



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA – UNILAB
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – ICEN**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT**

FRANCISCO CEZAR DA COSTA

**PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS:
APLICAÇÕES DO ENSINO MÉDIO AO SUPERIOR**

ACARAPE-CE

2020

FRANCISCO CEZAR DA COSTA

PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS:
APLICAÇÕES DO ENSINO MÉDIO AO SUPERIOR.

Dissertação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza (ICEN) da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB, sob orientação do professor João Philipe Macedo Braga.

ACARAPE - CE
2020

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Costa, Francisco Cezar da.

C873p

Problemas de máximos e mínimos: aplicações do ensino médio ao superior / Francisco Cezar da Costa. - Redenção, 2020.
63f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga.

1. Função Quadrática. 2. Cálculo Diferencial. 3. Cálculo Variacional. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 510

FRANCISCO CEZAR DA COSTA

**PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS:
APLICAÇÕES DO ENSINO MÉDIO AO SUPERIOR**

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

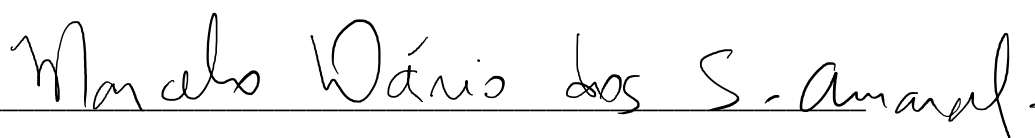
Aprovada em: 07/12/2020

BANCA EXAMINADORA



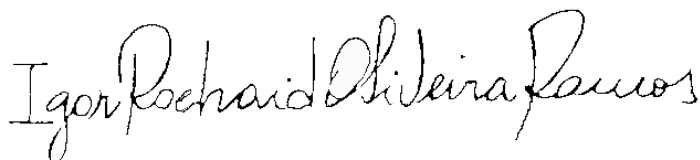
Dr. João Philipe Macedo Braga (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira



Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral (Membro Interno)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira



Dr. Igor Rochaid Oliveira Ramos (Membro externo)

Universidade Estadual Vale do Acaraú

Dedico este trabalho a Jesus Cristo, Maravilhoso Conselheiro, Deus Forte, Pai da Eternidade e Príncipe da Paz, presente em todas as circunstâncias da minha vida, pela incalculável ajuda durante esta árdua caminhada. A toda a minha família e amigos irmãos de fé, em especial a minha esposa Morgana e meus filhos, Emanuel e Eduardo, com quem compartilho de forma mais íntima as minhas angústias e conquistas. Por último e não menos importante, ao meu querido irmão Francisco Célio da Costa (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Deus de Abraão, Isaque e Jacó pelo fôlego de vida e por todas as oportunidades concebidas a mim até hoje, em especial, a de realizar o sonho de conclusão desse mestrado.

Com muito carinho agradeço aos meus pais (Osimar Porfírio da Costa e Cleia Francisca da Costa) que, apesar das muitas dificuldades enfrentadas, priorizaram a minha educação e por terem sido meus mantenedores até o dia em que saí de casa para me casar.

Desejo externar minha gratidão à minha esposa (Morgana Magalhães) e aos meus filhos (Emanuel e Eduardo) com quem compartilho projetos, momentos de alegria bem como minhas angústias, dores e tristezas. Sem eles, projeto algum teria saído do papel.

Agradeço a todos os meus familiares, parentes, amigos e irmãos em Cristo com destaque para meu nobre e reverendo Pr Walter Januário Correia de quem recebo muitas orientações imprescindíveis para o meu aperfeiçoamento como cristão.

Quero tornar público meus agradecimentos aos meus professores do ensino básico que me influenciaram positivamente na preferência pela área de exatas, dentre eles Lúcia Quintino, Antônio Marcos, Cirleide, Osiel, Márcio Oliveira, Ênio, Marcos e Nilton Braga.

Não poderia deixar de agradecer aos professores da graduação, dentre eles Acácio Freitas, Matias, Petrarca, Aureliano, Auricélia e Carlos Braga pelas ricas contribuições à minha formação.

Agradeço ao PROFMAT e CAPES pela estruturação, financiamento e execução desse valioso mestrado profissional para a formação matemática dos nossos docentes e simpatizantes da Matemática.

Agradeço ao jovem professor e orientador dessa dissertação Dr. João Philipe Macedo Braga, por ter disponibilizado o seu tempo precioso para me orientar, pela sua paciência, tolerância e exemplo de humildade durante esse pouco tempo que estivemos juntos. Agradeço também aos professores Marcelo Dário (UNILAB) e Igor Rochaid (UVA) por fazerem parte da banca e pelas ricas contribuições feitas para o enriquecimento desse trabalho.

Agradeço à UNILAB com destaque para os professores Rafael, Joserlan, Danila, João Francisco, Alisson, Rodrigo Mendes, Amanda pelo empenho de cada um em compartilhar seus conhecimentos e experiências pacientemente conosco durante esse mestrado.

Não poderia deixar de agradecer aos colegas dessa turma histórica, a primeira turma de mestrado em Matemática da UNILAB. Assim cada um dos colegas Everardo, Rodrigo

Malan, Rodrigo Montenegro, Otacílio, Adail, Marcos Paulo, Mário e Kelma meus sinceros agradecimentos.

Por fim, agradeço à Francisca Venceslau, Nena Maia e Antônia Maia por abrirem a porta para essa árdua, mas prazerosa profissão, bem como a todos que foram meus alunos até essa data. Meus agradecimentos também a todos os colegas de profissão pelas ricas interações, às quais somaram ao meu desenvolvimento profissional.

“Mas, como está escrito: As coisas que o olho não viu, e o ouvido não ouviu, e não subiram ao coração do homem são as que Deus preparou para os que o amam”.

1 Coríntios 2.9

RESUMO

Ao longo do desenvolvimento do processo histórico da humanidade, em muitas situações o homem tem sido atraído por problemas de otimização sempre com o objetivo de encontrar um resultado ótimo, ou seja, o melhor resultado empregando recursos mínimos. De acordo com certos critérios pré-estabelecidos, os problemas de máximos e mínimos são modelados com ferramentas pertencentes ao campo da Matemática. Elaborado a partir de revisão sistemática e aprofundada da literatura e com ênfase em Matemática, o presente trabalho, de pesquisa bibliográfica, pretende mostrar, de forma sucinta, o desenvolvimento de algumas ideias matemáticas sobre problemas de máximos e mínimos. Começando pelos fundamentos conceituais da função quadrática, passando pelas derivadas com as técnicas de obtenção de máximos e mínimos, finalizamos a parte teórica expondo princípios de Cálculo Variacional, com destaque para equação de Euler, com e sem restrições ou vínculos, que generalizam os problemas de otimização. Como forma de aplicação das ideias de máximos e mínimos, apresentamos problemas e propostas de soluções. Iniciamos com situações-problemas inerentes ao ensino médio sobre função quadrática presentes em livros didáticos, bem como em exames externos como vestibulares regionais e ENEM. Na sequência, apresentamos problemas utilizando como técnicas as derivadas, especialmente recorrendo às técnicas para obtenções de máximos e mínimos. Finalmente, utilizamos a equação de Euler, com e sem vínculos, para resolução de problemas clássicos do Cálculo Variacional, dentre eles o caminho mínimo entre dois pontos, o problema histórico da braquistócrona e o problema isoperimétrico da lenda de Dido.

Palavras-chave: Função Quadrática; Cálculo Diferencial; Cálculo Variacional.

ABSTRACT

Throughout the development of humanity's historical process, in many situations man has been attracted by optimization problems always with the objective of finding an optimal result, that is, the best result using minimal resources. According to certain pre-established criteria, the maximum and minimum problems are modeled with tools belonging to the field of Mathematics. Prepared from a systematic and in-depth review of the literature and with an emphasis on Mathematics, the present work, of bibliographic research, intends to show, in a succinct way, the development of some mathematical ideas about maxima and minima problems. Starting with the conceptual foundations of the quadratic function, passing through the derivatives with the techniques of obtaining maximums and minimums, we conclude the theoretical part by exposing Variational Calculation principles, with emphasis on Euler equation, with and without restrictions or bonds, which generalize the problems of optimization. As a way of applying the ideas of maximums and minimums, we will present problems and proposals for solutions. We will start with problem situations inherent in high school about quadratic function present in textbooks, as well as in external exams such as regional entrance exams and ENEM. In the sequence, we present problems using derivatives as techniques, especially using the techniques for obtaining maximum and minimum values. Finally, we use the Euler equation, with and without links, to solve classic problems of Variational Calculus, among them the minimum path between two points, the historical problem of brachistochronous and the isoperimetric problem of the legend of Dido.

Key-words: Quadratic function; Differential Calculus; Variational Calculus.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Parábola com reta diretriz paralela ao eixo das abscissas.....	21
Figura 2	Ilustração gráfica da parábola relacionada à função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^2$	23
Figura 3	Reta tangente a uma curva.....	26
Figura 4	Teorema do Valor Intermediário (a).....	28
Figura 5	Teorema do Valor Intermediário (b).....	28
Figura 6	Teorema do Valor Médio (a).....	34
Figura 7	Teorema do Valor Médio (b).....	35
Figura 8	Gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{ x }$	35
Figura 9	A 2ª derivada e a concavidade de uma curva.....	38
Figura 10	A função $y(x)$: o caminho que faz do funcional J um extremo.....	40
Figura 11	Ilustração da secção transversal do canal.....	52
Figura 12	Ilustração da função $y(x)$: trajetória entre os pontos de abscissas x_1 e x_2	54
Figura 13	Problema da Braquistócrona.....	56
Figura 14	A cicloide.....	57
Figura 15	Dido e seu povo cortando o couro de um boi.....	58
Figura 16	Ilustração analítica: Problema da Lenda de Dido.....	59

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO II – FUNDAMENTOS TEÓRICOS SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS	17
2.1 Função Quadrática.....	17
2.2 Cálculo Diferencial: Derivadas.....	26
2.3 Cálculo Diferencial: Máximos e Mínimos.....	31
2.4 Noções de Cálculo variacional.....	39
CAPÍTULO III – PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NO ENSINO MÉDIO	45
3.1 Retângulo de perímetro fixo.....	45
3.2 Problemas envolvendo lucro.....	46
3.3 Vestibulares da UECE e UNIFOR.....	47
CAPÍTULO IV – PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NO ENSINO SUPERIOR	50
4.1 Problemas de máximos e mínimos resolvidos com recursos do Cálculo Diferencial.....	50
4.2 Problemas de máximos e mínimos resolvidos com recursos do Cálculo Variacional.....	53
CAPÍTULO V – CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
REFERÊNCIAS	62

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

Ao longo do desenvolvimento do processo histórico da humanidade, em muitas situações o homem tem sido atraído por problemas de otimização sempre com o objetivo de encontrar um resultado ótimo (melhor resultado empregando recursos mínimos). De acordo com certos critérios pré-estabelecidos, os problemas de máximos e mínimos são modelados com ferramentas pertencentes ao campo da Matemática. Em particular, esse trabalho pretende abordar situações dessa natureza utilizando tópicos dos conceitos de função quadrática, cálculo diferencial e cálculo variacional.

De acordo com [1], esse trabalho foi elaborado a partir de “revisão sistemática e aprofundada da literatura” e tem ênfase em Matemática. O objetivo aqui é estabelecer conexões com a literatura matemática a fim de contribuir com a comunidade de pesquisadores, professores e simpatizantes dessa tão estimada e acertadamente denominada *A Rainha das Ciências*.

Segundo o dicionário [2], otimizar significa “tirar o melhor rendimento de (algo), criando as condições mais favoráveis possíveis”. Conforme [3], o homem sempre teve fascínio por problemas de otimização (buscar resultados máximos ou mínimos) em determinadas situações da vida em sociedade. Para tanto, surgiu a necessidade do desenvolvimento de técnicas que possibilitassem a modelagem de situações na busca de determinar tais valores.

A técnica mais elementar que apresentamos aqui e que possibilita a resolução de alguns problemas elementares de máximos e mínimos é a função quadrática, especificamente quando calculamos o seu vértice, visto que, dependendo do sinal de "a" na função

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, (a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0),$$

podemos encontrar um valor máximo ou mínimo.

De acordo com [4], o conceito de função quadrática teve sua origem na resolução de equações do 2º grau. Problemas que recaem nesse tipo de equações figuram entre os mais antigos da história da Matemática. Em textos babilônicos de escrita cuneiforme, está registrado a questão de encontrar dois números sendo conhecidos sua soma s e seu produto p . Geometricamente, este problema se resume a determinar os lados de um retângulo de semiperímetro s e área p . Tais números são as raízes da equação

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Em seguida abordamos alguns conceitos do Cálculo Diferencial relacionados às derivadas de determinadas funções (contínuas). Conforme [5], algumas ideias do Cálculo Diferencial podem ser encontradas nos trabalhos dos matemáticos gregos da Antiguidade da

época de Arquimedes (287-212 a.C.) e em trabalhos do início do século dezessete por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Jonh Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Todavia, a invenção do Cálculo Diferencial é frequentemente atribuída a Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pois foram eles que iniciaram o processo de generalização e unificação do assunto. Também haviam outros notáveis matemáticos do século dezessete e dezoito que contribuíram para o desenvolvimento desse importante ramo da Matemática; tais como Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Leonard Euler (1707-1783) e Joseph L. Lagrange (1736-1818). Entretanto, não foi antes do século dezenove que os processos do Cálculo Diferencial receberam fundamentação sólida por parte de ilustres matemáticos como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1857) e Richard Dedekind (1831-1916).

Nesse trabalho, por uma questão de delimitação da temática em estudo, nos limitamos a abordar o tópico do Cálculo Diferencial referente às derivadas.

Considerando-se uma função $f(x)$, definida na reta real, sabe-se que, se sua *primeira derivada* num ponto de abscissa x_1 for zero ($f'(x_1) = 0$), então x_1 será um ponto crítico. Portanto, candidato a máximo, mínimo ou ponto de inflexão. A técnica que empregamos para tirarmos conclusões acertadas acerca de x_1 é o cálculo da *segunda derivada* da função em estudo. Vemos que, se $f''(x_1) < 0$, x_1 será um ponto de máximo. Caso contrário, se $f''(x_1) > 0$, x_1 será um ponto de mínimo.

De acordo com [3] devemos focar nossa atenção nos objetos a serem maximizados ou minimizados, pois enquanto o Cálculo Diferencial procura números reais que sejam máximos ou mínimos, o Cálculo Variacional nos auxilia a encontrar funções que tenham propriedades (ou atributos) otimizadores.

Intuitivamente podemos afirmar que o Cálculo Variacional estuda funções contínuas cujas variáveis também são funções e não números reais. Tais conjuntos de funções denominamos *funcionais*. Em particular, abordamos a parte teórica relacionada a equação de Euler, com e sem restrições ou vínculos.

Após a abordagem da fundamentação teórico-matemática dos conceitos referentes à função quadrática, derivadas e cálculo variacional abordamos problemas e apresentamos as suas soluções utilizando as técnicas desenvolvidas.

Relativamente ao ensino básico, mais precisamente o ensino médio, apresentamos problemas (e suas respectivas soluções) contidos em livros didáticos utilizados nesse nível de ensino, bem como itens contemplados no ENEM e vestibulares locais. Dentre os problemas,

podemos citar a questão isoperimétrica de se determinar o retângulo de área máxima, dentre um conjunto de retângulos de perímetro fixo.

Quanto ao ensino superior, primeiramente abordamos problemas a serem resolvidos com os recursos das derivadas, em especial usamos as técnicas fornecidas pelas proposições, teoremas, lemas e corolários relacionados à obtenção de máximos e mínimos. Podemos citar, dentre os problemas, a questão de se encontrar, dentre um conjunto de todos os cilindros de volume fixo, qual deles tem área mínima.

No fechamento do trabalho, utilizando a equação de Euler, com e sem vínculos ou restrições, apresentamos o enunciado e o contexto histórico de três problemas clássicos da história da Ciência: o caminho mínimo entre dois pontos, a braquistócrona proposta por Johann Bernoulli e o problema isoperimétrico da Lenda de Dido.

É oportuno destacar que, ao realizarmos uma busca no banco de dissertações do PROFMAT [6] pelas principais expressões ou termos utilizados nesse trabalho, encontramos 16 (dezesesseis) registros relacionados com a expressão “máximos e mínimos” com defesas de 12/03/2013 a 29/08/2019; 24 (vinte e quatro) trabalhos relacionados ao conceito de “função quadrática” com defesas de 30/06/2014 a 13/11/2019; 41 (quarenta e um) registros relacionados à expressão “cálculo diferencial” com defesas de 15/01/2016 a 28/09/2019; 5 (cinco) ocorrências relacionadas à expressão “cálculo variacional” com defesas desde 01/04/2013 a 07/10/2019; 3 (três) registros sobre o termo “braquistócrona” com defesas de 12/08/2015 a 18/03/2020 e 2 (duas) ocorrências sobre a “lenda de Dido” com defesas em 01/08/2014 e 08/04/2016.

Na referência [7], a autora explora o conceito de máximos e mínimos apresentando uma proposta de resolução de problemas modelados por funções cúbicas. Em [8] são propostas quatro atividades práticas, utilizando o Geogebra e os conceitos de função afim e quadrática, aplicadas a alunos do 1º ano do ensino médio, além de um levantamento de opiniões de docentes sobre a utilização de tecnologias no ensino de Matemática. Em [9], o autor explora os conceitos de cálculo de várias variáveis, função quadrática e desigualdade das médias como métodos para resolução de problemas de otimização do nosso cotidiano. Já em [10], o autor propõe uma abordagem do conceito de máximos e mínimos utilizando os conteúdos do ensino básico do currículo oficial do Estado de São Paulo, tais como múltiplos e divisores, perímetros, áreas de polígonos, função quadrática, funções trigonométricas e inequações na forma gráfica.

Encontramos em [11] um estudo sobre máximos e mínimos de funções reais utilizando os conceitos de desigualdades, cálculo diferencial e geometria com o objetivo de resolver problemas clássicos da Matemática tais como a lenda de Dido e desigualdades

isoperimétrica para polígonos, além da exploração do Geogebra como sugestão para a prática docente. A proposta apresentada em [12] consiste em aplicações das ferramentas matemáticas função quadrática e cálculo diferencial de funções (polinomiais e racionais), na resolução de problemas sobre máximos e mínimos nos seguintes campos: Indústria, Física, Economia, Geometria e Medicina. Enquanto em [13], a autora faz uso dos conceitos de derivadas parciais, teorema de Weierstrass e multiplicadores de Lagrange para aplicação em problemas de máximos e mínimos envolvendo a otimização de embalagens. A proposta da referência [14] é demonstrar as desigualdades das médias e utilizá-las na resolução de problemas de máximos e mínimos (isoperimétricos e isorradianos) na geometria Euclidiana. Em [15], o autor propõe um trabalho voltado para professores do ensino médio explorando os conceitos de função quadrática, derivadas e fórmula de Taylor na resolução de problemas sobre funções de uma variável real. Finalmente, em [16] o autor propõe a construção de um modelo matemático da Mecânica Clássica usando o princípio variacional que leva ao formalismo *lagrangeano* e *hamiltoniano*. Nesse trabalho ele explora o teorema de Liouville sobre o volume invariante de regiões do espaço de fase sob algumas restrições.

Enquanto cada uma das dissertações pesquisadas aborda aspectos específicos sobre as principais expressões e termos que utilizamos, nesse trabalho apresentamos uma visão panorâmica, partindo de conceitos mais elementares como a função quadrática, passando pelo cálculo diferencial até a generalização dos problemas de otimização com a utilização de ferramentas mais avançadas pertencentes ao cálculo variacional.

CAPÍTULO II – FUNDAMENTOS TEÓRICOS SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS

2.1 Função Quadrática

De acordo com [4], o conceito de função quadrática tem sua origem na resolução de equações do 2º grau e estão entre os mais antigos da Matemática. Há cerca de quatro mil anos foram encontrados, em textos cuneiformes escritos pelos babilônios, a questão de achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p .

Geometricamente, o mesmo problema refere-se à questão de se determinar os lados de um retângulo de semiperímetro s e área igual a p . Tais números são as raízes da equação do 2º grau

$$x^2 - sx + p = 0. \quad (2.1)$$

Encontrar as raízes da equação (2.1) é um conhecimento milenar. Estima-se que, até o fim do século XVI, não era utilizada uma fórmula para os valores das raízes, pois os coeficientes de uma equação ainda não eram representados por letras, já que tal recurso só passou a ser utilizado a partir do matemático francês François Viète (1540-1603).

Antes de Viète, a técnica utilizada era uma receita com uma sequência de passos em casos concretos.

Em sua grande maioria, as ideias apresentadas nessa seção estão embasadas em [4].

2.1.1 Definições introdutórias

Conforme [4], dados números reais a, b, c , com $a \neq 0$, uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, chama-se *quadrática* quando, para cada $x \in \mathbb{R}$, associa o número real

$$f(x) = ax^2 + bx + c. \quad (2.2)$$

Para cada terna de coeficientes a, b e c definimos uma função quadrática. Ou seja, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $a = a', b = b'$ e $c = c'$.

Seja $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se fizermos $x = 0$, então obtemos $c = c'$. Assim, temos $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Essa igualdade é válida para todo $x \neq 0$. Escrevendo essa mesma igualdade na forma abaixo e, em seguida, cancelando x , obtemos:

$$\begin{aligned} x(ax + b) &= x(a'x + b') \\ ax + b &= a'x + b' \end{aligned}$$

Fazendo $x = 1$ e depois $x = -1$, encontramos $a + b = a' + b'$ e $-a + b = -a' + b'$.

Resolvendo esse sistema

$$\begin{cases} a + b = a' + b' \\ -a + b = -a' + b' \end{cases}$$

concluimos que $a = a'$ e $b = b'$.

Todas as ideias que desenvolvemos até aqui nos permitem identificar uma função quadrática com um trinômio do 2º grau. Entretanto, de acordo com [4]

Há uma diferença sutil entre esses dois conceitos. Um trinômio do 2º grau é uma expressão formal do tipo $aX^2 + bX + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$. A palavra formal aí significa que a letra X é apenas um símbolo, sendo X^2 um outro modo de escrever XX . Por definição, dois trinômios $aX^2 + bX + c$ e $a'X^2 + b'X + c$ são iguais quando $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. [Em última análise, um trinômio é o mesmo que um terno ordenado de números reais (a, b, c)]. (LIMA, 2013, p. 118)

2.1.2. O trinômio do 2º grau na forma canônica

Seja o trinômio do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ são números reais e } a \neq 0).$$

Podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right]. \quad (2.3)$$

Sabemos que

$$(x + t)^2 = x^2 + 2tx + t^2. \quad (2.4)$$

Se " $x^2 + \frac{b}{a}x$ " da expressão entre colchetes de (2.3) forem os dois primeiros termos

de um quadrado perfeito do tipo (2.4), temos que

$$2t = \frac{b}{a} \Rightarrow t = \frac{b}{2a}. \quad (2.5)$$

Desse modo, podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right].$$

Obtemos a expressão

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right], \quad (2.6)$$

que é a *forma canônica* do trinômio do segundo grau.

Se fizermos $ax^2 + bx + c = 0$, sendo $a \neq 0$, obtemos as seguintes equivalências

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] = 0. \quad (2.7)$$

Dividindo a equivalência (2.7) por $a \neq 0$, obtemos

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0 \quad (2.8)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (2.9)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.10)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.11)$$

A passagem de (2.9) para (2.10) só é possível se o *discriminante* (o qual designaremos por Δ) for maior do que ou igual a zero

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0. \quad (2.12)$$

Caso contrário, se $\Delta < 0$, então a equação $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, que é equivalente a

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2.13)$$

não possui solução no universo dos números reais, pois $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ jamais será negativo.

Temos as seguintes possibilidades para as raízes da equação (2.7):

- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}.$$

Nesse caso, é fácil verificar que a soma das raízes é igual a

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}. \quad (2.14)$$

Já o produto entre as raízes é dado por

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \quad (2.15)$$

Além disso, observe que a média aritmética entre as raízes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ é dada por

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}. \quad (2.16)$$

- Se $\Delta = 0$, temos

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}, \quad (2.17)$$

uma única raiz real, denominada *raiz dupla*.

Retomando a forma canônica (2.6), supondo $a > 0$, vamos analisar a soma de parcelas no interior dos colchetes. Temos que a parcela $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ depende de x e é sempre maior do que ou igual a zero,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0, \quad (2.18)$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

A segunda expressão de (2.6), $-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$, é constante. Assim, o menor valor dessa soma é obtido quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}. \quad (2.19)$$

É importante observar que, nesse ponto $x = \frac{-b}{2a}$, a função quadrática (2.2) também assume valor mínimo. Logo, para $a > 0$, esse valor mínimo é dado por

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}. \quad (2.20)$$

Caso contrário, se $a < 0$, então $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Continuando a nossa análise, se $a > 0$, a função (2.2) não possui valor máximo. Ou seja, não existe um limitante superior, e assim (2.2) é *ilimitada superiormente*.

De maneira análoga, caso $a < 0$, (2.2) não tem um valor mínimo. Nesse caso, ela é *ilimitada inferiormente*.

Vamos responder à pergunta: “Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c são números reais e $a \neq 0$), para quais valores $x_1 \neq x_2$, temos que $f(x_1) = f(x_2)$?”

Uma solução:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow a\left[\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Temos que

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \Leftrightarrow \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Temos que

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left|x_1 + \frac{b}{2a}\right|^2 = \left|x_2 + \frac{b}{2a}\right|^2 \Leftrightarrow \left|x_1 + \frac{b}{2a}\right| = \left|x_2 + \frac{b}{2a}\right|.$$

Temos dois casos,

$$x_1 + \frac{b}{2a} = x_2 + \frac{b}{2a} \text{ ou } x_1 + \frac{b}{2a} = -\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right).$$

Conforme vimos, se estamos supondo $x_1 \neq x_2$, então temos que

$$x_1 + \frac{b}{2a} = -\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}. \quad (2.21)$$

Concluimos que a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c são números reais e $a \neq 0$) assume valores iguais $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$ se, e somente se, os números x_1 e x_2 são equidistantes do número real $\frac{-b}{2a}$.

2.1.3. Gráfico da função quadrática

Conforme [4], o gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

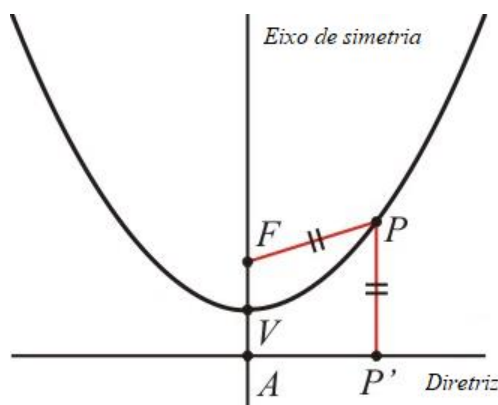
De acordo com Iezzi [17],

Dados um ponto F e uma reta ℓ , pertencentes a um plano α , com $F \notin \ell$, seja p a distância entre F e ℓ . Parábola é conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e de ℓ .

$$\text{parábola} = \{P \in \alpha \mid d(P, F) = d(P, \ell)\}.$$

Para não correr o risco de perder o foco do tema desse trabalho ou de ser muito exaustivo, consideraremos apenas o caso em que a reta diretriz d é paralela ao eixo Ox , conforme ilustrado na figura 1.

Figura 1: Parábola com reta diretriz paralela ao eixo das abscissas.



Fonte: [18]

1º caso: Vamos analisar a parábola $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$.

Conforme vimos, o gráfico $[G(f)]$ da função quadrática é uma parábola. Assim, sejam F o foco, V o vértice e A o ponto de intersecção da reta diretriz (ℓ) com o eixo de simetria. (no caso em análise, o próprio eixo Oy).

Da definição de parábola, temos que

$$d(F, V) = d(A, V) = \frac{p}{2} \quad (2.22)$$

onde p é o parâmetro da parábola.

De acordo com os conceitos desenvolvidos no tópico anterior, a função em estudo possui valor mínimo $y = 0$. Substituindo esse valor na função, encontramos o seu vértice

$$V = (0, 0). \quad (2.23)$$

Os pontos F , V e A pertence ao eixo de simetria da parábola (também chamada reta focal) que, nesse caso em particular, é o próprio eixo das ordenadas Oy . Assim, as coordenadas do foco são $F = (0, \frac{p}{2})$ e a reta diretriz é $\ell: y = \frac{-p}{2}$.

Se $P \in G(f)$, suas coordenadas são $P = (x, x^2)$. Note que $P' = (x, \frac{-p}{2})$ é a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta diretriz $\ell: y = \frac{-p}{2}$.

Recorrendo à definição de parábola, temos que

$$d(P, F) = d(P, P') \Rightarrow [d(P, F)]^2 = [d(P, P')]^2. \quad (2.24)$$

Temos que

$$\left[\sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{p}{2}\right)^2} \right]^2 = \left[\sqrt{\left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2} \right]^2. \quad (2.25)$$

O que equivale a

$$x^2 + \left(x^2 - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2. \quad (2.26)$$

Desenvolvendo a expressão acima, obtemos

$$x^2 + x^4 - px^2 + \frac{p^2}{4} = x^4 + px^2 + \frac{p^2}{4}. \quad (2.27)$$

O que resulta na expressão

$$x^2(1 - 2p) = 0, \quad (2.28)$$

que é possível se $x = 0$ ou $p = \frac{1}{2}$.

Logo, o gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$ é a parábola com foco no ponto $F = (0, \frac{1}{4})$ e cuja reta diretriz é $\ell: y = -\frac{1}{4}$. Além disso, a distância entre um ponto qualquer (x, x^2) do gráfico da função ao ponto $F = (0, \frac{1}{4})$ é igual a

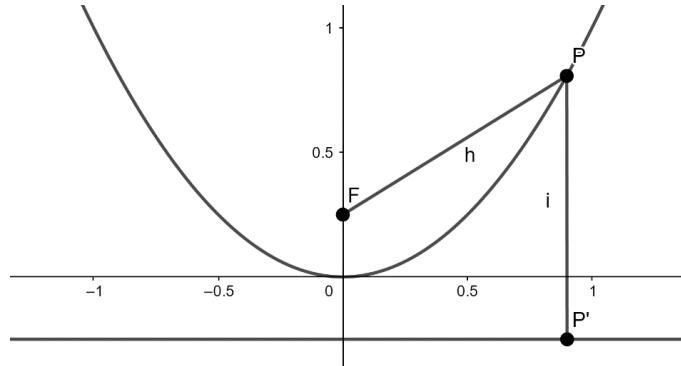
$$\sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2}. \quad (2.29)$$

Já a distância desse mesmo ponto (x, x^2) à reta $\ell: y = -\frac{1}{4}$ é dada por

$$x^2 + \frac{1}{4}. \quad (2.30)$$

Graficamente, temos:

Figura 2: Ilustração gráfica da parábola relacionada à função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^2$.



Fonte: Arquivo próprio

Como as *distâncias* são números positivos, a fim de verificarmos que $d(P, F)$ e $d(P, P')$ são iguais, basta percebermos que seus quadrados são iguais, o que pode ser comprovado facilmente. Logo,

$$x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

2º caso: Vamos analisar a parábola $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$.

É fácil constatar que alguns elementos do 1º caso serão preservados. Os pontos F , V e A pertence ao eixo de simetria da parábola. As coordenadas do foco são $F = (0, \frac{p}{2})$ e a reta diretriz é $\ell: y = \frac{-p}{2}$.

Se $P \in G(f)$, suas coordenadas são $P = (x, ax^2)$. Note que $P' = (x, \frac{-p}{2})$ é a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta diretriz $\ell: y = \frac{-p}{2}$.

Recorrendo à definição de parábola, temos que

$$d(P, F) = d(P, P') \Rightarrow [d(P, F)]^2 = [d(P, P')]^2. \quad (2.32)$$

Temos que

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{p}{2}\right)^2. \quad (2.33)$$

Desenvolvendo a expressão acima, obtemos

$$x^2 + a^2x^4 - apx^2 + \frac{p^2}{4} = a^2x^4 + apx^2 + \frac{p^2}{4}. \quad (2.34)$$

O que resulta na expressão

$$x^2(1 - 2ap) = 0, \quad (2.35)$$

que é possível se $x = 0$ ou $p = \frac{1}{2a}$.

Logo, o gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = ax^2$ é a parábola com foco no ponto $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja reta diretriz é $\ell: y = -\frac{1}{4a}$. Além disso, a distância entre um ponto qualquer (x, ax^2) do gráfico da função ao ponto $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ é igual a

$$\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}. \quad (2.36)$$

Já a distância desse mesmo ponto (x, ax^2) à reta $\ell: y = -\frac{1}{4a}$ é dada por

$$ax^2 + \frac{1}{4a}. \quad (2.37)$$

Como as *distâncias* são números positivos, a fim de verificarmos que $d(P, F)$ e $d(P, P')$ são iguais, basta percebermos que seus quadrados são iguais, o que pode ser comprovado facilmente,

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0. \quad (2.38)$$

Se $a > 0$, o foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ localiza-se acima da reta diretriz $\ell: y = -\frac{1}{4a}$. Logo, a parábola $y = ax^2$ tem concavidade voltada para cima. Caso $a < 0$, o foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ localiza-se abaixo da reta diretriz $\ell: y = -\frac{1}{4a}$. Logo, a parábola $y = ax^2$ tem concavidade voltada para baixo.

3º caso: Vamos analisar a parábola $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = a(x - m)^2$, com $a \neq 0$.

Nesse caso, é fácil perceber que a parábola sofre a seguinte translação horizontal

$$(x, y) \mapsto (x + m, y), \quad (2.39)$$

que leva o eixo de simetria $x = 0$ (da parábola do 2º caso, $y = ax^2$) para o eixo $x = m$ (novo eixo de simetria). Assim, o gráfico de $f(x) = a(x - m)^2$ é resultante do gráfico de $y = ax^2$ pela translação mencionada logo acima.

Assim, o foco da parábola em análise é o ponto $F = \left(m, \frac{1}{4a}\right)$ e a reta diretriz permanece sendo $\ell: y = -\frac{1}{4a}$.

4º caso: Vamos analisar a parábola $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = a(x - m)^2 + k$, com $a, m, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Esse caso é resultante da situação analisada no 3º caso, pois o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é obtido a partir do gráfico de $g(x) = a(x - m)^2$ por meio da translação vertical

$$(x, y) \mapsto (x, y + k), \quad (2.40)$$

a qual leva o eixo Ox na reta $y = k$ e a nova reta diretriz $y = -\frac{1}{4a}$ para a ser $y = k - \frac{1}{4a}$.

Temos que o foco será o ponto $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e reta diretriz é $y = k - \frac{1}{4a}$.

Para finalizarmos, comparando a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = a(x - m)^2 + k$, com $a, m, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ com a forma canônica da função quadrática,

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = a(x - m)^2 + k, \quad (2.41)$$

obtemos $m = \frac{-b}{2a}$ e $k = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$.

Desse modo, a diretriz de qualquer função quadrática é a reta horizontal

$$y = k - \frac{1}{4a} = \frac{-\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} = \frac{-\Delta - 1}{4a}. \quad (2.42)$$

e o foco é o ponto

$$F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right). \quad (2.43)$$

Já sabemos que essa parábola tem concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$.

Temos ainda que o ponto mais próximo da diretriz é aquele cuja abscissa é dada por $x = \frac{-b}{2a}$. Nesse ponto, a função $f(x)$ atinge o seu valor mínimo, se $a > 0$. Caso $a < 0$, essa função atinge seu valor máximo. Assim, quando $x = \frac{-b}{2a}$, o ponto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola (que é o gráfico da função quadrática).

Vimos, na seção anterior, que a função quadrática (2.2) assume valores iguais $f(x_1) = f(x_2)$ se, e só se, os pontos x_1 e x_2 são equidistantes de $\frac{-b}{2a}$. De outro modo, a reta vertical $x = \frac{-b}{2a}$ é o eixo de simetria do gráfico dessa função.

Quando $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, os pontos $\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ e $\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$ são as intersecções do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ com o eixo das abscissas. Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, a função intersecta esse eixo no ponto $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$ e, por último, caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a função não intersecta o eixo das abscissas.

Para finalizarmos, temos que a intersecção do gráfico da função quadrática com o eixo das ordenadas, se dá no ponto cuja abscissa é $x = 0$, que é o ponto $(0, c)$.

2.2 Cálculo Diferencial e Integral: A Derivada

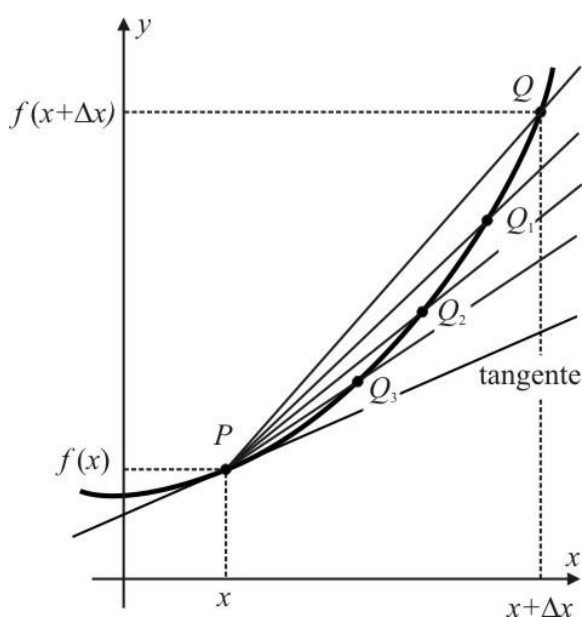
De acordo com [19], quem primeiro formulou de forma explícita as ideias de limites e derivadas foi Sir Isaac Newton, em 1600. Entretanto, conforme a seguinte frase atribuída a esse gênio, “Se vejo mais longe do que outros homens, é porque estou sobre os ombros de gigantes”, Newton era reconhecedor das contribuições dos gigantes Fermat (1601-1665) e do seu mentor em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). O fato de estar familiarizado com os métodos de Fermat e Isaac Barrow para a determinação de retas tangentes, foi fundamental para a formulação do Cálculo Diferencial por Newton.

As principais ideias tratadas nesta seção foram embasadas em [5], [19] e [20] e nos limitaremos a funções definidas de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

2.2.1 A reta tangente e a razão incremental

Suponhamos que uma curva é o gráfico de uma dada função f . Sejam x e $f(x)$ as coordenadas de um ponto P (da curva) por onde desejamos traçar uma reta tangente. Vamos considerar um outro ponto Q do gráfico dessa função, cuja abscissa é representada por $x + \Delta x$. Consequentemente, a ordenada de Q é $f(x + \Delta x)$.

Figura 3: Reta tangente a uma curva



Fonte: [18]

É fácil verificar que o declive da reta secante PQ pode ser encontrado facilmente pelo quociente

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad (2.44)$$

chamado de *razão incremental*. Ora Δx é um incremento que damos à abscissa de P para obtermos a abscissa de Q , $x + \Delta x$. Então, a ordenada de Q , $f(x + \Delta x)$, é obtida a partir de $f(x)$ por meio do incremento $f(x + \Delta x) - f(x)$.

Fixando-se o ponto P , imaginemos que o ponto Q se aproxima de P , assumindo as sucessivas posições Q_1, Q_2, Q_3, \dots . Assim, a secante PQ assumirá as posições PQ_1, PQ_2, PQ_3, \dots conforme ilustrado na figura 3.

Como consequência, a razão incremental, que é o declive da reta secante PQ , se aproxima de um determinado valor m , à medida que o ponto Q se aproxima de P . Logo, podemos definir a reta *tangente* à curva dada no ponto P como aquela que passa por P e cujo o declive ou coeficiente angular é igual a m .

Usando a ideia de limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$ (Δx tende a zero) e a razão incremental se aproxima de um valor finito m , escrevemos

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \quad (2.45)$$

É importante destacar que há situações em que a reta tangente não existe, como por exemplo o caso da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, mais precisamente no ponto $(0,0)$, no qual é impossível construir uma reta tangente.

2.2.2. Funções contínuas e o Teorema do Valor Intermediário

As ideias desenvolvidas aqui, consideram o caso das funções contínuas.

Definição: Diz-se que uma função f (definida na reta) é contínua em um ponto x_0 quando as seguintes condições são satisfeitas:

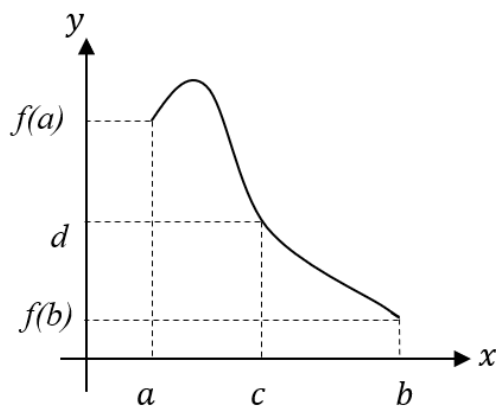
- i) f está definida em x_0 ;
- ii) $f(x)$ tem limite em $x \rightarrow x_0$ e esse limite é igual a $f(x_0)$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

A definição acima para continuidade de uma função está intrinsecamente relacionada à ideia geométrica, de acordo com a qual concebemos como contínua uma função cujo gráfico não apresenta “*quebra*” ou “*ruptura*”.

Analicamente, uma função contínua num intervalo é definida em todo e qualquer valor compreendido entre dois outros valores assumidos pela função. Especificamente, seja a

função f contínua no intervalo (fechado) de extremos a e b . Se $f(a) < d < f(b)$, então existe um número real c entre a e b ($a < c < b$) tal que $f(c) = d$.

Figura 4: Teorema do Valor Intermediário (a)



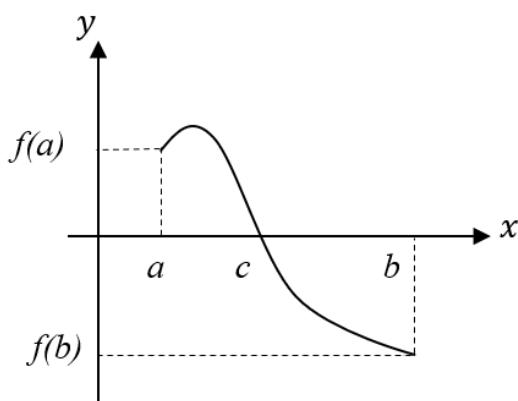
Fonte: Arquivo próprio

(Definição) Teorema do Valor Intermediário: Seja f uma função contínua num intervalo, do qual a e b são pontos quaisquer. Então, dado um número real qualquer r , entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um número c entre a e b , tal que $r = f(c)$.

O seguinte corolário é uma consequência imediata desse teorema:

(Corolário) Seja f uma função contínua num intervalo, do qual a e b são pontos onde a função assume valores de sinais contrários ($f(a) > f(b)$ ou $f(a) < f(b)$). Então, existe pelo menos um ponto entre a e b onde f se anula.

Figura 5: Teorema do Valor Intermediário (b)



Fonte: Arquivo próprio

2.2.3. A derivada

Na seção 2.2.1 definimos o declive de uma curva f num ponto P de coordenadas $(x, f(x))$, como o limite da razão incremental com $\Delta x \rightarrow 0$:

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.46)$$

Essa *razão incremental*, *declive* ou *coeficiente angular* da reta tangente à curva no ponto $P = (x, f(x))$ é a *derivada* da função f e indicamos com o símbolo f' .

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.47)$$

Antes da apresentação do próximo teorema é importante definir que uma função é derivável quando sua derivada existe em cada ponto do seu domínio.

Teorema: Toda função derivável num ponto x_0 é contínua nesse ponto.

Demonstração: Consideremos a função f derivável no ponto x_0 , de modo que a diferença ϵ entre a razão incremental e a derivada (no ponto x_0),

$$\epsilon = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \quad (2.48)$$

tende a zero quando $x \rightarrow x_0$. Temos que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\epsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.49)$$

2.2.4. Regras básicas de derivação

Nessa seção apresentaremos algumas regras gerais de derivação que valem para as funções contínuas.

Já vimos que a derivada de uma curva f num ponto de abscissa x é dada por (2.47). A seguir, mostraremos as derivadas de algumas funções.

2.2.4.1. Derivada da função constante

Iniciaremos pelo caso de uma função constante $f(x) = C$. Temos que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0. \quad (2.50)$$

2.2.4.2. Derivada da função x^n

Utilizando o Binômio de Newton, sabemos que

$$(x + a)^n = x^n + nx^{n-1}a + C_{n2}x^{n-2}a^2 + C_{n3}x^{n-3}a^3 + \dots + a^n, \quad (2.51)$$

onde C_{n2}, C_{n3}, \dots são chamados de coeficientes binomiais.

Vamos calcular a derivada da função $f(x) = x^n$. Temos que

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.52)$$

Desenvolvendo o binômio, colocando Δx em evidência e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + \Delta x(nx^{n-1} + C_{n2}x^{n-2}\Delta x + C_{n3}x^{n-3}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^{n-1}) - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}. \quad (2.53)$$

2.2.4.3. Derivada de uma soma

Consideremos as funções deriváveis f e g . Temos que

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}. \quad (2.54)$$

Manipulando adequadamente a expressão acima, obtemos

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x). \quad (2.55)$$

É fácil perceber que essa regra se generaliza para um número qualquer de funções f_1, f_2, \dots, f_n :

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'. \quad (2.56)$$

Para $n = 3$, temos

$$(f_1 + f_2 + f_3)' = (f_1 + f_2)' + f_3' = f_1' + f_2' + f_3'. \quad (2.57)$$

Seguindo esse raciocínio, $n = 4$ reduz-se ao caso $n = 3$, o caso $n = 5$ reduz-se ao caso $n = 4$. Portanto, assim procedendo, estabeleceremos a regra para um número n qualquer de funções.

2.2.4.4. Derivada de um produto

Aqui vamos calcular a derivada de um produto de funções. Consideremos as funções $f(x)$ e $g(x)$. Temos que

$$[f(x)g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}. \quad (2.58)$$

Fazendo as manipulações matemáticas devidas, obtemos:

$$[f(x)g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x+\Delta x)-g(x)]+g(x+\Delta x)[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x} \quad (2.59)$$

Realizando as devidas manipulações no 2º membro do resultado (1.25), obtemos:

$$f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Logo,

$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x). \quad (2.60)$$

Caso uma das funções seja constante, suponhamos $g(x) = C$, como a derivada da constante é zero, a regra do produto que acabamos de desenvolver nos dá o seguinte resultado

$$[Cf(x)]' = Cf'(x). \quad (2.61)$$

2.2.4.4. Derivada de um quociente

Considere a função $h = \frac{f}{g}$, obtida por meio do quociente entre as funções f e g , deriváveis num ponto x , desde que $g(x) \neq 0$.

Utilizando a regra do produto (1.26), podemos derivar a função h , a partir da expressão $f = gh$. Temos:

$$f' = g'h + gh' \Rightarrow h' = \frac{f'-g'h}{g} = \frac{f'-[g'(\frac{f}{g})]}{g}. \quad (2.62)$$

Logo, obtemos

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf'-fg'}{g^2}. \quad (2.63)$$

2.3. Cálculo Diferencial: Máximos e mínimos

Conforme [20] parte das aplicações mais importantes do Cálculo Diferencial são os problemas de *otimização*, nos quais devemos nos empenhar em encontrar a maneira *ótima* (melhor maneira possível) de realizar um determinado feito. Nessa perspectiva, muitas situações práticas necessitam de uma modelagem que nos permita encontrar o valor máximo ou mínimo de uma função f num certo intervalo. Para tanto, é interessante conhecermos as técnicas de como determinar tais valores.

Diz-se que x_0 é *ponto de máximo* de uma função f , se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x no domínio de f . De outro modo, caso ocorra $f(x) \geq f(x_0)$, então x_0 é *ponto de mínimo*.

Definição: Diz-se que x_0 é ponto de máximo local de uma função f quando existe um intervalo aberto tal que x_0 seja ponto de máximo de f nesse intervalo. Analogamente, podemos definir mínimo local.

Com frequência os termos *máximo* e *mínimo* são empregados para significar máximo e mínimo locais. A fim de se evitar confusão de conceitos, usaremos as expressões *máximo absoluto* e *mínimo absoluto* para designar o máximo e o mínimo de uma função em todo o seu domínio. Tais valores também recebem a denominação de extremos da função.

2.3.1. Caracterização

Algumas funções têm valores extremos enquanto outras não têm. Conforme [19] o teorema que segue nos dá as condições que garante a existência de tais valores numa determinada função.

Teorema do Valor Extremo: Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

Embora esse teorema afirme que uma função contínua tem um valor máximo e um mínimo em um intervalo fechado, ele não especifica de que maneira podemos encontrar tais valores. Tal problema pode ser resolvido pelo seguinte teorema.

Teorema (de Fermat): Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com máximo (ou mínimo) local num ponto x_0 , onde ela é derivável, então $f'(x_0) = 0$.

Para demonstrar esse teorema, suponhamos (sem perda de generalidade) que x_0 é ponto de máximo da referida função. Temos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0, \quad (2.64)$$

onde h é o incremento (Δx) muito pequeno, positivo ou negativo. Temos que

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \geq 0, \text{ se } h < 0 \\ \leq 0, \text{ se } h > 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

De fato, se $h < 0$, sendo $f(x_0 + h) - f(x_0)$ negativo ou nulo (por hipótese), então o resultado da divisão acima será um número *não negativo*. De outro modo (se $h > 0$) a divisão fornecerá um resultado *não positivo*.

Como a função é derivável no ponto x_0 ($f'(x_0)$ existe), por hipótese, então podemos obtê-la de duas maneiras, tomando o limite da função $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ com $h \rightarrow 0$:

- i) por valores estritamente negativos, $h \rightarrow 0_-$ ou
- ii) por valores estritamente positivos, $h \rightarrow 0_+$.

Temos

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad (2.66)$$

ou

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0. \quad (2.67)$$

Dessas duas desigualdades, podemos concluir que

$$f'(x_0) = 0. \quad (2.68)$$

Analogamente, suponhamos que x_0 é ponto de mínimo da referida função. Temos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0, \quad (2.69)$$

onde h é suficientemente pequeno, positivo ou negativo. Segue-se que

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0, \text{ se } h < 0 \\ \geq 0, \text{ se } h > 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

De fato, se $h < 0$, sendo $f(x_0 + h) - f(x_0)$ positivo ou nulo (por hipótese), então o resultado da divisão acima será um número *não positivo*. De outro modo (se $h > 0$) a divisão fornecerá um resultado *não negativo*.

Sendo a função derivável no ponto x_0 ($f'(x_0)$ existe), por hipótese, então podemos obtê-la de duas maneiras, tomando o limite da função $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ com $h \rightarrow 0$:

- i) por valores estritamente negativos, $h \rightarrow 0_-$ ou
- ii) por valores estritamente positivos, $h \rightarrow 0_+$.

Temos

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad (2.71)$$

ou

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0. \quad (2.72)$$

Assim, dessas duas desigualdades, podemos concluir que

$$f'(x_0) = 0. \quad (2.73)$$

Finalizamos essa parte com a seguinte definição de número crítico.

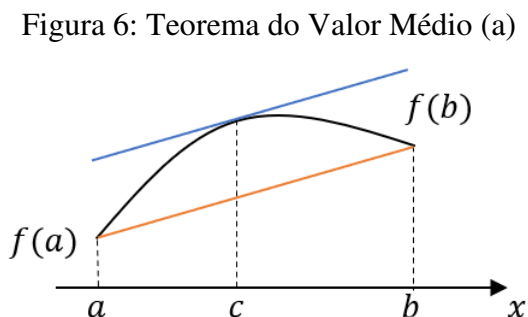
Definição: Um número crítico de uma função f é um número c pertencente ao domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

2.3.2. O Teorema do Valor Médio

Nessa subseção vamos apresentar um dos principais teoremas do Cálculo Diferencial: o Teorema do Valor Médio. Seu conteúdo geométrico é bastante didático e sugestivo.

Consideremos uma função f e dois pontos A e B pertencentes ao seu gráfico:

$$A = (a, f(a)) \text{ e } B = (b, f(b)). \quad (2.74)$$



Fonte: Arquivo próprio

Da Geometria Analítica sabemos que o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f e que passa pelos pontos A e B é dado por

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad (2.75)$$

De acordo com a figura 6, existe um ponto $C = (c, f(c))$ pertencente ao gráfico de f , onde a reta tangente à curva é paralela à secante \overline{AB} . Ora, da Geometria Analítica sabemos que ambas as retas têm a mesma inclinação (portanto, os mesmos coeficientes angulares). Também já vimos que o declive da reta tangente ao gráfico em C é dado por $f'(c)$. Assim,

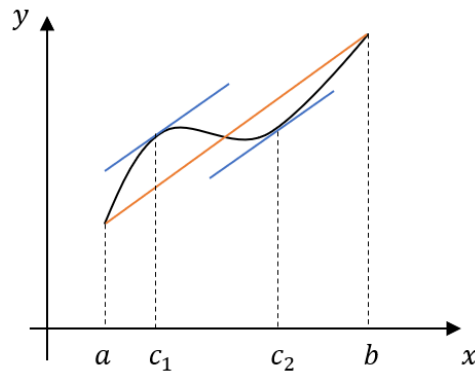
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \quad (2.76)$$

De modo equivalente, podemos escrever também dessa forma

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (2.77)$$

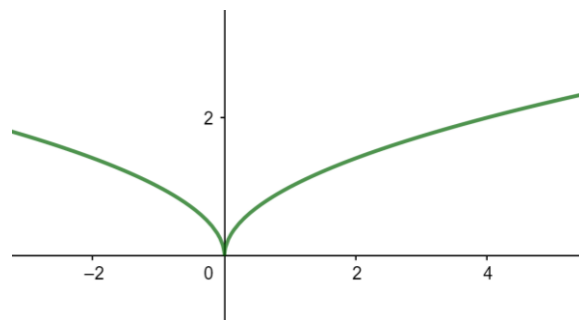
É oportuno ressaltar que o valor de $c \in (a, b)$, satisfazendo as ideias expostas acima, pode não ser único (figura 7) ou não existe (figura 8).

Figura 7: Teorema do Valor Médio (b)



Fonte: Arquivo próprio

Figura 8: Gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x|}$



Fonte: Arquivo próprio

A condição necessária para a ocorrência da relação (2.77) é que devemos supor f derivável no intervalo (a, b) .

Teorema de Rolle: Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, derivável nos pontos interiores, tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Temos dois casos satisfazendo a condição $f(a) = f(b)$: f é uma função constante, $f(x) = f(a) = f(b)$, ou f não é constante. No caso em que f é uma função constante, não há

o que demonstrar, pois $f'(c) = 0$, para quaisquer $c \in (a, b)$, pois a derivada da função constante é nula.

No caso em que f não é constante, ela terá que assumir valores maiores ou menores do que $f(a) = f(b)$. Sendo contínua num intervalo fechado, recorremos ao Teorema do Valor Extremo. Assim, f assume um valor máximo e um valor mínimo no referido intervalo. Ora, se f assumir valores maiores do que $f(a)$, ela terá um ponto de máximo no intervalo $c \in (a, b)$. Sendo f derivável nesse ponto, conforme o teorema exposto na subseção 2.3.1., temos que $f'(c) = 0$.

No caso em que f assume valores menores do que $f(a) = f(b)$, o raciocínio é análogo ao exposto acima.

Finalmente, temos os pré-requisitos para a demonstração do Teorema do Valor Médio.

Inicialmente, consideremos a reta (secante) que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Da Geometria Analítica, recorremos ao conceito de equação fundamental da reta. Note que a reta passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem coeficiente angular igual a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Temos,

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a). \quad (2.78)$$

Essa reta é o gráfico da função

$$F(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a). \quad (2.79)$$

Consideremos também $g(x)$, a função obtida a partir da diferença entre as funções f e $F(x)$. Ou seja, $g(x) = f(x) - F(x)$. Temos

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a) \right]. \quad (2.80)$$

Para $x = a$, temos

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a - a) + f(a) \right] \Rightarrow g(a) = 0.$$

No caso em que $x = b$, obtemos

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) + f(a) \right] \Rightarrow g(b) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0.$$

Conforme já vimos, a função g é obtida a partir da diferença entre as funções f e $F(x)$, ambas contínuas no intervalo $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$. Assim, como a própria função

g também é contínua no intervalo $[a, b]$ e é derivável em $]a, b[$, podemos aplicar o Teorema de Rolle na referida função e concluímos que existe $c \in (a, b)$, tal que

$$g'(c) = 0. \quad (2.81)$$

Derivando a função (2.80), obtemos,

$$g'(x) = f'(x) - \left\{ \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right]' (x-a) + \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right] (x-a)' + f'(a) \right\}. \quad (2.82)$$

Calculando as derivadas, obtemos

$$g'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right]. \quad (2.83)$$

Finalmente, fazendo $x = c$, obtemos

$$g'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right] = 0. \quad (2.84)$$

Portanto,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad (2.85)$$

2.3.3. As derivadas e a forma do gráfico de uma função

Dada uma função f , contínua e derivável num intervalo $[a, b]$, como f' representa a inclinação da curva f no ponto $(x, f(x))$, ela nos informa para qual direção a curva seguirá em cada ponto. Desse modo, f' pode fornecer informações importantes sobre a curva f .

Teorema: Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Então f é crescente se $f'(x) > 0$ ou decrescente se $f'(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Demonstração: Considere x_1 e x_2 pontos arbitrários de $[a, b]$, com $x_1 < x_2$. De acordo com o Teorema do Valor Médio aplicado ao intervalo $[x_1, x_2]$, existe um ponto c no intervalo (x_1, x_2) tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \quad (2.86)$$

Se f' for positiva em (a, b) , então

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (2.87)$$

e a função f será crescente. De modo análogo, se f' for negativa em (a, b) , concluímos que

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (2.88)$$

e a função será decrescente.

O teorema que acabamos de demonstrar pode nos ajudar a saber se um determinado ponto crítico é de máximo ou de mínimo. Vamos convencionar que a expressão “ $f'(x)$ positiva

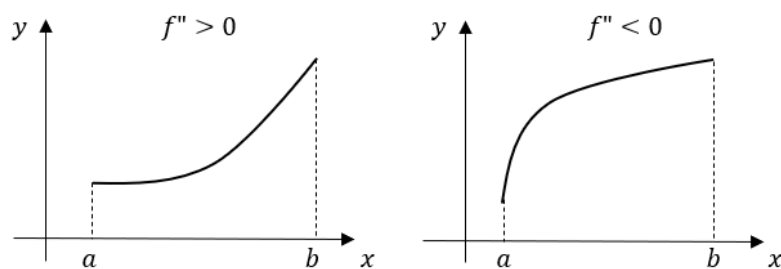
à esquerda de x_0 ” signifique que existe algum intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$, com $\delta > 0$, tal que $f'(x)$ é positiva. Usaremos também a frase “ $f'(x)$ positiva à direita de x_0 ” quando $f'(x) > 0$ para x em algum intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$, com $\delta > 0$. As ideias são análogas no caso em que $f'(x)$ é negativa.

Considere a função f com ponto crítico em x_0 . Sendo $f'(x) = 0$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é horizontal. Caso $f'(x)$ seja positiva à esquerda de x_0 e negativa à direita, então $f(x)$ passará de crescente (à esquerda de x_0) à decrescente (à direita de x_0), conseqüentemente, x_0 será um ponto de máximo.

A seguir enunciaremos alguns conceitos e definições sem demonstrá-los por fugir ao escopo desse trabalho.

Definição: Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes num intervalo $I = (a, b)$, então f é chamada *côncava para cima* em I . Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as tangentes em I , então f é chamada *côncava para baixo* em I .

Figura 9: A 2ª derivada e a concavidade de uma curva



Fonte: Arquivo próprio

Teste da Concavidade:

- (i) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I , então o gráfico de f é côncavo para cima em I .
- (ii) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I , então o gráfico de f é côncavo para baixo em I .

Definição: Um ponto P é chamado *ponto de inflexão* se f é contínua no ponto e a curva mudar de côncava para cima para côncava para baixo (ou vice-versa) em P .

Teste da Segunda Derivada: Suponha que f seja uma função contínua na vizinhança de c

- (i) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c .
- (ii) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c .

2.4. Noções de Cálculo Variacional

Conforme [21], o Cálculo Variacional tem sido uma ferramenta básica na resolução de vários problemas matemáticos e de outras áreas do conhecimento tais como Física-Matemática, Engenharia, Física Moderna, entre outras.

Embora as ideias precursoras do cálculo variacional sejam antigas, atualmente, com o uso de formulações variacionais para as leis da Física, por exemplo, torna-se possível concentrar em um único funcional todos os aspectos relacionados ao problema em estudo.

As formulações variacionais não se limitam apenas na unificação de diversos campos, mas também servem para sugerir novas teorias e proporcionar formas poderosas de estudar a existência e solução de equações diferenciais parciais diversas.

De acordo com [22], o desenvolvimento do Cálculo Variacional teve início nos estudos de Newton e as ideias foram ampliadas por Johann e Jakob Bernoulli e por Leonard Euler. Legendre, Lagrange, Hamilton e Jacobi também deram valiosas contribuições. Peter Dirichlet (1805-1859) e Karl Weierstrass (1815-1879) contribuíram com o estabelecimento da fundamentação matemática rigorosa do assunto.

2.4.1. O problema a ser formulado

O principal problema do Cálculo Variacional, conforme [21] e [22] é encontrar uma função $y(x)$ que possui valores fixos nos pontos de abscissas $x = x_1$ e $x = x_2$, de tal forma que a integral de linha (ver [23] para mais detalhes) ou “de caminho” (que é a integral calculada sob a trajetória da partícula ao longo da curva) de uma determinada função $f[y(x), y'(x); x]$ é tal que

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x); x] dx \quad (2.89)$$

seja um extremo (máximo ou mínimo).

Na expressão (2.89), $y(x)$ é a variável dependente e $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ é sua primeira derivada. Já o termo x é a variável independente. A integral J , denominada *funcional*, depende da função $y(x)$, que é variada até que se encontre um valor extremo de J .

Se uma função $y = y(x)$ der ao funcional J um valor mínimo, então qualquer função vizinha deve fazer J não diminuir, independentemente da proximidade com $y(x)$. Podemos definir *função vizinha* ou *trajetória perturbada*, conforme definem os físicos, dando a todas as possíveis y uma representação paramétrica $y = y(\alpha, x)$. Fazendo $\alpha = 0$, obtemos

$$y = (0, x) = y(x)$$

que é uma solução (ou uma extrema) para o funcional J .

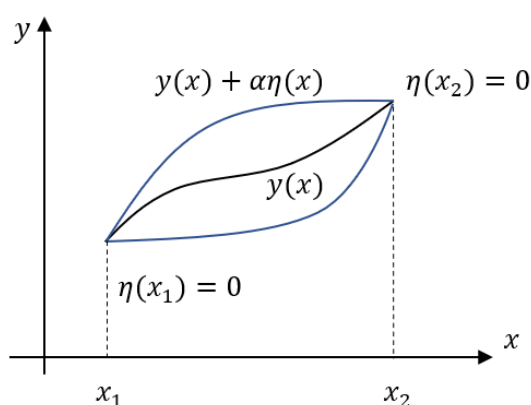
Assim, podemos formular

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x) \quad (2.90)$$

onde $\eta(x)$ representa alguma função de x cuja primeira derivada contínua se anula em x_1 e x_2 , visto que a função paramétrica $y(\alpha, x)$ torna-se idêntica a $y(x)$ nos pontos finais do caminho:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (2.91)$$

Figura 10: A função $y(x)$: o caminho que faz do funcional J um extremo



Fonte: Arquivo próprio

Na figura 10, a função $y(x)$ é o caminho que torna o funcional J um extremo. As funções vizinhas ou caminhos variados ou trajetórias perturbadas $y(x) + \alpha\eta(x)$ se anulam nos pontos finais e podem estar próximas ao caminho extremo $y(x)$, mas não coincidem.

Caso funções do tipo (2.90) sejam consideradas, então a integral J se torna um funcional de parâmetro α . Temos:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f[y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x] dx \quad (2.92)$$

A integral J terá um valor *estacionário* se for independente do parâmetro α na primeira ordem ao longo do caminho que resulta no extremo ($\alpha = 0$). De modo equivalente, temos

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (2.93)$$

para todas as funções do tipo $\eta(x)$. Entretanto, essa é apenas uma condição necessária, mas não é suficiente.

2.4.2. A Equação de Euler

O resultado da condição expressa pela equação (2.93) será obtido quando executamos a diferenciação indicada na equação (2.92).

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x); x] dx \quad (2.94)$$

Fixando os limites da integração ou pontos de “partida” e “chegada”, a operação diferencial afeta somente a integração. Aplicando a regra da cadeia para funções de várias variáveis, temos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right] dx \quad (2.95)$$

Da equação (2.90), obtemos

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x); \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx}. \quad (2.96)$$

Substituindo (2.96) em (2.95), obtemos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right] dx \quad (2.97)$$

Sabemos que

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2.98)$$

Fazendo $u = \frac{\partial f}{\partial y'} \Rightarrow du = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$, $v = \eta(x)$ e aplicando a integração por partes

no segundo termo da integração (2.97), obtemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx \quad (2.99)$$

Como $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, o termo de integração se anula. Dessa forma, a equação (2.95) fica assim

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \eta(x) dx \quad (2.100)$$

Note que a integral da equação (1.100) parece não depender do parâmetro α , mas as funções y e y' dependendo de como tomamos as derivadas de f ainda são funções de α . Como $\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$ deve desaparecer para o valor extremo, sendo $\eta(x)$ uma função arbitrária, a

integração da equação (2.100) deve se anular caso façamos $\alpha = 0$. Temos a Equação de Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad (2.101)$$

Aqui em (2.101) y e y' são as funções originais e não dependem de α . Esse resultado (Equação de Euler) é uma condição necessária para o funcional J ter um valor extremo.

2.4.3. Outra forma da Equação de Euler

Para funções que não dependem de x , ou seja, no caso em que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, a equação de Euler pode ser expressa de uma segunda forma. Em primeiro lugar, para uma função qualquer $f\{y, y'; x\}$, sabemos, pela regra da cadeia, que a derivada é uma soma de termos

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} f\{y, y'; x\} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{df}{dx} &= y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}\quad (2.102)$$

Por outro lado, pela derivada do produto, podemos escrever

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'},$$

que, substituindo da equação (2.102) para $y'' \frac{\partial f}{\partial y'}$, temos

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} - y' \frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}.\quad (2.103)$$

Note que os últimos dois termos da equação (2.103) podem ser assim expressos

$$y' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

e esse termo desaparece, devido a equação de Euler (2.101). Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.\quad (2.104)$$

Logo, nos casos em que f não depende de x e $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, podemos usá-la designando-a de *segunda forma* da equação de Euler. Temos

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{constante (para } \frac{\partial f}{\partial x} = 0\text{)}.\quad (2.105)$$

2.4.4. Funções com várias variáveis dependentes

O caso mais comum de aplicações da equação de Euler é aquele em que a função f é expressa como um funcional de várias variáveis dependentes, tal como

$$f = f\{y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \dots; x\}\quad (2.106)$$

ou utilizando uma notação mais simples

$$f = f\{y_i(x), y_i'(x); x\}, \quad i = 1, 2, \dots, n\quad (2.107)$$

De modo análogo à equação (2.90), expressamos

$$y_i(\alpha, x) = y_i(0, x) + \alpha \eta_i(x). \quad (2.108)$$

Desenvolvendo, conforme fizemos para encontrar a equação (2.100), obtemos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta_i(x) dx. \quad (2.109)$$

Pelo fato das variações $\eta_i(x)$ serem independentes, a anulação da equação (2.109), para $\alpha = 0$, implica na anulação de cada expressão entre parênteses. Nesse caso, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.110)$$

2.4.5. As Equações de Euler com vínculos impostos

Considere o problema de encontrarmos o caminho mais curto que uma partícula deverá percorrer entre dois pontos de uma superfície. Além das condições discutidas até aqui, devemos considerar as restrições (de natureza geométrica ou cinemática) impostas ao percurso dessa partícula em relação à superfície, cuja equação é $g\{y_i; x\} = 0$.

De um modo geral, devemos considerar equações auxiliares, denominadas *equações de restrições* ou *vínculos*. Temos

$$f = f\{y_i, y'_i; x\} = f\{y, y', z, z'; x\} = 0. \quad (2.111)$$

Nesse caso, analogamente ao caso da equação (2.100), temos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right] dx. \quad (2.112)$$

Entretanto, estamos considerando um vínculo expresso pela equação de restrição

$$g\{y_i; x\} = g\{y, z; x\} = 0, \quad (2.113)$$

assim as variáveis $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ deixam de ser independentes, logo as expressões contidas nos parênteses da equação (2.112) não se anulam para $\alpha = 0$.

Realizando a diferenciação de g na equação (2.113), obtemos

$$dg - \left(\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) d\alpha = 0 \quad (2.114)$$

e nenhum termo em x aparece, pois $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0$. Temos

$$\begin{cases} y(\alpha, x) = y(x) + \alpha \eta_1(x) \\ z(\alpha, x) = z(x) + \alpha \eta_2(x) \end{cases} \quad (2.115)$$

Assim, ao encontrar $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ a partir de (2.115) e substituir em (2.114), obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial y} \eta_1(x) = - \frac{\partial g}{\partial z} \eta_2(x). \quad (2.116)$$

Manipulando adequadamente a equação (2.112), encontramos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta_1(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \eta_2(x) \right] dx.$$

Fatorando $\eta_1(x)$ e reescrevendo a equação (2.116)

$$\frac{\eta_2(x)}{\eta_1(x)} = - \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z},$$

obtemos

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \left(\frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right) \right] \eta_1(x) dx. \quad (2.117)$$

A função arbitrária $\eta_1(x)$ não está restrita pela equação (2.115) e conforme a condição (2.93), obtemos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^{-1}. \quad (2.118)$$

No primeiro membro de (2.118) temos derivadas de f e g em relação a y e y' e no segundo membro vemos derivadas em relação a z e z' , assim podemos formular

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} + \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \end{cases}. \quad (2.119)$$

Agora a solução completa para o problema em análise implica em encontrar três funções: $y(x)$, $z(x)$ e $\lambda(x)$. Como há três relações que podem ser exploradas, as duas fornecidas pelo sistema (2.119) e a equação (2.113), então temos como encontrar uma solução completa.

É importante frisar que a função $\lambda(x)$, que faz parte da solução, é conhecida nos círculos matemáticos como *multiplicador indeterminado de Lagrange*, aspecto que não será detalhado por fugir ao escopo do nosso trabalho.

Finalmente, para o caso geral, considerando várias variáveis dependentes e diversos vínculos, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} + \sum_j \lambda_j(x) \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0 \quad (2.120)$$

e

$$g_j\{y_i; x\} = 0. \quad (2.121)$$

Caso $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$, então a equação (2.120) representa m equações em um total de $m + n$ desconhecidas. Além disso, há n equações de restrições (2.121). Finalmente, há $m + n$ equações em $m + n$ desconhecidas, assim o sistema tem solução.

Para encerrar, é importante destacar que a equação (2.121) equivale ao seguinte conjunto de equações diferenciais

$$\sum_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} dy_i = 0, \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}. \quad (2.122)$$

CAPÍTULO III – PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NO ENSINO MÉDIO

Nesse capítulo abordaremos problemas de máximos e mínimos contidos em alguns livros didáticos adotados nas escolas de ensino médio bem como em avaliações externas (como o ENEM) referentes a este nível de ensino. Para modelar e resolver tais problemas utilizaremos os conceitos relacionados à função quadrática.

3.1. Retângulo de perímetro fixo

Uma das questões mais comuns nos círculos matemáticos do ensino básico sobre máximos e mínimos, conforme [24 – 28] é o problema de encontrar, dentre um conjunto de retângulos de perímetro fixado, o retângulo que possui área máxima.

O problema pode ser formulado, em termos gerais, da seguinte forma:

Problema 01

Dentre todos os retângulos de perímetro P , determine aquele que possui área máxima.
--

Para modelar essa situação, inicialmente consideremos que os lados desse retângulo sejam x e z . Como o perímetro mede P , podemos escrever

$$x + z = \frac{P}{2} \Rightarrow z = \frac{P}{2} - x. \quad (3.1)$$

Designando por $y = xz$ a área desse retângulo, temos que

$$y = x \left(\frac{P}{2} - x \right) = -x^2 + \frac{P}{2}x. \quad (3.2)$$

A expressão (3.2) trata-se de uma função quadrática com zeros em $x = 0$ e $x = \frac{P}{2}$.

Seu vértice é

$$V = \left(\frac{P}{4}, \frac{P^2}{16} \right). \quad (3.3)$$

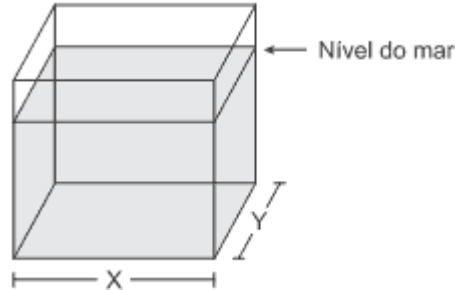
De imediato, concluímos que o retângulo procurado é um quadrado cujo lado mede $\frac{P}{4}$ e sua área mede $\frac{P^2}{16}$, conforme queríamos mostrar.

Na mesma linha de raciocínio do problema 01, abordaremos a seguinte questão contemplada na prova do ENEM de 2017, caderno 8 – rosa, 2º dia de aplicação, conforme [29].

Basicamente, a diferença entre os problemas 01 e 02 é que o primeiro é uma generalização para todos os problemas que envolvem retângulos de perímetros fixos.

Problema 02

Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

- a) 1 e 49
- b) 1 e 99
- c) 10 e 10
- d) 25 e 25
- e) 50 e 50

Podemos modelar esse problema utilizando as ideias e generalizações já desenvolvidas no problema 01. Nesse caso, “os 100 metros lineares de tela” correspondem à letra P do problema 01. Logo,

$$P = 100. \quad (3.4)$$

Já sabemos também que, de todos os retângulos de perímetro fixo aquele que possui a área máxima é o quadrado.

Conforme dados do problema 01, as coordenadas do ponto (3.3) fornecem o que estamos buscando encontrar, bastando substituir o valor $P = 100$. Temos:

$$P = 100 \Rightarrow V = \left(\frac{100}{4}, \frac{100^2}{16} \right) = (25, 625). \quad (3.5)$$

Portanto, a base do viveiro é um quadrado com lado $X = Y = 25\text{m}$.

3.2. Problemas envolvendo lucro

O problema a seguir envolvendo o lucro sobre o preço de custo de um determinado produto, foi adaptado de [30] e, a exemplo do problema dos retângulos de perímetro fixo, é bastante comum nos círculos matemáticos do ensino médio.

Problema 03

Um fabricante pode produzir um determinado produto ao custo de p cada peça. Estima-se que, se cada peça for vendida por x , o fabricante venderá por mês $K - x$ ($0 \leq x \leq K$) unidades do produto. Assim, o lucro mensal do fabricante é uma função do preço de venda. Qual deve ser o preço de venda, de modo que o lucro mensal seja máximo?

Para modelar o problema, convencionemos que $L =$ lucro, $V =$ venda e $C =$ custo.

Assim, temos que

$$L = V - C \Rightarrow L = (K - x)x - p(K - x) \Rightarrow L = -x^2 + (K + p)x - pK. \quad (3.6)$$

Logo, o lucro mensal será máximo quando x for a abscissa do vértice da função (3.6). Temos que

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-(K+p)}{2(-1)} = \frac{K+p}{2}. \quad (3.7)$$

Portanto, o preço de venda desse produto deve ser igual a $\frac{K+p}{2}$.

O problema a seguir, segue a mesma ideia do problema 03 e foi selecionado a partir de [29].

Problema 04

(Cesesp-PE) Um fabricante vende mensalmente x unidades de um determinado artigo por $V(x) = 6x^2 - 200x$, sendo o custo da produção dado por $C(x) = 7x^2 - 1200x + 90000$. Quantas unidades devem ser vendidas mensalmente, de modo que se obtenha o lucro máximo?

É imediato que o lucro mensal desse fabricante é dado por

$$L(x) = V(x) - C(x). \quad (3.8)$$

Temos que

$$L(x) = -x^2 + 1000x - 90000. \quad (3.9)$$

Ora, sendo (3.9) uma função quadrática côncava para baixo, o seu valor máximo é obtido quando

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-1000}{2(-1)} = 500. \quad (3.10)$$

Portanto, esse fabricante deverá vender exatamente 500 peças mensalmente para se obter um lucro máximo.

3.3. Vestibulares da UECE e UNIFOR

Para finalizar esse capítulo, apresentaremos dois problemas sobre máximos e mínimos contemplados nos vestibulares da Universidade Estadual do Ceará (UECE) e da Universidade de Fortaleza (UNIFOR).

O problema a seguir fez parte da prova de Matemática da UECE na 2ª fase do Vestibular 2016.2, conforme [31].

Problema 05

Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções quadráticas dadas por $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ e $g(x) = x^2 + 8x + 17$. Se M é o valor máximo de f e m o valor mínimo de g , então, o produto $M \cdot m$ é igual a

- a) 8
- b) 6
- c) 4
- d) 10

Trata-se de uma aplicação direta do vértice da função quadrática, em especial da sua ordenada.

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right). \quad (3.11)$$

Calculando as ordenadas dos vértices de cada uma das funções em análise, encontramos, no caso da função f , que o seu valor máximo é dado por $M = 4$. Já o valor mínimo da função g é dado por $m = 1$.

Portanto, a resposta que procuramos é $M \cdot m = 4$.

O problema 06 a seguir foi adaptado a partir de [29].

Problema 06

(Unifor-CE) $ABCD$ é um quadrado de área 1 (um). São tomados os pontos $P \in \overline{AB}$ e $Q \in \overline{AD}$ tais que $PA + AQ = AD$.

Então o maior valor da área do triângulo APQ é

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{8}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{16}$

Conforme enunciado, como a área do quadrado $ABCD$ é igual a 1, então a medida do seu lado vale $AD = 1$.

Sendo

$$PA + AQ = AD = 1, \quad (3.12)$$

temos que

$$PA = 1 - AQ. \quad (3.13)$$

Note que AQ e PA são os catetos do triângulo retângulo APQ . Fazendo $AQ = x$, temos, por (3.13), que $PA = 1 - x$ e a área y do triângulo é igual a

$$y = \frac{x(1-x)}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2. \quad (3.14)$$

Portanto, a área (máxima) do triângulo APQ é igual a $y = \frac{1}{8}$.

CAPÍTULO IV – PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NO ENSINO SUPERIOR

Nesse capítulo abordaremos problemas de máximos e mínimos em duas seções. Na primeira seção, utilizaremos como recurso do Cálculo Diferencial, em particular os conceitos sobre a derivada de uma função, enquanto na segunda seção aplicaremos as ideias relacionadas ao Cálculo Variacional.

4.1. Problemas de máximos e mínimos resolvidos com recursos do Cálculo Diferencial

Nessa seção, apresentaremos problemas e as respectivas propostas de soluções utilizando como recurso os conceitos do Cálculo Diferencial, em especial, àqueles relacionados às derivadas com seus teoremas, lemas e propriedades.

O problema 07 a seguir envolve a ideia de perímetro e foi adaptado a partir de [5].

Problema 07

Um campo retangular à margem de um rio deve ser cercado, com exceção do lado ao longo do rio. Se o custo do material for de a por metro linear no lado paralelo ao rio e de b por metro linear nos dois extremos, ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com custo c de material.

Conforme informações do enunciado, podemos modelar o problema da seguinte forma. Inicialmente, consideremos que os lados do terreno são x e y . Temos que

$$2ax + by = c \Rightarrow y = -\frac{2a}{b}x + \frac{c}{b}, (a, b, c > 0). \quad (4.1)$$

A área do terreno é dada por

$$A = xy. \quad (4.2)$$

Substituindo (4.1) em (4.2), obtemos

$$A = x \left(-\frac{2a}{b}x + \frac{c}{b} \right) = -\frac{2a}{b}x^2 + \frac{c}{b}x. \quad (4.3)$$

Realizando a primeira derivada da função (4.3), encontramos

$$A'(x) = -\frac{4a}{b}x + \frac{c}{b}. \quad (4.3)$$

Note que, igualando (4.3) a zero, encontramos o ponto crítico

$$x = \frac{c}{4a}. \quad (4.4)$$

Ora, para sabermos se (4.4) gera uma área máxima, basta calcular a segunda derivada da função (4.3). Temos que

$$A''(x) = -\frac{4a}{b}. \quad (4.5)$$

Como a e b são medida de comprimento, então $a, b > 0$, então $A''(x) < 0$. Assim, o resultado (4.4) gera um campo retangular de área máxima, cujo valor é igual a

$$A = -\frac{2a}{b} \left(\frac{c}{4a}\right)^2 + \frac{c}{b} \left(\frac{c}{4a}\right) = \frac{c^2}{8ab}. \quad (4.6)$$

A relação (4.2) nos permite encontrar a outra dimensão do terreno. Temos

$$A = xy \Rightarrow \frac{c^2}{8ab} = \frac{c}{4a}y \Rightarrow y = \frac{c}{2b}. \quad (4.7)$$

Portanto, as dimensões do terrenos procurado são $\frac{c}{4a}$ e $\frac{c}{2b}$ e sua área mede $\frac{c^2}{8ab}$.

A seguir, apresentaremos um problema de otimização bem comum na indústria. Tal problema, adaptado a partir de [19] mostra como obter um cilindro de volume máximo com a menor quantidade de material possível.

Problema 08

Encontre as dimensões de um cilindro circular reto, de volume V dado, de maneira que a área da sua superfície seja a menor possível.
--

A fim de modelarmos problema, sejam r e h números reais positivos, respectivamente o raio e altura do cilindro que estamos procurando.

Conforme enunciado, devemos minimizar sua área total, que é dada por

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2. \quad (4.8)$$

De acordo com o problema, o volume do cilindro é constante e é dado por

$$V = \pi r^2 h. \quad (4.9)$$

Escrevendo (4.9) em termos de h , temos que

$$h = \frac{V}{\pi r^2}. \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.8), obtemos

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}. \quad (4.11)$$

Derivando a função (4.11) em relação a r , obtemos

$$A' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2} \left(r^3 - \frac{V}{2\pi} \right). \quad (4.12)$$

Podemos encontrar o ponto crítico de (4.12) igualando essa derivada a zero.

Obtemos que

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad (4.13)$$

Note que a derivada segunda de (4.11) que é dada por

$$A'' = 4\pi r + \frac{4V}{r^3}, \quad (4.14)$$

é positiva. Logo, o resultado (4.13) é um ponto de mínimo.

Assim, a solução do problema é $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ e $h = \frac{V}{\pi r^2}$.

Note ainda que, manipulando adequadamente (4.10) e (4.13), encontramos que

$$h = 2r. \quad (4.15)$$

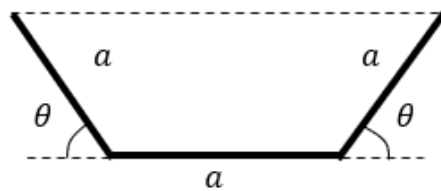
O cilindro que estamos procurando tem altura igual ao diâmetro da base.

Para fechar essa seção, apresentaremos o Problema 09 (e uma proposta de solução) adaptado a partir de [19].

Problema 09
Deseja-se construir um canal, cuja seção transversal seja um trapézio, a base e as paredes laterais tendo largura fixada a . Calcule o ângulo θ de inclinação das paredes laterais para que o canal dê a máxima vazão.

Vamos modelar esse problema escrevendo a área A da seção transversal desse canal em função do ângulo θ . A Figura 11 ilustra a situação.

Figura 11: Ilustração da seção transversal do canal



Fonte: Arquivo próprio

A base maior do trapézio é

$$a(1 + 2\cos\theta) \quad (4.16)$$

e a altura é dada por

$$a\sin\theta. \quad (4.17)$$

Assim, podemos encontrar facilmente a área dessa secção em função de θ , recorrendo à fórmula para o cálculo da área do trapézio. Temos que

$$A(\theta) = a^2 \operatorname{sen}\theta(1 + \operatorname{cos}\theta). \quad (4.17)$$

Queremos que a vazão da água que passa pelo canal seja máxima. Vamos derivar a função (4.17). Temos que

$$\frac{dA}{d\theta} = a^2[2\operatorname{cos}^2\theta + \operatorname{cos}\theta - 1]. \quad (4.18)$$

Igualando a derivada (4.18) a zero, obtemos um ponto crítico (candidato à máximo, mínimo ou ponto de inflexão). Temos a seguinte equação do 2º grau

$$2\operatorname{cos}^2\theta + \operatorname{cos}\theta - 1 = 0, \quad (4.19)$$

cujas soluções são

$$\operatorname{cos}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \quad (4.20)$$

ou

$$\operatorname{cos}\theta = -1 \Rightarrow \theta = 180^\circ. \quad (4.21)$$

O resultado (4.20) nos fornece o valor do ângulo para vazão máxima.

Portanto, o ângulo procurado é $\theta = 60^\circ$.

Aqui encerramos os problemas com aplicações do Cálculo do Diferencial, em particular utilizando as técnicas das derivadas.

A seguir, apresentaremos problemas a serem resolvidos com recursos do Cálculo Variacional.

4.2. Problemas de máximos e mínimos resolvidos com recursos do Cálculo Variacional

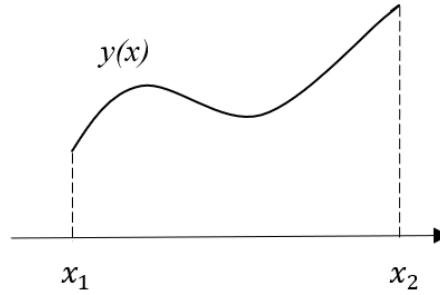
Nessa seção apresentaremos problemas e as respectivas propostas de soluções utilizando como recurso os conceitos do Cálculo Variacional, em especial, àqueles relacionados à Equação de Euler com e sem vínculos impostos.

O problema 10 a seguir faz parte da referência [22].

Problema 10
Mostre que a distância mais curta entre dois pontos em um plano é uma linha reta.

Nesse problema o nosso objetivo é encontrar a função $y(x)$ que forneça o caminho mais curto entre os pontos de abscissas x_1 e x_2 .

Figura 12: Ilustração da função $y(x)$: Trajetória entre os pontos de abscissas x_1 e x_2



Fonte: Arquivo próprio

Dividindo a trajetória entre os pontos de abscissas x_1 e x_2 em segmentos ds tão pequenos quanto queiramos, obtemos

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (4.22)$$

Unindo todos esses segmentos de comprimentos (4.22), obtemos o funcional J que nos dará o caminho mínimo entre os pontos considerados

$$J = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (4.23)$$

Sendo (4.23) mínimo, então a função que fornece a trajetória em análise é

$$f\{y(x), y'(x); x\} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (4.24)$$

Assim, a equação de Euler torna-se

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dy'} \left[\sqrt{1 + y'^2} \right] = 0. \quad (4.25)$$

Temos que

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0. \quad (4.26)$$

Equivalentemente,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C \text{ (constante)}. \quad (4.27)$$

Desenvolvendo (4.27), obtemos

$$y' = \sqrt{\frac{C^2}{1-C^2}} = m \text{ (constante)}. \quad (4.28)$$

Logo, obtemos

$$y = mx + n, \quad (4.29)$$

que é a equação de uma reta.

Portanto, a menor distância entre dois pontos do plano é um segmento de reta.

O problema 11, contido em [22], é um clássico da história da Física.

De acordo com [32], em junho de 1696, o matemático Johann Bernoulli (1667-1748) publicou, num jornal científico denominado *Acta Eruditorium*, um problema que veio a ser conhecido como o problema da *Braquistócrona*.

Conforme [33], o problema da Braquistócrona é uma questão mecânico-geométrica sobre a curva de descida mais rápida de uma partícula. A palavra que dá origem a esse termo deriva das palavras gregas *Brachistos*, que significa menor, e *Chronos*, que significa tempo.

Segundo [32], em 1697 Johann Bernoulli propôs um método de resolução para esse problema fazendo uma analogia com a questão de encontrar o caminho mínimo percorrido por um raio de luz em um meio cujo índice de refração é variável. Nesse mesmo ano, seu irmão James Bernoulli (1654-1705) apresentou outra proposta de resolução para a questão.

Tal proposta auxiliou James Bernoulli na resolução, em 1701, de um problema isoperimétrico (que trata de se determinar uma figura geométrica de área máxima e perímetro dado).

O aluno de Johann Bernoulli, Leonard Euler (1707-1783), tendo acesso aos métodos dos irmãos Bernoulli, passou a trabalhar com a proposta de James Bernoulli na tentativa de aperfeiçoá-la, até que em 1744 publicou um método utilizando equações diferenciais que recebe o nome de Equação de Euler.

Entretanto, à medida que o tempo passava, outros matemáticos sugeriram alguns problemas e o método de Euler passou a ficar complicado. Então, em 1762 Lagrange (1736-1813) tornou público um método analítico, que permite deduzir a equação diferencial das curvas (caminhos variados) que minimizam problemas mais gerais.

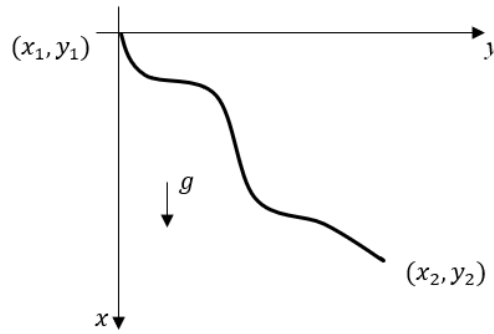
Problema 11

Considere uma partícula que se move em um campo de força constante que inicia do repouso de algum ponto (x_1, y_1) a algum ponto mais inferior (x_2, y_2) . Encontre o caminho que permite que a partícula atravesse o trânsito no menor tempo possível.
--

Para efeitos didáticos, vamos escolher um sistema de coordenadas de modo que o ponto (x_1, y_1) coincida com a origem, o campo gravitacional é constante e desprezaremos a possibilidade de fricção. Nesse caso, pelo princípio da conservação da energia mecânica, o sistema é conservativo, ou seja,

$$E_c + E_p = \text{constante.} \quad (4.30)$$

Figura 13: Problema da Braquistócrona



Fonte: Arquivo próprio

Note que $(x_1, y_1) = (0, 0)$ e a energia cinética da partícula nesse ponto é nula, conseqüentemente, a energia total da partícula será a própria energia potencial, $E_p = -mgx$, onde g é a aceleração da gravidade (suposta constante).

Após se deslocar uma altura x , temos que a energia mecânica da partícula será a sua energia cinética, visto que a energia potencial, no ponto em análise, é nula. Assim,

$$v = \sqrt{2gx}. \quad (4.31)$$

Temos que o tempo necessário para a partícula se deslocar no trânsito entre a origem e o ponto (x_2, y_2) é igual a

$$t = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{v} = \int \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{(2gx)^{\frac{1}{2}}} = \int_{x_1=0}^{x_2} \left(\frac{1+y'^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} dx. \quad (4.32)$$

Conforme enunciado, o tempo de trânsito que estamos procurando deve ser mínimo. Desse modo, como $(2g)^{-1/2}$ é uma constante, a função que estamos procurando é dada por

$$f\{y(x), y'(x); x\} = \left(\frac{1+y'^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.33)$$

A função (4.33) não depende de y' , então $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ e a equação de Euler (2.101) fica igual a

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (4.34)$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = (2k)^{-1/2} \text{ (constante)}, \quad (4.35)$$

onde k é uma nova constante.

Realizando a diferenciação $\frac{\partial f}{\partial y'}$ na equação (4.33), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1+y'^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} = (2k)^{-1/2} \Rightarrow \frac{y'^2}{x(1+y'^2)} = \frac{1}{2k} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{x}{2k-x}}. \quad (4.36)$$

Resolvendo a equação diferencial (4.36), obtemos

$$y = \int \sqrt{\frac{x}{2k-x}} dx. \quad (4.37)$$

Executando a seguinte substituição trigonométrica

$$x(\theta) = k(1 - \cos\theta), \quad (4.38)$$

cuja derivada é igual a

$$dx = k \operatorname{sen}\theta d\theta \quad (4.39)$$

e fazendo as devidas substituições de (4.38) e (4.39) na equação (4.37), obtemos

$$y = \int \sqrt{\frac{k(1-\cos\theta)}{k(1+\cos\theta)}} k \operatorname{sen}\theta d\theta = k \int (1 - \cos\theta) d\theta. \quad (4.40)$$

Resolvendo a integral (4.40), obtemos

$$y(\theta) = k(\theta - \operatorname{sen}\theta). \quad (4.41)$$

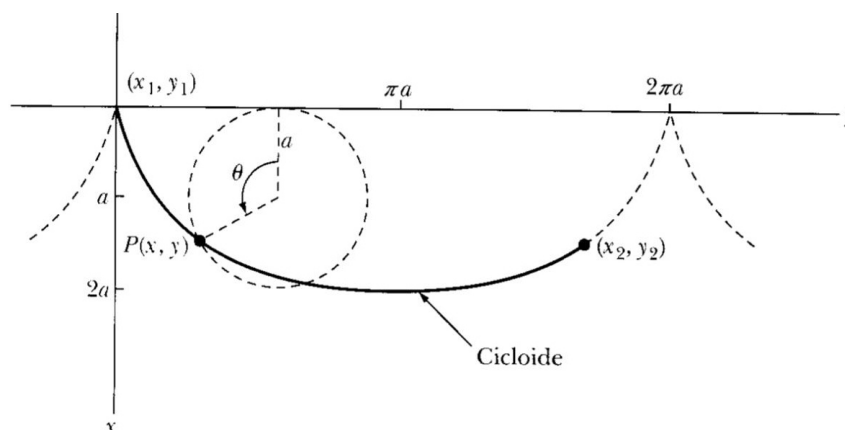
Assim, as equações paramétricas

$$\begin{cases} x(\theta) = k(1 - \cos\theta) \\ y(\theta) = k(\theta - \operatorname{sen}\theta) \end{cases} \quad (4.42)$$

representam uma cicloide.

Portanto, a solução do problema da Braquistócrona é uma cicloide, que nada mais é do que uma curva traçada a partir do “rastros” de um ponto do círculo que roda (sem deslizar) em uma reta de um plano.

Figura 14: A cicloide



Fonte: [22]

Para finalizar esse capítulo, apresentaremos o problema da Lenda de Dido. Segundo o que lemos em [11] e [34], reza a lenda, que passou a ser conhecida devido a obra *Eneida*, escrita pelo poeta romano Virgílio, que Dido (ou Elisa) era uma princesa fenícia do século IX a.C. da cidade de Tiro, às margens do Mar Mediterrâneo, localizada onde atualmente é o Líbano. O rei Pigmalião, seu irmão, assassinou seu marido para tomar seus tesouros. Dido, temendo ser morta, fugiu em um navio com seus seguidores com o objetivo de fundar uma nova cidade, a qual veio a receber o nome de Cartago, conforme reza a lenda.

No lugar escolhido para a cidade de Cartago, norte da África e às margens do Mar Mediterrâneo, Dido negociou terras com o rei local, a fim de ali fixar moradia com os seus seguidores. Conforme acordo, Dido teria direito ao pedaço de terra que podia ser cercada com uma corda construída com tiras de um couro de um boi. Foi então que Dido e seu povo decidiram cortar toda pele do boi em tiras tão finas quanto fosse possível, depois emendá-las e englobar, no formato de semicírculo, um terreno extremado com o mar.

Figura 15: Dido e seu povo cortando o couro de um boi



Fonte: [33]

O problema 12 a seguir foi adaptado a partir de [22].

Problema 12

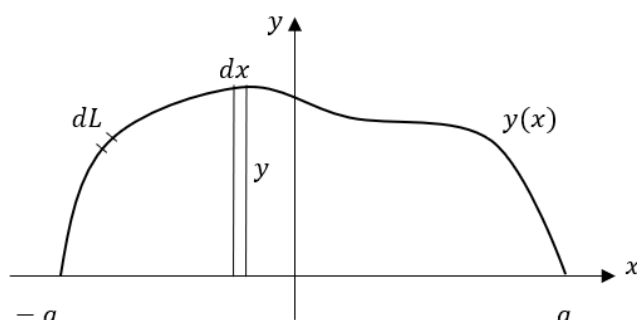
Encontrar a curva $y(x)$ de comprimento L , limitada pelo eixo x na parte inferior, passa pelos pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ e circunda a área máxima.

Conforme figura 16, a área diferencial $dA = ydx$ e o comprimento diferencial ao longo da curva é dL . A área deve ser maximizada para que possamos encontrar a solução para a equação

$$J = \int_{-a}^a y dx. \quad (4.43)$$

Conforme ilustrado na figura 16, queremos encontrar a curva $y(x)$ que possibilita obtermos uma área máxima acima da reta $y = 0$. O comprimento da referida curva deve ser fixo e igual a L . Além disso, a curva deve passar pelos pontos de abscissas $x = -a$ e $x = a$. A área diferencial é $dA = y dx$ e o comprimento diferencial ao longo da curva é dL .

Figura 16: Ilustração analítica: problema da Lenda de Dido



Fonte: Arquivo próprio

Nesse problema, temos as seguintes restrições

$$y(x): y(-a) = 0, y(a) = 0 \quad (4.44)$$

e

$$K = \int dL = L. \quad (4.45)$$

Note que o comprimento diferencial ao longo da curva em estudo é

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} = (1 + y'^2)^{1/2} dx, \quad (4.46)$$

onde $y' = \frac{dy}{dx}$ e o funcional de restrição se torna

$$K = \int_{-a}^a (1 + y'^2)^{1/2} dx = L. \quad (4.47)$$

Temos que

$$y(x) = y \text{ e } g(x) = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (4.48)$$

Antes de prosseguir, é importante destacar aqui que, se uma curva $y(x)$ satisfaz condições de contorno $y(-a) = A$ e $y(a) = B$ e o funcional (4.43) tem um valor fixo L para o comprimento da curva, esse segundo funcional (4.49) representa uma restrição integral.

$$K[y] = \int_a^b g\{y, y'; x\} dx. \quad (4.49)$$

Desse modo, há uma constante λ de tal forma que $y(x)$ seja a solução extrema do seguinte funcional

$$\int_a^b (f + \lambda g) dx. \quad (4.50)$$

Conforme conceitos da seção 2.4.5, a curva $y(x)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial g}{\partial y'} \right) = 0, \quad (4.51)$$

sujeita às restrições $y(a) = A$, $y(b) = B$ e $K[y] = L$.

Retomando o problema, vamos encontrar as derivadas parciais das equações de (4.48) de acordo com a equação (4.51). Temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y'} = \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}}. \quad (4.52)$$

Agora substituindo os resultados de (4.52) na equação (4.51), obtemos

$$1 - \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} \right) = 0. \quad (4.53)$$

Manipulando de forma adequada a equação (4.53), ficamos com

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} \right) = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.54)$$

Integrando em relação a x encontramos

$$\frac{\lambda y'}{(1+y'^2)^{1/2}} = x + C_1, \quad (4.55)$$

em que C_1 é uma constante de integração, que reorganizamos como

$$dy = \frac{\pm(x-C_1)}{\sqrt{\lambda^2 - (x-C_1)^2}}. \quad (4.56)$$

Integrando (4.56), ficamos com

$$y = \mp \sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2} + C_2 \Rightarrow y - C_2 = \mp \sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}, \quad (4.57)$$

C_2 é uma outra constante devida a integração.

Finalmente, elevando os dois membros de (4.57) ao quadrado, obtemos

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2, \quad (4.58)$$

que é a equação do círculo de centro (C_1, C_2) e raio λ .

Portanto, a área máxima do problema que estamos procurando equivale à área de um semicírculo limitado pela reta $y = 0$. Além disso, o semicírculo deve passar pelos pontos $(-a, 0)$ e $(a, 0)$. Logo, o centro do semicírculo é a origem, $C_1 = 0 = C_2$ e o raio mede $\lambda = a$. O perímetro do semicírculo é $L = \pi a$, então $a = \frac{L}{\pi}$.

CAPÍTULO V – CONSIDERAÇÕES FINAIS

O princípio da economia em todos os empreendimentos é inerente à vida humana. Nessa perspectiva, conforme vimos até aqui, historicamente, o homem sempre foi atraído por problemas de otimização na perspectiva de encontrar um resultado ótimo (melhor resultado empregando recursos mínimos).

No desenvolvimento dessa pesquisa bibliográfica, elaborada a partir da revisão sistemática e aprofundada da literatura e com ênfase em Matemática, mostramos que os problemas de máximos e mínimos são modelados com ferramentas pertencentes ao campo da Matemática. Em particular, abordamos situações envolvendo otimização utilizando tópicos dos conceitos de Função Quadrática, Cálculo Diferencial e Cálculo Variacional.

Todo o arcabouço teórico aqui desenvolvido, ao estabelecer conexões entre e conceitos da literatura matemática com algumas aplicações práticas por meio de situações-problemas, inclusive pertencentes à história da Ciência, traz ricas contribuições para a comunidade de pesquisadores, professores e simpatizantes dessa tão estimada e acertadamente denominada *A Rainha das Ciências*.

Mostramos que podemos aplicar ideias desde o ensino básico até o ensino superior, usando desde técnicas básicas como o valor máximo ou mínimo da função quadrática, passando pelas Derivadas com seus teoremas, lemas e corolários até o Cálculo Variacional, que generaliza e sintetiza, por meio de princípios variacionais, muitos campos dentro e fora da Matemática.

Como perspectiva futura, uma possibilidade seria avançar com o aperfeiçoamento das ideias aqui desenvolvidas, por meio de um maior aprofundamento no arcabouço teórico expandindo para o cálculo de várias variáveis, conforme [23] e [34], bem como na ampliação das aplicações em problemas interdisciplinares, possibilitando conexões dentro e fora da Matemática, como exemplo, podemos citar que os princípios variacionais sintetizam toda a Mecânica Clássica. Outra possibilidade, com base em [36], seria estabelecer conexões entre o cálculo da 2ª derivada e as desigualdades das médias tais como de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski, de Bernoulli, bem como a aritmética e geométrica.

Por fim, outra perspectiva seria a construção de um instrumento para simular o problema da Braquistócrona, aliando os conceitos teóricos com situações práticas concretas, além de enfatizar a importância social da Matemática registrada na história da Ciência. Também não descartamos a possibilidade de publicação desse trabalho em uma revista de divulgação científica, como por exemplo a PMO (Professor de Matemática On Line).

REFERÊNCIAS

- [1] <https://www.profmtat-sbm.org.br/funcionamento/regimento/> (Acessado em 15/07/2020 às 10:35).
- [2] HOUAISS, Antônio. Minidicionário da Língua Portuguesa. 4ª edição – Rio de Janeiro: Objetiva, 2010.
- [3] LIMA, José Alex Ferreira Silva. Introdução ao Cálculo Variacional e Problemas de Otimização Aplicados no Ensino Básico. Universidade Federal de Goiás, 2019.
- [4] LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [5] LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. Vol 1. 3ª edição – São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1994.
- [6] <https://www.profmtat-sbm.org.br/dissertacoes/> (Acessado em 15/07/2020 às 16:15).
- [7] RAMOS, Sandra Rodrigues da Silva. Máximos e Mínimos: Uma Proposta para o Cálculo em Funções Cúbicas sem o uso de Derivadas. Universidade Estadual de Maringá, 2019.
- [8] ALVES, Érika Figueiredo. Máximos e Mínimos na Perspectiva do Ensino de Matemática na Atualidade. Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2018.
- [9] FERREIRA, Thed Freitas. Otimização: Estudo de Máximos e Mínimos de Funções que definem Problemas Cotidianos. Universidade Federal de Sergipe, 2018.
- [10] SILVA, Emídio Rodrigues. Máximos e Mínimos no Ensino Básico: Uma Abordagem Utilizando a Otimização Linear e Não-linear. Universidade Federal de São Paulo, 2018.
- [11] JÚNIOR, Francisco de Paula Santos de Araújo. Máximos e Mínimos Aplicados em Geometria. Universidade Estadual do Piauí, 2018.
- [12] SANTOS, Irlã Silva. Máximos e Mínimos com o uso de Ferramentas do Ensino Médio e Noções de Cálculo Diferencial. Universidade Federal do Cariri, 2017.
- [13] RODRIGUES, Mariana Manfroi. Um Estudo de Máximos e Mínimos para aplicação na Otimização de Embalagens. Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2016.
- [14] SILVA, Elion Souza. Problemas de Máximos e Mínimos e Desigualdades Geométricas. Universidade Estadual do Ceará, 2013.
- [15] DUARTE, José Luís. Problemas de Máximos e Mínimos no Ensino Médio. Universidade Estadual Paulista, 2014.
- [16] JÚNIOR, Luiz Arthur Dornelles. Cálculo Variacional em Mecânica Analítica e Teorema de Liouville. Universidade Federal de Santa Catarina, 2018.
- [17] IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, 7: conjuntos, funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami – 9 ed. – São Paulo: Atual, 2013.

- [18] <https://www.obaricentrodamente.com/2010/11/reta-tangente-uma-curva.html> (Acessado em 29/06/2020 às 9:47).
- [19] ÁVILA, Geraldo. Cálculo das funções de uma variável, vol 1 – 7 ed., - [Reimpr.]. – Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [20] STEWART, James. Cálculo: volume I; tradução Helena Maria Ávila de Castro; revisão técnica Eduardo Garibaldi. São Paulo – SP: Cengage Learning, 2016
- [21] CASTRO, Leonardo Miranda de. O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidais. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, 2014.
- [22] THORNTON, Stephen T. Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas / Stephen T. Thornton, Jerry B. Marion; tradução Ail Tasks; revisão técnica Fábio Raia. – São Paulo: Cengage Learning, 2012.
- [23] STEWART, James. Cálculo: volume II; tradução Helena Maria Ávila de Castro; revisão técnica Ricardo Miranda Martins. São Paulo – SP: Cengage Learning, 2016.
- [24] IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar, 1: conjuntos, funções / Gelson Iezzi, Carlos Murakami – 9 ed. – São Paulo: Atual, 2013.
- [25] CHAVANTE, Eduardo. Quadrante Matemática, 1º ano: ensino médio / Eduardo Chavante, Diego Prestes – 1 ed. – São Paulo: Edições SM, 2016.
- [26] Matemática: Ciência e Aplicações 1: ensino médio / Gelson Iezzi ... [et al.] – 6 ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.
- [27] SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar: Matemática: 1/ Joamir Roberto de Souza – 2 ed. São Paulo: FTD, 2013.
- [28] Conexões com a Matemática, vol 1 / Organizadora Editora Moderna; Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela editora Moderna; Editor responsável Fábio Martins de Leonardo – 3 ed. – São Paulo: Moderna, 2016.
- [29] <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos> (Acessado em 24/10/2020 às 14:02).
- [30] BUCCHI, Paulo. Curso Prático de Matemática. São Paulo: Moderna, 1998.
- [31] <http://www.uece.br/cev/index.php/vestibulares-antigos/vestibular-uece/vestibular-20162>. (Acessado em 24/10/2020 às 18:39).
- [32] JÚNIOR, José Ribamar Alves de Sousa. O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona. Dissertação de Mestrado. UNESP – Rio Claro-SP, 2010.
- [33] TAGLIOLATO, Ana Luísa Sader. Braquistócrona. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista – Rio Claro-SP, 2015.

- [34] SOUZA, Fábio Fiuza de. A Lenda de Dido como Motivação para o Estudo de Figuras Isoperimétricas na Educação Matemática: Explorando a dedução-lógica – PROFMAT 2012. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro-RJ, 2014.
- [35] LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. Vol 2. 3ª edição – São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1994.
- [36] KWESSI, KERMAUSUOR e DE SOUZA. Algumas desigualdades úteis e o teste da segunda derivada. Professor de Matemática On Line, v. 8, n. 3, 2020.