2}+1) = \Gamma(\frac{11}{2}) = \frac{9}{2}\Gamma(\frac{9}{2}) = \frac{9}{2}\cdot\frac{105}{16}\cdot\sqrt{\pi}$.

   Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{2(n+1)!+(n-1)!}{n!-(n-1)!} &= \frac{2(\frac{7}{2}+1)!+(\frac{7}{2}-1)!}{(\frac{7}{2})!-((\frac{7}{2})-1)!} \\
&= \frac{2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{105\sqrt{\pi}}{16}+\frac{15\cdot\sqrt{\pi}}{8}}{\frac{105\sqrt{\pi}}{16}-\frac{15\sqrt{\pi}}{8}} \\
&= \frac{\frac{15}{8}\cdot[\frac{9\cdot 7}{2}]+1}{\frac{15}{8}\cdot[\frac{7}{2}-1]} \\
&= \frac{65}{5} = 13.
\end{aligned}$$

   Mostrando assim que $\dfrac{7}{2} \in \mathbb{Q}$ seria também uma resposta, dado que numa reelaboração da questão podemos colocar o domínio no conjunto dos racionais, mostrando que com uma simples apresentação sem muitos detalhes sobre a extensão fatorial poderíamos estender à análise da questão proposta.

2. Um site intitulado colégio (Anhanguera, 2020), ao analisar uma simplificação onde,

se afirma que : $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{1}{n+2}$ orienta que a simplificação seja análisada para todo $n \in \mathbb{N}$. No entanto, podemos estender o conjunto onde ela está inserida, com o estudo da função Gama previamente feito. Realizaremos uma maior análise dos cálculos a seguir:

$$\frac{(\frac{-1}{2}+1)!}{(\frac{-1}{2}+2)!} = \frac{1}{\frac{-1}{2}+2} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{(\frac{1}{2})!}{(\frac{3}{2})!} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Concluindo assim mais uma vez que um número racional também se encaixa na simplificação.

3. O livro suplemento de revisão (Manoel, 2012), propõe uma simplificação de $\dfrac{k!\cdot 2-(k-1)!\cdot(k-1)}{(k+1)!}$ e, faz menção que a variável k esteja definida nos naturais. Analisando a simplificação e explanando sobre a extensão fatorial, percebemos que podemos trabalhar com $k = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.
De fato:

$$\frac{k!\cdot 2-(k-1)!\cdot(k-1)}{(k+1)!} = \frac{k\cdot(k-1)!\cdot 2-(k-1)!\cdot(k-1)}{(k+1)\cdot k\cdot(k-1)!} = \frac{1}{k}.$$

Se $k = \frac{1}{2}$ temos que:

$$\frac{(\frac{1}{2})!\cdot 2-(\frac{1}{2}-1)!\cdot(\frac{1}{2}-1)}{(\frac{1}{2}+1)!} = \frac{(\frac{1}{2})!\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(\frac{-1}{2})!}{(\frac{3}{2})!} = \frac{\frac{\pi\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{3\cdot\sqrt{\pi}}{4}} = 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}.$$

Assim vemos que a pergunta pode ser estendida para o conjunto dos racionais, concluindo que seria interessante falar da função fatorial, que de fato está definida nos naturais mas, fazendo mensão a sua extensão.

Após a análise de alguns livros didáticos do segundo ano de ensino médio adotado em duas escolas publicas do municipio de Redenção-Ce, um livro de escola privada e outros livros de apoio, onde podemos citar o livro do (Iezzi, 2017), foi realizada uma análise sobre os conhecimentos da função fatorial e da função Gama, com professores graduados em matemática das duas instituições públicas situada na cidade de Redenção-ce.

Realizou-se um questionário onde se indagava sobre os conhecimentos da função fatorial, e se instigava algo sobre sua extensão, sem falar especificamente sobre esta de forma aprofundada. Percebeu-se que os docentes por vezes não tinham um conhecimento aprimorado sobre a função fatorial, no sentido que dissertavam sobre a mesma sem muita formalidade, deixando em aberto qual o domínio que ela estaria inserida.

Com relação a extensão da função fatorial ou nunca pensaram no assunto ou afirmavam que não existia tal extensão tratada no questionário e com isto um cálculo que foi exposto em uma das perguntas que resultava em duas respostas: um número natural e outro fracionário, todos os professores não consideraram a resposta fracionária. Mas com a leitura e tentativa de solucionar as questões da pesquisa, ficaram pensativos, dado que uma das perguntas os levava a uma contradição, pois falava de forma superficial mais suficiente sobre a função Gama e nesta se chegava a solução de um fatorial de um números fracionário algo que anteriormente eles haviam descartado.

As perguntas foram finalizadas os indagando se conheciam um método de se calcular o fatorial de um número bem alto, quando este nem as calculadoras poderiam precisar, e todos responderam não conhecer.

Após a aplicação do questionário, foi feita uma explanação geral com os professores autores das respostas da pesquisa acerca da ideia de extensão fatorial e, foram dadas contribuições sobre o que eles já conheciam sobre a função fatorial, fazendo uma reflexão do fato de muitos não terem descrito a função fatorial dentro dos naturais mais ao resolver as perguntas descartavam qualquer resposta que não fossem números naturais.

Na ocasião foram mostrandos alguns pontos importantes sobre as funções analisadas e reforçado o fato de algumas formalidades serem de suma importância, como o fato de esclarecer o domínio a qual as funções, sejam elas quais forem estão inseridas. Assim esse momento de estudo nos levou a trocas de conhecimentos e nos fez pensar em uma possível reelaboração da seção do livro do (Iezzi, 2017), utilizado na escola em questão mesmo que seja para mudar a forma dos professores abordarem o tema "fatorial".

A seguir transcreveremos a seção do livro acerca dos números fatoriais e a utilizaremos, reelaborando a seção onde acrescentaremos o estudo da extensão fatorial .

- **Fatorial de um número natural.**

"Na resolução de problemas de contagem por meio do príncipio multiplicativo, é comum aparecerem multiplicações envolvendo números naturais consecutivos. Muitas vezes é possível escrever multiplicação desse tipo de forma mais resumida. Para isso, vamos apresentar o fatorial de um número natural, que será útil na contagem dos agrupamentos que serão apresentados a seguir.

Dado um número natural n, definimos o fatorial n(indicado por $n!$) por meio da relação.

Se $n = 0$ então $0! = 1$.

Se $n = 1$, então $1! = 1$.

Se $n \geq 2$, então $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Notemos que o fatorial de n representa o produto dos n primeiros números naturais positivos. A medida que n aumenta, o cálculo de $n!$ torna-se mais dificultosos."

Observe que o livro do autor em questão, diferente de outros livros didático ele afirma que está calculando o fatorial de números naturais mas na sua escrita abre precedentes para se pensar que pode haver outros fatoriais além dos naturais.
Faremos agora uma reelaboração da seção do livro analisado mencionado acima, levando em consideração o nível dos alunos e lembrando que esta nova análise possa ser algo que cabe ao professor fomentar em sala de aula.

- **A extensão Fatorial em $\mathbb{R} - \mathbb{Z}_{-}$.**

Conhecemos até então o fatorial de números definidos nos naturais. Faremos uma pequena abordagem abrangendo um pouco o conceito da extensão fatorial, assunto esse visto de forma muito resumida no nível superior, mas entende-se que com suas devidas adequações pode ser relatadas na educação básica, como um conhecimento a mais como se faz nos anexos dos capítulos. Conhecendo o fatorial dos números naturais, onde este acontece a multiplicação de seus antecessores até que se chegue ao número 1, levando em consideração que não podemos abranger com os conhecimentos que temos os fatoriais de números além deste conjunto, veremos um pouco da função Gama que nos abrirá caminhos para alavancar o fatorial de alguns valores.

Se $n \geq 2$ e $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, mas essa forma recursiva não pode ser usada para valores fracionários, no entanto foi demonstrado por Euler que não há uma expressão analítica para o fatorial, pois a função Gama não só resolve estes problemas, mas também possui distinguível propriedade. Apresentaremos uma forma e algumas características ficando a cargo do leitor fazer uma maior análise.

Seja a função Gama definida por: $\Gamma(n) = (n-1)! \implies \Gamma(n+1) = (n)! = n \cdot (n-1)! = n \cdot \Gamma(n)$ onde temos que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, para $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_{-}$.

Analisando as relações apresentadas podemos concluir que :

$(\frac{1}{2})! = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$.
$(\frac{3}{2})! = \Gamma(\frac{3}{2}+1) = \frac{3}{2} \cdot \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi}$.
$3! = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1$.
E assim com essa recursividade é possivel calcular o fatorial tanto de números naturais como números racionais, não sendo permitido apenas nos inteiros não positivos.

Concluímos que essa relação de recorrência permite trabalhar com naturais e racionais, percebendo a redundância quando se afirma que o fatorial é aplicado somente nos naturais, não permitindo aos discente e docentes que são leitores desses livros a mínima possibilidade da dúvida e da curiosidade. Essa definição sobre a extensão fatorial, também pode ser colocada no meio do texto, bem como dependendo da adequação nas curiosidades que os livros sempre possuem.

A estagnação da matemática na educação básica, a forma e o que abordar nos livros se perdura a anos, podemos, de forma, simples fazer mudanças, pois mesmo algumas coisas sendo apresentadas, sem provas, se analisarmos, quase tudo que se aplica na educação básica não é construído, é apresentado como verdade e usado para aplicar de acordo com as adequações, cabe ao leitor se aprofundar no tema se assim for necessário.

Pensando em uma análise mais ampla no que diz respeito a aceitação e reconhecimento da extensão fatorial, foi possível, de forma remota, analisar o resultado da pesquisa construída e executada com docentes e também com uma aluna caloura no curso de Licenciatura em Matemática na Unilab - Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira - que cursou todo o ensino médio uma escola pública estadual do município de Redenção. A discente, quando colocada de frente com as questões, foi objetiva e correta em muitas respostas. Sobre a pergunta referente ao domínio da função fatorial, ela compreende de forma clara que não se pode calcular fatorial de inteiros negativos, mas não teve uma explicação formal, e sem consistência teórica na sua afirmação. Quando perguntada se calcula-se o fatorial de uma fração, a discente relata não saber ao certo, ficou tentando analisar separadamente o fatorial do numerador e denominador que deixa de ser o fatorial da fração em si e passa a ser frações de dois fatoriais. Ao chegar na questão para calcular o fatorial de $\frac{1}{2}$, assim como os professores avaliados, ela se contradiz, é perceptível que deixa de lado a dúvida da pergunta anterior e passa a se dedicar com as informações da pergunta sobre o fatorial do número em questão, nos mostrando que é possível com os conhecimentos bem aplicados estender de forma sucinta a função Gama, levando em especial o aluno que estuda a matemática com mais foco ter uma percepção mais abrangente, mostrando as particularidades e semelhanças com a função fatorial estudada na segunda série do ensino médio.

A pesquisa feita com a única aluna trouxe uma confirmação a mais da desqualificação que muitas vezes é feita acerca do domínio das funções. O monopolismo do conhecimento e a informalidade que muitas vezes é dada aos temas abordados no ensino médio, com o intuito de facilitar o entendimento por parte de alguns ou até mesmo professores que não aplicam uma metodologia que possibilite mostrar algo a mais que está nos livros básicos, tem vários motivos, entre eles: a má formação, a pouca formação continuada e a visão apenas do livro didático, gerando assim muitos alunos limitados.

A pesquisa só foi possível com uma discente pois a pandemia impossibilitou de seguir em frente, sendo esta uma pesquisa que estará inacabada, onde muitas pessoas darão continuidade a esta análise.

Logo, a recorrência apresentada no texto pode ser utilizada para mostrar aos discentes e docentes que existe uma extensão da função fatorial, ainda pouco explorada e este passo pode reproduzir um estudo mais aprimorado acerca das funções , onde as pessoas envolvidas nessa pesquisa tiveram de alguma forma instrução e formação para pesquisar e abranager seus conhecimentos tanto em relação ao dominio de funções como enteder que a função fatorial pode ser explanada de forma bem mais abrangente.

10 Conclusão

Tendo em vista os aspectos apresentados nessa breve apresentação acerca da função Gama, pode-se observar que os conhecimentos sobre a extensão fatorial são muito pouco expostas onde a grande maioria das pessoas está ciente de que fatoriais só se restringe aos inteiro positivos e os recursos utilizados pelos professores da educação básica, não os motiva a refletir sobre uma possível extensão.

Analisando os livros didático é possível observar que não se relata a possibilidade de extensão da função fatorial, sendo enfáticos em afirmar que, fatoriais se restringem aos naturais ou se diz estar trabalhando fatorial de naturais, ou seja assuntos que a priore podem ser de fácil compreensão para discentes e docentes que começam seus interesses pela matemática, ficam muitas vezes confusos ou superficiais. Levando em consideração que se pode mencionar as relações de recorrências mostradas neste trabalho e fazer uma breve explanação da função Gama. As pesquisas feitas com docentes nos mostram que precisa-se muito despertar em alguns leitores a curiosidade e a percepção de que há algo além dos livros didáticos.

No trabalho em questão, encontramos uma expressão alternativa para o fatorial de n, no lugar do produto de n fatores, que só faz sentido para n inteiro positivo, entendemos que o fatorial $n!$ pode ser expresso através da integral da função Gama e como com ela foi possível chegar à recorrência que facilita a compressão, quando analisamos o sentido de calcular fatoriais para valores não inteiros. Em outras palavras, a função Gama nos fez perceber de forma muito clara a tão referida extensão fatorial.

É visto que após estudos concluísse que a probabilidade quando se trabalha as distribuições, faz uma relação muito forte com as funções Gama e Beta, onde esse recurso matemático permite que se faça de forma mais precisa analisar meteorologias, proporções e porcentagem, mostrando assim uma aplicação forte dessas funções no estudo da estatística.

Percebe-se, também, como vários ramos da matemática são suportes para o desenvolvimento e conclusão de problemas envolvendo a função aqui citada, nos levando a confirmar como a matemática é ramificada.

Ressalta-se também que a função Gama e a função Beta, juntamente com as integrais elípticas e a teoria média aritmetico-geometrica fornecem relações que ajudam a solucionar questões que poderiam ser mais extensas ou de difícil solução,e com esses recursos foi possivel estabelecer um formato para a função Gama no dominio que pouco se encontram, como no intervalo $]0, 1[$ concluindo, então, a necessidade de se expandir os estudos sobre o tema, mostrando por vezes que questões de difícil completude, se tornam mais simples quando se tem o conhecimento das funções apresentadas, confirmando que esta nos ajudará a enriquecer futuras pesquisas, quando não é possível no momento ser concluída.

Conclui-se, que a função Gama possui vários resultados que esclarecem muitos questionamentos e, que Euler abriu portas para várias pesquisas quando, ainda em 1729, conseguiu mostrar uma extensão fatorial intitulada de função Gama e que ainda hoje é referências para encontrar soluções de muitos problemas.

Esperamos que esta dissertação possa ser relevante para nossos colegas professores, acrescentando algo produtivo na pratica docente e, levando a uma análise nova acerca do símbolo fatorial que para muitos matemáticos só se utiliza no conjunto dos números naturais, ou é simplesmente um ponto de exclamação. Tudo isso tendo como protagonista a função Gama em si que, muitas vezes é utilizada em coisas do nosso dia a dia como análises meteorógicos e não temos conhecimento disto.

Referêcias

Anhanguera, Colegio. Colegio,Anhanguera **Pré universitário Colegio Anhanguera**, Goiania, GO,v. 33, n. 2, p. 172-178 , 2020. Disponível em: <http:// colegioAnhanguera.com.br>. Acesso em: 17 jan. 2020.

Aparecida, Ramos. André-Marie Legendre,e suas obras em teoria dos números **Biografia de Legendre**, Natal, Rn,v. 1, n. 2, p. 21-28 , 2010. Disponível em: <http:// repositorio.ufrn.br>. Acesso em: 23 fev. 2020.

Benedict, W. J. Irwin. mathematics **Ciências da Informação**, Brasília, DF, v. 33, n. 2, p. 172-178, 2019. Disponível em:< https://math.stackexchange.com/questions/33412/how-to-integrate-int-frac1-sqrt1x3-mathrm-dx>. Acesso em: 19 nov. 2019.

Dilva, Frazão. Biografia, Euler **Biografia de Leonhard Euler**, Pernambuco, Pe,v. 10, n. 2, p. 162-178 , 2016. Disponível em: <http:// ebiografia.comr>. Acesso em: 30 jan. 2020.

Elon, Lages. **Curso de análise:** Estudo da análise na reta . 2. ed. Rio de Janeiro: Impar, 2008.

Guidorizzi, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo:** introdução à metodologia científica. 19. ed. Petrópolis: Vozes, 2006.

Iezzi, Gelson. **Matemática ciência e aplicações :** Matemática para o segundo ano do ensino médio. 9. ed. São paulo: Saraiva, 2017.

Manoel, Paiva. **matemática:** matemática suplemento de revisão . 2. ed. São Paulo: Moderna, 2012.

Miorim, Ângela. Livros, didático de matemática do periodo da implantação do moviemtno da matemática moderna no Brasil **Congresso Ibero-Americano de educação matemática**, Porto, Porl, 2005. Disponível em: <http:// www.mytwt.net/cibem5/>. Acesso em: 10 jan. 2020.

Oliveira, Edmundo Campela. **Metodos matemáticos para a engenharia:** Textos universitários. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

Paiva, Manoel. **matemática Paiva:** Componente curricular de matemática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

Taneja, Inder Jet; Aldovandro, Araújo. **Fundamentos da matemàtica:** introdução a matemática. 2. ed. Florianopolis: UFSC, 2010.

Trettel, Aline de Lima. **A origem do simbolo matemático como forma de ensino.** Assis : Fundação Educacional do Município de Assis , 2012. Disponível em: <https://cepein.femanet.com.br/BDigital/arqTccs/0711280014.pdf>. Acesso em: 19 mar. 2020.

Wolfram, Stephen. Wolfram, Mathworld **Ciências da Informação**, Brasília, DF, v. 33, n. 2, p. 172-178, 2019. Disponível em: <http:// mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>. Acesso em: 10 out. 2019.

A Pesquisa feita com professores de matemática da educação básica

Pesquisa realizada com professores graduados em matemática atuantes em escolas publicas, a fim de ser analisada para contribuir na conclusão da dissertação da discente da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, do instituto de Ciências exatas e da natureza- mestrado profissional em Matemática-PROFMAT.

1. Como você descreveria a função fatorial?

2. Solucione a questão a seguir sobre seu ponto de vista,utilizando a definição da questão anterior:
$$\frac{2 \cdot (n+1)! + (n-1)!}{n! - (n-1)!} = 13$$

3. Seja $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ conhecida como a função Gama para todo $x > -1$. Se $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Calcule:

    (a) $\Gamma(\frac{3}{2})$

    (b) Se $x! = \Gamma(x+1)$ qual o valor de $(\frac{1}{2})$?

4. Você conhece alguma fórmula ou relação que calcule ou aproxime o valor de fatoriais de números naturais muito alto sem o uso da calculadora?