UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MANFINAPUL ARMANDO BLEZ BLEZ

CAMPOS DE VETORES CONFORMES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

REDENÇÃO - CE

2019

MANFINAPUL ARMANDO BLEZ

CAMPOS DE VETORES CONFORMES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

REDENÇÃO - CE

2019

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Blez, Manfinapul Armando.

B594c

Campos de vetores conformes no espaço euclidiano / Manfinapul Armando Blez. - Redenção, 2019.
33f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2019.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. Matemática. 2. Campos de Vetores Conformes. 3. Fator conforme. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 510

MANFINAPUL ARMANDO BLEZ

CAMPOS DE VETORES CONFORMES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 01 de Abril de 2019

BANCA EXAMINADORA

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho aos meus familiares e a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho, pela oportunidade de fazer pesquisa e o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) sob a sua orientação, paciência, disposição e pelos ensinamentos.

Aos meus pais (Armando João Blez e Celeste Gomes) pelo apoio, por sempre estarem ao meu lado mesmo em momentos difíceis. Ao Tio Mateus Blez, como também a todos meus irmãos e irmãs.

Aos professores do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza que contribuíram na minha formação acadêmica e profissional. Agradeço de uma forma especial ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, pela amizade oferecida nos últimos anos, assim como pelas breves conversas sobre vários assuntos considerados na realização deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos e amigas, brasileiros e internacionais, com quem compartilhei tantos momentos agradáveis, desagradáveis, interessantes e de crescimento pessoal durante os anos que estou aqui no Brasil-Ceará. Faço extensivo o meu agradecimento à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira UNILAB.

"Ler,
entender,
escrever,
verificar,
e criar"
(Gustavo Alvarez)

RESUMO

O presente trabalho propõe estudar os campos de vetores conformes (ou simplesmente campos conformes) sobre o espaço Euclidiano, enfatizando o caso particular dos campos conformes gradientes, com o objetivo principal de estabelecer uma expressão que descreve explicitamente os referidos campos de vetores. Os resultados aqui apresentados já são conhecidos na literatura, porém serão demonstradas usando as ferramentas mais elementares do que as demonstrações clássicas. Dos resultados expostos, chegamos a uma expressão que descreve a função potencial de qualquer campo de vetores conforme gradiente sobre o espaço Euclidiano.

Palavras-chave: Espaço Euclidiano. Campos de Vetores Conformes. Fator conforme.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os *campos de vetores conformes* (ou simplesmente *campos conformes*) sobre espaços Riemannianos (ou variedades Riemannianas) são campos de vetores suaves, cuja derivada de Lie da métrica em sua direção resulta em um tensor de ordem 2 (dois), múltiplo da métrica Riemanniana do referido espaço. Os campos conformes constituem uma generalização dos campos de Killing e dos campos homotéticos, visto que os campos de Killing são campos conformes com fator de conformidade nulo, enquanto os campos homotéticos são campos conformes com fator conforme constante.

Os campos de vetores conformes surgem naturalmente no estudo de imersões sobre formas espaciais (espaço Euclidiano, esfera e espaço hiperbólico), nos produtos diretos e warped, espaços de Einstein e em alguns fluxos geométricos (fluxo de Yamabe e fluxo de Ricci). Estes campos de vetores estão relacionados à curvatura escalar do espaço Riemanniano no qual estão definidos, conforme encontra-se em Tashiro (1965), Obata e Yano (1970). Nas formas espaciais, encontram-se alguns exemplos, dentre eles destacam-se os exemplos construídos por Heintze (1988), partindo das funções suporte.

O presente trabalho aborda basicamente os campos de vetores conformes definidos sobre o espaço Euclidiano n-dimensional, enfatizando os campos de vetores conformes gradientes. Nesta perspectiva, o trabalho encontra-se organizado em quatro capítulos, cujo primeiro corresponde à parte introdutória, na qual apresenta-se de forma sucinta a estrutura do trabalho que fora desenvolvido, destacando os problemas a serem tratados, bem como um pouco do contexto histórico, onde estão inseridos os campos de vetores supracitados.

O segundo capítulo corresponde às preliminares que contemplam notações, definições e resultados essenciais à demonstração dos resultados principais obtidos no capítulo seguinte. Mais precisamente, apresentamos uma breve revisão sobre alguns elementos de Álgebra Linear no espaço Euclidiano, bem como tópicos de Cálculo Diferencial de várias variáveis e Cálculo Vetorial, culminando com alguns elementos de Geometria Riemanniana, porém numa perspectiva mais adequada ao estudo de campos de vetores no espaço Euclidiano.

O terceiro capítulo apresenta os resultados principais,bem como as notações e definições mais diretamentes relacionados a esses resultados. Nesse sentido, os campos conformes gradientes no espaço Euclidiano, verificando que estes campos de vetores devem ser homoteticos e descrevendo-os explicitamente atravveis da função potencial. Poe fim apresentamos o capítolo correspondente à conclusão, que faz a considerações gerais sobre o trabalho e os resultados principais.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, admitem-se algumas noções básicas de Cálculo Diferencial de várias variáveis e Cálculo Vetorial, bem como alguns conceitos elementares de Geometria Analítica e Álgebra Linear, que serão brevemente mencionados sem maiores detalhes.

2.1 O Espaço Euclidiano

Primeiramente, vamos considerar o espaço Euclidiano n-dimensional como o produto cartesiano

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \text{ (n fatores iguais a } \mathbb{R}),$$

que também escreve-se na forma

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

cujos elementos podem ser tratados como pontos ou vetores, dependendo do contexto e da conveniência.

Neste momento, trazemos duas definições que apresentam importantes operações entre elementos do espaço Euclidiano.

Definição 2.1 Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ arbitrários e $\lambda \in \mathbb{R}$ uma constante, definimos as operações soma e produto por escalar da seguinte forma:

(a) $x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

(b) $\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Definição 2.2 Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ arbitrários, dizemos que o produto interno (canônico) destes elementos é o número real definido pelo somatório

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

onde x_i e y_i denotam as i-ésimas coordenadas de x e y, respectivamente.

No primeiro resultado que vamos enunciar, apresentamos três propriedades básicas do produto interno definido anteriormente e que serão muito úteis ao longo do trabalho.

Proposição 2.1 Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ arbitrários e $\lambda \in \mathbb{R}$ uma constante, então valem as propriedades:

(a) $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

(c) $\langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$.

Demonstração:

(a) Fazendo um cálculo direto, obtém-se

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0,$$

visto que corresponde à soma de n parcelas não-negativas.

(b) Novamente por um cálculo direto, segue-se que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x\rangle.$$

(c) Usando diretamente a definição, tem-se que

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y, z\rangle &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) z_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle, \end{aligned}$$

que encerra a prova da proposição. □

Da definição de produto interno, introduzimos o conceito de norma de um elemento do espaço Euclidiano.

Definição 2.3 Dizemos que a norma de $x \in \mathbb{R}^n$ é o número real não-negativo, definido pela expressão

$$|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

O próximo resultado a ser apresentado é conhecido na literatura como a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Proposição 2.2 Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ arbitrários, temos que

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|,$$

ocorrendo a igualdade, se e somente se, um dos vetores for múltiplo escalar do outro.

Demonstração:

Primeiramente, observe que se x ou y for nulo, então a desiguladade será trivialmente satisfeita. Nestas condições, vamos admitir x não-nulo e definir o polinômio a seguir

$$P(t) = |tx - y|^2,$$

consequentemente,

$$P(t) = \langle tx - y, tx - y\rangle = |x|^2t^2 - 2\langle x, y\rangle t + |y|^2$$

Por outro lado, tem-se que

$$\Delta = 4(\langle x, y\rangle^2 - |x|^2|y|^2) \leq 0,$$

equivalente à desigualdade

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|,$$

onde usamos que $P(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por fim, convém ressaltar que se a igualdade ocorre, então

$$x_v = \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2}$$

deverá ser raiz de $P(t)$. Mais precisamente, obtemos

$$P\left(\frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2}\right) = 0,$$

portanto

$$y = \frac{\langle x, y\rangle}{|x|^2}x,$$

enquanto isso, se um elemento for múltiplo do outro, a conclusão será imediata. $\square$

Na sequência, apresentamos três propriedades básicas da norma, que serão muito úteis ao longo do trabalho.

Proposição 2.3 Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e λ uma constante, temos que

(a) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) $|\lambda x| = |\lambda||x|$.

(c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demonstração:

Na demonstração dos itens (a) e (b), basta usar a definição de norma e aplicar as propriedades de produto interno que foram provadas anteriormente na Proposição 2.1. Para provar o item (c), desenvolvemos a expressão

$$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = (|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|) - (|x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle),$$

consequentemente,

$$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|x||y| - \langle x, y\rangle) \geq 0,$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz.

Decorre da desigualdade anterior que

$$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 \geq 0,$$

ou simplesmente,

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

que finaliza a prova. $\square$

Observação 2.1 Denotaremos a base canônica de $\mathbb{R}^n$ por

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}.$$

onde e_i é o vetor que possui todas as coordenadas nulas, exceto a i-ésima.

2.2 Campos de Vetores

Nesta seção, introduzimos alguns conceitos elementares sobre Cálculo Vetorial, destacando campos de vetores suaves no espaço Euclidiano e alguns elementos não muito usuais relacionados a estas estruturas.

A seguir, definiremos a continuidade e diferenciabilidade de uma função, que é uma analise feita para saber se a função derivada está definida em todos os pontos do seu domínio.

Definição 2.4 Dizemos que uma função real $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é *contínua* no ponto $a \in \mathbb{R}^n$, quando para cada $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos obter $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Observação 2.2 Quando uma função f é contínua em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é contínua

Definição 2.5 Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita diferenciável no ponto $a \in U$, quando existe o limite

$$df_a(v) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Se f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é diferenciável.

Observação 2.3 O limite dado por $df_a(e_i)$ é chamado de i-ésima *derivada parcial* de f no ponto a. Usaremos ainda a expressão *derivada parcial* para fazer referência à aplicação $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}.$$

As duas proximas definições, facilitam o entendimento do conceito de campos de vetores suaves.

Definição 2.6 Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de *classe* C^1 e escrevemos $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, quando f é diferenciável e suas derivadas parciais são contínuas. Diremos que f é uma aplicação de *classe* C^k (ou k vezes continuamente diferenciável) e escrevemos $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, quando as derivadas parciais de f são de classe C^{k-1}.

Observação 2.4 Por conveniência, dizemos que $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ para indicar que f é uma função contínua.

Definição 2.7 Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de classe C^∞ e escrevemos $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, quando possui derivadas de todas as ordens em cada ponto de $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.5 Daqui em frente chamaremos aplicação suave, toda função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Agora apresentamos a definição de campo de vetores suave que utilizaremos ao longo do trabalho.

Definição 2.8 Um campo de vetores suave sobre o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação

$$X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

que possui funções componentes suaves e associa a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ um vetor $v \in \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos campos de vetores suaves sobre o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

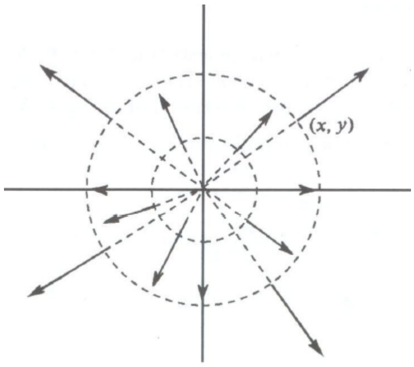
Vejamos um exemplo de campo de vetores no espaço Euclidiano de dimensão dois.

Exemplo 2.1 Considere o campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definida por

$$X = xE_1 + yE_2$$

.

Figura 1: Ilustração do Campo X



Fonte: Oliveira(2016)

Observação 2.6 Denotaremos por $E_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, o campo de vetores que associa todo $p \in \mathbb{R}^n$ ao vetor $e_i \in \mathbb{R}^n$. Mais precisamente, temos que

$$E_i(p) = e_i,$$

para todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$.

Introduzimos agora o operador gradiente, que é um conceitos muito essencial no desenvolvimento do trabalho.

Definição 2.9 O gradiente de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é o campo de vetores definido por

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial de f em relação à variável x_i.

Na definição que se segue apresentamos o conceito de campos de vetores gradientes, que é indespensavel nos proxímos resultados.

Definição 2.10 Dizemos que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ é gradiente, quando existe uma função suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que

$$X = \nabla f,$$

enquanto f é chamada de função potencial de X.

Para melhor entendimento da definição apresenta acima vejamos seguinte exemplo.

Exemplo 2.2 O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definido por $X = xE_1 + yE_2$ é gradiente com função potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

O operador divergente pode ser entendido como um escalar que mede a dispersão ou divergência dos vetores do campo em um determinado ponto. Mais precisamente temos a seguinte definição.

Definição 2.11 O divergente de um campo de vetores suave $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\langle X, E_i\rangle.$$

onde E_i denota o campo de vetores definido na Observação 2.6.

No espaço Euclidiano, o operador Laplaciano avaliado em uma determinada função suave f é definido como a seguir.

Definição 2.12 O laplaciano de uma função suave $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

onde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ denota a derivada de 2ª ordem dada pela iteração $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$.

No que segue estendemos a noção de produto interno de campos de vetores suaves.

Definição 2.13 Dados campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ arbitrários, definimos a função $\langle X, Y\rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\langle X, Y\rangle(p) := \langle X(p), Y(p)\rangle,$$

para todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$.

Mais particularmente consideramos a seguinte definição.

Definição 2.14 Dados $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ arbitrários, definimos a seguinte função $X(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$X(f) := \langle X, \nabla f \rangle.$$

A seguir definimos um outro tipo de produto entre campos de vetores suaves sobre o espaço Euclidiano.

Definição 2.15 Dados $U, V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, definimos o produto

$$U^\flat \otimes V^\flat : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

pela expressão

$$U^\flat \otimes V^\flat(X, Y) := \langle U, X \rangle \langle V, Y \rangle,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 2.7 No intuito de simplificar notações, daqui para frente denotaremos os produtos $E_i^\flat \otimes E_i^\flat$ e $E_i^\flat \otimes E_j^\flat$ por dx_i^2 e $dx_i dx_j$, respectivamente.

Antes de apresentar a proxima definição, presisamos considere o seguinte resultado.

Proposição 2.4 Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ arbitrários, então existe um único campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz a igualdade

$$Z(f) = XY(f) - YX(f)$$

para toda função $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Pode ser encontrada em (Carmo,2005).

Definimos agora o colchete de Lie de campos de vetores suaves sobre espaço Euclidiano.

Definição 2.16 Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ arbitrários, definimos o colchete de Lie de X e Y como sendo o único campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz a igualdade

$$Z(f) = XY(f) - YX(f)$$

para toda função $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observação 2.8 O campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ mencionado na definição anterior é comumente denotado por $[X, Y] = XY - YX$.

Para concluir a seção e o capítulo, Apresentamos a definição do hessiano de um função suave.

Definição 2.17 Dada uma função suave $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ arbitrária, dizemos que o hessiano de f é a aplicação $Hess\, f : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, definida por

$$Hess\, f := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Observação 2.9 Note que $Hess\, f(E_i, E_j) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e pelo Teorema de Schwarz (cf. Lima (2006)), tem-se que

$$Hessf(U, V) = Hessf(V, U),$$

portanto o hessiano é simétrico.

3 CAMPOS DE VETORES CONFORMES

Este capítulo apresenta os principais resultados do trabalho, que consistem em descrever explicitamente os campos de vetores conformes definidos sobre o espaço Euclidiano. Deve-se ressaltar que os resultados aqui apresentados já são conhecidos na literatura, porém serão demonstrados usando ferramentas mais elementares do que as demonstrações clássicas.

3.1 Derivada de Lie e Campos Conformes

Afim de definirmos a derivada de Lie de um campo de vetores X basta definir sua ação sobre funções componentes do referido campos de vetores:

Definição 3.1 Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ arbitrário, dizemos que a derivada de Lie de X é a aplicação $\mathcal{L}_X : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, dada por

$$\mathcal{L}_X := \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \langle X, E_j \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle X, E_i \rangle \right) dx_i dx_j.$$

O resultado que se segue apresenta três propriedades fundamentais da derivada de Lei para o desenvolvimento do trabalho.

Proposição 3.1 Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ e $f, h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, temos que a derivada de Lie satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\mathcal{L}_{(X+\lambda Y)} = \mathcal{L}_X + \lambda \mathcal{L}_Y$

(b) $\mathcal{L}_{(hX)} = h\mathcal{L}_X + X^{\flat} \otimes dh + dh \otimes X^{\flat}$

(c) $\mathcal{L}_{\nabla f} = 2\, Hessf$

onde λ denota uma constante.

Demonstração:

(a) Fazendo um cálculo direto e usando a definição de derivada de Lie, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(X+\lambda Y)} &= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\langle X+\lambda Y, E_j\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j}\langle X+\lambda Y, E_i\rangle\right) dx_i dx_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\langle X, E_j\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j}\langle X, E_i\rangle\right) dx_i dx_j \\
&+ \lambda\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\langle Y, E_j\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j}\langle Y, E_i\rangle\right) dx_i dx_j
\end{aligned}$$

ou apenas

$$\mathcal{L}_{(X+\lambda Y)} = \mathcal{L}_X + \lambda \mathcal{L}_Y,$$

concluindo o primeiro item.

(b) Usando derivada de Lie, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(hX)} &= \sum_{i,j=1}^{n}\Big[\frac{\partial\langle hX, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle hX, E_i\rangle}{\partial x_j}\Big] dx_i dx_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\Big[\frac{\partial(h\langle X, E_j\rangle)}{\partial x_i} + \frac{\partial(h\langle X, E_i\rangle)}{\partial x_j}\Big] dx_i dx_j
\end{aligned}$$

daí aplicamos a derivada do produto, chegando em

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(hX)} &= \sum_{i,j=1}^{n}\Big[\frac{\partial h}{\partial x_i}\langle X, E_j\rangle + h\frac{\partial\langle X, E_j}{\partial x_i} + \frac{\partial h}{\partial x_j}\langle X, E_i\rangle + h\frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\Big] dx_i dx_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\Big[h\Big(\frac{\partial\langle X, E_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\Big) + \frac{\partial h}{\partial x_i}\langle X, E_j\rangle + \frac{\partial h}{\partial x_j}\langle X, E_i\rangle\Big] dx_i dx_j \\
&= h\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial\langle X, E_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\Big) dx_i dx_j + \sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial h}{\partial x_i}\langle X, E_j\rangle + \frac{\partial h}{\partial x_j}\langle X, E_i\rangle\Big) dx_i dx_j
\end{aligned}$$

que corresponde à igualdade

$$\mathcal{L}_{(hX)} = h\mathcal{L}_X + X^\flat \otimes dh + dh \otimes X^\flat$$

(c) Novamente por um cálculo direto, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\nabla f} &= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\langle\nabla f, E_j\rangle}{\partial x_i}+\frac{\partial\langle\nabla f, E_i\rangle}{\partial x_j}\right)dx_i dx_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\right)dx_i dx_j \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j = 2Hessf,
\end{aligned}$$

concluindo a prova. □

Na sequência, apresentamos a partir da derivada de Lie, uma das principais definições do trabalho.

Definição 3.2 Dizemos que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ é conforme se a sua derivada de Lie satisfaz

$$\mathcal{L}_X = 2\varphi\sum_{i=1}^{n} dx_i^2,$$

onde $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é chamado *fator conforme* (ou *fator de conformidade*).

Observação 3.1 Um campo de vetores conforme é chamado *homotético* se o seu fator conforme é constante. Em particular, um campo de vetores homotético com fator conforme nulo é chamado de campo de *Killing*.

Neste momento, apresentamos alguns exemplos de campos de vetores conformes/(não conforme) sobre o espaço Euclidiano.

Exemplo 3.1 O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definido por

$$X = (x^2 - y^2)E_1 + 2xyE_2$$

é conforme não-homotético com fator conforme $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dado por

$$\varphi(x, y) = 2x.$$

Exemplo 3.2 Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi|x|^2$$

onde $\varphi \in \mathbb{R}$ é uma constante real. Nestas condições, temos que $X = \nabla f$ é um campo de vetores homotético com fator conforme φ.

Exemplo 3.3 O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ dado por

$$X = (x^3 + xy^2)E_1 + (3x^2y + y^3)E_2$$

não é conforme. pois,

$$\mathcal{L}_X = 2(3x^2 + 3y^2)(dx^2 + dy^2) + 6xy(dxdy + dydx)$$

o que não satisfaz a Definição 3.2.

Exemplo 3.4 O campo de vetores $E_j \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ é um campo de Killing.
De fato,

$$\mathcal{L}_{E_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \Big[\frac{\partial \langle E_j, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle E_j, E_i \rangle}{\partial x_j}\Big] dx_i dx_j = 0$$

logo o fator conforme de E_j é identicamente nolo. Portanto E_j é um campo de Killing.

O próximo resultado desta seção estabelece uma relação entre o divergente de um campo de vetores conforme com o seu fator conforme. Mais precisamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.2 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ um campo de vetores conforme, então

$$\varphi = \frac{1}{n} divX,$$

onde φ dentota o fator conforme de X.

Demonstração:

Fazendo um cálculo direto, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_X(E_k, E_k) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\langle X, E_j \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j}\langle X, E_i \rangle\right] dx_i dx_j (E_k, E_k) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\langle X, E_k \rangle \\
&= 2divX,
\end{aligned}$$

mas como X é conforme, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{L}_X(E_k,E_k) &= 2\varphi\sum_{k=1}^{n}dx_k^2(E_k,E_k)\\ &= 2n\varphi,\end{aligned}$$

daí basta comparar as duas igualdades obtidas para concluir que

$$\varphi = \frac{1}{n}divX,$$

conforme queríamos provar. □

3.2 Campos Conformes Gradientes

Apresentamos a seguir, um teorema que nos fornece algumas informações importantes sobre campos de vetores conformes gradientes no espaço Euclidano. Este mesmo resultado pode ser obtido em contextos mais gerais para campos conformes fechados sobre espaços Riemannianas.

Teorema 3.1 Dados campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ conformes gradientes com fatores conformes φ e ψ, respectivamente, tem-se que:

(a) $\nabla|X|^2 = 2\varphi X$.

(b) $Hess|X|^2 = 2\varphi^2\sum_{i=1}^{n}dx_i^2 + 2X^\flat\otimes d\varphi$.

(c) $\nabla\langle X,Y\rangle = \psi X + \varphi Y$.

(d) $Hess\langle X,Y\rangle = 2\varphi\psi\sum_{i=1}^{n}dx_i^2 + X^\flat\otimes d\psi + Y^\flat\otimes d\varphi$

Demonstração:

(a) Como X é um campo conforme gradiente, então podemos escrevê-lo na forma

$$X = \frac{\partial f}{\partial x_1}E_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}E_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}E_n,$$

ou simplesmente,

$$X = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}E_i, \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ representa a função potencial de X.

Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} |X|^2 &= \langle X, X \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2, \end{aligned}$$

então

$$\frac{\partial |X|^2}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \tag{2}$$

Por outro lado, observe que

$$\nabla |X|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial |X|^2}{\partial x_i} E_i,$$

então segue da igualdade (2) que

$$\nabla |X|^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) E_i. \tag{3}$$

Sabendo que X é conforme gradiente, então decorre da Observação (2.9) que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \varphi \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} representa o Delta de Kronecker, definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad i \neq j \\ 1, & \text{se} \quad i = j \end{cases}$$

Dessa maneira, tem-se que a igualdade (3) torna-se

$$\begin{aligned} \nabla |X|^2 &= 2\varphi \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) E_i \\ &= 2\varphi \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} E_i, \end{aligned}$$

daí basta observar a expressão (1) para obter

$$\nabla |X|^2 = 2\varphi X.$$

(b) Levando em conta a expressão

$$|X|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2,$$

obtemos da definição de hessiano e do Teorema de Fubini que

$$Hess|X|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 |X|^2}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 |X|^2}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} Hess|X|^2 &= 2\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right) dx_i dx_j \\ &= 2\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_j + 2\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right) dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Decorre do item (c) da Proposição 3.1 que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \varphi \delta_{ik} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \varphi \delta_{jk},$$

portanto a igualdade anterior torna-se

$$Hess|X|^2 = 2\sum_{i,j,k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk}\varphi^2 dx_i dx_j + 2\sum_{i,j,k=1}^{n} \delta_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_i dx_j,$$

ou ainda,

$$Hess|X|^2 = 2\sum_{i=1}^{n} \varphi^2 dx_i^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_i dx_j,$$

que corresponde ao item (b).

(c) Desde que X e Y são gradientes, podemos escrevê-los na forma

$$X = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} E_j \qquad \text{e} \qquad Y = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k} E_k,$$

consequentemente,

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_k}\langle E_j, E_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_k}\delta_{jk},$$

ou ainda,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Nestas condições, tem-se que

$$\frac{\partial \langle X, Y \rangle}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j},$$

em particular,

$$\begin{aligned}
\nabla \langle X, Y \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \langle X, Y \rangle}{\partial x_i} E_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) E_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) E_i
\end{aligned}$$

Decorre do item (c) da Proposição 3.1 que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \varphi \delta_{ij} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \psi \delta_{ij},$$

logo a igualdade anterior torna-se

$$\nabla \langle X, Y \rangle = \varphi \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) E_i + \psi \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) E_i,$$

ou simplesmente.

$$\nabla \langle X, Y \rangle = \varphi \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} E_i + \psi \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} E_i = \psi X + \varphi Y,$$

que corresponde ao item (c).

(d) Considerando as mesmas notações adotadas anteriormente e a definição de hessiano, obtemos

$$Hess \langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \langle X, Y \rangle}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \langle X, Y \rangle}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j,$$

daí substituímos a expressão

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k},$$

obtendo

$$Hess\langle X,Y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_k}\right) dx_i dx_j.$$

Desenvolvendo a última igualdade, tem-se que

$$\begin{aligned} Hess\langle X,Y\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_k}\right) dx_i dx_j \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k}\right) dx_i dx_j \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned} Hess\langle X,Y\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}\frac{\partial g}{\partial x_k}\right) dx_i dx_j + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k}\right) dx_i dx_j \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k}\right) dx_i dx_j + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial^3 g}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}\right) dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Decorre do item (c) da Proposição 3.1 que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \varphi\delta_{ik}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \varphi\delta_{jk}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} = \psi\delta_{ik} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_j} = \psi\delta_{jk},$$

portanto a igualdade anterior torna-se

$$\begin{aligned} Hess\langle X,Y\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_k}\right) dx_i dx_j + \varphi\psi \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk}\right) dx_i dx_j \\ &+ \varphi\psi \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{jk}\delta_{ik}\right) dx_i dx_j + \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$Hess\langle X,Y\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i dx_j + 2\varphi\psi \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx_i dx_j.$$

Reorganizando os termos da última igualdade, vamos ter

$$Hess\langle X,Y\rangle = 2\varphi\psi \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_i dx_j,$$

que pode ser reescrita na forma

$$Hess\langle X,Y\rangle = 2\varphi\psi\sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + X^\flat \otimes d\psi + Y^\flat \otimes d\varphi,$$

concluindo o item (d) e a prova do teorema. $\square$

Nesse momento, apresentamos um resultado que descreve a função potencial do campos de Killing gradiente. Mais precisamente temos o lema a seguir.

Lema 3.1 Dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ de Killing e gradiente, então sua função potencial $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$h(x) = \langle a, x\rangle + b,$$

onde $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$ são constantes.

Demonstração:

Sabemos que X é um campo de killing gradiente, então a sua função potencial deve satisfazer

$$Hessh = 0$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = 0$$

Decorre da última igualdade que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

para todo índices $1 \leqslant i, j \leqslant n$ implicando que

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = a_i \tag{4}$$

para cada índice $1 \leqslant i \leqslant n$ e constantes $a_i's$ reais.

Nestas condições, podemos conclir que h se escreve da seguinte forma

$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$$

consequentemente,

$$h(x) = \langle a, x \rangle + b,$$

que conclui a prova do lema. $\square$.

Finalmente, apresentamos uma expressão que descreve explicitamente a função potencial de qualquer campo de vetores conforme gradiente.

Teorema 3.2 Dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ conforme gradiente, então X é homotético e a sua função potencial $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}[\varphi|x|^2 + 2\langle a, x \rangle + 2b],$$

onde φ denota o fator conforme de X.

Demonstração:

Primeiro, considere $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ um campo de vetores conforme com fator de conformidade ψ. Pelo item (d) do Teorema 1, temos

$$\begin{aligned} Hess\langle X, Y\rangle(E_j, E_k) &= \Big(2\varphi\psi \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + X^\flat \otimes d\psi + Y^\flat \otimes d\varphi\Big)(E_j, E_k) \\ &= 2\varphi\psi \sum_{i=1}^{n} dx_i^2(E_j, E_k) + X^\flat \otimes d\psi(E_j, E_k) + Y^\flat \otimes d\varphi(E_j, E_k) \\ &= 2\varphi\psi \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, E_j\rangle\langle E_i, E_k\rangle + \langle X, E_j\rangle\langle \nabla\psi, E_k\rangle + \langle Y, E_j\rangle\langle \nabla\varphi, E_k\rangle \\ &= 2\varphi\psi \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{ik} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \langle Y, E_j\rangle\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \end{aligned}$$

ou seja

$$Hess\langle X, Y\rangle(E_j, E_k) = 2\varphi\psi \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{ik} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \langle Y, E_j\rangle\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

De modo análogo obetém-se a igualdade

$$Hess\langle X, Y\rangle(E_k, E_j) = 2\varphi\psi \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \langle Y, E_k\rangle\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

que comparada com igualdade anterior resulta em

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \langle Y, E_j\rangle \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \langle Y, E_k\rangle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

onde usamos a simetria do hessiano.

Na sequência, tomamos $Y = E_j$ na última igualdade, obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \delta_{jk}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

onde usamos que E_j é um campo de Killing. escolhendo $j \neq k$ tem-se ainda que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0$$

para cada índice $1 \leqslant k \leqslant n$ donde concluimos que φ é constante e X é um campo de vetores homotetico.

Sabendo que X um campo de vetores homotético, vamos considerar a função $f_\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi|X|^2$$

então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(X-\nabla f_\varphi)} &= \mathcal{L}_X - 2Hessf_\varphi \\
&= 2\varphi\sum_{i,j=1}^{n} dx_i^2 \; - \; 2\varphi\sum_{i,j=1}^{n} dx_i^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

portanto $X - \nabla f_\varphi$ é um campo de Killing.

Por fim, observe ainda que $X - \nabla f_\varphi$ é um campo de vetores gradiente com função potencial $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x) - f_\varphi(x),$$

então decorre do Lema 3.1 que h pode ser escreto da forma

$$h(x) = \langle a, x\rangle + b$$

consequêntemente

$$f(x) = \frac{1}{2}[\varphi|x|^2 + 2\langle a, x\rangle + 2b].$$

que conclui a prova do teorema. $\square$.

4 CONCLUSÃO

Perante o estudo desenvolvido ao longo deste trabalho, podemos garantir que os resultados esperados em relação a campos de vetores conforme gradiente foram alcançados e assim cumprimos os objetivos propostos de encontrar uma expressão que descreve explicitamente todos os campos de vetores conformes gradientes no espaço Euclidiano, a partir da sua função potencial. Diante dos resultados apresentados, torna-se mais simples determinar se um dado campo de vetores no espaço Euclidiano é conforme gradiente.

REFERÊNCIAS

BESSE, A.L. *Einstein manifolds*. Berlin: Spring-Verlag, 2008. (Classics Mathematics).

BUENO, H. P. Álgebra Linear: Um Segundo Curso. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

CARMO, M. P. do *Geometria Riemanniana*. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).

CASTRO, I., MONTEALEGRE, C. R.; URBANO, F.: Closed Conformal Vector Fields and Lagragian Submanifolds in Complex Space Forms. Pacific Journal of Mathematics, v. 199 (2001), p. 269-302.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5a ed. Vol.1. Rio de janeiro: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5a ed. Vol.2. Rio de janeiro: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5a ed. Vol.3. Rio de janeiro: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5a ed. Vol.4. Rio de janeiro: LTC, 2011.

HEINTZE, E. Extrinsic upper bounds for λ_1. *Mathematische Annalen*, v. 280, p. 389-402, 1988.

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 3a ed. Vol. 1. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 3a ed. Vol. 2. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

LIMA, E. L. Álgebra Linear, 8a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. Análise Real - Volume 1, 11a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E. L. Análise Real - Volume 2: Funçõe de n variáveis, 6a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. Análise Real - Volume 3: Análise Vetorial, 4a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1, 14a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 10a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

OBATA, M.; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. *Journal Differential Geometry*, v. 4, p. 53-72, 1970.

OLIVEIRA, F.; PEREIRA, O.; SILVA, M. B.; SILVA FILHO, J. F. Campos Conformes sobre o Espaço Hiperbólico. Acarape, 2018 (Artigo Submetido).

SILVA Filho, J. Solitons de Ricci e métricas quasi-Einstein em variedades homogêneas. 2013, 84 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

SILVA Filho, J. Quasi-Einstein manifolds endowed with a parallel vector Field. Fortaleza, 2015. Monatshefte fur Mathematik, v. 178 (2015). p. 01-16.

TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 117, p. 251-275, 1965.

YANO, K. *Integral formulas in Riemannian geometry.* New York: Marcel Dekker, 1970.