UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUIZ FERNANDO SOARES DE SOUZA

RAÍZES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

REDENÇÃO - CE

2019

LUIZ FERNANDO SOARES DE SOUZA

RAÍZES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

REDENÇÃO - CE

2019

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Souza, Luiz Fernando Soares de.

S713r

Raízes de Equações Polinomiais / Luiz Fernando Soares de Souza. - Redenção, 2019.
40f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2019.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. Matemática - Polinômios. 2. Equações Polinomiais. 3. Raízes. 4. Estimativas. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 510

LUIZ FERNANDO SOARES DE SOUZA

RAÍZES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Aprovada em 02 de Setembro de 2019

BANCA EXAMINADORA

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Amanda A. F. Nunes.

Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Odete Elana S. Pereira

Profa. Esp. Odete Elana Sousa Pereira
Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado graça de chegar até esse momento, me abençoando e dando forças para a realização dos meus projetos, estando comigo nas dificuldades encontradas na caminhada da vida acadêmica e na vida pessoal.

Aos meus pais, Lúcia de Fátima Tomaz Soares Souza e Inácio Edval Souza Silva, cuja importância é indescritível, dando todo o apoio e ajuda para meu crescimento pessoal e educacional e pela paciência que tiveram em alguns momentos mais complicados.

Aos meus irmãos, Eveline Tomaz Soares e Alexandre Soares Souza que são exemplos de grandes estudantes que não desistem de seus sonhos e se superam independente das dificuldades que surgem em seus caminhos. No qual são inspiração na minha permanência e desenvolvimento acadêmico.

Aos meus amigos, Antonio Luan, Sharmenya Jany e Erika Joyce que há um bom tempo do curso estamos estudando juntos, em que me ajudaram muito nesse período da graduação e proporcionaram vários momentos de risadas.

Aos demais amigos e colegas que estiveram junto comigo nessa jornada contribuindo de maneira rica no decorrer do curso, ajudando nos conteúdos não entendidos, nos conselhos dados, no apoio em momentos cruciais de dificuldades, nas ocasiões de brincadeiras e risadas que davam um pouco de leveza ao semestre.

Ao meu orientador e professor Dr. João Francisco da Silva Filho pelos ensinamentos e paciência em momentos de dificuldades. Aos demais professores em que tive a oportunidade de ser aluno, ajudando diretamente na formação profissional contribuindo na elevação do conhecimento, em que sempre nos cobraram a fim de que nos tornássemos o melhor possível.

Agradeço a banca examinadora, as professoras Amanda Angélica Feltrin Nunes e Odete Elana Sousa Pereira por terem se disponibilizado na sugestão e correção do presente trabalho.

Para concluir, agradeço à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB) e ao Programa Pulsar-UNILAB, no qual tive a oportunidade de ser bolsista, proporcionando experiências ricas e únicas que contribuíram grandemente em meu aprendizado durante a graduação.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”(Galileu Galilei)

RESUMO

Sabemos que há alguns métodos diretos para obter as raízes de equações polinomiais de grau menor ou igual a quatro, como a Fórmula de Bháskara, Fórmula de Cardano-Tartáglia e o Método de Ferrari. Além disso, existem os métodos numéricos, que também contribuem no estudo de raízes de equações polinomiais, como o método da bissecção, método da posição falsa, método de Newton-Raphson, método da secante, entre outros, onde a partir de um valor inicial, é possível obter aproximações para raízes de um dado polinômio. Há ainda alguns métodos para determinar um intervalo onde estão localizadas as raízes de equações polinomiais, independente do grau da referida equação. Neste trabalho, abordamos resultados que tratam de raízes de equações polinomiais, enfatizando o estudo de estimativas de raízes reais e apresentando um novo método para obter estimativas de raízes de equações polinomiais, que não admitem raízes complexas não-reais.

Palavras-chave: Polinômios. Equações Polinomiais. Raízes. Estimativas.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No decorrer dos tempos é possível notar a evolução da álgebra no que se refere ao estudo de raízes de equações polinomiais. De acordo com livro “Episódios da História Antiga da Matemática”de A. Aaboe, por volta de 1700 a.C., os babilônicos já conheciam regras para resolver equações do segundo grau, tal como encontrar dois números conhecendo sua soma e seu produto. Na antiguidade, os gregos usavam construções geométricas para resolver algumas equações de segundo e até de terceiro grau, enquanto os Hindus usavam métodos aritméticos para resolver equações, desenvolvidos pelos Árabes.

No livro “Summa de Aritmética e Geometria”de Frei Luca Pacioli $(1445-1517)$ que data de 1494, contêm noções de cálculo aritmético, radicais, problemas envolvendo equações do primeiro e segundo grau, geometria e contabilidade, acreditava que não podia ter uma regra geral para a solução de polinômio de grau três. Mas Scipione Ferro $(1465-1526)$ resolveu o tal problema, embora não o tenha publicado. Mais tarde Cardano $(1501-1576)$ teve acesso a solução de Ferro, então a apresentou em seu livro “Ars Magna”publicado em 1545. Por um tempo, ficou conhecida como as fórmulas de Cardano, na qual hoje se conhece por fórmulas de Cardano-Tartaglia.

Ainda no livro “Ars Magna”foi publicado a solução para equação de grau quatro, a qual foi obtida por Ludovico Ferrari $(1522-1565)$, discípulo de Cardano, tal solução é conhecida como Método de Ferrari que consiste na redução da equação de quarto grau para a de terceiro grau, assim, as raízes da equação de grau quatro são encontradas por meio de radicais.

Em 1824, o matemático Niels Henrik Abel $(1802-1829)$ mostrou que para a equação geral de grau de cinco não há solução por meio de radicais, ou seja, não é possível encontrar uma fórmula geral de modo que se resolva todas as equações de grau cinco, mas não foi estabelecido quando uma equação polinomial de grau maior ou igual que cinco tem ou não resolução por radicais. Mais tarde, em 1843, Liouville $(1809-1882)$ anunciou que os estudos feitos por Evariste Galois $(1811-1832)$ respondiam de maneira precisa quando uma equação polinomial de grau maior ou igual que cinco tem ou não resolução por radicais.

Diante disso, como em algumas situações não é possível determinar as raízes exatas de uma equação polinomial, foram desenvolvidos métodos para se encontrar aproximações para as raízes de polinômio, sendo eles: método da bissecção, método da posição falsa, método do ponto fixo, método de Newton-Raphson e método da secante. São métodos numéricos iterativos que partem de um valor inicial para encontrar aproximações das raízes de um polinômio.

O presente trabalho é composto por cinco capítulos sendo o primeiro deles a "Introdução", abordando um pouco acerca da evolução no estudo de equações polinomiais durante os anos. No capítulo dois, apresentamos algumas preliminares, onde retratamos "Limites e Continuidade", bem como suas definições, adiante falaremos de "Derivada de Funções Reais", onde teremos algumas definições, finalizando com "Polinômio sobre um corpo". O terceiro capítulo abordaremos "Polinômios Sobre os Complexos", no qual trataremos noções de "Números Complexos"e resultados mais específicos sobre "Raízes de Polinômios"que serão primordiais na elaboração de nosso objetivo principal.

No capítulo quatro apresentaremos as "Estimativas para Raízes Reais", o qual é composto por alguns "Lemas Chaves"que nos auxiliam na obtenção dos "Resultados Principais", que por sua vez, tratam de condições necessárias para que um polinômio possua apenas raízes reais e ainda saber se determinado polinômio possui raízes complexas não-reais, bem como determinar um intervalo que contém todas as raízes reais de um polinômio com coeficientes reais, admitindo apenas raízes reais, sendo, em vários exemplos, um método eficaz e de melhor precisão que as cotas de Cauchy, Fujiwara e Kojima. Finalmente, no quinto capítulo temos a "Conclusão"do trabalho.

2 PRELIMINARES

No presente capítulo, estaremos abordando alguns conceitos de Cálculo Diferencial e Estruturas Algébricas, bem como outros assuntos que nos darão auxílio no decorrer do trabalho e no desenvolvimento dos resultados, contribuindo no alcance dos resultados principais.

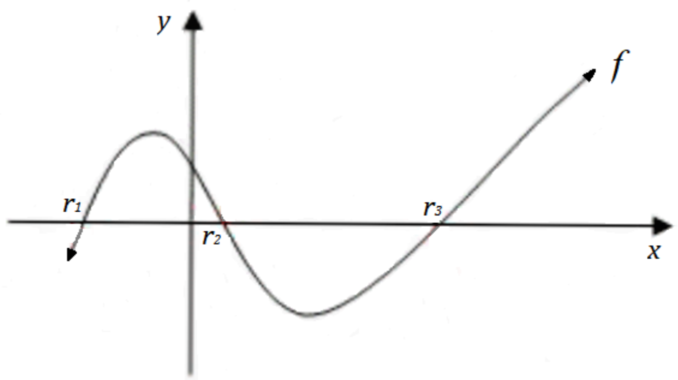
2.1 Limite, Continuidade e Derivada

No presente momento, abordaremos alguns conceitos básicos do Cálculo Diferencial, ressaltando funções de uma variável real, limite, continuidade, derivada e alguns elementos relacionados.

Definição 2.1 Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $r \in X$ um elemento tal que $f(r) = 0$, então dizemos que r é uma raiz (ou zero) de f.

Ilustração: A representação geométrica de raízes de uma função corresponde aos pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas.

Figura 1: Raiz de uma função



Fonte: Produzida pelo autor

Observação 2.1 O conjunto das raízes (ou zeros) de uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será denotado por $\mathcal{Z}(f)$.

Definição 2.2 Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo aberto é dita *contínua* no ponto $a \in I$, quando para todo $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$, tal que

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Observação 2.2 Dizemos que uma função f é contínua, se f é contínua em todos os pontos de seu domínio.

A seguir, exibiremos as definições de limite e derivada de funções reais de uma variável real.

Definição 2.3 Seja uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo aberto, dizemos que f possui limite $L \in \mathbb{R}$ com x tendendo a $a \in I$, se para todo $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$, tal que

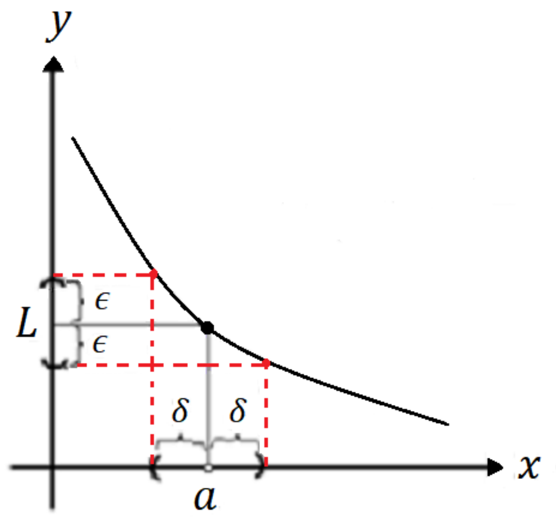
$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Observação 2.3 Nas mesmas condições da definição enunciada anteriormente, geralmente usa-se a notação

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

que pode ser representado geometricamente, conforme a figura abaixo:

Figura 2: Limite de uma função



Fonte: Produzida pelo autor

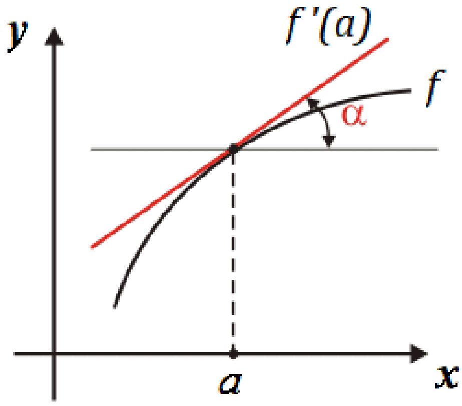
Definição 2.4 Seja a função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dizemos que f é derivável no ponto $a \in \mathbb{R}$, quando existe o limite

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ denota um intervalo aberto.

A seguir, apresentamos a representação geométrica da derivada de uma função, que corresponde à tangente do ângulo formado entre o eixo das abscissas e à reta tangente ao gráfico da função.

Figura 3: A Derivada de uma função



Fonte: Adaptada de https://www.alfaconnection.pro.br

Definição 2.5 Se uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é derivável e a função $f' : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de derivada de f.

Teorema 2.1 (Rolle) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $f(a) = f(b)$. Supondo que f é derivável no intervalo (a, b), então existe um ponto $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Lima (2013).

□

2.2 Polinômios sobre um Corpo

Nesta seção, falaremos sobre as definições de corpo e polinômios, bem como operações e outros elementos relacionados a estas estruturas algébricas, fechando com o algoritmo da divisão de polinômios.

Definição 2.6 Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não-vazio. Dizemos que $\mathbb{K}$ é corpo quando munido das operações de soma e produto

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ (soma)} \qquad \text{e} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ (produto)}$$

satisfazendo, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{K}$, as seguintes as propriedades:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma);
2. Existe $0 \in \mathbb{K}$, tal que $a + 0 = 0 + a$ (existência do elemento neutro da soma);
3. Existe $-a \in \mathbb{K}$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (existência do inverso aditivo);
4. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma);

5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade do produto);
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributividade à esquerda) e
   $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributividade à direita);
7. Existe $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
8. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade do produto);
9. Se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$;
10. Se $a \neq 0$, então existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$ satisfazendo $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Observação 2.4 Neste ambiente nos deteremos em trabalhar no corpo dos números reais e no corpo dos números complexos.

Definição 2.7 Seja $\mathbb{K}$ um corpo. A expressão formal

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots ,$$

onde $a_i \in \mathbb{K}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e existe um número $n \in \mathbb{N}$, tal que $a_j = 0$ para todo $j \geq n$. Será chamado de polinômio sobre um corpo $\mathbb{K}$ em uma indeterminada x.

Observação 2.5 Denotaremos por $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ em uma indeterminada x.

Definição 2.8 Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Dados dois polinômios, sendo eles

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k + \cdots ,$$

sobre o corpo $\mathbb{K}$, dizemos que $P_1(x) = P_2(x)$ quando $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Observação 2.6 Dizemos que $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ é identicamente nulo, quando $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definição 2.9 Um polinômio sobre um corpo $\mathbb{K}$, dado por

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots ,$$

admitindo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $a_n \neq 0$ e $a_j = 0$ para todo $j > n$, dessa forma dizemos que $P(x)$ é um polinômio de grau n.

Observação 2.7 Denotamos o grau de um polinômio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ por $\partial P(x)$.

Definiremos a seguir operações de soma e produto de polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ em uma indeterminada x.

Definição 2.10 Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Dados dois polinômios em $\mathbb{K}$, sendo eles

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k + \cdots ,$$

definimos a soma e o produto, respectivamente por

$$\begin{aligned} \text{(a) } (P_1 + P_2)(x) &:= c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m + \cdots, \\ \text{(b) } (P_1 \cdot P_2)(x) &:= d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m + \cdots, \end{aligned}$$

sendo $c_i := a_i + b_i$ e $d_j := a_0b_j + a_1b_{j-1} + \cdots + a_jb_0$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ com i não-nulo.

Observação 2.8 Podemos verificar que para quaisquer polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, obtemos:

(a) $\partial(P_1 + P_2)(x) \leq \partial P_1(x) + \partial P_2(x)$ com $P_1(x) + P_2(x) \neq 0$.

(b) $\partial(P_1 \cdot P_2)(x) = \partial P_1(x) + \partial P_2(x)$ com $P_1(x) \cdot P_2(x) \neq 0$.

Definição 2.11 Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Temos que $\alpha \in \mathbb{K}$ é uma raiz de um polinômio $P(x)$ não nulo em $\mathbb{K}$, se $P(\alpha) = 0$.

Observação 2.9 O conjunto das raízes de um polinômio $P(x)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ será denotado por $\mathcal{Z}(P)$.

Fazendo uma analogia com a definição de polinômios, definimos função polinomial real em uma variável (ou incógnita).

Definição 2.12 Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ uma função, dizemos que f é polinomial (em uma variável), quando existem constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, satisfazendo

$$f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0,$$

para todo $x \in \mathbb{K}$.

Na sequência, apresentamos um importante resultado sobre polinômios, chamado de algoritmo da divisão de polinômios.

Proposição 2.1 (Algoritmo da Divisão) Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Dados $P_1(x)$ e $P_2(x)$ em $\mathbb{K}$ donde $P_2(x) \neq 0$, existem únicos polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ sobre $\mathbb{K}$, tais que

$$P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x) + R(x),$$

onde $R(x)$ é nulo ou $\partial R(x) < \partial P_2(x)$.

Demonstração: A demonstração do resultado será feita em duas partes, como veremos a seguir:

1ª Parte: Existência.

Supondo que $P_1(x)$ é um polinômio nulo, então podemos tomar $Q(x)$ e $R(x)$ nulos e desta forma, garante a existência neste caso. Mas, se tivermos

$$\partial P_1(x) < \partial P_2(x),$$

basta tomar $Q(x)$ nulo e $R(x) = P_1(x)$ e outra vez, para este caso particular a existência estará garantida.

Nestas condições, basta considerar o caso em que $\partial P_1(x) \geq \partial P_2(x)$ e assim, sejam

$$\partial P_1(x) = m \quad \text{e} \quad \partial P_2(x) = n,$$

donde podemos escrever

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n,$$

e definindo

$$P_3(x) = P_1(x) - a_m b_n^{-1} x^{m-n} P_2(x),$$

satisfazendo $\partial P_3(x) < \partial P_1(x)$.

Neste momento iremos fazer por indução sobre o grau m de $P_1(x)$ e para tal, consideraremos dois passos:

1º Passo: $m = 0$.

Para $m = 0$, teremos $n = 0$ e assim

$$P_1(x) = a_0 \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0,$$

logo

$$P_1(x) = a_0 b_0^{-1} P_2(x),$$

então tomamos $Q(x) = a_0 b_0$ e $R(x) = 0$.

2° Passo: $m > 0$.

Suponha que a existência é válida para todo polinômio de grau menor que m, assim temos que

$$P_3(x) = P_1(x) - a_m b_n^{-1} x^{m-n} P_2(x) \tag{1}$$

possui grau menor que m, então existem $\tilde{Q}(x)$ e $\tilde{R}(x)$ que satisfazem

$$P_3(x) = \tilde{Q}(x) \cdot P_2(x) + \tilde{R}(x), \tag{2}$$

com $\tilde{R}(x)$ nulo ou $\partial \tilde{R}(x) < \partial P_2(x)$.

Das igualdades (1) e (2), obtemos que

$$P_1(x) = [a_m b_n^{-1} x^{m-n} + \tilde{Q}(x)] P_2(x) + \tilde{R}(x),$$

bastando tomar

$$Q(x) = a_m b_n^{-1} x^{m-n} + \tilde{Q}(x) \quad \text{e} \quad R(x) = \tilde{R}(x),$$

que satisfazem as condições enunciadas.

2ª Parte: Unicidade.

Agora suponha que existem $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $Q_2(x)$ e $R_2(x)$, tais que

$$P_1(x) = Q_1(x) \cdot P_2(x) + R_1(x) = Q_2(x) \cdot P_2(x) + R_2(x),$$

onde $R_i(x)$ é nulo ou $\partial R_i(x) < \partial P_i(x)$ com $i = 1, 2$. Assim, tem-se que

$$[Q_1(x) - Q_2(x)] \cdot P_2(x) = R_2(x) - R_1(x),$$

portanto $Q_1(x) = Q_2(x)$ e $R_1(x) = R_2(x)$. $\square$

3 POLINÔMIOS SOBRE OS COMPLEXOS

3.1 Números Complexos

Os números complexos formam um conjunto numérico, cuja notação é $\mathbb{C}$, que compreende uma expansão dos números reais. Um elemento $z \in \mathbb{C}$ é escrito na forma

$$z = a + bi,$$

onde "i" é chamado de unidade imaginária, no qual $i = \sqrt{-1}$ e a, b representam as partes real e imaginária de z, respectivamente. A parte real de z é denotada por $Re\, z$ e a parte imaginária é denotada por $Im\, z$, ou seja,

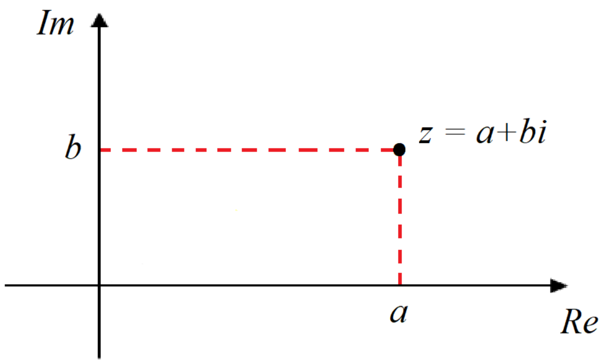
$$Re\, z = a \qquad \text{e} \qquad Im\, z = b,$$

donde podemos escrever

$$z = (Re\, z) + (Im\, z)\, i.$$

Adiante, podemos ver uma representação do Plano Complexo, no qual o eixo y corresponde ao eixo imaginário de z e o eixo x correspondendo ao eixo real de z.

Figura 4: O Plano Complexo



Fonte: Produzida pelo autor

Apresentaremos agora duas definições básicas sobre os números complexos.

Definição 3.1 Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, dizemos que são iguais quando $a = c$ e $b = d$.

Definição 3.2 Dado um número complexo $z = a+bi$, tem-se que seu conjugado é definido por $\overline{z} = a - bi$.

Assim como nos números reais temos as operações de soma e produto, nos números complexos, podemos definir operações semelhantes.

Definição 3.3 Define-se a soma e a multiplicação de números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, respectivamente por:

(a) $z + w = (a + c) + (b + d)i$;

(b) $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + cb)i$.

A seguir, veremos propriedades de conjugado de número complexo.

Proposição 3.1 Dados z e $w \in \mathbb{C}$ arbitrários, vale as propriedades:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

(b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Demonstração: Decorre diretamente da definição de conjugado.

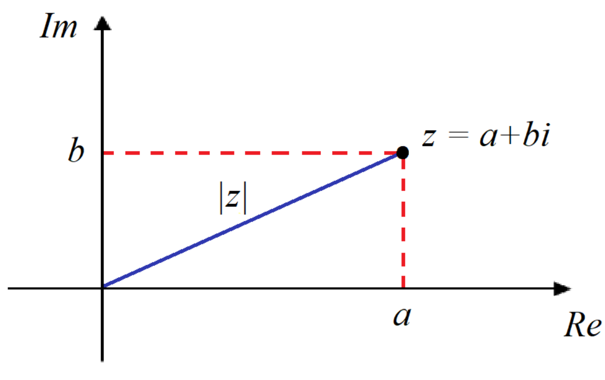
Na definição seguinte temos uma extensão da noção de módulo dos números reais para os números complexos.

Definição 3.4 Seja $z = a + bi$ um número complexo, definimos seu módulo por,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Vemos a seguir, a representação geométrica da definição de módulo que introduzimos acima:

Figura 5: Módulo de um número complexo



Fonte: Produzida pelo autor

Observação 3.1 Diante das notações introduzidas anteriormente, podemos deduzir que:

(a) $z + \overline{z} = 2Re\, z$;

(b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Proposição 3.2 Sejam z, $w \in \mathbb{C}$, são válidas as seguintes propriedades:

(a) $|z + w| \leq |z| + |w|$;

(b) $|z \cdot w| = |z||w|$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Soares (2014).

Podemos ainda, sobre o conjunto dos números complexos, estender as definições de simétrico e inverso multiplicativo.

Definição 3.5 Seja $z = a + bi$ um número complexo, podemos definir:

(a) $-z = (-a) + i(-b)$;

(b) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ para $z \neq 0$.

3.2 Raízes de Polinômios

Na presente seção, apresentaremos algumas definições complementares e resultados sobre raízes de polinômios, tais como, Fórmula de Bháskara, Fórmula de Cardano-Tartaguia, Relações de Girard, e falaremos um pouco sobre os métodos iterativos, bem como algumas estimativas de raízes (Cotas de Cauchy, Fujiwara e Kojima) e concluindo com um resultado acerca do número máximo de raízes de um polinômio sobre um corpo.

Primeiramente, vamos recordar a definição de raiz aplicada a polinômios sobre os complexos.

Definição 3.6 Um número complexo $w \in \mathbb{C}$ é raiz de um polinômio $P(x)$ sobre $\mathbb{C}$, quando satisfaz $P(w) = 0$.

Agora vamos introduzir o conceito de multiplicidade para raízes de polinômios sobre os complexos.

Definição 3.7 Sejam $P(x)$ um polinômio sobre os complexos e $w \in \mathbb{C}$ uma raiz de $P(x)$, então dizemos que w tem multiplicidade $m \in \mathbb{N}$, quando $P(x)$ pode ser escrito na forma

$$P(x) = (x - w)^m Q(x),$$

onde $Q(x)$ é um polinômio de grau $n - m$, tal que $Q(w)$ é não-nulo.

Observação 3.2 Dizemos que $w \in \mathbb{C}$ é uma raiz simples de um polinômio sobre os complexos, quando possui multiplicidade $m = 1$.

A seguir, exibiremos um resultado sobre raízes de polinômio de grau 2, conhecido como Fórmula de Bháskara.

Proposição 3.3 (Fórmula de Bháskara) Considere um polinômio do segundo grau, definido por

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde $\Delta := b^2 - 4ac$ é seu discriminante, com $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$, então:

(a) Quando $\Delta > 0$, temos que as raízes encontradas são reais, obtidas por

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(b) Quando $\Delta = 0$, temos que as raízes encontradas são reais de multiplicidade 2, sendo da forma:

$$r_{1,2} = \frac{-b}{2a}.$$

(c) Quando $\Delta < 0$, temos que as raízes encontradas são complexas, obtidas por

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta i}}{2a}.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em Pereira (2017).

$\square$

A seguir, enunciaremos um resultado conhecido como a fórmula de Cardano-Tartaglia.

Proposição 3.4 (Fórmula de Cardano- Tartaglia) Seja o polinômio de grau 3,

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

com coeficientes reais, então suas raízes são dadas por:

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

onde,

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em Lima (1987).

□

Apresentaremos agora relações entre raízes e coeficientes de equações polinomiais, as quais são conhecidas como Relações de Girard.

Proposição 3.5 (Relações de Girard) Seja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

polinômio de grau $n \geq 1$, com $a_n \neq 0$, cujas raízes são $w_1, w_2, \cdots, w_n \in \mathbb{C}$ então:

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{e} \qquad w_1 w_2 \cdot \ldots \cdot w_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Demonstração: Pode ser encontrado em Iezzi (2013).

□

A seguir, mostraremos um resultado sobre o número máximo de raízes de um polinômio de acordo com seu grau.

Proposição 3.6 Seja um polinômio não-nulo de grau n sobre os complexos, dado por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0,$$

então o número de raízes de complexas de $P(x)$ é no máximo igual a $\partial P(x) = n$.

Demonstração:

Para o caso em que $P(x)$ não possui raízes, já temos diretamente que o resultado é válido. Suponha que $w \in \mathbb{C}$ seja raiz de $P(x)$, assim, sabemos que o polinômio

$$G(x) = x - w$$

divide $P(x)$, utilizando desta forma o algoritmo da divisão. Daí, existem polinômios $Q(x), R(x) \in \mathbb{C}[x]$ tais que

$$P(x) = (x - w)Q(x) + R(x),$$

onde

$$R(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial R(x) < \partial G(x) = 1.$$

Desta maneira, veja que $R(x) = c$ é um polinômio constante, logo

$$P(x) = (x - w)Q(x) + c$$

e como $P(w) = 0$, aplicando na expressão anterior, segue que $c = 0$, então

$$R(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad P(x) = (x - w)Q(x),$$

onde $\partial Q(x) = n - 1$.

Observe que se $v \in \mathbb{C}$ é raiz de $P(x)$ então

$$P(v) = (v - w)Q(v) = 0,$$

no qual podemos ter que $w = v$ ou v é também raiz de $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$. Logo, as raízes de $P(x)$ são w e as raízes de $Q(x)$.

Por indução sobre o grau $\partial P(x) = n$

1° **Caso:** $n = 0$.

Para este caso temos $P(x)$ não tem raízes, donde segue que a proposição é verdadeira.

2° **Caso:** Por hipótese de indução, temos que

$$\partial Q(x) < \partial P(x) = n,$$

daí $Q(x)$ possui no máximo $\partial Q(x) = n-1$ raízes complexas, logo $P(x)$ possui no máximo n raízes em $\mathbb{C}$. □

Observação 3.3 Os métodos numéricos iterativos (cf. Ruggiero (2013)) já mencionados, são métodos recorrentes de obter aproximações de raízes, a partir de um valor inicial. Dentre esses métodos, podemos citar: métodos da bissecção, da posição falsa, método do ponto fixo, de Newton-Raphson e da Secante.

Para concluir a seção, apresentaremos uma proposição que traz algumas estimativas (Cotas de Cauchy, Fujiwara e Kojima) de raízes de polinômios com coeficientes reais. Essas estimativas são importantes para a escolha de valores iniciais dos métodos numéricos iterativos.

Proposição 3.7 Considere um polinômio não-nulo de grau n sobre os reais, dado por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

bem como uma raiz $w \in \mathbb{C}$ de $P(x)$, então valem as seguintes desigualdades:

a) Cota de Cauchy:

$$|w| \leq 1 + \frac{1}{|a_n|} max\{|a_k|\}_{k=0}^{n-1}.$$

b) Cota de Fujiwara:

$$|w| \leq 2max \left\{ \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right|^{1/k} \right\}_{k=1}^{n}.$$

c) Cota de Kojima:

$$|w| \leq max \left\{ \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right|^{1/k} \right\}_{k=1}^{n} + max \left\{ \left\{ \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right|^{1/k} \right\}_{k=1}^{n} \setminus max \left\{ \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right|^{1/k} \right\}_{k=1}^{n} \right\}.$$

Observação 3.4 Os resultados da proposição acima podem ser encontrados em Odete e Silva Filho (2017) e em Quadros e Bortoli (2009).

Neste momento, aplicamos o último resultado a alguns exemplos de polinômios com coeficientes reais admitindo apenas raízes reais.

Exemplo 3.1 Estimar a localização das raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + 1$ utilizando as Cotas de Cauchy, Fujiwara e Kojima.

Solução: Sendo w uma raiz real de $P(x)$, da cota de Cauchy, temos que:

$$|w| \leq 1 + \frac{1}{|1|} max\{|1|, |1|, |-4|, |-3|\},$$

daí,

$$|w| \leq 1 + 4,$$

ou ainda,

$$|w| \leq 5.$$

Da cota de Fujiwara, podemos ter

$$|w| \leq 2max \left\{ \left| \frac{-3}{1} \right|^{1/1}, \left| \frac{-4}{1} \right|^{1/2}, \left| \frac{1}{1} \right|^{1/3}, \left| \frac{1}{1} \right|^{1/4} \right\},$$

donde segue que,

$$|w| \leq 2 \cdot 3 \Rightarrow |w| \leq 6.$$

Finalmente, como já sabemos que

$$max\left\{\left|\frac{-3}{1}\right|^{1/1}, \left|\frac{-4}{1}\right|^{1/2}, \left|\frac{1}{1}\right|^{1/3}, \left|\frac{1}{1}\right|^{1/4}\right\} = 3$$

e além disso,

$$max\left\{\left\{\left|\frac{-3}{1}\right|^{1/1}, \left|\frac{-4}{1}\right|^{1/2}, \left|\frac{1}{1}\right|^{1/3}, \left|\frac{1}{1}\right|^{1/4}\right\} \setminus max\left\{\left|\frac{-3}{1}\right|^{1/1}, \left|\frac{-4}{1}\right|^{1/2}, \left|\frac{1}{1}\right|^{1/3}, \left|\frac{1}{1}\right|^{1/4}\right\}\right\} = 2$$

Então da cota de Kojima, obtemos

$$|w| \leq 3 + 2 \Rightarrow |w| \leq 5.$$

Portanto, obtemos assim as estimativas das raízes do polinômio $P(x)$ em cada cota pedida.

Exemplo 3.2 Estimar a localização das raízes do polinômio

$$P(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1,$$

utilizando as Cotas de Cauchy, Fujiwara e Kojima.

Solução: Seja w uma raiz complexa de $P(x)$, da cota de Cauchy, segue que

$$|w| \leq 1 + \frac{1}{|1|} max\{|-1|, |6|, |5|, |4|, |-3|, |2|\},$$

daí,

$$|w| \leq 1 + 6,$$

ou ainda,

$$|w| \leq 7.$$

Da cota de Fujiwara, temos

$$|w| \leq 2max\left\{\left|\frac{2}{1}\right|^{1/1}, \left|\frac{-3}{1}\right|^{1/2}, \left|\frac{4}{1}\right|^{1/3}, \left|\frac{5}{1}\right|^{1/4}, \left|\frac{6}{1}\right|^{1/5}, \left|\frac{-1}{1}\right|^{1/6}\right\},$$

assim,

$$|w| \leq 2 \cdot 2 \Rightarrow |w| \leq 4.$$

Concluindo, já sabemos que

$$max\left\{\left|\frac{2}{1}\right|^{1/1}, \left|\frac{-3}{1}\right|^{1/2}, \left|\frac{4}{1}\right|^{1/3}, \left|\frac{5}{1}\right|^{1/4}, \left|\frac{6}{1}\right|^{1/5}, \left|\frac{-1}{1}\right|^{1/6}\right\} = 2$$

bem como,

$$max\left\{\left|\frac{-3}{1}\right|^{1/2}, \left|\frac{4}{1}\right|^{1/3}, \left|\frac{5}{1}\right|^{1/4}, \left|\frac{6}{1}\right|^{1/5}, \left|\frac{-1}{1}\right|^{1/6}\right\} = \sqrt{3}$$

Então da cota de Kojima, temos que

$$|w| \leq 2 + \sqrt{3} \Rightarrow |w| \leq 3,732050808.$$

Portanto, obtemos as estimativas das raízes do polinômio $P(x)$ em cada uma das cotas apresentadas.

4 ESTIMATIVAS PARA RAÍZES REAIS

Esta seção é dividida em duas subseções sendo que na primeira delas, abordaremos alguns lemas importantes, que ajudarão nos resultados principais. Na subseção subsequente apresentaremos os resultados obtidos, que trata na estimativas de raízes de polinômios com coeficientes reais admitindo apenas raízes reais.

4.1 Lemas Chaves

De início, exibiremos um importante resultado que será usado na demonstração do Teorema 4.2.

Lema 4.1 Dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grau n, $n \geq 1$, com coeficientes reais, então vale a igualdade

$$P(x) = \frac{P^{(n)}(r)(x-r)^n}{n!} + \frac{P^{(n-1)}(r)(x-r)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + P'(r)(x-r) + P(r),$$

para todo número real $r \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Faremos a demonstração por indução, considerando os seguintes casos:

1º Caso: Para um polinômio de grau $n = 1$, escrevemos

$$P(x) = a_1 x + a_0,$$

ao derivar o polinômio temos

$$P'(x) = a_1,$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} P'(r)(x-r) + P(r) &= a_1(x-r) + (a_1 r + b) \\ &= a_1 x + b = P(x), \end{aligned}$$

que conclui o primeiro caso.

2º Caso: Suponha a igualdade enunciada seja válida para todo polinômio de grau $n-1 \geq 1$, então esta aplica-se ao polinômio

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1 x,$$

que pode ser escrito na forma

$$P'(x) = \frac{P^{(n)}(r)(x-r)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{P^{(n-1)}(r)(x-r)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + P''(r)(x-r) + P'(r),$$

onde usamos a hipótese de indução.

Nestas condições, podemos deduzir que

$$P(x) = \frac{P^{(n)}(r)(x-r)^{n}}{n!} + \frac{P^{(n-1)}(r)(x-r)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + P'(r)x + c, \tag{3}$$

onde c denota uma constante real. Em particular, obtemos

$$P(r) = P'(r)r + c,$$

ou equivalentemente

$$c = P(r) - P'(r)r,$$

daí basta substitui o valor de c na expressão (3) para obter a igualdade desejada. □

Agora, apresentaremos um resultado sobre raízes reais de um polinômio e da sua derivada.

Lema 4.2 Dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grau n, $n \geq 1$, com coeficientes reais, que admite apenas raízes reais, então o polinômio $P'(x)$, de grau $n-1$, também admite apenas raízes reais.

Demonstração: Desde que $P(x)$ possui apenas raízes reais, então podemos escrevê-lo na forma

$$P(x) = a_n(x-r_1)^{k_1}(x-r_2)^{k_2}\cdots(x-r_m)^{k_m},$$

onde $r_1 < r_2 < \cdots < r_m$ e $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Na sequência, definimos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = P(x),$$

portanto $r_1, r_2, \ldots, r_m$ são raízes de f.

Usando o Teorema de Rolle, podemos afirmar que existe pelo menos uma raiz de f' em cada intervalo da união

$$J = \bigcup_{i=1}^{m-1} (r_i, r_{i+1}),$$

pois $f(r_1) = f(r_2) = \cdots f(r_m) = 0$. Como cada raiz não-simples de f será raiz de f', logo

$$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \cdots + (k_m - 1) = (k_1 + k_2 + \cdots + k_m) - m = n - m,$$

corresponde ao número de raízes de f e f', simultaneamente.

Nestas condições, definimos os conjuntos

$$S = \mathcal{Z}(f') \cap J \qquad \text{e} \qquad T = \{r_i \in \mathcal{Z}(f) : k_i > 1\},$$

daí observando que $S \cap T = \emptyset$, segue-se do algoritmo da divisão de polinômios que

$$\mathcal{Z}(f') = \mathcal{Z}(P') \geq \#S + \#T,$$

ou seja,

$$\mathcal{Z}(P') \geq (m-1) + (n-m) = n - 1,$$

que implica pela Proposição 3.6 que todas as raízes de $P'(x)$ são reais. □

4.2 Resultados Principais

Nesta última seção, apresentamos os principais resultados do nosso trabalho, que consistem em fornecer condições necessárias para que um polinômio possua apenas raízes reais e critérios que permitem identificar a existência de raízes complexas não-reais, bem como estimativas de raízes reais.

O primeiro teorema estabelece uma condição sobre os coeficientes de um polinômio, necessária para que este admita apenas raízes reais. Devemos destacar que este resultado foi obtido por Muniz Neto (2006) no contexto de funções polinomiais.

Teorema 4.1 Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau $n \geq 2$ com coeficientes reais e admitindo apenas raízes reais. Nestas condições, tem-se que

$$a_k^2 \geq \frac{(n-k+1)(k+1)}{(n-k)k} a_{k+1} a_{k-1},$$

para todo $1 \leq k \leq n - 1$.

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução finita sobre o grau do polinômio $P(x)$, conforme descrito a seguir:

1º Passo: Primeiro consideramos $n = 2$, donde obtemos a expressão

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

podendo ser reescrita na forma

$$P(x) = \frac{1}{4a_2}[(2a_2x + a_1)^2 - (a_1^2 - 4a_2a_0)],$$

portanto $P(x)$ admite apenas raízes reais, se e somente se,

$$a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0.$$

que encerra o primeiro passo.

2º Passo: Por hipótese de indução, vamos supor que a desigualdade enunciada é válida para todo polinômio de grau $n-1$ admitindo apenas raízes reais. Nestas condições, segue do Lema 4.2 que o polinômio

$$P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$$

admite apenas raízes reais e para $n > 2$, deduzimos ainda que

$$(ka_k)^2 \geq \frac{(n-k+1)k}{(n-k)(k-1)}[(k+1)a_{k+1}][(k-1)a_{k-1}],$$

ou simplesmente,

$$a_k^2 \geq \frac{(n-k+1)(k+1)}{(n-k)k}a_{k+1}a_{k-1},$$

para todo $2 \leq k \leq n-1$.

Falta apenas provar a desigualdade enunciada para $k = 1$, então para $a_0 = 0$ não há o que provar. Caso contrário, basta tem-se que

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n),$$

donde concluímos que o polinômio

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

possui apenas raízes reais.

De modo análogo, aplicamos o Lema 4.2 junto com a hipótese de indução ao polinômio

$$Q'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + 2a_{n-1}x + a_n,$$

daí obtemos

$$[(n-1)a_1]^2 \geq \frac{2(n-1)}{n-2}(na_0)[(n-2)a_2],$$

ou simplesmente,

$$a_1^2 \geq \frac{2n}{n-1}a_2a_0,$$

que completa a prova do teorema. □

Observação 4.1 O resultado do Teorema 4.1 foi obtido em Pereira (2017) para polinômios de grau três, onde a autora usou uma técnica mais elementar na demonstração.

Adiante, temos como consequência um corolário que estabelece critérios que garantem a existência de pelo menos duas raízes complexas não-reais para polinômios com coeficientes reais.

Corolário 4.1 Seja $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ um polinômio de grau $n \geq 2$ com coeficientes reais satisfazendo

$$a_k^2 < \frac{(n-k+1)(k+1)}{(n-k)k}a_{k+1}a_{k-1},$$

para algum $1 \leq k \leq n-1$, então $P(x)$ admite pelo menos duas raízes complexas não-reais.

Demonstração:

Decorre do Teorema 4.1 que $P(x)$ admite pelo menos uma raiz $w \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, consequentemente,

$$P(\overline{w}) = a_n\overline{w}^n + a_{n-1}\overline{w}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{w} + a_0,$$

mas como os coeficientes de $P(x)$ são reais, tem-se ainda

$$P(\overline{w}) = \overline{a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \cdots + a_1 w + a_0} = \overline{0} = 0,$$

portanto $\overline{w}$ também é raiz de $P(x)$ e isso conclui a prova do corolário. $\square$

Exemplo 4.1 Verifique se o polinômio $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x$ possui raízes complexas.

Solução: Como o $P(x)$ é grau 3, temos que $n = 3$, então

$$a_k^2 < \frac{(3-k+1)(k+1)}{(3-k)k} a_{k+1} a_{k-1}$$

para algum $1 < k < 2$.
Quando $k = 1$, obtemos que $a_1^2 < 3a_2 a_0$. Donde não satisfaz a desigualdade.
Quando $k = 2$, obtemos que $a_2^2 < 3a_3 a_1$. Temos que a desigualdade é satisfeita.
Assim, $P(x)$ possui pelos duas raízes complexas não-reais.

No teorema a seguir, apresentamos uma desigualdade que nos permite obter estimativas (cotas inferior e superior) de raízes reais de polinômios que não admitem raízes complexas não-reais.

Teorema 4.2 Seja $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n, $n > 1$, sobre os reais, que admite apenas raízes reais. Nestas condições, tem-se que cada raiz $r \in \mathbb{R}$ de $P(x)$ satisfaz a desigualdade

$$\left| r + \frac{a_{n-1}}{n a_n} \right| \leq \frac{n-1}{n|a_n|} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_n a_{n-2}}.$$

Demonstração:

Faremos a demonstração dividindo-a em dois casos distintos, conforme descrito a seguir:

1º Caso: Primeiro consideramos $n = 2$, daí escrevemos

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

então segue da fórmula de Bháskara que uma raiz r de $P(x)$ satisfaz

$$r = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} \quad \text{ou} \quad r = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2},$$

em particular,

$$\left| r + \frac{a_1}{2a_2} \right| = \frac{1}{2|a_2|}\sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}, \tag{4}$$

portanto satisfaz trivialmente a desigualdade enunciada.

2º Caso: Neste momento, vamos admitir $n > 2$ e aplicar o Lema 4.1 para escrever

$$P(x) = \frac{P^{(n)}(r)(x-r)^n}{n!} + \frac{P^{(n-1)}(r)(x-r)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + P'(r)(x-r) + P(r),$$

mas como r é uma raiz de $P(x)$, segue que $P(r) = 0$ e consequentemente

$$P(x) = \frac{P^{(n)}(r)(x-r)^n}{n!} + \frac{P^{(n-1)}(r)(x-r)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{P''(r)(x-r)^2}{2!} + P'(r)(x-r),$$

daí colocamos $x - r$ em evidência na expressão acima, obtendo

$$P(x) = (x-r)\left[\frac{P^{(n)}(r)(x-r)^{n-1}}{n!} + \frac{P^{(n-1)}(r)(x-r)^{n-2}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{P''(r)(x-r)}{2!} + P'(r)\right].$$

Desde que $P(x)$ possui apenas raízes reais, então podemos afirmar que

$$Q(x) = \frac{P^{(n)}(r)x^{n-1}}{n!} + \frac{P^{(n-1)}(r)x^{n-2}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{P''(r)x}{2!} + P'(r)$$

possui apenas raízes reais em virtude do Lema 4.2. Decorre do Teorema 4.1 que

$$\left[\frac{P^{(n-1)}(r)}{(n-1)!}\right]^2 - \frac{2(n-1)}{n-2}\left[\frac{P^{(n)}(r)}{n!}\right]\left[\frac{P^{(n-2)}(r)}{(n-2)!}\right] \geq 0,$$

ou ainda,

$$\left[P^{(n-1)}(r)\right]^2 - \frac{2(n-1)^2}{n(n-2)}P^{(n)}(r)P^{(n-2)}(r) \geq 0. \tag{5}$$

Calculando diretamente $P^n(r)$, $P^{(n-1)}(r)$ e $P^{(n-2)}(r)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&P^{(n)}(r) = n!a_n,\\
&P^{(n-1)}(r) = n!a_n r + (n-1)!a_{n-1} \quad \text{e}\\
&P^{(n-2)}(r) = \frac{n!}{2!}a_n r^2 + (n-1)!a_{n-1}r + (n-2)!a_{n-2},
\end{aligned}$$

que substituídas em (5) resulta em

$$[n!a_n r + (n-1)!a_{n-1}]^2 - \frac{2(n-1)^2}{n(n-2)} n!a_n \left[\frac{n!}{2!} a_n r^2 + (n-1)!a_{n-1} r + (n-2)!a_{n-2}\right] \geq 0,$$

ou equivalentemente,

$$-\frac{n!(n-1)!}{n-2} a_n^2 r^2 - \frac{2(n-1)!^2}{n-2} a_n a_{n-1} r + (n-1)!^2 \left[a_{n-1}^2 - \frac{2(n-1)}{n-2} a_n a_{n-2}\right] \geq 0.$$

Colocando $(n-1)!^2$ em evidência na última desigualdade e dividindo por $(n-1)!^2$ toda a expressão obtida, tem-se que

$$-\frac{n}{n-2} a_n^2 r^2 - \frac{2}{n-2} a_n a_{n-1} r + \left[a_{n-1}^2 - \frac{2(n-1)}{n-2} a_n a_{n-2}\right] \geq 0,$$

ou ainda,

$$\frac{n}{n-2} a_n^2 r^2 + \frac{2}{n-2} a_n a_{n-1} r - \left[a_{n-1}^2 - \frac{2(n-1)}{n-2} a_n a_{n-2}\right] \leq 0.$$

Da última desigualdade, podemos afirmar que o polinômio

$$R(x) = \frac{n}{n-2} a_n^2 x^2 + \frac{2}{n-2} a_n a_{n-1} x - \left[a_{n-1}^2 - \frac{2(n-1)}{n-2} a_n a_{n-2}\right]$$

possui discriminante não-negativo, dado por

$$\Delta_R = \frac{4}{(n-2)^2} \left\{ a_n^2 a_{n-1}^2 + n(n-2) a_n^2 \left[a_{n-1}^2 - \frac{2(n-1)}{n-2} a_n a_{n-2}\right]\right\} \geq 0,$$

visto que $R(r) \leq 0$ e seu coeficiente líder é positivo.

Simplificando a última desigualdade obtida, chegamos em

$$\Delta_R = \frac{4(n-1)^2 a_n^2}{(n-2)^2} \left[a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_n a_{n-2}\right] \geq 0, \tag{6}$$

consequentemente,

$$-\frac{a_{n-1}}{na_n} - \frac{n-2}{2na_n^2}\sqrt{\Delta_R} \leq r \leq -\frac{a_{n-1}}{na_n} + \frac{n-2}{2na_n^2}\sqrt{\Delta_R}.$$

Observe ainda que a última desigualdade pode ser reescrita na forma

$$\left| r + \frac{a_{n-1}}{na_n} \right| \leq \frac{n-2}{2na_n^2}\sqrt{\Delta_R},$$

então substituindo (6) na desigualdade anterior, obtemos

$$\left|r+\frac{a_{n-1}}{na_n}\right| \leq \frac{n-1}{n|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2-\frac{2n}{n-1}a_na_{n-2}},$$

que juntamente com (4) completam a prova do teorema. □

Observação 4.2 O resultado do Teorema 4.2 foi obtido em Pereira e Silva Filho (2017) para polinômios de grau três, no qual a autora usou uma técnica mais elementar na demonstração.

Como consequência do Teorema 4.2, obtemos o seguinte corolário que nos fornece um outro tipo de estimativa levando em conta os inversos multiplicativos das raízes não-nulas de um polinômio.

Corolário 4.2 Seja $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ um polinômio de grau n sobre os reais, que admite apenas raízes reais não todas nulas, então cada raiz $r \in \mathbb{R}^*$ satisfaz

$$\left|\frac{1}{r}+\frac{a_m}{(n-m+1)a_{m-1}}\right| \leq \frac{n-m}{(n-m+1)|a_{m-1}|}\sqrt{a_m^2-\frac{2(n-m+1)}{n-m}a_{m+1}a_{m-1}},$$

onde $m := min\{k \in \mathbb{N} : a_{k-1} \neq 0\}$.

Demonstração: Por um cálculo direto, observe que

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n}(a_{m-1}x^{n-m+1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n),$$

portanto as raízes de $P(x)$ são os inversos multiplicativos das raízes do polinômio

$$Q(x) = a_{m-1}x^{n-m+1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

daí basta aplicar diretamente o Teorema 4.2 ao polinômio $Q(x)$ para obter a desigualdade desejada. □

Como aplicação do Teorema 4.2, faremos uma comparação com as estimativas obtidas nos Exemplos 3.1 e 3.2.

Exemplo 4.2 Encontre um intervalo que contenha o subconjunto das raízes reais do polinômio

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + 1.$$

Solução: Temos que $P(x)$ é um polinômio de grau 4, assim $n = 4$, dessa forma a desigualdade no Teorema 4.2 se torna

$$\left|r + \frac{a_3}{4a_4}\right| \leq \frac{3}{4|a_4|}\sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3}a_4a_2},$$

como $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = -4, a_3 = -3, a_4 = 1$ e $n = 4$, segue que

$$\left|r + \left(\frac{-3}{4(1)}\right)\right| \leq \frac{3}{4|1|}\sqrt{(-3)^2 - \frac{8}{3}(1)(-4)},$$

obtemos,

$$|r - 0,75| \leq 3,32603367,$$

o que resulta em,

$$-2,57603367 \leq r \leq 4,07603367.$$

Então, todas as raízes de $P(x)$ estão nesse intervalo.

Exemplo 4.3 Encontre um intervalo que contenha o subconjunto das raízes reais do polinômio

$$P(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1.$$

Solução: O polinômio $P(x)$ é de grau 6, assim $n = 6$, dessa forma a desigualdade no Teorema 4.2 se torna

$$\left|r + \frac{a_5}{6a_6}\right| \leq \frac{5}{6|a_6|}\sqrt{a_5^2 - \frac{12}{5}a_6a_4},$$

como $a_0 = -1, a_1 = 6, a_2 = 5, a_3 = 4, a_4 = -3, a_5 = 2, a_6 = 1$ e $n = 6$, daí,

$$\left|r + \frac{2}{6(1)}\right| \leq \frac{5}{6|1|}\sqrt{2^2 - \frac{12}{5}(1)(-3)},$$

segue que,

$$|r + 0,33333333| \leq 2,78886675,$$

obtendo,

$$-3,12219975 \leq r \leq 2,45553342.$$

Portanto, todas as raízes de $P(x)$ estão no intervalo encontrado.

Observação 4.3 Note que os intervalos encontrados têm uma melhor aproximação daquelas encontras nos Exemplos 3.1 e 3.2 com as cotas de Cauchy, Fujiwara e Kojima.

No próximo corolário, temos uma condição onde podemos ter uma raiz com multiplicidade n, dado que o polinômio esteja nas condições do teorema apresentado acima.

Corolário 4.3 Seja $P(x)$ um polinômio nas condições do Teorema 4.2. Quando

$$a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2} = 0,$$

tem-se que $r = -\dfrac{a_{n-1}}{na_n}$, ou seja, possui uma raiz com multiplicidade n.

Demonstração:

Suponha que

$$a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2} = 0,$$

da desigualdade do Teorema 4.2, obtemos,

$$\left| r + \frac{a_{n-1}}{na_n} \right| \leq 0,$$

daí,

$$-\frac{a_{n-1}}{na_n} \leq r \leq -\frac{a_{n-1}}{na_n},$$

consequentemente,

$$r = -\frac{a_{n-1}}{na_n}.$$

Concluindo a demonstração.

$\square$

No corolário a seguir, apresenta condições em que se tem somente raízes não-negativas e não-positivas.

Corolário 4.4 Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n sobre os reais, admitindo apenas raízes reais, então valem as afirmações:

a) Quando

$$S \geq \frac{n-1}{|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}},$$

onde S é a soma de raízes, tem-se que $P(x)$ possui apenas raízes não-negativas.

b) Quando

$$S \leq -\frac{n-1}{|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}},$$

onde S é a soma de raízes, tem-se que $P(x)$ possui apenas raízes não-positivas.

Demonstração:

a) Suponha que

$$S \geq \frac{n-1}{|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}},$$

daí,

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} \geq \frac{n-1}{|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $\frac{1}{n}$, obtemos,

$$-\frac{a_{n-1}}{na_n} \geq \frac{n-1}{n|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}},$$

segue que,

$$-\frac{a_{n-1}}{na_n} - \frac{n-1}{n|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}} \geq 0,$$

logo, pelo Teorema 4.2, as raízes de $P(x)$ só podem ser não-negativas. $\square$

b) Suponha que

$$S \leq -\frac{n-1}{|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}},$$

daí,

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} \leq -\frac{n-1}{|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}}.$$

Da última igualdade, deduzimos que

$$\frac{a_{n-1}}{na_n} \geq \frac{n-1}{n|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}},$$

donde obtemos,

$$-\frac{a_{n-1}}{na_n} + \frac{n-1}{n|a_n|}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}} \leq 0,$$

pelo Teorema 4.2, as raízes de $P(x)$ só podem ser não-positivas. $\square$

5 CONCLUSÃO

Ao estudar estimativas de raízes de polinômios com coeficientes e raízes reais, percebe-se claramente a importância destas para a escolha dos valores iniciais nos métodos numéricos iterativos. Por outro lado, convém destacar que ao comparar as cotas de Cauchy, Fujiwara e Kojima com nosso principal resultado, identificamos muitos exemplos, principalmente em polinômios de grau menor ou igual a cinco, nos quais o nosso principal resultado fornece uma maior precisão.

REFERÊNCIAS

AABOE. A. Episódios da História Antiga da Matemática, 1° ed. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

ALHANATI, L. S. Interpretacao Grafica das Derivadas Primeira e Segunda. Disponível em: < https://www.alfaconnection.pro.br>. Acesso em 17 de agosto de 2019.

ÁVILA, G. *Análise Matemática*. 3 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

GONÇALVES, A. Introdução à Álgebra. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

IEZZI. G. Fundamentos da Matemática Elementar - Volume 6: Complexos, Polinômios e Equações, 8ª Edição. São Paulo: Atual, 2013.

LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1. 3 ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

LIMA, E. L. Equação do terceiro grau. Matemática Universitária, v. 5, p. 10-23, 1987.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1. 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. Análise Real - Volume 1. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MUNIZ NETO, A. C. A rigidity theorem for complete CMC hypersurfaces in Lorentz manifolds, v. 24, p. 652-659, 2006.

PEREIRA, O. Raízes de Equações do Terceira Grau. 2017, 33f. Monografia (Graduação) - Curso de Ciências da Natureza e Matemática, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2017.

PEREIRA, O.; SILVA Filho, J. O Método de Newton-Raphson e as Funções Polinomiais do Terceiro Grau. Matemática e Estatística em Foco, v. 5, n. 1, p. 22-36, 2017.

QUADROS, R.; BORTOLI, A. Fundamentos de Cálculo Numérico para Engenheiros. Porto Alegre, 2009.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª Edição. São Paulo: Pearson, 1996.

SOARES, M. G. Cálculo em uma Variável Complexa, 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.