UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL
DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

PAULO RICARDO GONÇALVES PEREIRA

ENSINO DE FUNÇÕES A PARTIR DAS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PROPOSTAS NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR: UMA APLICAÇÃO PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO ENEM E DIVERSOS

REDENÇÃO

2021

PAULO RICARDO GONÇALVES PEREIRA

ENSINO DE FUNÇÕES A PARTIR DAS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PROPOSTAS NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR: UMA APLICAÇÃO PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO ENEM E DIVERSOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

REDENÇÃO - CE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Pereira, Paulo Ricardo Gonçalves.

P489e

Ensino de funções a partir das competências e habilidades propostas na Base Nacional Comum Curricular: uma aplicação para a resolução de problemas do ENEM e diversos / Paulo Ricardo Gonçalves Pereira. - Redenção, 2021.
127f: il.

Dissertação - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientador: Prof.Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Funções (Matemática). 2. Base Nacional Comum Curricular. 3. GeoGebra (Software). I. Título

CE/UF/BSP CDD 515.7

PAULO RICARDO GONÇALVES PEREIRA

ENSINO DE FUNÇÕES A PARTIR DAS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES PROPOSTAS NA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR: UMA APLICAÇÃO PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO ENEM E DIVERSOS.

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab-Campus Auroras.

Aprovada em: 21 / 07 / 2021.

BANCA EXAMINADORA

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dra. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Rui Eduardo Brasileiro Paiva.

Dr. Rui Eduardo Brasileiro Paiva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho à minha família, pois foi o fruto de muita das minhas ausências como pai e marido.

AGRADECIMENTOS

Sobretudo a Deus, por todas suas graças em minha vida.

À minha esposa, Maria Alesandra Lucas de Brito, por me apoiar em todos os momentos difíceis e entender minhas ausências.

Aos meus filhos, João Filipi de Brito Pereira e Rafael de Brito Pereira, razões de minhas felicidades.

Aos meus pais, Antônio Airton Pereira e Maria Rosileide Gonçalves Pereira que sempre me deram valiosos conselhos.

Aos meus amigos e companheiros de jogatinas do PES, Isael, Rodolfo e Luan, os quais admiro por suportarem tamanhas derrotas.

Aos meus colegas de PROFMAT, Renato, Salustriano, Denis, Felipe, Fábio, Wírlan, Silvio, por toda a ajuda prestada no decorrer do curso.

Ao Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes, além de um grande orientador é um grande amigo.

Aos professores participantes da banca examinadora Danila Fernandes Tavares e Rui Eduardo Brasileiro Paiva pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

A todos os professores do PROFMAT-UNILAB, que sempre me ajudaram em momentos de dúvidas.

A coordenação do PROFMAT, pelos serviços prestados.

A todas as pessoas que fizeram e fazem a UNILAB funcionar, pois através desta foi que pude realizar mais um dos meus sonhos.

"Não é produto de marca que define um cidadão. Nunca julgue nessa vida um homem de pés no chão, pois o sapato calça os pés mas não calça o coração."

Bráulio Bessa

RESUMO

O presente trabalho trata do estudo de funções para resolução de problemas, mais especificamente sobre Funções Afins, Quadráticas, Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas presentes no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e de exames diversos de matemática, como Olimpíadas e Vestibulares. É realizado um estudo sobre as competências e habilidades propostas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e sua aplicação na resolução de problemas de matemática. A cada resolução, é feito um comentário sobre a solução do problema. Além disso, é dada uma pequena explanação sobre o uso do software livre Geogebra nas aulas de matemática.

Palavras-chave: BNCC. Estudo de Funções. Geogebra.

ABSTRACT

The present work deals with the study of functions for problem solving, more specifically on linear, Quadratic, Exponential, Logarithmic and Trigonometric Functions, present in the National High School Examination (ENEM) and in several mathematics exams, such as the Olympics and Vestibular. A study is carried out on the skills and abilities proposed in the Common Curriculum National Base (BNCC) and their application in solving mathematics problems. At each resolution, a comment is made on the solution to the problem. In addition, a short explanation is given about the use of free Geogebra software in math classes.

Keywords: BNCC. Study of Functions. Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As funções são um dos objetos de estudos mais importantes da matemática, pois sempre que nos deparamos com um problema, buscamos associá-lo a uma função, que nem sempre é simples. Em vista da importância de tal assunto, é muito importante o conhecimento das funções que consideramos as mais recorrentes em nosso cotidiano bem como de suas principais características.

Obviamente o estudo de todas as funções seria impossível para este trabalho, por isso tomamos as funções que mais são recorrentes no meio acadêmico dos estudantes do ensino médio, como as funções afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.

Para este trabalho, cada capítulo possui duas partes, a primeira é uma pequena parte teórica sobre o assunto, e a segunda são 10 problemas sobre o tema. Os problemas selecionados são basicamente do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e de Vestibulares diversos.

Para a resolução dos problemas, sempre indicaremos a Competência e Habilidade encontradas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e ENEM que podem ser utilizadas para a resolução do problema. Obviamente, não nos estenderemos a cerca da teoria por trás da BNCC, mas que basicamente é um documento normativo, que propõe uma base curricular comum a todas as etapas da educação básica. De modo análogo, não entraremos muito no estudo histórico do ENEM, e sim em resolver alguns problemas usando as habilidades indicadas.

Outro ponto importante deste trabalho é que, ele é mais indicado para professores do Ensino médio, ou até mesmo estudantes de licenciatura em Matemática, pois, sempre que possível, serão feitas observações/sugestões de metodologias de resolução de problemas, mas de todo modo, a leitura é aberta a todos os interessados em conhecer um pouco de como podemos usar as ferramentas da BNCC, principalmente, na resolução de problemas.

Neste sentido, o presente trabalho também pode ser usado, através de seus problemas, como uma maneira de verificar se os alunos desenvolveram as habilidades propostas na BNCC e ENEM.

2 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC E ENEM

Neste capítulo falaremos brevemente sobre como as habilidades e Competência da BNCC e do ENEM estão estruturadas.

Como falado anteriormente, a BNCC é um documento normativo, com o principal objetivo de formalizar uma base comum curricular para todas as etapas do ensino básico, desta maneira, tentando diminuir possíveis desigualdades educacionais nas mais diversas escolas públicas e privadas.

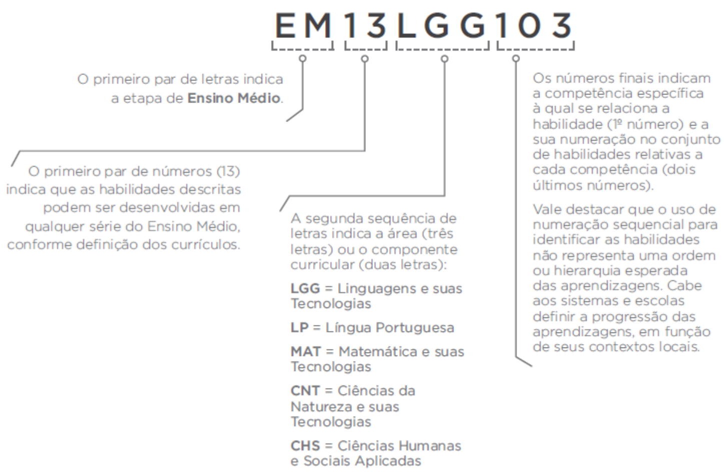
O ENEM é, atualmente, o Vestibular mais importante na vida dos estudantes, pois é o meio de ingresso nas mais diversificadas universidades públicas do Brasil, daí, vemos um pouco da importância de analisar suas provas.

2.1 BNCC

Para cada componente a BNCC traz Competências Específicas e Habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos. Cada Competência Específica possui um conjunto de Habilidades a serem desenvolvidas no decorrer de tal Competência.

Cada Habilidade é composta por um código alfanumérico, como mostrado da Figura 1.

Figura 1 – Descrição do código alfanumérico da Habilidade do ensino médio na BNCC.



Fonte: Brasil, 2018.

Obviamente não iremos adentrar em Competências e Habilidades que não tratam do conteúdo de funções.

As Competências Específicas que usaremos no decorrer deste trabalho são basicamente a Competência Específica 3, Competência Específica 4 e Competência Específica 5.

2.1.1 Competência Específica 3

Esta Competência nos traz como norte:

> "Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p.535)."

Desta Competência, utilizaremos as Habilidades:

- **(EM13MAT302)**-Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT304)**-Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
- **(EM13MAT305)**-Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
- **(EM13MAT306)**-Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
- **(EM13MAT308)**-Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Observe que cada Habilidade nos traz basicamente ferramentas que devem ser empregadas na resolução de problemas, uma coisa mais pontual, enquanto a Competência Específica é algo mais geral. Esta, sem dúvida, será a Competência mais usada neste trabalho, devido a concentração de Habilidades que englobam as funções aqui estudadas. Percebemos também, o enfoque que a BNCC nos dá em trazer problemas contextualizados, ou seja, mais aplicados, e isso é importante para o atual modelo de ensino, pois enterra de vez os termos: "Efetue, Calcule, etc." e nos convida a elaborarmos problemas que sejam aplicados no cotidiano do aluno, ou que pelo menos eles tenham contato pelos meios digitais.

2.1.2 Competência Específica 4.

Esta Competência nos traz a necessidade de:

> "Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico,

> computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (BRASIL, 2018, p.538)."

Neste sentido, utilizaremos as Habilidades:

- **(EM13MAT401)**-Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- **(EM13MAT402)**-Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
- **(EM13MAT403)**-Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.
- **(EM13MAT404)**-Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

As Habilidades aqui usadas contemplam mais as funções polinomiais, ou seja, tal Competência deve ser mais empregada em estudo de funções Afins e Quadráticas, podendo ser expandida para outras.

2.1.3 Competência Específica 5

Por fim, esta Competência nos convida a

> "Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 540)."

Para esta Competência, usaremos as Habilidades:

- **(EM13MAT501)**-Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
- **(EM13MAT502)**-Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para

generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de $2^{\underline{o}}$ grau do tipo $y = ax^2$.

- **(EM13MAT503)**- Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT507)**-Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
- **(EM13MAT508)**- Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Por sí só, cada Habilidade diz explicitamente o que o aluno deve ser capaz de fazer para resolver problemas diversos. É bem verdade que um mesmo problema, inclusive os aqui propostos, usam mais de uma Competência e consequentemente mais de uma Habilidade. E muitos problemas não possuem uma resolução com Habilidades Explícitas na BNCC, pelo menos de forma integral.

2.2 ENEM

Analogamente a BNCC, o ENEM também é formado por uma matriz de referência, ou seja, cada área do conhecimento é subdividido em Competências de Área e Habilidades. Em relação a Matemática, tais Competências são empregadas na matriz de Matemática e Suas Tecnologias e são no geral 7 competências e 30 Habilidades divididas pelas competências. Neste trabalho abordaremos apenas as competências relacionadas ao estudo de funções.

2.2.1 Competência de área 2

Toda Competência de área do ENEM traz um objetivo geral e suas Habilidades Específicas. Nesta Competência, o objetivo geral é: "Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela"(BRASIL, 2015, p. 05). Onde encontramos as seguintes Habilidades:

- H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Nesta Competência de área podemos usar, por exemplo, a Habilidade 8, para resolver um problema sobre gráficos de uma função.

2.2.2 Competência de área 3

Esta Competência tem como objetivo geral "Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano"(BRASIL, 2015, p.05). Onde encontramos as Habilidades:

- H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
- H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
- H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
- H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
- H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Podemos usar por exemplo, a Habilidade 14 para resolver um problema sobre análise gráfica de uma função.

2.2.3 Competência de área 4

Nesta Competência, encontramos seu objetivo geral que é "Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano"(BRASIL, 2015, p. 06), onde encontramos as seguintes Habilidades:

- H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
- H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
- H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
- H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Na resolução de problemas de funções, usamos por exemplo, para analisar como uma função se comporta, ou seja, analisando a variação da função.

2.2.4 Competência de área 5

O objetivo geral desta Competência é "Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas"(BRASIL, 2015, p. 06). Esta Competência trás as seguintes Habilidade.

- H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

- H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
- H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Observamos que, em geral, todas as Competências do ENEM estão relacionados a problemas cotidianos, logo, é natural não encontrarmos uma Habilidade direcionada a um campo específico da Matemática, por exemplo, a Habilidade 21, desta Competência, contempla a simplificação de uma forma algébrica de uma função.

2.2.5 Competência de área 6

Nesta Competência temos o seguinte objetivo geral: "Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação."(BRASIL, 2015, p. 06). Nesta Competência encontramos as seguintes Habilidades:

- H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Essa Competência será fundamental para a resolução de problemas com gráficos ou tabelas de funções.

A grande dificuldade de aprender um conteúdo da Matemática é que quase sempre as áreas da Matemática estão interligadas, e um aprendizado defasado em certo conteúdo pode acarretar um aprendizado ainda mais defasado em outro. Tomemos por exemplo a área de Geometria, mais especificamente a distância entre dois pontos, o aluno deve ter um bom conhecimento de raiz quadrada, potenciação e mais outros detalhes, ou seja, é inteiramente ligada a vários outros assuntos que os alunos devem ter aprendido durante sua vida acadêmica, desde o ensino fundamental.

3 FUNÇÕES AFINS

Este capítulo aborda sobre algumas propriedades de funções afins e com alguns exercícios para fixar as ideias. Toda a teoria aqui abordada tem como principal fonte o livro Números e Funções Reais, da coleção Profmat (Lima, 2013).

3.1 PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES AFINS

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita Afim, quando existem contantes reais a e b, tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1 *São exemplos de funções afins, a função identidade $f(x) = x$, a translação da identidade $f(x) = x + b$, funções lineares $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$.*

Para encontrarmos os valores de a e b de uma determinada função afim, observamos inicialmente que $b = f(0)$. Para obtermos o valor de a, precisamos de 2 valores distintos quaisquer de $f(x)$. De fato, se $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, temos que:

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \Rightarrow a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \tag{1}$$

daí, vê-se a necessidade de tomar $x_1 \neq x_2$.

Costumamos chamar a de taxa de crescimento de f e b de valor inicial de f. Não é difícil encontrarmos nos livros estes mesmos como sendo os coeficientes angulares e lineares, respectivamente, da reta, mas há controvérsias, pois, por exemplo, como chamar a de coeficiente angular, se muitas vezes o problema não se refere a nenhum ângulo, de todo modo, fica a critério do professor.

Para justificar o termo “taxa de crescimento”, observe que, se tomarmos $x_1 = x$ e $x_2 = x + h$ com h pequeno em 1, temos que

$$a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Sendo $h = 1$, obtemos que

$$a = f(x+1) - f(x),$$

ou seja, a é a taxa de crescimento por unidade de x, logo, se $a > 0$, $f(x)$ é crescente, caso contrário é $a < 0$ ou $a = 0$, ou seja, $f(x)$ é decrescente ou constante, respectivamente.

O gráfico G_f de uma função afim é uma reta no plano cartesiano. Para mostrar isto, precisamos da seguinte definição.

Definição 3.1 *A distância entre os pontos* $P_1 = (x_1, y_1)$ *e* $P_2 = (x_2, y_2)$ *é dada por*

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Uma vez que $f(x_1) = y_1 = ax_1 + b$, $f(x_2) = y_2 = ax_2 + b$ e $f(x_3) = y_3 = ax_3 + b$, podemos supor que $x_1 < x_2 < x_3$, com isso, temos os três pontos $P_1 = (x_1, ax_1 + b), P_2 = (x_2, ax_2 + b), P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ vamos mostrar que estes pontos são colineares, ou seja, pertencem a mesma reta. Observe que

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (a(x_2 - x_1))^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2(1 + a^2)} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Do mesmo modo, obtemos que

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (a(x_3 - x_1))^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (a(x_3 - x_2))^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}.$$

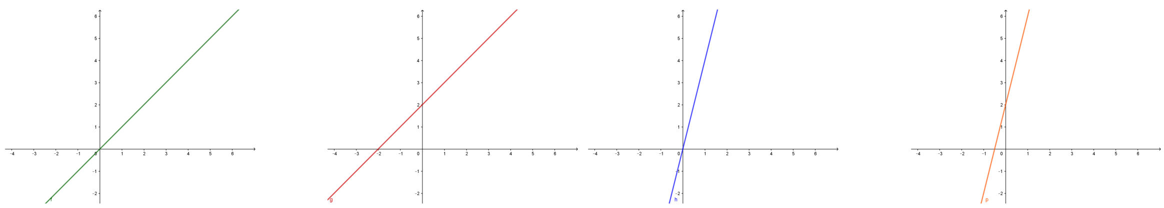
Logo, encontramos que

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (\sqrt{1 + a^2})(x_3 - x_1) = d(P_1, P_3),$$

com isso vale a igualdade na desigualdade triangular, donde segue que P_1, P_2, P_3 são colineares.

A importância de sabermos que o gráfico da função afim é uma reta, é que uma reta fica inteiramente determinada por 2 pontos, ou seja, dados 2 pontos distintos, no plano, encontramos a função afim cujo gráfico contém estes pontos. Outra observação importante é entender o que os valores de a e b fazem com a reta. Quanto maior o valor de a mais inclinada é a reta, ou seja, mais distante da posição horizontal a reta fica. O valor de b translada a função linear $f(x) = ax$, ou ainda, é o valor da função obtido quando o gráfico de f intersecta o eixo OY, podemos usar o Software Geogebra, para mostrar estes efeitos, como mostrado na Figura 2.

Figura 2 – Efeitos causados por a e b no gráfico de uma função Afim.



(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x + 2$ (c) $f(x) = 4x$ (d) $f(x) = 4x + 2$

Fonte: Autor, 2020.

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva, então $f(x+y) = f(x) + f(y)$ se e somente se $f(x) = ax$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$.*

Demonstração: Podemos supor f crescente. Suponha inicialmente que $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Fazendo $x = y = 0$, obtemos que $f(0) = 0$, considerando $y = (k-1)x$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos que $f(kx) = kf(x)$, de fato, para $k \in \mathbb{N}$, por indução, se $k = 1$, então $f(x) = f(x)+f(0) = f(x)$, supondo válido para $k \in \mathbb{N}$, então $f(x+kx) = f(x)+f(kx) = (k+1)f(x)$, pela hipótese de indução. Observe também que $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, logo, $f(-x) = -f(x)$, com isso, o resultado se estende para $k \in \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que a propriedade vale também para números racionais. De fato, se $k = m/n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, então

$$nf(kx) = f(nkx) = f(mx) = mf(x) \Rightarrow f(kx) = \frac{m}{n}f(x) = kf(x),$$

logo, vale para $k \in \mathbb{Q}$. Daí, temos que se $x = 1$, então $f(k) = kf(1)$, chamando de $f(1) = a$, temos que $f(k) = ak$. Vamos mostrar que vale para todo k real, bastando mostrar que vale para todo irracional. Suponha por absurdo que existe x irracional tal que $f(x) \neq ax$, podemos supor $f(x) < ax$, o outro caso é análogo, assim, $\frac{f(x)}{a} < x$, pela densidade dos números racionais na reta real, podemos tomar k racional, tal que

$$\frac{f(x)}{a} < k < x.$$

Como f é crescente, temos que $a > 0$, pois $a = f(1) > f(0) = 0$, daí podemos multiplicar a desigualdade acima por a, donde obtemos que

$$f(x) < ak < ax,$$

ou seja, $f(x) < f(k)$, por outro lado, como f é crescente e $k < x$, então $f(k) < f(x)$, uma contradição, logo $f(x) = ax$ para todo x real.
Reciprocamente, se $f(x) = ax$, para todo x real, então basta tomar $x = y + z$, daí

$$f(x) = f(y + z) = a(y + z) = ay + az = f(y) + f(z).$$

■

Para terminarmos esta parte mais teórica, alguns pontos importantes precisam ser ditos. O primeiro é que toda reta não vertical é gráfico de alguma função afim. Segundo, parafraseando Lima (2013), função não tem grau, o que possui grau é polinômio, logo, é incorreto falar função do primeiro grau e por fim, mostraremos a caracterização de uma função afim.

Teorema 3.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo*

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(h),$$

depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

Demonstração: Como o acréscimo é independente de x, então tomamos $x = 0$, com isso, teremos que

$$f(h) - f(0) = \varphi(h) \Rightarrow f(h) = \varphi(h) + f(0). \tag{2}$$

Agora, basta concluir que $\varphi(h) = ah$, para tanto, observamos que

$$\varphi(h+k) = f(x+(h+k)) - f(x) \Rightarrow \varphi(h+k) = f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x).$$

Daí, obtemos

$$\varphi(h+k) = \varphi(h) + \varphi(k). \tag{3}$$

De (2), pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, obtemos que

$$\varphi(h) = ah, \ a \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Chamando de $f(0) = b$ e substituindo (3) em (1), obtemos que $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ■

Uma consequência do Teorema 3.2 é que para concluir que uma função é afim, podemos testar duas condições:

- $f(x)$ ser crescente ou decrescente;
- $f(nx) = nf(x), \ n \in \mathbb{Z}, \ x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.2 *Estuda-se implantar a chamada "fórmula 95". Por essa fórmula os trabalhadores teriam direito à aposentadoria quando a soma das idades com o número de anos de serviço atingisse 95. Adotada essa fórmula, quem começou a trabalhar com 25 anos, com que idade poderá se aposentar?*

Resolução: Inicialmente observamos que quando o trabalhador que trabalhar por x anos, terá sua idade também adicionada de x anos. Logo, se b é a idade com que se começou a trabalhar, temos o gráfico da função $f(x) = 2x + b$. Como temos $b = 25$, queremos x tal que $f(x) = 95$, ou seja,

$$2x + 25 = 95 \Rightarrow 2x = 70 \Rightarrow x = 35,$$

daí, o trabalhador precisa trabalhar mais 35 anos, ou seja, poderá se aposentar com 25+35=60 anos.

Exemplo 3.3 *Na loja A, um aparelho custa 3800 reais mais uma taxa mensal de ma-*

nutenção de 20 reais. Na loja B, o mesmo aparelho custa 2500 reais porém a taxa de manutenção é de 50 reais por mês. Qual das duas opções é a mais vantajosa?

Resolução: Seja x o número de meses, assim, para a loja A, temos a função custo $f(x) = 3800 + 20x$, para a loja B, temos a função custo $g(x) = 2500 + 50x$. Com isso, a resposta é: Depende. Observamos que

$$f(x) > g(x) \Rightarrow 20x + 3800 > 50x + 2500 \Rightarrow x < \frac{130}{3} \Rightarrow x < 43,333...$$

Logo, é mais vantajoso comprar na loja B, se o período de manutenção não exceder os 43 meses.

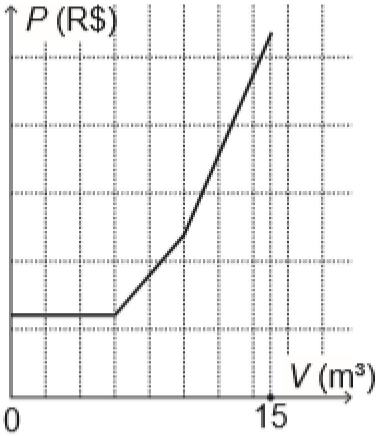
3.2 PROBLEMAS SOBRE FUNÇÕES AFINS

Nesta seção, resolveremos alguns problemas que abordam as funções afins nas provas do ENEM e Vestibulares diversos. A cada resolução, será feito um comentário que muitas vezes pode passar despercebido pelo professor, mas que pode ser de grande importância para ampliar a visão do mesmo em relação as dificuldades que seus alunos podem apresentar. Cada resolução trará a Habilidade e Competência, tanto do ENEM como da BNCC que o aluno deve ter desenvolvido para sua resolução.

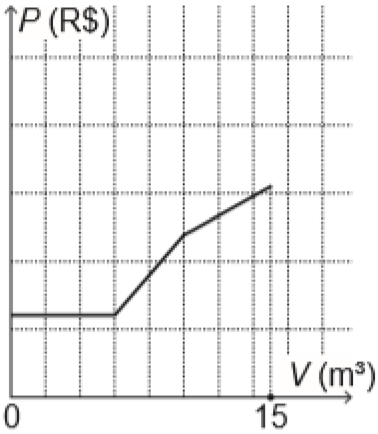
Problema 3.1 (ENEM 2019) *Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.*

- *Faixa 1: para consumo de até* $6m^3$, *valor fixo de R$12,00;*
- *Faixa 2: para consumo superior a* $6m^3$ *e até* $10m^3$, *tarifa de R$3,00 por metro cúbico ao que exceder a* $6m^3$*;*
- *Faixa 3: para consumo superior a* $10m^3$, *tarifa de R$6,00 por metro cúbico ao que exceder a* $10m^3$.

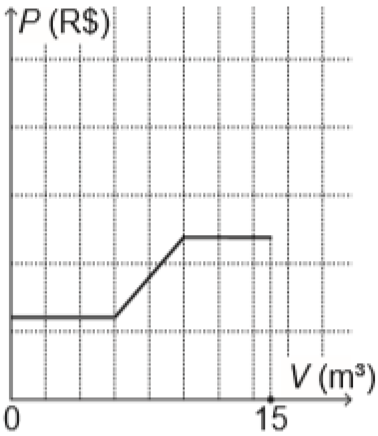
Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de $15m^3$ *por mês. O gráfico que melhor descreve o valor P, em real, a ser pago por mês, em função do volume V de água consumido, em metro cúbico, é*



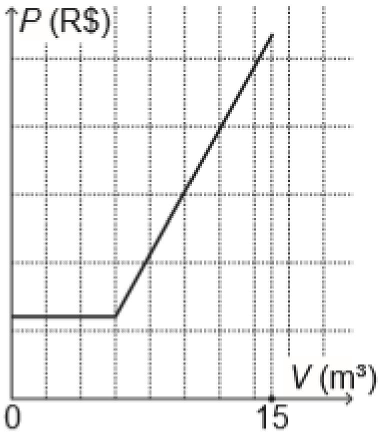
(A)



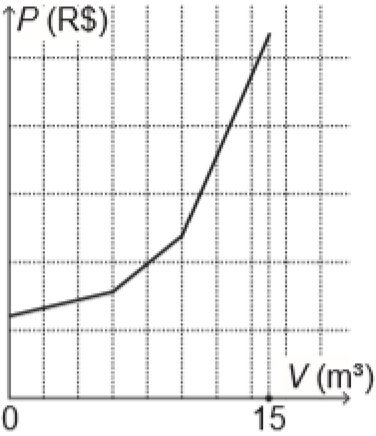
(B)



(C)



(D)



(E)

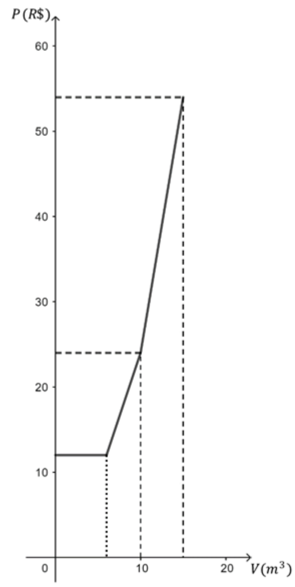
Resolução: De acordo com a Competência 4, Habilidade 17, do ENEM, o aluno deve ser capaz de resolver tal problema. Além disso, na BNCC, podemos encontrar as ferramentas para resolução de tal questão, a partir da Competência 4, Habilidade (EM13MAT401), onde o aluno deve ser capaz de transformar expressões polinomiais do 1º grau, em gráfico, ou seja, se esta ementa tiver se cumprido de maneira satisfatória, o aluno conseguirá resolver esta questão.

Inicialmente, espera-se que o aluno analise o problema por partes, como a própria questão sugere. Então, queremos construir um gráfico, de tal modo, que pela faixa 1, até $6m^3$ o valor é fixo, ou seja, constante, logo, até $6m^3$ o preço de R$12,00 não muda. Assim, em um gráfico da forma Volume×Preço, até o ponto $V = 6m^3$, temos uma reta horizontal, que parte de 12.

Para a faixa 2, vemos que não temos mais um valor constante para o preço, que a partir de $6m^3$, paga-se uma tarifa de R\$3,00 a mais, por cada m^2 até $10m^3$, ou seja, o preço vai aumentar, consequentemente, o gráfico irá ficar mais inclinado, de modo que basta calcular o valor pago quando se gasta $10m^3$, que neste caso, excede em $4m^3$ o volume mínimo de $6m^3$, ou seja, o consumidor deverá pagar R\$12,00+4×R\$3,00=R\$24,00.

Para a faixa 3, temos uma tarifa de R\$6,00 a cada m^3 que exceder a $10m^3$, ou seja, o valor pago vai aumentar ainda mais, e consequentemente, o gráfico irá se inclinar bem mais que de $6m^3$ a $10m^3$, então, por exemplo, se uma pessoa gastou $15m^3$, ela excedeu em $5m^3$ o mínimo da faixa anterior, que era de $10m^3$, deste modo, além do valor da faixa anterior, ela pagará mais 5×R\$6,00=R\$30,00. E pela faixa 2, já deveria pagar R\$24,00, ou seja, pagará um total de R\$54,00 por $15m^3$. Com estas informações, podemos construir o gráfico da Figura 3.

Figura 3 – Gráfico de Volume×Preço.



Fonte: Autor, 2020.

Assim, vemos que o item correto é a alternativa (A).

Comentário: Observamos que, embora para construir o gráfico de tal função preço era apenas necessário que o aluno soubesse do fato de que por 2 pontos passa uma única reta, pois desta forma, apenas com os extremos de cada faixa proposta pela questão, conseguimos construir o gráfico da função afim definida por partes, mas para isso, é necessário que o aluno saiba distribuir pontos no plano cartesiano, ou seja, saber a Habilidade (EM13MAT502) da BNCC. Contudo, um aluno sem muito apreço pela Matemática, consegue responder esta questão, usando apenas o raciocínio que todo professor deve instigar o seu aluno a desenvolver. Ele consegue entender que até $6m^3$ o preço não muda, então o gráfico é horizontal neste intervalo. Logo após, o aluno entende que o preço de $6m^3$ a $10m^3$ vai aumentar, logo o gráfico começa a subir. E a partir de $10m^3$ o preço vai aumentar ainda mais, pois a taxa por m^3 vai sempre aumentando, logo, de $10m^3$ em diante o gráfico vai ser bem mais, inclinado. Logo, usando a velha e famosa resposta por eliminação, o aluno concluirá que a alternativa correta é a alternativa (A).

Problema 3.2 (ENEM 2019) *Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$1 000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$80,00 por dia trabalhado.*
Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por
(A) $Y = 80X + 920$
(B) $Y = 80X + 1000$
(C) $Y = 80X + 1080$
(D) $Y = 160X + 840$
(E) $Y = 160X + 1000$

Resolução: De acordo com a Competência de Área 5, Habilidade 21 do ENEM, o aluno deve ser capaz de resolver este tipo de problema. Na BNCC, podemos encontrar na Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302) os requisitos necessários para o aluno resolver problemas de representação da forma algébrica de uma função polinomial do 1º grau.

Inicialmente, devemos separar as informações contidas na questão, uma delas é que o gerente recebe R$1000,00 por semana, então uma coisa é certa que Y é da forma

$$Y = aX + 1000,$$

pois só há um gerente, o qual possui um valor semanal fixo em R$1000,00.

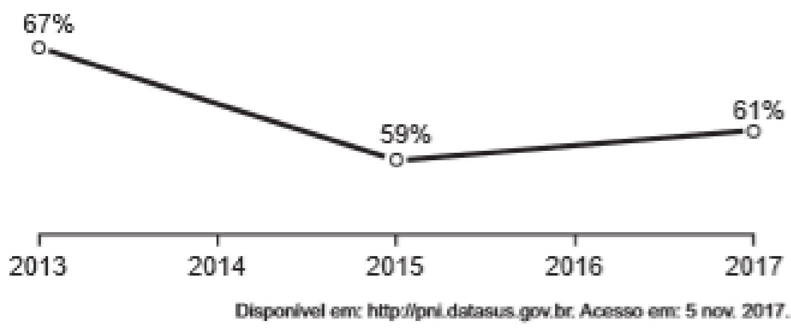
Outro ponto importante é que os outros funcionários trabalham apenas 2 dias por semana, com um total de R$160,00 por semana, logo, sendo $(X - 1)$ o número de funcionários, retirando-se o gerente, é imediato que para o total de funcionários o valor pago é $160(X - 1)$, logo, temos que

$$Y = 160(X - 1) + 1000 \Rightarrow Y = 160X - 160 + 1000 \Rightarrow Y = 160X + 840$$

e por isso a alternativa correta é o item (D).

Comentário: Este tipo de problema é muito comum, relacionado a formulação da lei de formação da função, por isso o mais importante é o aluno compreender e interpretar os dados de maneira correta, por exemplo, saber que o valor do ganho do gerente é fixo, pois a quantidade de gerente é fixo, é 1. A variável é o número de funcionários excluindo o gerente, por isso aparece o termo $(X - 1)$ multiplicando 160, que é o ganho semanal de 1 funcionário. Então o aluno deve ser capaz de observar todos estes detalhes para formar a equação procurada.

Problema 3.3 (ENEM 2018) *A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas dos anos de 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.*



Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014?
(A) 62,3%
(B) 63,0%
(C) 63,5%
(D) 64,0%
(E) 65,5%

Resolução: Uma questão sobre o gráfico de uma função afim. Na Competência de Área 5, Habilidade 21 do ENEM, o aluno deve ser capaz de resolver este tipo de problema. Na BNCC encontramos este assunto a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302), o aluno do ensino médio deve ser capaz de usar os conceitos e propriedades das funções polinomiais de 1º grau. De início, podemos encontrar o coeficiente angular da reta, para poder resolver o problema, assim, se $f(x) = ax + b$, temos que

$$a = \frac{59 - 67}{2015 - 2013} = \frac{-8}{2} = -4$$

Veja que estamos usando os valores percentuais como os valores de$f(x) = y$. Logo, o coeficiente angular da reta é -4, logo, basta encontrar o valor de y em 2014, com esse coeficiente angular. Teremos:

$$-4 = \frac{y - 67}{2014 - 2013} \Rightarrow -4 = y - 67$$

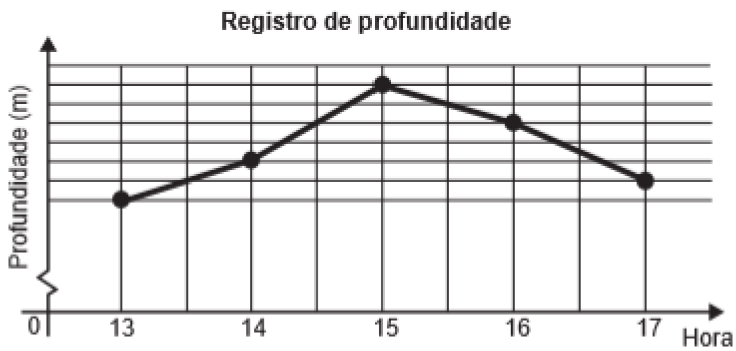
$$\therefore y = 63$$

Assim, em 2014, temos que $y = 63\%$, logo o item correto é a alternativa (B).

Comentário: Este tipo de problema cobra do aluno que ele conheça a equação da reta, ou melhor, de uma função afim, e que a partir daí utilize seus conhecimentos para construir os argumentos necessários para a resolução do problema. O aluno deve saber que dados dois pares de pontos, podemos obter a equação da reta que passa por tais pontos, em particular obter o coeficiente angular da reta, que é a taxa de variação com que os valores da função crescem ou decrescem. Também é necessário para o aluno saber que o coeficiente angular de uma reta não muda trocando os pares de pontos da reta, pois usamos este fato para concluir a questão, ou seja, saber que o coeficiente angular de uma reta é único. Logo, quando o professor aborda este tipo de assunto em sala, é de fundamental importância abordar estes detalhes, pois vemos que estes são muito cobrados em exames de Matemática, ou até mesmo em outras áreas do conhecimento, que utiliza o gráfico de funções para fazerem projeções.

Problema 3.4 (ENEM 2017) *Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h, registrada às 13 horas, não foi anotada, e a partir de h, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.*

Foi afirmado que entre 15 horas e 16 horas a profundidade do rio diminuiu em 10%.



Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os *registros?*

(A) 18

(B) 20

(C) 24

(D) 36

(E) 40

Resolução: De acordo com a Competência de Área 5, Habilidade 20 do ENEM, o aluno deve ser capaz de compreender o gráfico cartesiano de uma função que relacione grandezas. Na BNCC podemos encontrar este assunto na Competência Específica 5, Habilidade (EM13MAT501). Como a profundidades às 13 horas não foi registrada, podemos supor que existe uma função f, tal que $f(13) = h$, ou seja, às 13 horas a profundidade era h. Como cada espaçamento vertical representa 1 metro, então $f(14) = h + 2$, $f(15) = h + 6$ e $f(16) = h + 4$. Por outro lado, a questão diz que entre 15h e 16h, o decréscimo foi de 10%, isto significa que $f(16) = 0,9f(15)$, ou seja,

$$h + 4 = 0,9(h + 6) \Rightarrow 0,1h = 1,4 \Rightarrow h = 14,$$

com isso, às 16 horas a profundidade é $h + 4 = 14 + 4 = 18$ metros. Logo, a alternativa correta é o item (A).

Comentário: Esta questão nos traz um gráfico de linhas que podemos associar cada intervalo de 1 hora, como sendo o gráfico de uma função afim. O aluno deve ser capaz de atribuir um valor de imagem a cada ponto de domínio, pois foi isto que fizemos para resolver, ou seja, atribuímos $f(13) = h$, sem esta noção o aluno pode se complicar para resolver esta questão. Feito isto, deve ficar atento ao fato da profundidade ter caído 10% entre 15h e 16h, pois com isso, o valor da imagem de 16h, caiu 10% em relação às 15h, ou seja, ficou com 90%, que em sua forma fracionária fica 0,9, daí concluímos que $h+4 = 0,9(h+6)$. Observe que em momento nenhum utilizamos $f(17)$, e isto é importante ressaltar, pois nem sempre é necessário usar todos os dados presentes nos problemas de Matemática para resolvê-los, apenas os necessários. Com tudo isto, vemos a necessidade de trabalharmos bem com os alunos a estrutura do plano cartesiano, principalmente o conceito de domínio e imagem, pois muitas vezes esta noção é o ponto de partida para resolução de diversos problemas.

Problema 3.5 (ENEM 2016-2ª Aplicação) *Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que*

(A) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles

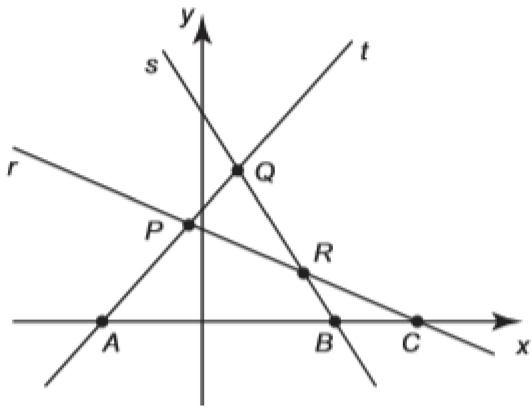
indicam onde as retas se intersectam.

(B) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

(C) Possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

(D) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

(E) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam



Resolução: Podemos encontrar na Competência de Área 5, Habilidade 22 do ENEM, os requisitos necessários para o aluno resolver este tipo de problema. Na BNCC, encontramos este assunto na Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT301), onde o aluno deve ser capaz de resolver problemas que envolvam um sistema de equações lineares.

A figura apresenta três retas, que são os gráficos de três funções afins. Como vimos, uma reta fica inteiramente determinada por 2 pontos distintos. Quando duas retas se intersectam, o ponto de interseção faz parte da imagem das duas funções afins descritas pelas retas. Este ponto é chamado de solução do sistema que envolve a equação das duas retas, por exemplo, o ponto P, é solução do sistema que envolve as retas t e r. Ou seja $r \cap t = P$.

A questão quer saber da solução do sistema que envolve as expressões das três retas, ou seja, $r \cap t \cap s$, o aluno deve apenas observar se há algum ponto que pertence simultaneamente as três retas, o que não ocorre, logo, o sistema não possui solução. O item correto é a alternativa (D).

Comentário: Este tipo de problema pode se encaixar em diversas áreas da Matemática, como sistemas de equações, geometria e funções afins. Trabalhamos com funções afins do ponto de vista que a solução do sistema na verdade é um valor comum de imagem das funções afins. Com isto, é importante que o professor trabalhe em sala situações em que para um mesmo valor de x, obtemos um mesmo valor de $f(x) = y$, e que graficamente isto significa que as duas retas se cruzam neste ponto (x, y), isto seria suficiente para resolver este problema.

Problema 3.6 (UNICAMP, 2016) *Considere a função afim $f(x) = ax + b$ definida para todo número real x, onde a e b são números reais. Sabendo que $f(4) = 2$, podemos afirmar que $f(f(3) + f(5))$ é igual a:*
(A) 5
(B) 4
(C) 3
(D) 2

Resolução: De acordo com a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302), da BNCC, o aluno do ensino médio deve ser capaz de utilizar das propriedades das funções afins para resolver problemas diversos, e é justamente isto que faremos aqui.

Primeiramente, temos as seguintes equações dadas pelo problema

$$\begin{aligned} f(3) &= 3a + b \\ f(5) &= 5a + b \\ \therefore f(3) + f(5) &= 8a + 2b = 2(4a + b). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$f(4) = 4a + b = 2$$

Com isso, temos que $f(3) + f(5) = 4$ e consequentemente $f(f(3) + f(5)) = f(4) = 2$, logo, a alternativa correta é o item (D).

Comentário: Esta é uma questão que trabalha basicamente no aluno, a substituição de valores na função afim e manipulação algébrica. Obviamente a substituição deve ser compreendida por todo aluno que conclui o ensino médio, por ser o básico, já a manipulação algébrica que os alunos devem saber, pode ter duas origens, a primeira parte do próprio raciocínio do aluno, a outra é que parte do professor para o aluno, por exemplo, o professor deve instigar seus alunos que todo problema que nos dá um dado numérico, neste caso o $f(4)$, teremos que de alguma forma encontrar este valor em nossa solução, mas que quase sempre ele estará de maneira implícita e a partir de manipulações é que conseguiremos enxergá-lo e trabalhar a partir daí diversos problemas que envolvam este tipo de manipulação.

Problema 3.7 (Adaptado da olimpíada da Eslovênia) *Se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que*

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y,$$

para quaisquer x, y reais, mostre que f é uma função afim.

Resolução: Novamente, usaremos a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302) da BNCC, ou seja, utilizaremos basicamente propriedades das funções afins e construção algébrica. Devemos obter a, b reais, tais que $f(x) = ax+b$. Neste tipo de problema, quase sempre devemos zerar uma das variáveis, e com isso, tomemos $x = 0$, logo, temos que

$$f(-f(y)) = 1 - y,$$

daí, tomando $y = 1$, temos que $f(-f(1)) = 0$. Agora, basicamente vamos tomar $y = -f(1)$, já que y pode ser qualquer valor real, com isso, teremos

$$f(x - f(-f(1))) = 1 - x + f(1) \Rightarrow f(x) = 1 - x + f(1),$$

ou ainda $f(x) = -x + (1 + f(1))$, com isso, concluímos o problema, com $a = -1$ e $b = 1 + f(1)$. ■

Comentário: Este tipo de problema, olímpico, requer uma maturidade um pouco maior do aluno, porque o principal desconforto para o aluno é por onde começar, mas feito isto, basicamente o que fizemos foi saber a forma geral de uma função afim, e obter os valores de a e b a partir de manipulações algébricas, atribuindo valores específicos para x e y. O bom de trabalhar este tipo de problema é que eles amadurecem as Habilidades Matemáticas do aluno, principalmente para aqueles que desejam cursar Matemática no ensino superior. Contudo, o professor deve ficar atento com o nível de questões que passa para seus alunos, principalmente se sua turma possui níveis de defasagem Matemática bem acentuadas, mas, se possível, cobrar este tipo de problema para alunos que realmente desejam conhecer a Matemática de maneira mais íntima.

Problema 3.8 (UECE, 2020.1-1ª Fase.) *No plano, com o sistemas de coordenadas cartesianas usual, os gráficos das retas cujas equações são $y = x$ e $y = mx - 4$, onde m é o número inteiro maior do que um, se cortam em um ponto P. A soma dos possíveis valores de m para os quais as coordenadas de P são números inteiros positivos é:*

(A) 11
(B) 9
(C) 10
(D) 8

Resolução: De acordo com a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302) ou também a Competência Específica 4, Habilidade (EM13MAT401) da BNCC, o aluno deve ser capaz de usar seus conhecimentos sobre funções afins para resolver este tipo de problema. O ponto de encontro entre duas retas, obriga a igualdade entre suas representações algébricas, ou seja,

$$x = mx - 4.$$

Evidenciando o x, teremos que

$$x = \frac{4}{m-1}.$$

Como as coordenadas de P devem ser inteiras, e positivas, obviamente x deve ser inteiro e positivo, isto é, $m-1$ deve ser divisor de 4, ou seja, $m-1 \in \{1,2,4\}$, com isso, temos as possibilidades:

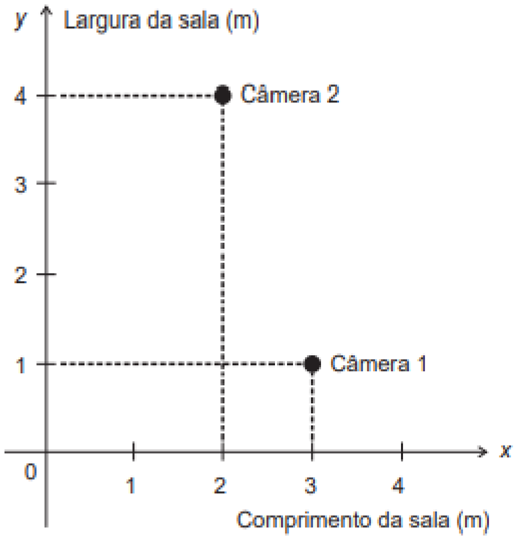
$$\begin{aligned} m-1 &= 1 \Rightarrow m = 2. \\ m-1 &= 2 \Rightarrow m = 3. \\ m-1 &= 4 \Rightarrow m = 5. \end{aligned}$$

Com isso, os possíveis valores de x seriam $4, 2$ ou 1. Perceba que todos estes valores de x nos dão y satisfazendo o problema, ou seja, inteiro e positivo, logo, a soma dos possíveis valores de m são $2+3+5=10$, portanto, a alternativa correta é item (C). ■

Comentário: Quando colocamos uma determinada Habilidade que o aluno deve ter para resolver o problema, estamos nos referindo aquelas que estão relacionadas, neste trabalho, a função, mas como podemos ver, sempre uma Habilidade da BNCC está pressupondo que o aluno domine Habilidades diversas, de níveis diversos, neste problema, trabalhamos a divisibilidade para obter os valores de m, assim como o conceito de número inteiro. Se o aluno não possuir o mínimo de conhecimento sobre isto, esta questão seria baseada na sorte do aluno, mas nem sempre é bom deixar tudo pelo acaso. É bom também mencionar que esta questão é comum a todos os alunos que prestavam Vestibular para qualquer área, não só da Matemática, logo, esta também é uma maneira do professor tentar mostrar para seus alunos que a Matemática está presente em todas as avaliações de ingresso em uma universidade pública, e com isso, devem ter pelo menos um conhecimento mínimo de certos assuntos que são bastantes recorrentes nestes tipos de provas, principalmente em relação a funções.

Problema 3.9 (ENEM 2019-PPL) *Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já estão instaladas duas câmeras e, a terceira, deverá ser colocada de maneira a ficar equidistante destas. Além disso, ele apresenta outras duas informações:*

(i) um esboço em um sistema de coordenadas cartesianas, do teto da sala, onde estão inseridas as posições das câmeras 1 e 2, conforme a figura.



(ii) cinco relações entre as coordenadas $(x; y)$ da posição onde a câmera 3 deverá ser instalada

$$
\begin{aligned}
R1 &: \; y = x \\
R2 &: \; y = -3x + 5 \\
R3 &: \; y = -3x + 10 \\
R4 &: \; y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \\
R5 &: \; y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

O instalador, após analisar as informações e as cinco relações, faz a opção correta dentre as relações apresentadas para instalar a terceira câmera.
A relação escolhida pelo instalador foi a
(A) R1
(B) R2
(C) R3
(D) R4
(E) R5

Resolução: De acordo com a Competência de Área 6, Habilidade 25 no ENEM, e Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302) da BNCC, o aluno deve ser capaz de resolver este tipo de problema, envolvendo a forma algébrica de uma função afim. Primeiramente, devemos observar que a terceira câmera deve ser equidistante das outras duas, ou seja, a distância entre a câmera 3 e a câmera 2, é igual a distância entre a câmera 3 e a câmera 1. Com isso, sendo P_1, P_2, P_3 a localização no plano das câmeras 1, 2 e 3, respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} P_1 &= (2,4), \\ P_2 &= (3,1), \\ P_3 &= (x,y). \end{aligned}$$

Quando nos referimos no plano a equidistância entre pontos, é de fundamental importância conhecer o conceito de mediatriz. A reta mediatriz entre dois pontos, é o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes dos dois pontos dados, e uma propriedade importante dela é que esta reta é perpendicular no ponto médio do segmento que liga os dois pontos, e como o ponto médio é a média dos pontos, devemos calcular o ponto médio entre P_1 e P_2 que é

$$m = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Agora obteremos a equação da reta que passa por P_1P_2, com isso, temos que

$$a = \frac{4-1}{2-3} = -3.$$

Com isso, a equação da reta é

$$y = -3(x-3) + 1 \Rightarrow y = -3x + 10.$$

Observe que esta equação corresponde a $R3$. Como a reta procurada é perpendicular a $R3$ no ponto $(5/2, 5/2)$, lembramos que retas perpendiculares possuem produto entre coeficientes lineares igual a -1, como um dos coeficientes é -3, temos que

$$-3 \cdot m = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{3},$$

Logo, a alternativa correta é $R4$ ou $R5$, e para terminar, basta fazer a boa velha substituição dos valores, e ver qual delas passam pelo ponto $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, logo, teremos

$$R4 \quad : \quad y = \frac{1}{3}\frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

Com isso, a resposta correta é o item (D). ■

Comentário: Esta questão trabalha vários assuntos interessantes sobre funções afins, como a representação algébrica da função, dados dois pontos, a condição de perpendicularidade entre retas e a noção de mediatriz de um segmento. Certamente o aluno pode tentar resolver este problema de outro modo, mas acredito que a riqueza de informações apresentadas para esta resolução é bem viável para o amadurecimento matemático do aluno. É importante destacar a necessidade de apresentar problemas que envolvam mais de uma Habilidade por parte do aluno, e não somente problemas rasos, como poderia ser obtenção da equação que passa por dois pontos quaisquer, pois provavelmente o que espera os alunos nos exames da vida, requer bem mais que isto, este sendo apenas um degrau na sua resolução, porém enfatizamos que estes pequenos degraus é que dão corpo ao conhecimento do aluno, logo, é de fundamental importância conhecer as principais propriedades de qualquer área Matemática, neste caso de funções afins.

Problema 3.10 (UECE, 2019.2-1ª Fase) *Carlos é vendedor em uma pequena empresa. Seu salário mensal é a soma de uma parte fixa com uma parte variável. A parte variável corresponde a 2% do valor alcançado pelas vendas no mês. No mês de abril, as vendas de Carlos totalizaram* $R\$\,9.450,00$*, o que lhe rendeu um salário de* $R\$\,1.179,00$*. Se o salário de Carlos em maio foi de* $R\$\,1.215,00$*, então, o total de suas vindas ficou entre*

(A) $R\$\,11.300,00$ e $R\$\,11.340,00$.
(B) $R\$\,11.220,00$ e $R\$\,11.260,00$.
(C) $R\$\,11.260,00$ e $R\$\,11.300,00$.
(D) $R\$\,11.180,00$ e $R\$\,11.220,00$.

Resolução: Para modelar o problema, usaremos a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302) da BNCC. Assim, vamos começar a modelar nosso problema, sendo c o salário fixo de Carlos, e x as vendas de Carlos no mês. Com isso, temos que a função que representa o salário total de Carlos é

$$f(x) = \frac{2}{100}x + c,$$

uma vez que a parte variável corresponde a 2% de x, ou seja, $\frac{2}{100}x$. Pelo enunciado do problema, temos que

$$1.179 = \frac{2}{100}9.450 + c. \quad (5)$$
$$1.215 = \frac{2}{100}x + c. \quad (6)$$

Agora, para obtermos o valor de x, faremos a subtração, membro a membro, das Eq.6 e Eq.5, obtendo com isso

$$1.215 - 1.179 = \frac{1}{50}x - 189 \Rightarrow x = 50(225) = 11.250.$$

Logo, em maio, Carlos vendeu $R\$\,11.250,00$, portanto a alternativa correta é o item (B). ■

Comentário: Se trata de uma questão fácil, se o aluno for capaz de deduzir a função como sendo uma função afim. Da Eq.5, podemos obter o valor de c, que é 990, mas fizemos a utilização de resolução de sistema de equações. Obviamente, há outra maneira simples de resolver. O mais importante é o aluno ter uma boa base Matemática, pois com isto, ele consegue chegar a um mesmo ponto, por caminhos diversos, matematicamente falando, o aluno adquire conhecimento matemático contínuo. Percebemos com este problema que os alunos devem compreender a importância da modelagem Matemática para resolver os mais diversos tipos de problemas, desde os mais simples até os mais sofisticados.

4 FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Este capítulo aborda um pouco das propriedades de funções quadráticas, bem como exemplos de aplicação da mesma, além de problemas sobre o tema em provas do ENEM e em Vestibulares diversos. A parte teórica é baseada no livro Número e Funções Reais, da coleção Profmat(LIMA, 2013).

4.1 PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Uma função é dita quadrática se existir reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo x real.

Os valores dos coeficientes a, b e c, ficam inteiramente determinados pelos valores que x assume, ou seja, se

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c' \Rightarrow a = a', b = b', c = c'.$$

Uma observação importante é que três pontos definem uma função quadrática, ou seja, existe apenas uma função quadrática, tal que, $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3$, com $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, com isso, se duas funções quadráticas possuem pelo menos três pontos em comum, então elas coincidem. De fato, se

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3 \end{aligned}$$

Observando a matriz dos coeficientes, obtemos

$$M = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz possui determinante conhecido como determinante de Vandermonde, que é dado por

$$\det(M) = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$$

Como os pontos são distintos, então $\det(M) \neq 0$, logo, o sistema admite solução única. Isto significa que a, b e c, são únicos, ou seja, é única a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

A raiz de uma função quadrática, é o valor de x, tal que $f(x) = 0$, ela pode ser única, ter duas raízes ou não possuir raiz real. Problemas envolvendo raízes de funções quadráticas são muito antigos. Um problema no tempo dos babilônios, descoberto em textos cuneiformes, propõe achar dois números sabendo apenas o valor de sua soma s e seu produto p. Suponha que um dos números é x, então o outro é $s - x$, logo, teremos que

$$p = x(s - x) = sx - x^2$$

com isso, temos que

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Portanto, se $f(x) = ax^2 + bx + c$, suas raízes reais, se existirem, serão tais que

$$\begin{aligned} s &= -\frac{b}{a} \\ p &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

4.2 A FORMA CANÔNICA DO TRINÔMIO

Um trinômio é uma expressão da forma $aX^2 + bX + c$. A cada trinômio está associada uma função quadrática. Um trinômio quadrado perfeito é um trinômio que pode ser reduzido a um quadrado perfeito, como por exemplo, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.

Observe que dada uma função da forma $f(x) = (x-a)^2$, é muito fácil encontrar sua raiz, basta tomar $x = a$. Se porém a função é da forma $f(x) = (x - a)^2 - b$, então, suas raízes são $x = \pm\sqrt{b} + a$. Obviamente $b \geq 0$, para as raízes reais existirem.

Tomemos a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vamos escrever tal função na forma de um trinômio quadrado. Com isso, teremos que

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Queremos algo da forma $(x - y)^2 - z = x^2 - 2xy + y^2 - z = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}$, daí basta tomar

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{-b}{a} \Rightarrow y = \frac{-b}{2a} \\ y^2 - z &= \frac{c}{a} \Rightarrow z = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow z = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \end{aligned}$$

ou seja, se $f(x) = 0$, como $a \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} &= 0 \\
x &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a} \\
\therefore x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Obviamente, para as raízes reais existirem, então devemos ter que $b^2 \geq 4ac$. Outra observação importante, é que se $b^2 - 4ac = 0$, então a raiz é única e da forma $-\dfrac{b}{2a}$. Chamamos de discriminante o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$ e $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ a famosa fórmula de Bháskara, logo, temos que

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \tag{7}$$

A equação 7, é chamada de Forma Canônica da função quadrática.

Exemplo 4.1 (ITA, 2011) *Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que a equação $(2 - m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.*

Resolução: Como $a = 2 - m, b = 2m, c = m + 2$, inicialmente devemos garantir que $b^2 - 4ac \geq 0$, ou seja,

$$4m^2 - 4(2 - m)(m + 2) = 4m^2 - 4(4 - m^2) \geq 0,$$

isto é,

$$8m^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow m^2 \geq 2.$$

Para termos duas raízes distintas, é necessário que $m^2 > 2$, ou seja, $m > \sqrt{2}$ ou $m < -\sqrt{2}$. Por outro lado, como devemos ter $a \neq 0$, então $m \neq 2$. Como as raízes devem ser positivas, tanto sua soma, como seu produto devem ser positivos, daí, temos que temos dois casos, se $2 - m > 0$, então

$$\begin{aligned}
-\frac{2m}{2 - m} > 0 &\Rightarrow 2m < 0 \Rightarrow m < 0 \\
\frac{m + 2}{2 - m} > 0 &\Rightarrow m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2.
\end{aligned}$$

Neste caso m será negativo, e como os valores negativos possíveis para m devem satisfazer

$m < -\sqrt{2}$, então, $-2 < m < -\sqrt{2}$. Se $2 - m < 0$, então teremos que

$$\begin{aligned} \frac{2m}{2-m} < 0 &\Rightarrow 2m > 0 \Rightarrow m > 0 \\ \frac{m+2}{2-m} > 0 &\Rightarrow m + 2 < 0 \Rightarrow m < -2. \end{aligned}$$

Neste caso, m não satisfaz as desigualdades, logo, não é possível $2 - m < 0$. Daí temos que a solução é o conjunto

$$X = \left\{ m \in \mathbb{R}; -2 < m < -\sqrt{2} \right\}.$$

$\blacksquare$

4.3 GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Vimos que o gráfico de uma função afim é uma reta. No caso de uma função quadrática, o gráfico é uma parábola. Mas o que é uma parábola? para responder isto, usaremos a seguinte definição

Definição 4.1 *Dado um ponto F, e uma reta d, que não contém F, é chamado de parábola de foco F e reta diretriz d, o lugar geométrico dos pontos equidistantes de F e d.*

De fato, dado um ponto $P = (x, y)$, um foco $F = (s, t)$, e uma reta diretriz $y' + w = 0$, as distância $d(P, F)$ e $d(P, d)$ são iguais. Como

$$\begin{aligned} d(P, F) &= \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2} \\ d(P, d) &= |y + w|. \end{aligned}$$

Igualando e elevando ao quadrado as distâncias, obtemos

$$(x-s)^2 + (y-t)^2 = (y+w)^2 \Rightarrow x^2 - 2sx + y^2 - 2ty + s^2 + t^2 = y^2 + 2wy + w^2.$$

Simplificando, e isolando y, obtemos que

$$y = \frac{1}{2(t+w)}x^2 - \frac{s}{(t+w)}x + \frac{s^2 + t^2 - w^2}{2(t+w)}. \tag{8}$$

Ou seja, $y = a'x^2 + b'x + c'$, que representa uma função quadrática. Para fixarmos as ideias vejamos um exemplo.

Exemplo 4.2 *Dada a função quadrática $f(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$, obtenha o foco e a reta diretriz do gráfico desta função.*

Resolução: Basta observar, pelo que vimos anteriormente que

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2(t+w)} \tag{9}$$

$$1 = \frac{s}{2(t+w)} \tag{10}$$

$$1 = \frac{s^2+t^2-w^2}{2(t+w)}. \tag{11}$$

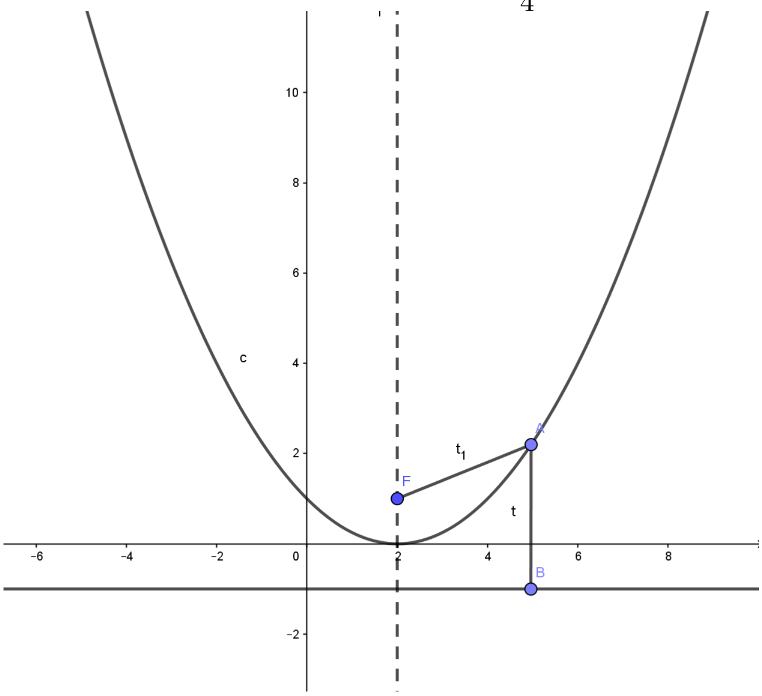
De 9, temos que $t+w=2$, aplicando em 10, obtemos que $s=2$. Aplicando 9 e 10 em 11, obtemos que

$$1 = \frac{4+t^2-w^2}{4} \Rightarrow t^2-w^2=0.$$

Como $t^2-w^2=(t+w)(t-w)$, uma vez que $t+w=2\neq 0$, então $t-w=0$, ou seja, $t=w$. Substituindo em 9, obtemos que $t=w=1$. Ou seja, $F=(2,1)$ e $y=-1$.

A Figura 4, nos traz o gráfico de $f(x)$.

Figura 4 – Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - x + 1$



Fonte: Autor, 2020

Com isso, dada a função $f(x)=ax^2+bx+c$, podemos obter o foco F e reta diretriz d a partir de 8. Bastando igualar os coeficientes e resolver o sistema:

$$a = \frac{1}{2(t+w)} \tag{12}$$

$$b = -\frac{s}{t+w} \tag{13}$$

$$c = \frac{s^2+t^2-w^2}{2(t+w)}. \tag{14}$$

De 12 e 13 obtemos que $t+w=\dfrac{1}{2a}$ e $s=-\dfrac{b}{2a}$, daí em 14, temos

$$c-\frac{s^2}{2(t+w)}=\frac{t^2-w^2}{2(t+w)}\Rightarrow c-\frac{ab^2}{4a^2}=\frac{t-w}{2}.$$

Ou seja, $t-w=\dfrac{4ac-b^2}{2a}$e utilizando 12, encontramos que

$$\begin{aligned} t+w &= \frac{1}{2a} \\ t-w &= \frac{4ac-b^2}{2a}. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, encontramos que

$$\begin{aligned} t &= \frac{4ac-b^2+1}{4a} \\ w &= \frac{b^2-4ac+1}{4a}. \end{aligned}$$

Com isso, se $f(x)=ax^2+bx+c$, então o foco F e reta diretriz d é:

$$\begin{aligned} F &= \Big(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2+1}{4a}\Big) \\ d:y &= \frac{4ac-b^2-1}{4a}. \end{aligned}$$

O gráfico da parábola nos sugere que dados x_1 e x_2, com $x_1\neq x_2$, teremos uma valor $y=f(x_1)=f(x_2)$. E pela forma canônica, isto é equivalente a

$$\Big(x_1+\frac{b}{2a}\Big)^2=\Big(x_2+\frac{b}{2a}\Big)^2,$$

e como $x_1\neq x_2$, temos que

$$x_1+\frac{b}{2a}=-\Big(x_2+\frac{b}{2a}\Big)\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}.$$

Ou seja, a média aritmética de x_1 e x_2 é $-\dfrac{b}{2a}$, isto significa que x_1 e x_2 equidistam de $-\dfrac{b}{2a}$. A reta vertical $x=-\dfrac{b}{2a}$ é chamado de eixo da parábola. O ponto $\Big(-\dfrac{b}{2a},f\Big(-\dfrac{b}{2a}\Big)\Big)$ é chamado de vértice da parábola, sendo que $f\Big(-\dfrac{b}{2a}\Big)=-\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo ou mínimo assumido por f.

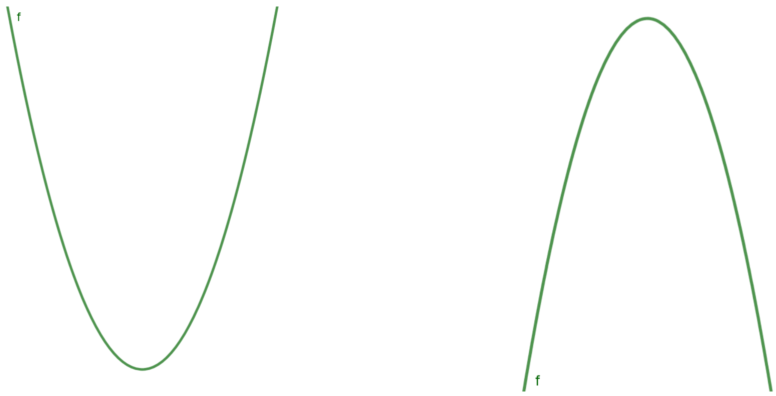
A concavidade da parábola fica determinada pelo sinal do coeficiente de x^2. De fato, utilizando 7, temos dois casos a considerar:

$$a > 0 \Rightarrow a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 \geq 0 \Rightarrow a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow f(x) \geq f\Big(-\frac{b}{2a}\Big),$$

$$a < 0 \Rightarrow a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 \leq 0 \Rightarrow a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow f(x) \leq f\Big(-\frac{b}{2a}\Big).$$

Ou seja, se $a > 0$, então $f\Big(-\frac{b}{2a}\Big)$ é o valor mínimo de f, e portanto a concavidade da parábola é voltada para cima. Se $a < 0$, então $f\Big(-\frac{b}{2a}\Big)$ é o valor máximo de f, e portanto a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Figura 5 – Concavidade da parábola de acordo com o sinal de a



(a) Caso $a > 0$ (b) Caso $a < 0$

Fonte: Autor, 2020.

Vale lembrar que, geometricamente, os zeros de uma função quadrática são os pontos de interseção do gráfico da parábola com o eixo OX.

Exemplo 4.3 *Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro* $R\$800,00$ *mais* $R\$10,00$ *por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?*

Resolução: Quando nos deparamos com este tipo de problema, pensamos que a rentabilidade será máxima quando todos os lugares estiverem ocupados, porém será que, nestas condições, isto é verdade? Primeiramente, devemos elaborar uma expressão que descreva a função da rentabilidade em função do número de passageiros. Seja x o número de passageiros no avião, então existem $100 - x$ lugares vagos. Como cada passageiro deverá pagar no mínimo $R\$800,00$. Assim, sendo $f(x)$ a rentabilidade da empresa, então

$$f(x) = 800x + 10x(100 - x)$$

Ou seja, $f(x) = -10x^2 + 1800x$, logo, a rentabilidade da empresa é representada pelo gráfico de uma função quadrática que possui um valor máximo, pois $a = -10 < 0$. Logo, basta calcular o valor x do vértice da parábola, ou seja $-\dfrac{b}{2a}$, e daí, teremos que

$$x_v = -\frac{-1800}{20} \Rightarrow x_v = 90.$$

Logo, a rentabilidade é máxima para 90 passageiros e não para 100, que é a lotação máxima. Veja que para 90 passageiros, a rentabilidade é R\$81.000,00 e para 100 passageiros é R\$80.000,00. ■

Um comentário que vale a pena ser dito, é que toda parábola pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2$, basta fazermos uma translação, vertical e/ou horizontal. E para tanto, é necessário fazermos uma mudança de coordenadas, nada de mais. Para fixar as ideias, tomemos um exemplo.

Exemplo 4.4 (Mudança de coordenadas) *Considere a função $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, a primeira observação a se fazer, é tomar um eixo OY' para ser o eixo de simetria da parábola, para tanto, completaremos quadrado em f, e obtemos que*

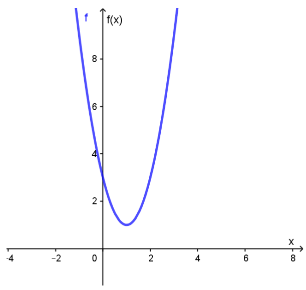
$$f(x) = 2(x-1)^2 + 1.$$

Agora tomemos $u = x - 1$, daí, $f(u) = 2u^2 + 1$. E por fim, tomamos $g(u) = f(u) - 1$, e com isso, obtemos

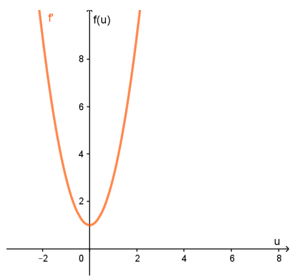
$$g(u) = 2u^2.$$

A Figura 6 mostra graficamente os passos da mudança de coordenadas.

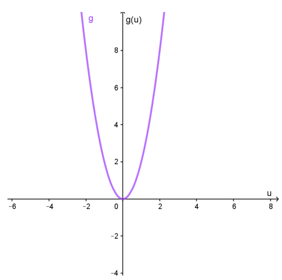
Figura 6 – Passos da mudança de coordenadas da parábola em gráfico



(a) Gráfico de $f(x)$



(b) Gráfico de $f(u)$



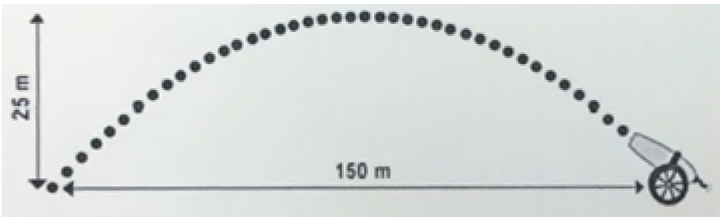
(c) Gráfico de $g(u)$

Fonte: Autor, 2020.

4.4 PROBLEMAS SOBRE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Nesta seção, abordamos um pouco dos conceitos vistos na seção anterior, juntamente com as Habilidades e Competências propostas na BNCC e no ENEM, para resolver problemas que já foram cobrados em provas anteriores do ENEM e Vestibulares/Olimpíadas diversas.

Problema 4.1 (ENEM 2018-PPL) *Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.*



Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto $(150; 0)$ *e que o projétil atinge o solo no ponto* $(0; 0)$ *do plano xy. A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é*

(A) $y = 150x - x^2$
(B) $y = 3750x - 25x^2$
(C) $75y = 300x - 2x^2$
(D) $125y = 450x - 3x^2$
(E) $225y = 150x - x^2$

Resolução: De acordo com a Competência de Área 5, Habilidade 21, do ENEM, o aluno deve ser capaz de resolver este tipo de problema. Na BNCC podemos encontrar os recursos para tais problemas na Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302), o aluno deve ser capaz de utilizar seus conhecimentos algébricos para modelar a equação que descreve a trajetora do projétil.

Pelo que vimos, os valores de $x = 0$ e $x = 150$, são os zeros de f, daí, temos que f é da forma $f(x) = a(x - 0)(x - 150)$, ou seja,

$$f(x) = ax^2 - 150ax.$$

Por outro lado, como o vértice da parábola ocorre, neste caso, no ponto de máximo da parábola, cujo $y = 25$. E como $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, temos que

$$25 = -\frac{150^2 a^2}{4a} \Rightarrow a = -\frac{100}{150^2} \Rightarrow a = -\frac{1}{225}.$$

E com isso, temos que $225y = 150x - x^2$, logo, a alternativa correta é o item (E).

Comentário: Este problema pode ser resolvido de várias maneiras. Do modo que fizemos é necessário saber as propriedades do vértice da parábola, bem como a equação de cada coordenada do vértice. Porém, através da forma reduzida de f, ou seja, $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, onde r_1 e r_2, são as raízes da função, como $r_1 = 0$ e $r_2 = 150$, poderíamos apenas aplicar o ponto $(75, 25)$ e daí

$$25 = a(75)(75 - 150) = -75^2 \Rightarrow a = -\frac{25}{75^2} = -\frac{1}{225}.$$

E com isso, o aluno poderia responder a questão apenas substituindo os valores do ponto do vértice, porém, para isto, é necessário que o professor aborde este tipo de problema de maneiras diversas, com resoluções que utilizem as fórmulas e as que não utilizam, essas em especial, por trabalhar o raciocínio lógico do aluno.

Problema 4.2 (ENEM 2013-PPL) *O proprietário de uma casa de espetáculos observou que, colocando o valor da entrada a $R\$10,00$, sempre contava com 1.000 pessoas a cada apresentação, faturando $R\$10.000,00$ com a venda dos ingressos. Entretanto, percebeu também que, a partir de $R\$10,00$, a cada $R\$2,00$ que ele aumentava no valor da entrada, recebia para os espetáculos 40 pessoas a menos.*

Nessas condições, considerando P o número de pessoas presentes em um determinado dia e F o faturamento com a venda dos ingressos, a expressão que relaciona o faturamento em função do número de pessoas é dada por:

(A) $F = \dfrac{-P^2}{20} + 60P$

(B) $F = \dfrac{P^2}{20} - 60P$

(C) $F = -P^2 + 1200P$

(D) $F = \dfrac{-P^2}{20} + 60$

(E) $F = P^2 - 1200P$

Resolução: De acordo com a Competência de Área 5, Habilidade 21, o aluno deve ser capaz de formular uma expressão algébrica para este tipo de problema. Na BNCC, podemos encontrar as ferramentas para resolução deste problema na Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302).

Pois bem, agora faremos a modelagem do problema. Como a cada R\$2,00 de aumento, diminui 40 pessoas, então o decréscimo relativo no número de pessoas é $\dfrac{2}{40}$, daí, o faturamento total é dado pela equação $F = Px$, onde x é o valor de entrada. E como $x = 10 + \frac{2}{40}y$, onde y é o número de pessoas que diminuíram no público, ou seja, $y = 1000 - P$, daí, temos que

$$F = P\Big(10 + \frac{2}{40}(1000 - P)\Big) \Rightarrow F = \frac{-P^2}{20} + 60P.$$

Daí, o item correto é a alternativa (A).

Comentário: Este tipo de questão, não é das mais simples envolvendo funções quadráticas, uma vez que o aluno deve ter um raciocínio afiado, e sabemos que durante um teste tão longo e exaustivo como o ENEM, isso pode ser um problema. Antes, o professor deve conduzir seus alunos de maneira que eles consigam superar suas dificuldades, e é lógico que este problema tem outras formas de serem resolvidas, até mais simples da que foi apresentada. Primeiro, é importante que o professor trabalhe com seus alunos estes tipos de problemas, pois com isso, esta questão se torna simples. Outro ponto que o professor deve abordar ao aluno é o teste, ou seja, testar as respostas e ver qual delas cumpre o que foi dito no enunciado, por exemplo, se $P = 1000$, então $F = 10.000$, isto já exclui o item (B), (C), (D) e (E), e com isso, o aluno consegue responder corretamente a questão apenas com a substituição de valores. É claro que a construção em si da expressão é algo belo, mas sabemos que nem todos são tão afinados com a Matemática, então o professor deve agir de maneira que beneficie os dois lados de seu público.

Problema 4.3 (ENEM 2013-PPL) *Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão* $L(x) = -x^2 + 12x - 20$ *, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo.*
Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a
(A) 4
(B) 6
(C) 9
(D) 10
(E) 14

Resolução: De acordo com a Competência de Área 5, Habilidade 22, do ENEM, o aluno deve ser capaz de resolver problemas dados por expressões algébricas. Na BNCC, encontramos na Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302), que o aluno deve ser capaz de resolver problemas através de seus conhecimentos algébricos, que obviamente, envolvem o estudo do comportamento de uma função quadrática.

Este problema é bem simples, se o aluno tiver uma boa noção de função quadrática, mais especificamente seu ponto de máximo (ou mínimo). E saber que este se localiza no vértice da parábola. Daí, o sabemos que o lucro máximo é o y do vértice, e o valor de x do vértice é o valor procurado, pois o mesmo é quem faz o lucro atingir seu valor máximo. E como vimos, $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, onde $a = -1$ e $b = 12$, logo, o valor x procurado é

$$x = -\frac{12}{2(-1)} \Rightarrow x = 6.$$

Logo, o lucro será máximo para os pacotes devem contes 6 bonés.

Comentário: Este problema é simples do ponto de vista de sua resolução, porém, o professor deve estar atento que, para grande parte de seus alunos, este problema é difícil, isto porque os alunos tem dificuldade de decorar fórmulas, porém o professor deve encontrar maneiras tais que este tipo de cálculo seja bem natural, aos alunos, e isto pode ser conseguido, por exemplo, através da resolução de vários problemas com este tipo de contexto, que envolvam os valores de máximo ou de mínimo de uma parábola, e de como encontrá-los.

Problema 4.4 (ENEM 2015-PPL) *Um meio de transporte coletivo que vem ganhando espaço no Brasil é a van, pois realiza, com relativo conforto e preço acessível, quase todos os tipos de transportes: escolar e urbano, intermunicipal e excursões em geral.*
O dono de uma van, cuja capacidade máxima é de 15 passageiros, cobra para uma excursão até a capital de seu estado R\$60,00 de cada passageiro. Se não atingir a capacidade máxima da van, cada passageiro pagará mais R\$2,00 por lugar vago.
Sendo x o número de lugares vagos, a expressão que representa o valor arrecadado $V(x)$, em reais, pelo dono da van, para uma viagem até a capital é

(A) $V(x) = 902x$
(B) $V(x) = 930x$
(C) $V(x) = 900 + 30x$
(D) $V(x) = 60x + 2x^2$
(E) $V(x) = 900 - 30x - 2x^2$

Resolução: Mais um problema abordado pela Competência de Área 5, Habilidade 21 do ENEM. E novamente, na BNCC, podemos encontrar as ferramentas para resolução deste problema na Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302).

O primeiro passo é descrever matematicamente as condições do problema, e daí, a expressão algébrica procurada sai naturalmente. Veja que a van possui 15 lugares, e que cada passageiro pagará no mínimo R\$$60,00$, então, se x é o número de lugares vagos, o número de lugares ocupados é $15 - x$, e como para cada lugar vago, cada passageiro pagará mais R$$2,00$, então o valor arrecadado é tal que

$$V(x) = (15 - x)60 + (15 - x)(2x).$$

Perceba que $(15 - x)60$ ocorre porque cada passageiro pagará no mínimo os R$$60,00$, o termo adicionado refere-se ao extra por lugar vago, ou seja, $(15 - x)(2x)$ significa que os $(15 - x)$ passageiros pagarão 2 reais pelos x lugares vagos. Com tudo isso, obtemos que

$$V(x) = 900 - 30x - 2x^2.$$

Logo, a alternativa correta é o item (E).

Comentário: A primeira observação importante é que certas Competências, tanto do ENEM como da BNCC estão ligadas a vários tipos de problemas do mesmo assunto, e daí, vemos que se o aproveitamento pelo aluno nestas Competências forem boas, então ele tem boas chances de resolver varias situações problemas que envolvam a modelagem de uma expressão Matemática para descrever algo. Vários problemas de funções quadráticas requerem apenas que o aluno esboce a função associada a situações, por isso, é necessário que o professor aborde bem este assunto, pois percebemos que ele é capaz de amadurecer muito a mente do aluno para vários outros tipos de problemas.

Problema 4.5 (ENEM 2016) *Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.*
A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no
(A) 19º dia.
(B) 20º dia.
(C) 29º dia.
(D) 30º dia.
(E) 60º dia.

Resolução: De acordo com a Competência de Área 5, Habilidade 21 do ENEM, o aluno deve ser capaz de resolver situações problemas como esta. Na BNCC, encontramos as ferramentas para a resolução desta questão no Competência Específica 4, Habilidade (EM13MAT402), onde o aluno deve ser capaz de descrever o comportamento do gráfico de uma função quadrática.

Primeiro calculamos o dia em que teremos 1600 infectados, ou seja, $f(t) =$

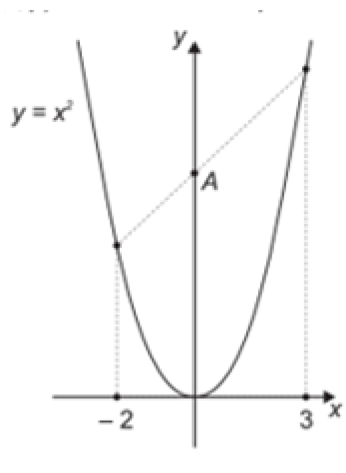
1600, daí, temos que

$$\begin{aligned} 1600 &= -2t^2 + 120t \\ 800 &= -t^2 + 60t \Rightarrow t^2 - 60t + 800 = 0. \end{aligned}$$

Agora, basta encontrar as raízes da equação, onde encontramos $t = 20$ e $t = 40$. E como a marca de 1600 infectados chegará primeiro no 20º dia, então a segunda dedetização ocorrerá no 20° dia, logo, a alternativa correta é o item (B).

Comentário: Percebemos que para o aluno resolver este problema, ele basicamente teria que ver o 1600 como imagem de f, e saber encontrar as raízes de uma função quadrática. Perceba que para resolver o problema, nem foi preciso calcular o discriminante, de fato, bastava ver a soma e o produto das raízes, daí facilmente chegava em 20 e 40, mas o aluno não poderia usar 40, pois 20 ocorreria primeiro, e mesmo assim, nas resposta do problema não tem item para 40° dia, o que facilitou ainda mais a vida dos alunos. Perceba também que o problema nos trouxe uma função quadrática, mas as raízes que calculamos é de outra função quadrática, então é necessário que os alunos percebam isto, que para cada valor de imagem de uma função quadrática, podemos formular outra função, cujo gráfico é uma translação do anterior. Obviamente isto pode ser um tanto complexo para grande maioria dos alunos, sobretudo, com pequenos exemplos, pode ser que o professor passe por estes obstáculos.

Problema 4.6 (OBMEP 2018, 1ª Fase, Nível 3) *A figura mostra o gráfico da função definida por $y = x^2$. O ponto A tem coordenadas $(0, p)$. Qual é o valor de p?*



(A) 5
(B) 5,5
(C) 6
(D) 6,25

(E) 6,5

Resolução: Na BNCC, podemos encontrar na Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302) os requisitos que os alunos devem cumprir para resolver este tipo de problema, uma vez que envolve tanto função quadrática como afim.

Inicialmente, observamos que o ponto A é o ponto de interseção da reta que ligam os pontos $(-2,4)$ e $(3,9)$, observe que encontramos os valores 4 e 9, aplicando a lei de formação da função. Agora, basta encontrar a equação da reta que passa por tais pontos, sendo que ela é da forma $y = ax + b$, podemos simplesmente aplicar valores a x e y, donde obtemos que

$$4 = -2a + b$$
$$9 = 3a + b$$

resolvendo o sistema, obtemos que $a = 1$ e $b = 6$, ou seja, $y = x + 6$, daí, o ponto A, é obtido fazendo $x = 0$, ou seja, $y = 6$. Logo, a alternativa correta é o item (C).

Comentário: Há outras maneiras de resolver tal problema, mas o importante é observarmos a necessidade do aluno dominar as funções afins e quadráticas, pois foi necessário um conhecimento mínimo de ambas, para poder resolver o problema. Onde utilizamos a forma geral de uma função afim, e aplicamos valores de x para encontrarmos os pontos y que pertencem a reta. Além disso, tivemos a necessidade de resolver um sistema linear. Portanto, é um problema que envolve vários conceitos básicos, e por isso costumamos dizer que a Matemática é interligada por ela mesma, ou seja, seus conteúdos sempre necessitam do conhecimento de outros e sem um destes, é impossível resolver o problema, ou no mínimo não deixa ele mais simples.

Problema 4.7 (OBMEP, 2017, 1ª Fase, Nível 3) *Se $f(x) = 5x^2 + ax + b$, com $a \neq b, f(a) = b$ e $f(b) = a$ qual é o valor de $a + b$?*
(A) -5
(B) $-1/5$
(C) 0
(D) $1/5$
(E) 5

Resolução: Novamente o aluno deve dominar a Habilidade (EM13MAT302) da Competência Específica da BNCC, além disso, já podemos ver a necessidade de dominar a resolução de sistemas lineares ou seja, de dominar também a Habilidade (EM13MAT301).

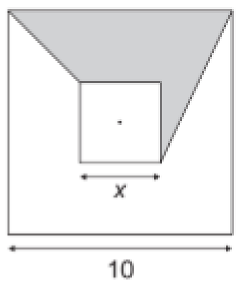
Inicialmente, aplicamos os valores de $x = a$ e $x = b$, pois já sabemos seu valor, daí, obtemos que

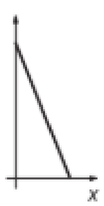
$$\begin{aligned} b &= 5a^2 + a^2 + b \Rightarrow 6a^2 = 0 \Rightarrow a = 0. \\ a &= 5b^2 + ab + b \Rightarrow 5b^2 + b = 0 \Rightarrow b(5b+1) = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que $b \neq a = 0$, temos que $b \neq 0$, ou seja, $(5b+1) = 0$, isto é, $b = -1/5$. Daí, a resposta correta é o item (B).

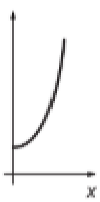
Comentário: Podemos ver nesta questão a necessidade de dominar propriedades simples, como a fatoração, pois sem este detalhe o aluno poderia se complicar ainda mais, ou até mesmo não resolver a questão. Utilizamos conhecimentos para a resolução do sistema, que na verdade era deixar implícito o valor de $a + b$. É de fundamental importância o papel do professor para a resolução deste tipo de problema, pois se sua aula é de função quadrática, eis um exemplo de como incluir outros assuntos para a resolução do problema, isto contribui para o aluno ver a importância de tudo que ele já estudou na Matemática, além de integrar mais conhecimentos, ou até mesmo relembrar aqueles adormecidos, mas um fato importante é que todos os problemas de Matemática precisam de conhecimentos múltiplos para sua resolução e não apenas algo específico, logo, questões que trabalhem mais ferramentas, podem contribuir bastante para aqueles alunos que desejam aprofundar na Matemática, mas deve-se ter cuidado com o exagero para não assustar o restante dos alunos e com isso contribuir ainda mais para a fobia Matemática.

Problema 4.8 (OBMEP, 2016. 1ª Fase. Nível 3)
Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lado 10 *e o menor tem lado* x*. Qual é o gráfico que expressa a área da região cinza em função de* x*?*

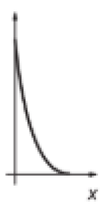




(A)

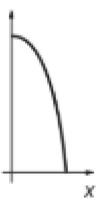


(C)



(E)

(B)

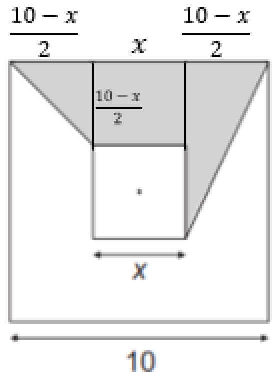


(D)

Resolução: Para o aluno conseguir responder esta questão ele precisa dominar a Habilidade (EM13MAT302) da Competência Específica 3 e Habilidade (EM13MAT402) da Competência Específica 4 da BNCC, além de saber o cálculo de áreas de figuras planas.

Observando a figura, podemos dividir a região cinza como a união das áreas de dois triângulos e um retângulo, como mostrado na Figura 7.

Figura 7 – Partição da área



Fonte: Autor, 2020

Logo, a área cinza é dada por

$$\begin{aligned}
A_c &= A_1 + A_2 + A_3 \\
A_c &= \frac{(10-x)^2}{8} + \frac{10-x}{2}x + \frac{(10-x)(10+x)}{8} \\
A_c &= \frac{10-x}{8}\big(10 - x + 4x + 10 + x\big) \\
A_c &= \frac{10-x}{8}(4x+20) \\
\therefore A_c &= \frac{-4x^2 + 20x + 200}{8}.
\end{aligned}$$

Assim, vemos que a área cinza A_c, corresponde a uma função quadrática em x, cujo x do vértice é o ponto

$$x_v = \frac{-20}{2(-4)} = \frac{20}{8} = 2,5.$$

Logo, só há uma alternativa cujo gráfico é uma parábola com concavidade para baixo e cujo vértice ocorre no ponto $x = 2,5$, que é justamente a alternativa (B).

Comentário: Podemos ver os vários assuntos que esta questão cobra do estudante, mas que tem por objeto final o conhecimento das propriedades da função quadrática. Porém, sem o conhecimento de áreas de figuras planas e também uma maturidade para conseguir dividir a área cinza em áreas de figuras conhecidas, e isto é uma dificuldade que muitos alunos possuem. Não é difícil cobrarmos atividades relacionadas às áreas nas quais o aluno deve criar segmentos para subdividir a imagem em várias outras com áreas de figuras bem conhecidas, como triângulos, quadrados, retângulos, etc. Porém sentimos a necessidade de desenvolver esta Habilidade em nossos alunos: A construção. Por isso, acreditamos que é importante trabalharmos com nossos alunos questões em que eles devem construir segmentos para facilitar a resolução da questão, pois desta forma o aluno expande mais sua visão geométrica e consequentemente desenvolve uma maturidade que o possibilita diminuir a complexidade da resolução de vários problemas.

Problema 4.9 (UECE, 2019.2-2ª Fase) *No plano, com sistemas de coordenadas cartesianas usual, os gráficos das funções reais de variável real* $f(x) = x^2 - 6x + 9$ *e* $g(x) = -x^2 + 6x - 1$ *são parábolas. Os pontos de interseção dessas parábolas juntamente com seus vértices são vértices de um quadrilátero convexo, cuja medida de área é igual a*

(A) 16 u.a.
(B) 20 u.a.
(C) 22 u.a.
(D) 18 u.a.

Resolução: Para resolver este problema, usaremos as Competências Específicas 3 e 4, assim como as Habilidades (EM13MAT302) e (EM13MAT402) da BNCC. A primeira tarefa que teremos é encontrar os vértices do quadrilátero, e para isto, devemos obter a interseção das parábolas e seus vértices. A interseção ocorre quando

$$x^2 - 6x + 9 = -x^2 + 6 - 1 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0$$

Encontrando as raízes desta equação, obtemos

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{4}$$

De onde obtemos $x = 1$ ou $x = 5$, logo, os pontos de interseção são $P_1 = (1, 4)$ e $P_2 = (5, 4)$. Agora basta encontramos vértices das parábolas, e como

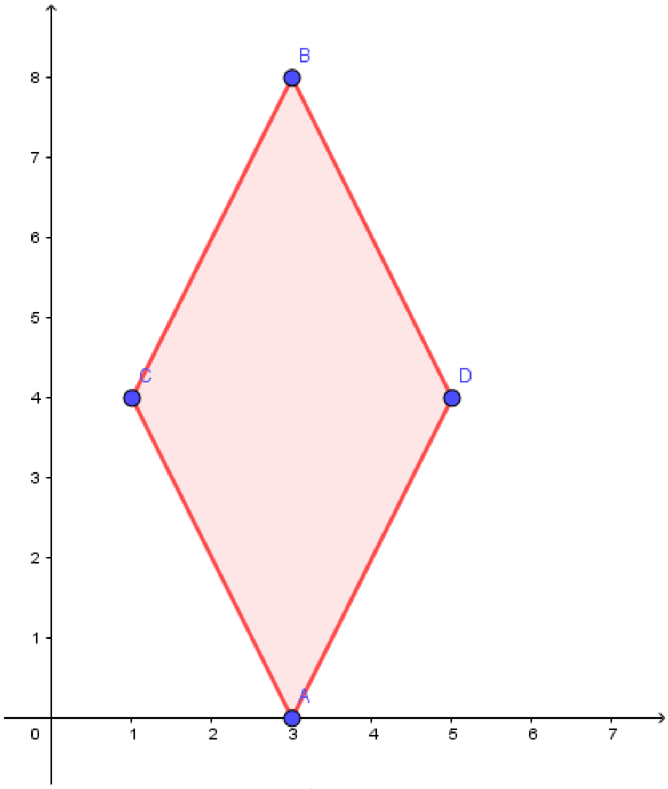
$$\begin{aligned} x_v &= -\frac{b}{2a} \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Com isso, o vértice de f é $P_3 = (3, 0)$ e vértice de g é $P_4 = (3, 8)$. Agora devemos observar que tipo de quadrilátero formamos, e para isto, é importante esboçar o gráfico, como mostrado da Figura 8. Perceba agora que as diagonais do quadrilátero são perpendiculares, visto que uma está contida na reta horizontal $y = 4$ e a outra na reta vertical $x = 3$, logo, se trata de um Losango. E sendo D e d os comprimentos das diagonais maior e menor, respectivamente, do losango, sua área é dada por

$$\frac{D \times d}{2}.$$

E como $D = 8$ e $d = 4$, temos que a área é $A = 16u.a.$, logo a alternativa correta é o item (A). ■

Figura 8 – Quadrilátero formado pelos pontos obtidos.



Fonte: Autor, 2020.

Comentário: Este tipo de problema necessita que o aluno tenha conhecimentos diversos, sobre Matemática, uma vez que saber as propriedades das funções quadráticas é apenas uma parte da solução, de fato o mais importante para a solução é representar os pontos no plano, para formar o quadrilátero e identificar o tipo de quadrilátero, que neste caso é um losango, mas se o aluno, por ventura, consegue calcular áreas com produtos vetoriais, isto poderia ser dispensado. Contudo, vemos, mais uma vez, a necessidade de relacionarmos os mais diversos conteúdos matemáticos, associando, sempre que possível um assunto a outro, neste caso, função quadrática, com geometria analítica, isto faz com que o aluno perceba a importância de se dedicar a todos os assuntos da Matemática, e não só algumas mais específicas.

Problema 4.10 (ITA,2020-2ª Fase.) *Sejam a e b números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$*

é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$*, determine os números* a *e* b*.*

Resolução: Podemos resolver este problema através da Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT302) da BNCC, na qual o aluno emprega os conceitos de funções afins e quadráticas para resolver problemas diversos, e é justamente isto que faremos, utilizaremos as propriedades destas funções para resolver o problema.

Calculando a interseção, temos

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= kx \\ \Rightarrow x^2 + (a-k)x + b &= 0. \end{aligned}$$

Agora, calculamos o delta da função, temos que

$$\Delta = (a-k)^2 - 4b \Rightarrow \Delta = k^2 - 2ak + a^2 - 4b.$$

Como a intersecção ocorre para valores reais de x, pois a reta não admite valores imaginários, logo, ocorre que $\Delta \geq 0$. Com isso, obtemos uma inequação quadrática em k, e por isso, calculamos outro delta, relacionado a função de k,

$$\Delta^* = 4a^2 - 4(a^2 - 4b) = 16b.$$

Assim, as raízes para k são

$$k = \frac{2a \pm \sqrt{16b}}{2}.$$

Com $b > 0$, logo, temos que $k = a + 2\sqrt{b}$ ou $k = a - 2\sqrt{b}$. Como a função quadrática de k representa uma parábola de concavidade para cima, para manter a desigualdade devemos ter que $k \leq a - 2\sqrt{b}$ e $k \geq a + 2\sqrt{b}$, e pelo enunciado da questão, obtemos que

$$\begin{aligned} a + 2\sqrt{b} &= 6 \\ a - 2\sqrt{b} &= 2. \end{aligned}$$

De onde obtemos que $a = 4$ e $b = 1$. ■

Comentário: Sem dúvida, os Vestibulares ITA são dos mais difíceis do Brasil, porém esta questão basicamente trabalha do aluno propriedades básicas de funções quadráticas, como obtenção das raízes e estudo de sinal. Porém, por se tratar de uma questão discursiva o aluno deve, de fato, conhecer bem as propriedades utilizadas e principalmente os conceitos de funções quadráticas. Além disso, vale destacar que o aluno que compreende bem as funções quadráticas, tem total facilidade em resolver inequações quadráticas, e foi o que fizemos neste problema, porém apenas estudando o sinal da parábola. Na Matemática isto é bastante comum, o domínio de um conteúdo facilitar bastante o domínio em outro conteúdo, pois a Matemática de maneira geral está interligada. Este tipo de problema, pode se tornar mais interessante com o auxílio de tecnologias, fazendo as interseções e mostrando aos alunos na prática o que foi encontrado na teoria, sempre que possível é interessante esta atitude, relacionar a teoria com a prática, embora poucos saibam, existem muitas aplicações concretas da Matemática como resultado de teorias, cabe ao professor buscá-las.

5 FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Neste capítulo, falamos dos dois modelos de funções mais presentes em problemas da natureza, visto que, em meio a pandemia da COVID-19, sempre vemos na televisão o gráfico de tendência de casos, e percebemos que se trata do gráfico de uma função exponencial, assim como as escalas que tratam da força de um tremor, entre outras, logo, é de fundamental importância o entendimento sobre como estas funções funcionam.

5.1 FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Quando trabalhamos com funções do tipo exponencial com nossos alunos, a primeira coisa que temos que ter em mente é que eles devem dominar bem as definições de potenciação. Posto isto, apresentaremos ao professor como se caracteriza esta incrível função.

Definição 5.1 *A função do tipo exponencial de base* $0 < a \neq 1$ *é a função definida por* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; f(x) = a^x$ *que satisfaz as seguintes condições:*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^1 = a$;
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ *quando* $a > 1$ *e*
4. $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ *quando* $0 < a < 1$.

Das propriedades acima, podemos observar várias informações importantes, a primeira delas é que f é sempre diferente de zero, exceto quando é identicamente nula, de fato, pela condição 1, temos que

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

Logo,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0.$$

Outro resultado importante é dado pelo lema à seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em (LIMA, 2013).

Lema 5.1 *Fixado o número real positivo* $a \neq 1$*, em todo intervalo de* $\mathbb{R}^+$ *existe alguma potência* a^r*, com* $r \in \mathbb{Q}$

O lema nos diz que para qualquer intervalo de números positivos, sempre há a potência de um número real positivo, fixado, contido nele.

Teorema 5.1 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função monótona injetiva (ou seja, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$;
(2) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, onde* $a = f(1)$;
(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos mostrar que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.
$1 \Rightarrow 2$: Observe que para r racional, ou seja, $r = \dfrac{m}{n}$, a condição 1 nos diz que

$$f(rx)^n = f((nr)x) = f(mx) = f(x)^m \Rightarrow f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r,$$

logo, a propriedade também é válida para números racionais. Devemos mostrar que vale para todo número real. Suponhamos f crescente, o outro caso é análogo, e suponhamos que $f(x) \neq a^x$, podemos supor $f(x) > a^x$, pelo Lema 5.1, existe a^r tal que

$$a^x < a^r < f(x).$$

Daí, temos que $f(r) < f(x)$, como f é crescente, temos que $r < x$, por outro lado, de $a^x < a^r$ temos que $x < r$, assim obtemos uma contradição, logo, não existe uma número real positivo a, tal que $f(x) \neq a^x$. Onde $a = f(1)$, uma vez que $f(x) = f(1 \cdot x) = f(1)^x$.
$2 \Rightarrow 3$:$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$;
$3 \Rightarrow 1$: Basta fazer sucessivamente $y = x$ quando $n \in \mathbb{Z}^+$, para $-n$, observe que

$$f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

E com isso, temos que

$$f(-nx) = f(-x - x - x \cdots - x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdots \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(f(x))^n} = [f(x)]^{-n}.$$

■

Veja que o Teorema acima está relacionado apenas às funções da forma a^x, para o caso geral, temos o teorema à seguir:

Teorema 5.2 (Caracterização da Função de Tipo Exponencial) *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo*

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)}$$

dependa apenas de h, mas não de x. Então se $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Defina $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$, observe que $\varphi(0) = 1$, fazendo $x = 0$, também obtemos que

$$\varphi(h) = \frac{g(h)}{g(0)} \Rightarrow g(h) = \varphi(h) \cdot g(0) = b \cdot \varphi(h)$$

com $g(0) = b$. Com isto, obtemos que

$$g(x) = b \cdot \varphi(x).$$

Agora, basta mostrar que $\varphi(x) = a^x$, com $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$. Defina $f(x) = \dfrac{g(x)}{b}$, observe que $f(0) = 1$, daí, temos que

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{g(x+h)}{b} \cdot \frac{b}{g(x)} = \frac{g(x+h)}{g(x)} = \varphi(h),$$

com isto, fazendo $x = 0$, temos que

$$\varphi(h) = f(h), \forall h \in \mathbb{R}.$$

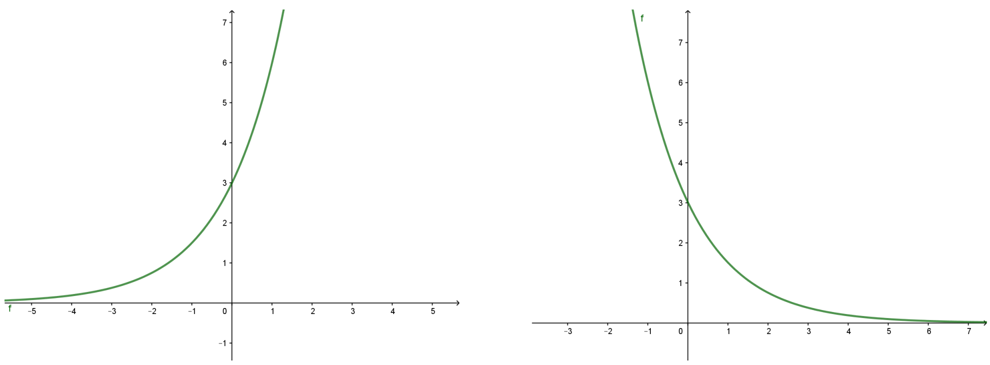
Ou seja, $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, e pelo Teorema 5.3, temos que $f(x) = a^x$, com $a = f(1) = \dfrac{g(1)}{g(0)}$ e com isso, concluímos que $g(x) = ba^x$. ■

5.2 GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Quando temos uma função do tipo $f(x) = ba^x$, é fácil ver que $b = f(0)$, onde b é chamado de valor inicial de f, isto quando estudamos um fenômeno da natureza, onde x é o tempo decorrido. O gráfico de f está todo acima do eixo x, uma vez que ela só não assume valores negativos e tem valor zero apenas quando é identicamente nula.

Para $a > 1$, e $b > 0$, temos que f cresce à medida que x vai aumentando, ocorrendo o contrário para $0 < a < 1$.

Figura 9 – gráfico da exponencial para valores diferentes de a.



(a) Caso $f(x) = 3 \cdot 2^x$ (b) Caso $f(x) = 3 \cdot (0,5)^x$

Fonte: Autor, 2020.

A partir dos gráficos apresentados, podemos ver o quão rápido uma função exponencial cresce ou decresce.

Exemplo 5.1 *Prove que uma função do tipo exponencial fica determinada quando se conhecem dois de seus valores. Mais precisamente , se $f(x) = ba^x$ e $F(x) = BA^x$ são tais* *que $f(x_1) = F(x_1)$ e $f(x_2) = F(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$ então $a = A$ e $b = B$.*

Demonstração: Igualando os valores, obtemos um sistema

$$\begin{aligned} ba^{x_1} &= BA^{x_1} \\ ba^{x_2} &= BA^{x_2}. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\left(\frac{a}{A}\right)^{x_1} = \frac{B}{b}.$$

Analogamente, obtemos que

$$\left(\frac{a}{A}\right)^{x_2} = \frac{B}{b}.$$

E a partir daí, temos que

$$\left(\frac{a}{A}\right)^{x_1} = \left(\frac{a}{A}\right)^{x_2}.$$

Como $x_1 \neq x_2$, e como a função exponencial é injetiva, ocorre que $\dfrac{a}{A} = 1$ ou seja, $a = A$, consequentemente, temos $b = B$. ■

As funções exponenciais são sobrejetivas em $\mathbb{R}^+$, como enunciado no Lema 5.1, logo, ela é bijetiva, neste intervalo. Este tipo de função é bastante reconhecida quando estudamos fenômenos que ocorrem na natureza, como, por exemplo, no decaimento radioativo, onde $M(t) = M_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/p}$, onde M_0 é a quantidade de matéria radioativa inicial e t o tempo decorrido e p o tempo de meia-vida do material estudado.

A função exponencial também está presente quando estudamos o crescimento populacional, o que ocorre em perfeitas condições, ou seja, em um ambiente sem catástrofes. A descoberta de tais funções na natureza é realizada através das observações e coletas de dados.

5.3 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Vimos que as funções exponenciais são bijetivas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$, logo, admitem uma função inversa. Pois bem, quando vamos trabalhar a exponenciação com nossos alunos, podemos elaborar problemas do tipo: Calcule o valor de x em $2^x = 8$, um problema simples, pois x assume um valor inteiro. Mas poderíamos perguntar: Qual é o número x que se deve elevar à base b para obter a, ou seja, $b^x = a$. Com isso, definiremos a função logarítmica.

Definição 5.2 *A inversa da função exponencial $f(x) = b^x$ é a função*

$$\log_b x \to \log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

*que associa cada número real positivo x à $\log_b x$, chamado de **logaritmo de x na base b**, onde x é o logaritmando.*

Pela definição de função inversa, temos que $b^{\log_b x} = x$ e $\log_b b^x = x$, em suma, temos que

$$\log_b x = a \Leftrightarrow x = b^a.$$

Segue daí que $\log_b 1 = 0$.

Como $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$, denominando $x = b^s$ e $y = b^t$, observe que

$$\begin{aligned} \log_b x &= s \\ \log_b y &= t, \end{aligned}$$

logo,

$$\log_b xy = \log_b b^{s+t} = s + t = \log_b x + \log_b y,$$

ou seja,

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y.$$

Daí, é imediato que

$$\log_b x^n = n \log_b x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

E se $n \in \mathbb{R}$, será que a propriedade é válida? Seja $s = \log_b x^y$, com $y \in \mathbb{R}$, e $t = y \log_b x$, mostremos que $t = s$. De fato, $b^s = x^y$ e $b^{t/y} = x$, ou seja

$$b^s = b^t \Rightarrow s = t.$$

Logo,

$$\log_b x^y = y \log_b x, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Outra propriedade importante é o logaritmo da divisão:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y,$$

com efeito, tomando $s = \log_b x$ e $t = \log_b y$, temos que $x = b^s$ e $y = b^t$, logo

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b \frac{b^s}{b^t} = \log_b b^{s-t} = s - t = \log_b x - \log_b y,$$

ou seja,

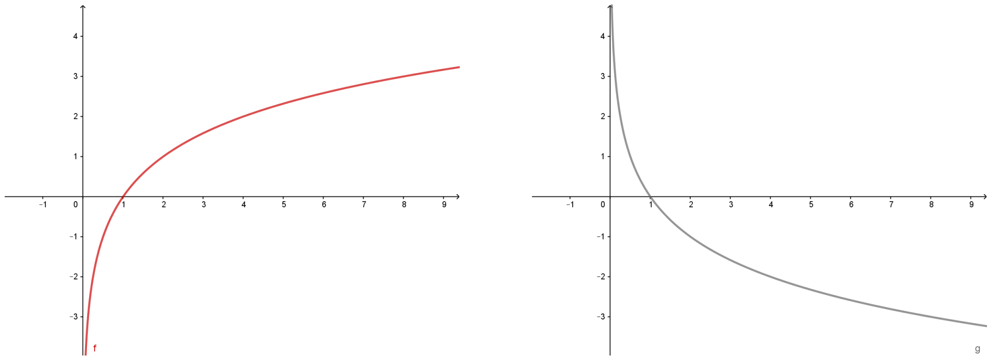
$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y.$$

Com isso, vemos que a função logarítmica, transforma produto em soma. Observe que a função logarítmica é crescente quando

$$x > y \Rightarrow \log_b x > \log_b y,$$

ou seja, quando $b > 1$. E decrescente quando $x > y \to \log x < \log y$, ou seja, quando $0 < b < 1$. A Figura 10 mostra os comportamento crescente e decrescente da função.

Figura 10 – gráfico da função logarítmica para valores diferentes de b.



(a) Caso $b = 2$ (b) Caso $b = 0.5$

Fonte: Autor, 2020.

O Teorema à seguir caracteriza as funções tipo logarítmicas.

Teorema 5.3 *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (ou seja, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $b > 0$ tal que $f(x) = \log_b x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração: Perceba que

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1),$$

ou seja, $f(1) = 0$. Com isso, seja $f(2) = a$ e defina $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{a}$, daí, perceba que $\varphi(1) = \dfrac{f(1)}{a} = 0$ e que $\varphi(2) = \dfrac{f(2)}{a} = \dfrac{a}{a} = 1$. Com isso, temos que

$$\varphi(2^n) = \varphi(2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2) = \frac{f(2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2)}{a} = n\frac{f(2)}{a} = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observe também que para m natural, temos

$$\varphi(1) = \varphi(2^m \cdot 2^{-m}) = \frac{f(2^m) + f(2^{-m})}{a} = \frac{mf(2) + f(2^{-m})}{a} = 0,$$

logo,

$$\frac{f(2^{-m})}{a} = -m \Rightarrow \varphi(2^{-m}) = -m.$$

Seja $r = \dfrac{m}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$, então $m = rn$, ou seja,

$$m = \varphi(2^m) = \varphi(2^{rn}) = \varphi((2^r)^n) = n\varphi(2^r).$$

Daí, temos que

$$\varphi(2^r) = \frac{m}{n} = r.$$

Vamos provar que a propriedade vale para todo $x \in \mathbb{R}^+$, de fato, suponha que x não seja racional, logo, existem racionais r e s, tais que

$$r < x < s.$$

Supondo f crescente (outro caso é similar), temos que φ também o é, daí, teremos que

$$2^r < 2^x < 2^s \Rightarrow \varphi(2^r) < \varphi(2^x) < \varphi(2^s).$$

Ou seja,

$$r < \varphi(2^x) < s.$$

Agora, suponha que $\varphi(2^x) \neq x$, ou seja, $\varphi(2^x) = t$, com $t \neq x$, logicamente, a única opção para t é que ele seja irracional. Podemos supor que $t > x$, daí, temos que

$$x < t < s.$$

Por outro lado, como o conjunto dos números irracionais é denso na reta, ou seja, em qualquer intervalo real, não degenerado, podemos obter um número racional, logo, existe $q \in \mathbb{Q}$, tal que

$$x < q < t.$$

Daí, teremos que

$$\varphi(2^x) < \varphi(2^q) < \varphi(2^t)$$

E como $\varphi(2^x) = t$ e $\varphi(2^q) = q$, obtemos que

$$t < q,$$

uma contradição, logo, $\varphi(2^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Assim, $\varphi(x) = \log_2 x$, para todo $x > 0$. E com isto, temos que

$$x = 2^{\varphi(x)} = 2^{f(x)/a} = (2^{1/a})^{f(x)} = b^{f(x)},$$

com $b = 2^{1/a}$. Aplicando $\log_b$ em ambos os lado, teremos que

$$f(x) = \log_b x.$$

■

Outra propriedade importante dos logaritmos é em relação à mudança de base, normalmente usamos com nossos alunos o logaritmo de base 10, por termos um sistema decimal, mas isto não é unanimidade, e por isto, é de fundamental importância conhecer o processo de mudança de base.

Suponha que você tenha $\log_b x$ mas queira mudar para uma base $a > 0$, então considere $c = \log_b a$, ou seja,

$$a = b^c.$$

Seja $u = \log_b x$ e $v = \log_a x$, logo, $b^u = a^v = (b^c)^v = b^{cv}$, donde obtemos que $u = cv$, ou seja,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

que é a famosa fórmula de mudança de base, para logaritmos.

5.4 LOGARITMOS NATURAIS

Como mencionamos anteriormente, podemos tomar qualquer base $b > 0$ para logaritmos, porém, no ensino básico vemos um grande uso do logaritmo de base 10, mas outra base de muita importância na Matemática é o logaritmo de base e, onde e é chamado de número de Euler, em homenagem ao matemático suíço Leonard Euler, uma constante irracional que possui valor aproximado de

$$e \approx 2,718281828459045235360287.$$

É interessante vermos na prática o que esta importante constante significa. Uma das utilizações para o número e está relacionado ao estudo de juros, porém, outra importante relação está relacionada com áreas, e para isto, vamos considerar a faixa positiva da hipérbole, dada por

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; f(x) = \frac{1}{x}.$$

Chamamos de H_1^x a área da faixa sob a Hipérbole que se inicia de 1 até x (Figura 11), analogamente H_a^b a área da faixa da Hipérbole que se inicia em a até b. Neste ponto, é importante o conceito de áreas orientadas, ou seja, se $x > 1$, então a área será positiva, e se $x < 1$ a área será negativa, ou ainda que

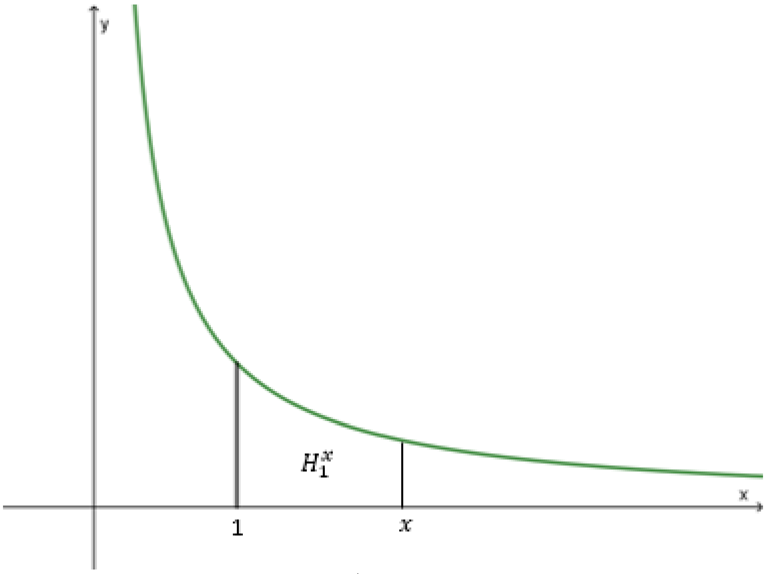
$$H_a^b = -H_b^a.$$

Perceba que $H_a^b = H_a^c + H_c^b$, e além disso, o que podemos dizer sobre a área H_{ak}^{bk}, com $k > 1$? Vamos mostrar que

$$H_a^b = H_{ka}^{kb},$$

e para tanto, devemos calcular a área. Podemos fazer isto com a partição de faixa em

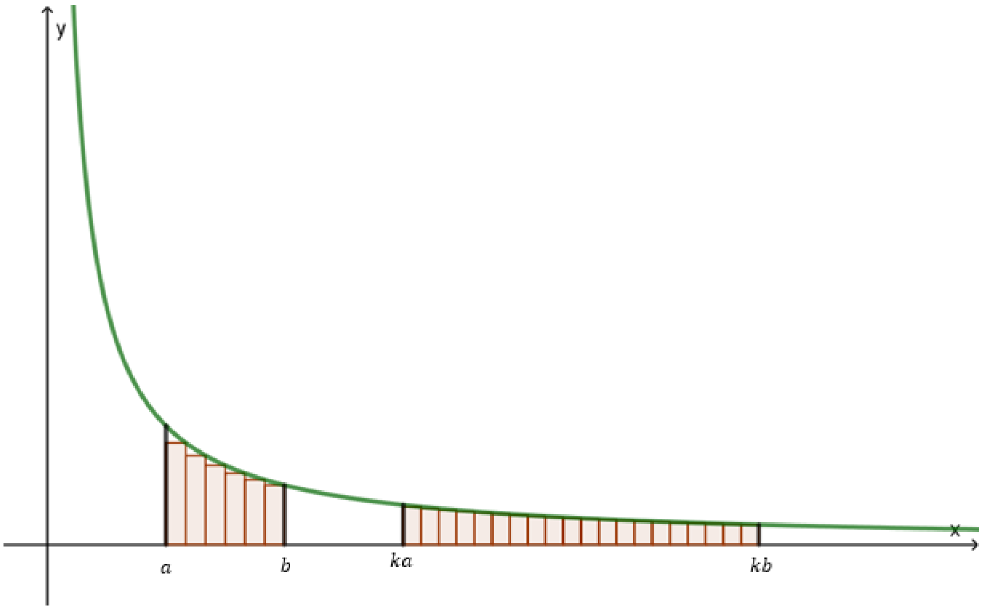
Figura 11 – Representação da faixa H_1^x



Fonte: Autor, 2020.

diversos retângulos, pois sabemos como calcular a área de um retângulo. Para tanto, observe a Figura 12.

Figura 12 – Decompondo as faixas da Hipérbole em retângulos.



Fonte: Autor, 2020.

Este tipo de soma de áreas é conhecida como Soma de Riemann, e quanto mais retângulos construímos sob a faixa da hipérbole, mais próximo da área da faixa chegaremos. Como a área de um retângulo de base b e altura h é bh, para H_a^b, podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em n partes, em que cada parte terá comprimento de tamanho $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, ou seja, cada retângulo possui esta medida para a base, e para a altura, sempre admitindo o valor de x_n à direita da base do retângulo como referência, e portanto

$$x_n = a + n\Delta x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Logo, a altura de cada retângulo é o valor $f(x_n) = f(a + n\Delta x)$. Com isso, temos que

$$H_a^b = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\Delta x.$$

Perceba que

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a + n\Delta x}.$$

De maneira análoga, temos que

$$H_{ak}^{bk} = \lim_{n\to\infty} f(x_n^*)\Delta^* x.$$

Mas neste caso, com $\Delta^* x = \dfrac{k(b-a)}{n} = k\Delta x$, e cujas alturas dos retângulos são

$$f(x_n^*) = \frac{1}{x_n^*} = \frac{1}{ak + nk\Delta x} = \frac{1}{k(a + n\Delta x)}.$$

Daí, observe que

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a + n\Delta x} = f(x_n)\Delta x.$$

Ou seja, que ambas as faixas possuem a mesma área, isto é

$$H_a^b = H_{ak}^{bk}, \qquad k > 1. \tag{15}$$

Agora, obtemos algo interessante, que podemos associar uma função f a cada área de uma faixa da hipérbole, ou seja,

$$f(x) = H_1^x.$$

Perceba que f é crescente, e que $f(xy) = H_1^{xy}$, por outro lado,

$$H_1^{xy} = H_1^x + H_x^{xy}$$

mas por 15, temos que $H_x^{xy} = H_1^y$, ou seja

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Com isso, temos que f é crescente, que $f(1) = 0$ e que $f(xy) = f(x) + f(y)$, logo, pelo

Teorema 5.3, existe e tal que

$$f(x) = \log_e x.$$

Ou seja, e é o número real, tal que $f(e) = 1$, isto é, o número que deixa a faixa da hipérbole, a partir de 1, com área 1.

Usualmente, nos logaritmos de base 10, omitimos a base, ou seja, $\log_{10} x = \log x$ e o logaritmo natural, isto é, de base e, é escrito apenas como $\ln x$.

Relacionada ao número e, também temos a função exponencial de base e, que é a principal função exponencial que estudamos, visto que esta é encontrada nos estudos de limites bastantes peculiares da Matemática, como por exemplo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

além de aparecer na equação que descreve o comportamento de diversos fenômenos da natureza, de fato, o número e é muito especial.

Exemplo 5.2 (Resfriamento da água) *Uma aplicação interessante para o logaritmo e para funções exponenciais está relacionada ao estudo do resfriamento de corpos. De acordo com os estudos de Newton, a fórmula de resfriamento é dada por*

$$T(t) = T_m + e^{-kt+c},$$

onde, T_m é a temperatura do meio onde o corpo se localiza, $T(t)$ é a temperatura do corpo no instante t, t é o tempo, em minutos, decorrido após o início do resfriamento, k é uma constante que depende do material do corpo e c é uma constante real. Em condições normais de temperatura e pressão, a água ferve a $100°C$ e congela a $0°C$. Suponha que num ambiente de $30°C$ a água esteja fervendo, e após 5 minutos do fogo desligado, sua temperatura caiu de $100°C$ para $65,1°C$, daí, podemos formalizar a equação de resfriamento da água, pois para $t = 0$ e $t = 5$, teremos:

$$\begin{aligned} 100 &= 30 + e^c \Rightarrow e^c = 70 \Rightarrow c = \ln 70 = 4,25 \\ 65,1 &= 30 + e^{-5k+4,25}. \end{aligned}$$

Daí, teremos que

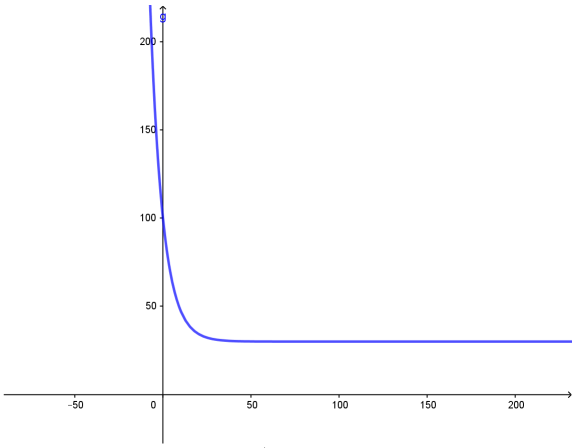
$$-5k + 4,25 = \ln 35,1 \Rightarrow k = 0,139.$$

Com isso, a equação de resfriamento da água é

$$T(t) = T_m + e^{-0,139t+4,25}.$$

O gráfico de resfriamento da água, com temperatura ambiente de $30°C$, em função do tempo, é dada na Figura 13

Figura 13 – Gráfico do resfriamento da água com temperatura ambiente de $30°C$.



Fonte: Autor, 2020.

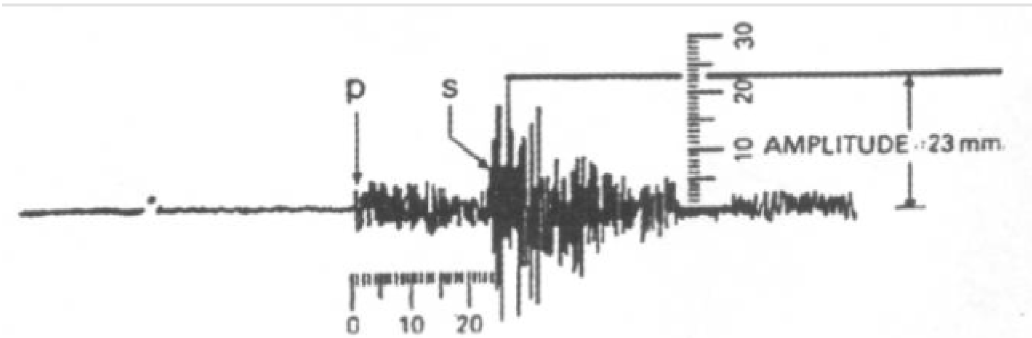
Exemplo 5.3 (Escala Richter) *A escala Richter foi desenvolvida em 1935 pelo sismólogo americano Charles F. Richter, que consiste basicamente na magnitude de uma onda sísmica, ou seja, dá uma ordem de grandeza a abalos sísmicos, através da medição da energia liberada no foco de terremoto. A escala se inicia de zero, teoricamente deveria tender ao infinito, mas na prática, nunca foi registrado um terremoto com magnitude maior que 10 na escala Richter, quanto maior o valor da escala, maior é o tremor. O aparelho utilizado para medir os abalos sísmicos são chamados de Sismógrafos.*

A equação desenvolvida por Richter foi

$$M = \log A + 3\log(8\Delta t) - 2,92,$$

onde M é a magnitude, A é a amplitude, em milímetros, medida pelo sismógrafo, Δt é o intervalo de tempo (em segundos) entre a onda superficial (ou secundária) (S) e a onda de pressão máxima (ou primária) (P). A Figura 14 nos traz como os dados são apresentados num sismógrafo.

Figura 14 – Representação dos dados obtidos no sismógrafo



Fonte: Gentil, Greco e Marcondes (2000).

5.5 PROBLEMAS DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Nesta seção, trabalhamos problemas sobre funções exponenciais e logarítmicas, aplicadas em provas do ENEM e diversos, incluindo Vestibulares e Olimpíadas, sempre relacionadas com as Habilidade e Competências da BNCC.

Problema 5.1 (ENEM 2019) *Hydrangea macrophylla é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH < 7) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH > 7) a flor é rosa. Considere que a Hydrangea cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que $pH = -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H^+). Para produzir a Hydrangea cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma .*

(A) qualquer valor acima de 10^{-8}.
(B) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.
(C) valores maiores que 7 e menores que 8.
(D) valores maiores que 70 e menores que 80.
(E) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

Resolução: De acordo com a Competência de Área 5, Habilidade 22 do ENEM, devemos utilizar o conhecimento algébrico para resolver o problema, além disso, esta questão está contemplada na BNCC na Habilidade (EM13MAT305), de todo modo, o que será fundamental para que o aluno consiga resolver o problema é o conhecimento das propriedades das funções logarítmicas. A primeira observação é que a cor da flor deve ser rosa, ou seja, $pH > 7$, por outro lado, a questão diz que a mais valorizada é a flor que possui $pH < 8$, e com isso, temos uma inequação

$$7 < pH < 8.$$

Como $pH = -\log_{10} x$, temos que

$$7 < -\log_{10} x < 8.$$

Agora, o aluno deve conhecer a relação entre funções exponenciais e logarítmicas, ou seja, que uma é a função inversa da outra, para concluir que $10^{\log_{10} x} = x$, e além disso, saber que toda multiplicação por números negativos em uma inequação deve-se inverter o sinal de desigualdade, assim, podemos multiplicar a inequação por -1, e ficamos com

$$-8 < \log_{10} x < -7,$$

daí, o aluno deve saber que a função exponencial é uma função crescente, para poder escrever a inequação como potência de 10, ou seja,

$$10^{-8} < 10^{\log_{10} x} < 10^{-7} \Rightarrow 10^{-8} < x < 10^{-7}.$$

Assim, a resposta correta é o item (E).

Comentário: Como professor de Matemática, consideramos esta questão um exercício simples, mas porque somos professores de Matemática e conhecemos as ferramentas básicas para resolver o problema, mas para o aluno não tão, digamos, simpatizante da Matemática, esta questão se torna difícil, isto se deve ao fato de que, embora ferramentas simples, são várias ferramentas usadas para resolver tal questão, que muitas vezes passam despercebido por nós mesmo, pois precisamos utilizar, por exemplo, as propriedades das funções logarítmicas, a relação entre função exponencial e logarítmica, inequações e propriedades das funções exponenciais de tal modo, que pelo caminho escolhido para resolver esta questão, o desconhecimento de alguma dessas propriedades citadas, leva o aluno a errar a questão. Por fim, vemos que uma questão como esta, mais simples, trabalha pelo menos três Habilidades que os alunos do ensino médio devem conhecer.

Problema 5.2 (ENEM 2019:) *Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.*

Descrição	Magnitude local (M_s) (μm · Hz)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3,9$
Ligeiro	$4,0 \leq M_s \leq 4,9$
Moderado	$5,0 \leq M_s \leq 5,9$
Grande	$6,0 \leq M_s \leq 9,9$
Extremo	$M_s \geq 10,0$

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3,30 + \log(A \cdot f)$, *em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de* $2000\mu m$ *e frequência de* $0,2Hz$.

Utilize 0,3 como aproximação para $\log 2$.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

(A) Pequeno

(B) Ligeiro
(C) Moderado
(D) Grande
(E) Extremo

Resolução: De acordo com a Competência de Área 6, Habilidade 24 de Matemática no ENEM e na BNCC, encontramos este assunto na Competência de Área 3, Habilidade (EM13MAT305), onde trata claramente este tipo de problema.

Aqui, o fundamental é o aluno conhecer as propriedades da função logarítmica, para o restante é uma simples aplicação da fórmula, ou seja,

$$M_s = 3,3 + \log(2000 \cdot 0,2),$$

$$M_s = 3,3 + \log(400).$$

Observando que $400 = 10^2 \cdot 2^2$, obtemos que

$$\begin{aligned} M_s &= 3,3 + \log(10^2 \cdot 2^2) \\ M_s &= 3,3 + \log 10^2 + \log 2^2 \\ M_s &= 3,3 + 2 + 2 \cdot 0,3 \\ M_s &= 5,9 \mu m \cdot Hz. \end{aligned}$$

Assim, de acordo com a tabela apresentada na questão, o terremoto está classificado como moderado, e portanto a alternativa correta é o item (C).

Comentário: Observando a questão, vemos que é necessário que o aluno conheça as propriedades dos logaritmos, para transformar produto em soma, além de ter a ideia de fatorar o 400, que pode ter essa necessidade exposta pelo fato da questão dar um valor para $\log 2$, ou seja, de alguma maneira este logaritmo deveria aparecer na resolução. Estes detalhes são de fundamental importância para o aluno, por isso é importante que o professor auxilie seus alunos em relação a estes detalhes. Se o problema lhe der um dado, você provavelmente precisa usar tal dado na resolução, embora nem sempre isso é verdade. A partir do resultado obtido para M_s, o aluno só precisa observar na tabela onde o valor encontrado se encaixa, ou seja, ter uma noção mínima de desigualdades, mas espera-se que o aluno que conhece as propriedades dos logaritmos, tenha um certo conhecimento de desigualdades, e assim a questão se torna fácil.

Se por outro lado o aluno não conhece as propriedades de funções logarítmicas, supondo que ele saiba multiplicação de números decimais, a dificuldade que ele encontrará é para obter o $\log 400$, neste ponto ele precisa ter pelo menos a ideia do que significa o logaritmo de um número, para tentar responder a questão por tentativas. Deste modo, qual é o número que sendo expoente de 10, é mais próximo ou igual a 400? certamente é maior que 2 e menor que 3, deste modo, como ele ao final ainda deve somar 3,3, o valor de M_s está entre 5,3 e 6,3, ou seja, já sabemos que o terremoto ou será moderado ou grande. Observe que para ser grande, o M_s deve ser no mínimo 6, ou seja, o $\log 400$ deve ser pelo menos 2,7 e para ser moderado, deve ser no máximo 2,6. Obviamente, neste ponto, para um aluno com dificuldades ele já reduziu as possibilidades de respostas para apenas 3 itens, descartando 3, logo ele já possui 50% de chance de acerto. O crescimento exponencial é bem considerável, observamos que

$$2,5 < 2,6 < 2,7.$$

E quanto vale $10^{2,5}$?, veja que

$$10^{2,5} = 10^{5/2} = \sqrt{10^5} = 100\sqrt{10} \approx 316.$$

Ou seja, falta pouco menos de 84 para chegar em 400, daí o aluno poderia conjecturar que para $10^{2,7}$, o valor obtido ultrapasse 400. De todo modo, é necessário que o aluno tenha conhecimento de função exponencial e mais ainda, saber que, neste caso, ela possui um grande crescimento.

Problema 5.3 (ENEM 2018) *Com o avanço em ciências da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.*
Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100.000 transistores distribuídos em $0,25\,cm^2$ *de área. Desde então o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).*
Disponível em: www.pocket-lint.com. Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).
Considere $0,30$ *como aproximação para* $\log_{10} 2$.
Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 *bilhões de transistores?*
(A) 1999
(B) 2002
(C) 2022
(D) 2026
(E) 2146

Resolução: Utilizaremos a Competência de Área 5, Habilidade 21 do ENEM, juntamente com a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT305) da BNCC para resolver o

problema que envolve funções logarítmicas.
O problema nos diz que a cada 2 anos o número de transistores dobra, logo, sendo t_0 o total de transistores no período inicial, temos que o número de transistores t é dado por

$$t = 2^{\frac{n}{2}} t_0,$$

onde n representa o total de anos após 1986. Veja que neste ano temos

$$\frac{100.000}{0,25} \frac{tr}{cm^2} = 400.00 \frac{tr}{cm^2},$$

ou seja, $t_0 = 400.000\, tr/cm^2$. Como 100 bilhões é 10^{11}, o problema pede

$$10^{11} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot 400.000 \Rightarrow 10^{11} = 2^{\frac{n}{2}} 4 \cdot 10^5.$$

Simplificando, obtemos

$$2^{\frac{n}{2}+2} = 10^6.$$

Aplicando o logaritmo de base 10 em ambos os membros, obtemos

$$\left(\frac{n}{2} + 2\right) \log 2 = \log 10^6 \Rightarrow \frac{n}{2} + 2 = \frac{6}{0,3} = 20.$$

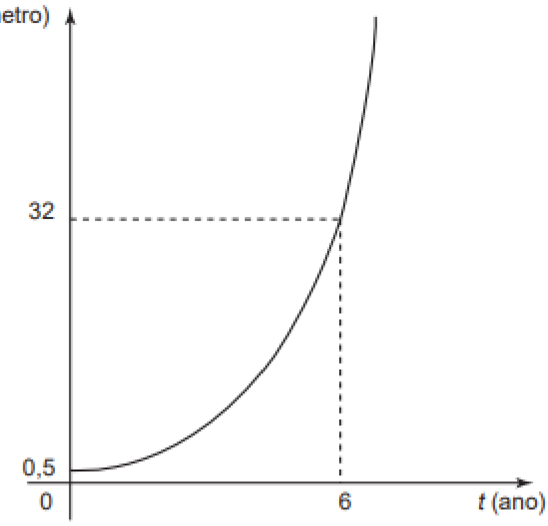
Daí, temos que

$$\frac{n}{2} = 18 \Rightarrow n = 36.$$

Logo, o ano que o número de transistores será de 100 bilhões por cm^2 será em $1986 + 36 = 2022$, logo, a alternativa correta é o item (C). ■

Comentário: Todos os problemas que envolvem funções exponenciais e logarítmicas são um pouco mais complexos, pois quase sempre exigem que o aluno modele uma equação para o problema, que neste caso era obter que $t = 2^{\frac{n}{2}} t_0$, sem isto, seria bem mais trabalhoso resolver o problema. Além disso, o aluno deveria conhecer bem ordem de grandeza e as propriedades das funções logarítmicas. Portanto, é de fundamental importância trabalhar com nossos alunos problemas contextualizados sobre estes tipos de funções, que trabalhem, principalmente, as propriedades da função e modelagem do problema. Outro ponto importante a se notar, é que o problema não dava o número de transistores por cm^2 e sim por $\frac{1}{4}cm^2$, e o aluno deveria estar atento ao enunciado para fazer este ajuste, uma vez que ele poderia fazer os cálculos com 100.000 transistores por cm^2 o que os levaria ao erro, e por isso, é muito importante que os professores trabalhem com seus alunos a interpretação do enunciado do problema, pois, principalmente na Matemática, os alunos não compreendem nem sequer o que a questão está pedindo, sem dúvida, isto é algo que devemos trabalhar em nossas aulas, sobretudo, no momento de resolução de problemas.

Problema 5.4 (ENEM 2016-2ª Aplicação) *Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y.*



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem $7,5\,m$ após o plantio.
O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

(A) 3
(B) 4
(C) 6
(D) $\log_2 7$
(E) $\log_2 15$

Resolução: Utilizaremos a Competência de Área 5, Habilidade 21, do ENEM, juntamente com a Competência Específica 3 Habilidade (EM13MAT304) da BNCC, na qual usaremos as propriedades das funções exponenciais para resolução de problemas.

Observando o gráfico, podemos extrair duas informações:

$$\begin{aligned} y(0) = 0,5 \Rightarrow a^{-1} &= 0,5 \\ y(6) = 32 \Rightarrow a^{5} &= 32 \Rightarrow a = 2. \end{aligned}$$

Assim, a função de y é tal que $y(t) = 2^{t-1}$. A primeira informação acima, diz que as mudas são plantadas com $0,5\,m$, quando elas crescem $7,5\,m$, ficam com $8\,m$ de altura, ou seja, queremos t, tal que $y(t) = 8$, ou seja,

$$2^{t-1} = 8 = 2^3 \Rightarrow t - 1 = 3 \Rightarrow t = 4.$$

Logo, a alternativa correta é o item (B). ■

Comentário: É uma questão bastante simples, na qual o aluno deve apenas observar a função e seu gráfico, bem como aplicar os valores na função. E por fim, lembrar que quando a muda é plantada, já possui $0,5\,m$, pois com isto, ele(a) chegará aos $8\,m$. Neste sentido, conhecendo um pouco da complexidade que envolve os problemas de funções exponenciais e logarítmicas, é necessário, pelo menos, conhecer as propriedades básicas destas funções bem como a interpretação de seu gráfico.

Problema 5.5 (ENEM 2016-1ª Aplicação) *Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de* $3.000°C$ *e diminui* 1% *de sua temperatura a cada* $30\,min$. *Use* $0,477$ *como aproximação para* $\log_{10}(3)$ *e* $1,041$ *como aproximação para* $\log_{10}(11)$. *O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja* $30°C$ *é mais próximo de*

(A) 22.
(B) 50.
(C) 100.
(D) 200.
(E) 400.

Resolução: Utilizaremos a Competência de Área 5, Habilidade 21 do ENEM, juntamente com a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT305) da BNCC para resolver este problema.

Inicialmente, observamos a temperatura inicial $t_0 = 3000°C$ da liga, e que a cada 30 min. a temperatura cai 1%, ou seja, a cada $0,5\,h$ cai 1% da temperatura da liga metálica. Devemos pois, definir uma função de t com este comportamento, tal que para $t = 0$ tenhamos $f(0) = 3.000$ e que a cada $\frac{1}{2}$ hora, a temperatura seja 99% da temperatura anterior, vamos observar o seguinte:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 3\cdot 10^3 = \left(\frac{99}{100}\right)^0 = t_0,\\
f(1/2) &= \left(\frac{99}{100}\right)f(0),\\
f(1) &= \left(\frac{99}{100}\right)f(1/2) = \left(\frac{99}{100}\right)^2 f(0),\\
f(3/2) &= \left(\frac{99}{100}\right)f(1) = \left(\frac{99}{100}\right)^3 f(0),\\
&\vdots\\
f\left(n\cdot\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{99}{100}\right)^n f(0).
\end{aligned}$$

Daí, basta associar o valor de n a cada valor de t, a cada meia hora, ou seja,

$$\begin{aligned} t &= 0 \Rightarrow n = 0, \\ t &= \frac{1}{2} \Rightarrow n = 1. \\ t &= \frac{3}{2} \Rightarrow n = 2, \\ &\vdots \\ t &= m\frac{1}{2} \Rightarrow n = m. \end{aligned}$$

Daí, temos que $n = 2t$ de onde encontramos a função que descreve o problema, que é

$$f(t) = \left(\frac{99}{100}\right)^{2t} t_0 = \left(\frac{99}{100}\right)^{2t} 3 \cdot 10^3.$$

Como, queremos obter t, tal que $f(t) = 30$, temos que

$$\begin{aligned} 30 &= \left(\frac{99}{100}\right)^{2t} 3 \cdot 10^3 \Rightarrow 1 = \left(\frac{99}{100}\right)^{2t} \cdot 10^2 \\ \Rightarrow \log_{10} 1 &= \log_{10} \left[\left(\frac{99}{100}\right)^{2t} \cdot 10^2\right] \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \log_{10} 1 &= 0 \\ \log_{10} \left[\left(\frac{99}{100}\right)^{2t} \cdot 10^2\right] &= \log_{10} \left(\frac{99}{100}\right)^{2t} + \log_{10} 10^2. \end{aligned}$$

E também

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{99}{100}\right)^{2t} &= 2t\Big(\log_{10} 99 - \log_{10} 100\Big), \\ \log_{10} 10^2 &= 2. \end{aligned}$$

Porém

$$\log_{10} 99 = \log_{10} 3^2 \cdot 11 = 2\log_{10} 3 + \log_{10} 11.$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= 2t(2\log_{10} 3 + \log_{10} 11 - 2) + 2 \\ -1 &= t(2(0,477) + 1,041 - 2) \\ \Rightarrow t &= \frac{-1}{-0,005} = 200. \end{aligned}$$

Logo, para chegar a $30°C$ são necessárias 200 horas. A alternativa correta é o item (D).■

Comentário: Este problema é bastante interessante, devido a riqueza de informações necessárias para sua resolução. Sem dúvida, não é um problema fácil, pelo contrário, exige um amadurecimento matemático considerável, bem como o conhecimento das propriedades das funções logarítmicas, mas a dica para este tipo de problema é sempre escrever alguns termos da sequência que se forma quando variamos o t, pois com isto, conseguimos enxergar um padrão, e portanto modelar o problema, obtendo assim, uma função que descreve o comportamento dado no problema. Se o aluno for atento, ele pode perceber que a sequência se trata de uma P.G (Progressão Geométrica) e sem dúvida, ele pode partir para outro tipo de resolução, talvez mais simples que a apresentada aqui, mas quanto mais conhecimento melhor. Fica, portanto, nossa contribuição para a resolução utilizada para este tipo de problema, de modelagem.

Problema 5.6 (ITA, 2020) *Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 números reais tais que $2^{x_1} = 4; 3^{x_2} = 5; 4^{x_3} = 6; 5^{x_4} = 7; 6^{x_5} = 8$ e $7^{x_6} = 9$. Então, o produto $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ é igual a*

(A) 6.
(B) 8.
(C) 10.
(D) 12.
(E) 14.

Resolução: Utilizaremos da Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT305) da BNCC para resolver este problema, que envolverá as propriedade de funções logarítmicas.

Quando queremos isolar um expoente, obviamente trabalhamos a função inversa da exponencial, ou seja, a função logarítmica, com o detalhe que a base do logarítmico deve ser igual a base da exponencial, assim, temos

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \log_2 4. \\
x_2 &= \log_3 5. \\
x_3 &= \log_4 6. \\
x_4 &= \log_5 7. \\
x_5 &= \log_6 8. \\
x_6 &= \log_7 9.
\end{aligned}
$$

Se formos tentar multiplicar as incógnitas, teremos o produto de logaritmos, no qual temos uma propriedade, mas para o caso da base ser a mesma, o que não é o caso. Prestando bastante atenção, vemos três números pares e três ímpares, no qual revezam entre a base e o logaritmando, e isto nos remete a mudança de base, uma vez que

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \Rightarrow \log_c a = \log_b a \, \log_c b.$$

Assim, vemos uma propriedade para produto de funções logarítmicas para bases diferentes, com isso, temos que

$$\begin{aligned} \log_2 4 \, \log_4 6 &= \log_2 6. \\ \log_3 5 \, \log_5 7 &= \log_3 7. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = \log_2 6 \, \log_6 8 \, \log_3 7 \, \log_7 9.$$

Usando a mesma propriedade, obtemos que

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = \log_2 8 \, \log_3 9 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Logo, a alternativa correta é o item (A). ■

Comentário: Muitos problemas na Matemática possuem uma propriedade em comum com este problema, que é a simplicidade na sua resolução quando entendemos a ideia de resolução do problema. Quando vemos o problema, podemos ficar meio perdidos, sem saber por onde começar, mas nos problemas de Matemática, nada é por acaso, inclusive o fato de em um momento a base se tornar logaritmando, daí, bastava lembrar em que propriedade do logaritmo isto acontece, que no caso é na propriedade de mudança de base, e sem isto, o aluno não consegue resolver o problema. Contudo, é muito interessante que nos problemas em que o professor passe em suas turmas, sempre tenha pelo menos uma questão que exija que o aluno domine as propriedades existentes, mas sobretudo, que exija que o aluno modele o problema para poder enxergar onde usar a propriedade. Desta forma o aluno melhora muito sua capacidade de resolução de problemas matemáticos.

Problema 5.7 (IME, 2019/2020.) *Sabe-se que $S = x+y+z$, onde x, y e z são soluções inteiras do sistema abaixo*

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} \\ y = e^{2\ln x} \\ \log_2 y + \log_x z = x + 3 \end{cases}$$

O valor de S é

(A) 84

(B) 168
(C) 234
(D) 512
(E) 600

Resolução: Utilizaremos, novamente, a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT305) para resolver este problema que basicamente envolve manipulação algébrica e propriedades dos logaritmos.

Pelo sistema dado, temos que

$$x^3 = \frac{2y^2}{8} \Rightarrow y^2 = 4x^3. \tag{16}$$

Agora usaremos uma propriedade importante dos logaritmos, que

$$y = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2 \Rightarrow y = x^2. \tag{17}$$

A partir das Eq.16 e Eq. 17, e pelo fato de que $x \neq 0$, temos que

$$x^4 = 4x^3 \Rightarrow x = 4.$$

Segue daí, que $y = 16$. Com isso, a última equação do sistema, fica

$$\log_2 16 + \log_4 z = 7.$$

Como $\log_2 16 = 4$, temos que

$$\log_4 z = 7 - 4 \Rightarrow z = 4^3 = 64.$$

Com isso, $S = x + y + z = 4 + 16 + 64 = 84$, logo, a alternativa correta é o item (A). ■

Comentário: Como já devem ter percebido, as Habilidades Específicas para resolver determinados tipos de problemas são com frequência usadas. O fato é que a BNCC em alguns assuntos não aprofunda tanto, no mais, se resume a resolver problemas envolvendo assunto tal, e não, por exemplo, resolver problemas usando as propriedades da função tal, ou identificar a imagem/domínio de uma função qualquer. Por isso, para resolver problema diversos de funções exponenciais e logarítmicas utilizamos basicamente a mesma Habilidade da BNCC.

No problema em questão, o que basicamente usamos foi manipulação algébrica e uma propriedade de logaritmo para obter x e y e a partir daí, a definição de logaritmo para obter z. Existem outras maneiras de resolver o problema, porém, exigem mais Habilidade por parte dos alunos, pois envolvem mais propriedades. Quem presta Vestibular para o IME, de fato deve estar bem preparado e isto deve se tornar bem claro, mas o intuito é mostrar que até mesmo nos Vestibulares mais difíceis, cumprindo a BNCC, o aluno é totalmente capaz de ingressar em qualquer instituição de ensino superior, se assim ele desejar.

Problema 5.8 (FUVEST, 2019-1ª Fase.) *Se* $\log_2 y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x$, *para* $x > 0$, *então*

(A) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}$.

(B) $y = \sqrt{\frac{x^3}{2}}$.

(C) $y = -\frac{1}{2} + \sqrt[3]{x^2}$.

(D) $y = \sqrt{2}\sqrt[3]{x^2}$.

(E) $\sqrt{2x^3}$.

Resolução: Mais uma vez usaremos a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT305) para resolver este problema, que envolve, basicamente, manipulação algébrica e propriedades dos logaritmos.

Observe que

$$\frac{1}{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}},$$

com isto, temos que

$$y = \log_2 x^{\frac{2}{3}} - \log_2 2^{\frac{1}{2}}.$$

Usando a propriedade da diferença de logaritmos, temos que

$$\log_2 y = \log_2 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}.$$

Segue da injetividade da função logarítmica que

$$y = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}.$$

Logo, a alternativa correta é o item (A). ■

Comentário: Para resolver este problema, usamos basicamente uma pequena manipulação algébrica, que foi ver a fração $\frac{1}{2}$ como um logaritmo de base 2. E a partir daí, usamos apenas propriedades e definição de logaritmo. Mas podemos resolver o problema de outra forma, por exemplo, isolando a fração, mas a ideia é justamente mostrar para o aluno que existem problemas no qual devemos ver números com outros olhos, como vimos na fração, pois muitos problemas são resolvidos desta forma. Sem dúvida, esta é uma das grandes dificuldades que nossos alunos enfrentam, pois muitas vezes, lhes faltam ver, por exemplo, 10 como $5 + 5$ ou $2 \cdot 5$, e acreditamos que este tipo de solução deve ser abordada pelos professores, seja por meio de suas aulas de resolução de equações, ou em turmas com maiores Habilidades matemáticas.

Problema 5.9 (UECE, 2020.1-2ª Fase.) *Se o número real k é a solução da equação $9^{\sqrt{x}} - 8.3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$, então, o número k cumpre a seguinte condição:*
(A) $1,5 < k < 3,5$.
(B) $7,5 < k < 9,5$.
(C) $5,5 < k < 7,5$.
(D) $3,5 < k < 5,5$.

Resolução: Utilizaremos a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT304) da BNCC para resolver o problema que envolve função exponencial e suas propriedades.

A primeira observação a se fazer é que

$$9^{\sqrt{x}} = 3^{2\sqrt{x}} = \left(3^{\sqrt{x}}\right)^2.$$

Com isso, chamando $y = 3^{\sqrt{x}}$, obtemos uma equação do segundo grau em y, que é

$$y^2 - 8y - 9 = 0.$$

Na qual possui raízes $y = 4$ ou $y = -1$, daí, temos que

$$3^{\sqrt{x}} = 4 \Rightarrow x = 4,$$

ou que

$$3^{\sqrt{x}} = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}.$$

Com isso, temos que $x = 4$ é a solução da equação, logo, $k = 4$, daí, temos que $3,5 < k < 5,5$, e portanto a alternativa correta é o item (D). ■

Comentário: A resolução desta questão, resolve não apenas as Habilidades sobre a exponenciação, mas também de resolução de funções quadráticas, bem como de uma pequena manipulação algébrica, para renomear uma incógnita. É um problema clássico sobre resolução de problemas de exponenciais, na qual transformamos a base em algo útil para resolução, e esta maturidade deve ser desenvolvida pelos alunos, ou seja, usar a álgebra para simplificar um problema, certamente é uma Habilidade que poucos conseguem, mas não podemos deixar de fora os que possuem esta capacidade. Por outro lado, vemos a necessidade do domínio das propriedades de uma função exponencial, que sem isto poderia se tornar impossível a resolução do problema. Sabemos das dificuldades que os professores possuem em sala, em relação ao aprendizado dos alunos, mas como podemos ver, este tipo de questão é de uma prova específica, logo, é algo que quem deseja ingressar no ensino superior, com disciplina de Matemática, deve saber. Contudo, fica a critério do professor elaborar estratégias de ensino para alunos com grau de aprendizado diferente, em Matemática, de modo que os menos aptos não se sintam abandonados e os mais habilidosos aperfeiçoem seu aprendizado. Uma dica é a orientação extraclasse, que para todo professor que ama a profissão é mais uma forma de prazer do que de dever.

Problema 5.10 (UNICAMP, 2020-1ª Fase.) *Tendo em vista que a e b são números reais positivos $a \neq b$, considere a função $f(x) = ab^x$, definida para todo número real x. Logo, $f(2)$ é igual a*
(A) $\sqrt{f(1)f(3)}$.
(B) $f(3)/f(0)$.
(C) $f(0)f(1)$.
(D) $f(0)^3$.

Resolução: Novamente, usaremos a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT304) da BNCC, para nos auxiliar na resolução deste problema, que envolve a função do tipo exponencial.

A primeira observação a ser feita é a substituição do valor $x = 2$, para sabermos o que procuramos, ou seja,

$$f(2) = ab^2.$$

Agora, basicamente o que faremos é analisar os valores da função nos itens, logo,

$$\begin{aligned} f(0) &= ab^0 = a. \\ f(1) &= ab^1 = ab. \\ f(3) &= ab^3. \end{aligned}$$

Daí, basta analisar os itens e ver qual nos dá $f(2) = ab^2$, assim, observe que

$$f(1)f(3) = (ab)(ab^3) = a^2b^4 = \left(ab^2\right)^2.$$

Como a e b são reais positivos, podemos extrair a raiz, logo, obtemos que

$$\sqrt{f(1)f(3)} = \sqrt{\left(ab^2\right)^2} = ab^2 = f(2).$$

Portanto, a alternativa correta é o item (A). ■

Comentário: Se trata de uma questão simples, que apenas precisamos substituir os valores de x, que é o mínimo que se deve saber em relação a funções. Por outro lado, vale ressaltar a importância de se ter $a \neq b$, pois se isto não fosse dito, qualquer um dos itens poderia ser correto. Aqui, ressaltamos a importância de conhecer bem pelo menos o básico, pois até mesmo os alunos que não adquiriram muita aptidão para a

Matemática, conseguiriam resolver o problema, conhecendo a radiciação e as propriedades da exponenciação e mais uma vez ressaltamos a importância de resolver problemas que abordem mais de um conteúdo específico, pois desta forma trabalhamos mais ferramentas em uma única oportunidade, mas com muita sabedoria, para não tornar o problema exaustivo.

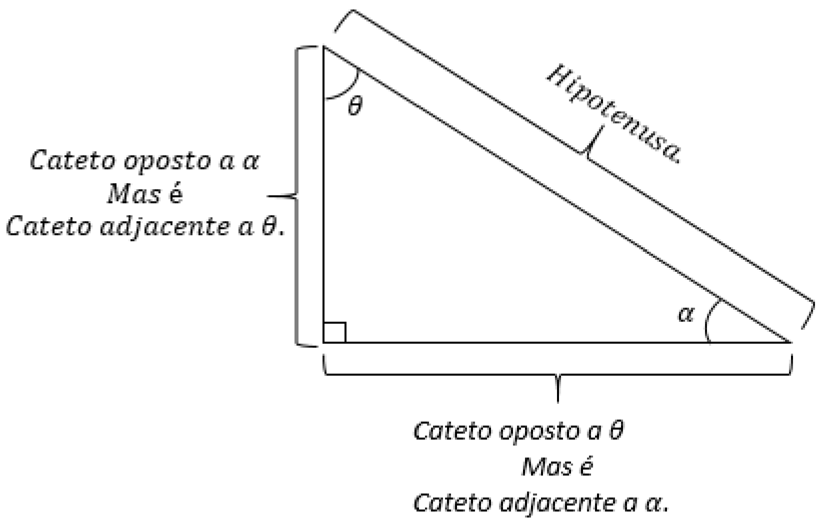
6 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo, falamos um pouco sobre as funções trigonométricas, estas tão presentes em nosso cotidiano. Falaremos de alguns aspectos teóricos e vamos associá-los à prática. As relações desenvolvidas na trigonometria serviram não só para o desenvolvimento da geometria, mas principalmente para o desenvolvimento do Cálculo, em particular o famoso Teorema de Pitágoras.

6.1 INTRODUÇÃO AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Iniciaremos o tratamento das funções trigonométricas no ambiente em que a definimos: no triângulo retângulo. O triângulo retângulo possui um ângulo reto e dois ângulos agudos. O lado oposto ao ângulo reto chamamos de hipotenusa do triângulo. Em relação aos outros dois lados, eles poderão ser chamados de cateto adjacente ou cateto oposto, tudo depende do ângulo no qual estamos tomando como referência. O cateto oposto, é o lado oposto ao ângulo agudo tomado como referência, e o cateto adjacente, como o próprio nome diz, é o cateto que é adjacente ao ângulo agudo tomado como referência. A Figura 15 nos traz a representação desta nomenclatura no triângulo retângulo.

Figura 15 – Representação dos catetos no triângulo retângulo



Fonte: Autor, 2020.

Agora definimos as razões trigonométricas seno e cosseno a partir do triângulo retângulo.

Definição 6.1 *O número real* $\operatorname{sen}\theta$ *é a razão entre o cateto oposto a* θ *e a hipotenusa, ou seja*

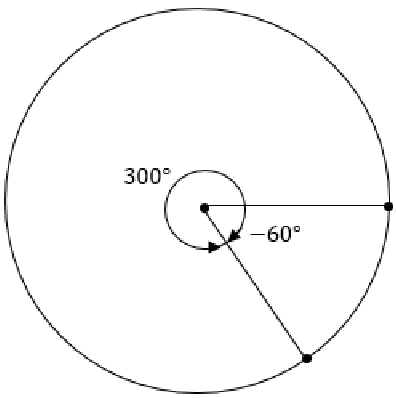
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{Cateto\ Oposto\ a\ \theta}{Hipotenusa}$$

Analogamente, $\cos\theta$ *é o numero real dado pela razão entre o cateto adjacente a* θ *e a hipotenusa, ou seja*

$$\cos\theta = \frac{Cateto\ Adjacente\ a\ \theta}{Hipotenusa}.$$

Um ângulo pode ser representado em graus ou em radianos. Em graus, sabemos que ele varia de $0°$ a $360°$, e que a partir destes valores temos apenas ângulos equivalentes, por exemplo, $400° = 360° + 40°$ e como uma volta completa de arco equivale a $360°$, após isto a contagem do ângulo reinicia, ou seja, $400° \equiv 40°$. Outra observação importante, é em relação a ângulos negativos. O fato é que o sentido padrão de medição de ângulo é o sentido anti-horário, e os ângulos negativos, na verdade são ângulos cuja medição seguiu o sentido horário, e com isso, se um ângulo medir $-60°$, na verdade é $60°$ medido no sentido horário, e obviamente seu valor positivo é $360° - 60° = 300°$. A Figura 16 ilustra esta ideia.

Figura 16 – Representação de $-60°$ no círculo.



Fonte: Autor, 2020.

Usar o círculo para representação de ângulos é importante, partindo do princípio que o círculo foi divido em 360 partes iguais e cada parte representa $1°$, é importante que o professor comente isto com seus alunos, para eles terem a ideia de como surgiu o grau.

Em todo triângulo retângulo vale o Teorema de Pitágoras, ou seja, que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos. Com isso, considere o triângulo retângulo ABC, de hipotenusa c e catetos a e b. Daí, temos que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Sendo α um dos ângulos agudos, podemos supor, oposto ao lado a, daí, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos\alpha &= \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

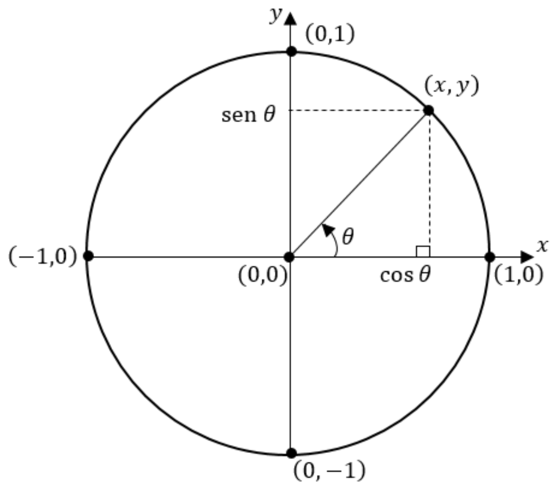
Daí, temos que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$$

que é a chamada Relação Fundamental da Trigonometria.

Quando vemos a relação fundamental e lembrando da equação da circunferência de raio 1, ou seja, $x^2 + y^2 = 1$, podemos observar que todos os valores de seno e cosseno estão contidos nesta circunferência. Partindo desta ideia, podemos construir um circulo unitário em coordenadas cartesianas, como mostrado na Figura 17.

Figura 17 – Representação de seno e cosseno no círculo unitário.



Fonte: Autor, 2020.

Como comentado anteriormente, outra forma de expressarmos os ângulos é em radianos, que é a forma mais usual na Matemática. 1 radiano, ou simplesmente 1 rad, é tal que 2π rad=360°, basta observar que o comprimento da Circunferência é 2π, e é dividida em 360°.

6.2 A FUNÇÃO DE EULER

Na seção anterior, definimos o numero real $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ como sendo a razão entre determinados lados de um triângulo retângulo. Porém tal definição possui certos "problemas", por exemplo, qual seria o significado de $\operatorname{sen}(-60°)$? Existe um triângulo com ângulo negativo? Bom, pela definição dada de ângulo negativo, poderíamos responder que o ângulo apenas foi medido no sentido horário, certo? Bom, nesse caso, teríamos na verdade $\operatorname{sen}(300°)$, mas existe triângulo com tal ângulo? Certo que não. Por isso definiremos de modo mais completo as funções trigonométricas.

Definição 6.2 *A função que relaciona qualquer número real a pontos da circunferência unitária é chamada de Função de Euler, dada por*

$$E : \mathbb{R} \to C; E(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x),$$

onde C é a circunferência unitária.

Nesse caso, quando calculamos a imagem de uma função, o valor de x é dado em radianos.

Observando a Figura 17, podemos notar que a medida que percorremos a circunferência, os valores de seno e cosseno se repetem mais de uma vez até completar uma volta. Daí, podemos afirmar que as funções trigonométricas seno e cosseno são periódicas, de período 2π, ou seja,

$$\operatorname{sen}(\theta + 2k\pi) = \operatorname{sen}\theta, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Perceba que

$$\cos 0 = 1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2},$$

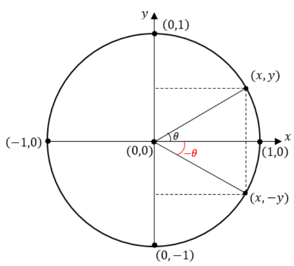
$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 = \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}\pi = \cos\frac{3\pi}{2},$$

e por fim, que

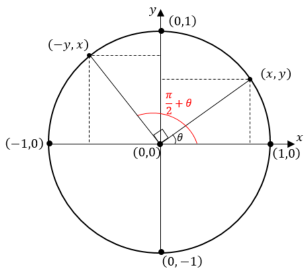
$$\cos\pi = -1 = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}.$$

Algumas propriedades importantes de seno e cosseno, podem ser observadas a partir das imagens da Figura 18.

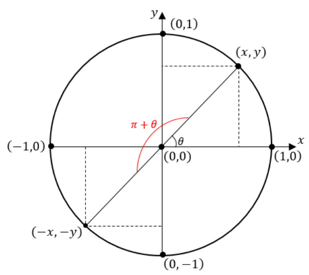
Figura 18 – Comportamento dos pontos da circunferência através de um deslocamento angular.



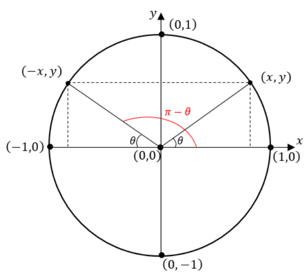
(a) Descolamento de $-\theta$



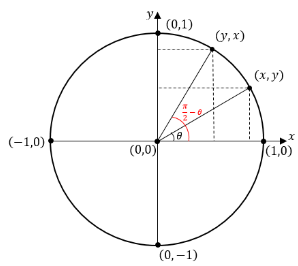
(b) Descolamento de $\dfrac{\pi}{2}+\theta$



(c) Descolamento de $\pi+\theta$



(d) Descolamento de $\pi-\theta$



(e) Descolamento de $\dfrac{\pi}{2}-\theta$

Fonte: Autor, 2020.

Da Figura 18, podemos notar algumas relações importantes das funções seno e cosseno, que são:

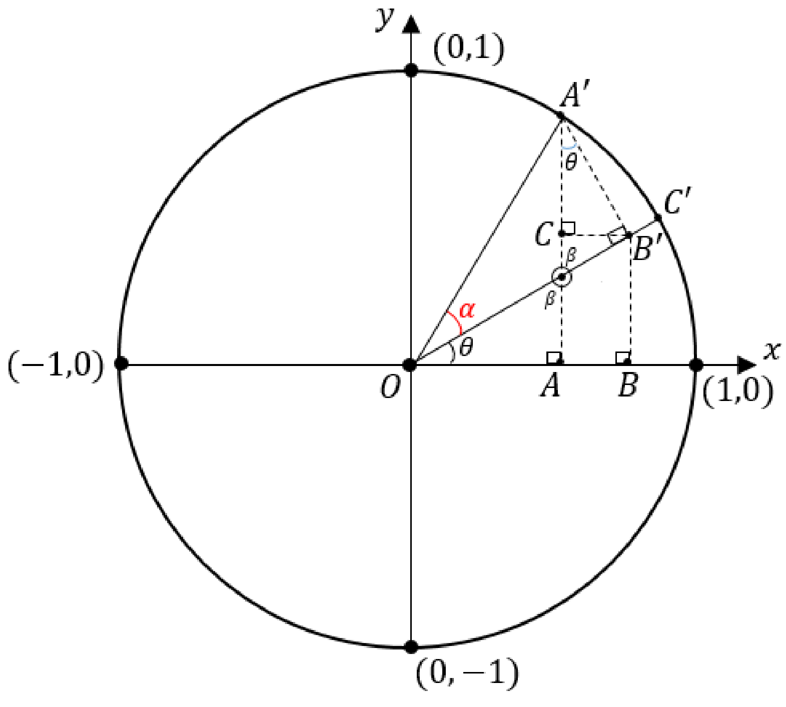
$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen}\theta & \cos(\pi+\theta) &= -\cos\theta \\
\cos(-\theta) &= \cos\theta & \operatorname{sen}(\pi-\theta) &= \operatorname{sen}\theta \\
\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+\theta) &= \cos\theta & \cos(\pi-\theta) &= -\cos\theta \\
\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) &= -\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\theta) &= \cos\theta \\
\operatorname{sen}(\pi+\theta) &= -\operatorname{sen}\theta & \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) &= \operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}
$$

Com isso, vemos que a função seno é uma função ímpar, ou seja, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e que a função cosseno é uma função par, ou seja, $\cos(-x) = \cos x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Além disso, vemos que a imagem de $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$, são os valores reais y, tais que $-1 \leq y \leq 1$, como podemos ver pela Figura 18.

Agora veremos as fórmulas da adição de ângulos, para estas funções, e para tanto, vamos analisar a Figura 19.

Figura 19 – Construção da fórmula da soma de ângulos.



Fonte: Autor, 2020.

Perceba que $\overline{A'B'} \perp \overline{OC'}$ e que $\overline{CB'} \perp \overline{AA'}$, daí, podemos tirar algumas conclusões:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\theta) &= \overline{OA} \\
\cos\theta &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\cos\alpha} \Rightarrow \overline{OB} = \cos\alpha\cdot\cos\theta \\
\operatorname{sen}\theta &= \frac{\overline{CB'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \overline{AB} = \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

E como $\overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB}$, temos que

$$\cos(\alpha+\theta) = cos\alpha\cdot\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta.$$

E consequentemente, usando a paridade das funções, temos que

$$\cos(\alpha-\theta) = \cos(\alpha+(-\theta)) = cos\alpha\cdot\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta.$$

Para a fórmula do seno, uma vez que $\operatorname{sen} x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\theta) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+(\alpha+\theta)\right) = -\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\theta\right) \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\theta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{sen}\theta \\
\therefore \operatorname{sen}(\alpha+\theta) &= \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Daí, temos também que

$$\operatorname{sen}(\alpha-\theta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta - \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta.$$

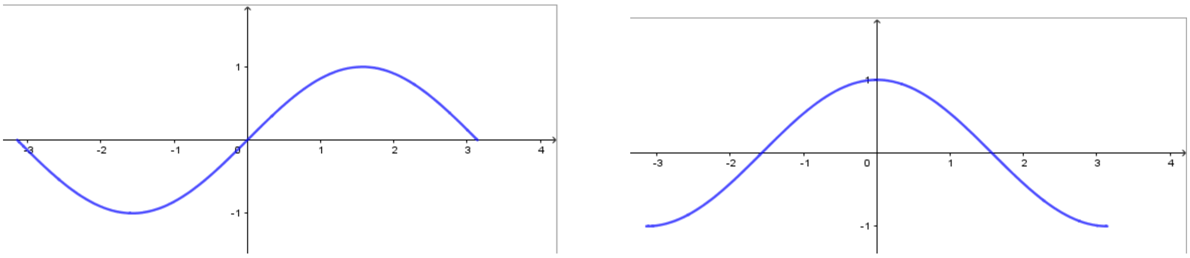
Para obter as fórmulas da soma, utilizamos o fato dos ângulos envolvidos serem positivos e menores que $\frac{\pi}{2}$, mas todos os outros casos podem ser reduzidos a este.

Embora seja comum utilizarmos uma calculadora científica para calcular o seno e cosseno de um número ou ângulo, é bom termos em mente alguns valores de seno e cosseno, como por exemplo, os valores de x, tais que:

$$\begin{aligned}
\cos x &= 0 & \qquad \operatorname{sen} x &= 0 \\
\cos x &= 1 & \qquad \operatorname{sen} x &= 1 \\
\cos x &= -1. & \qquad \operatorname{sen} x &= -1
\end{aligned}$$

Os gráficos das funções seno e cosseno, no intervalo $[-\pi,\pi]$ são dadas pela Figura 20.

Figura 20 – Gráficos de seno e cosseno.

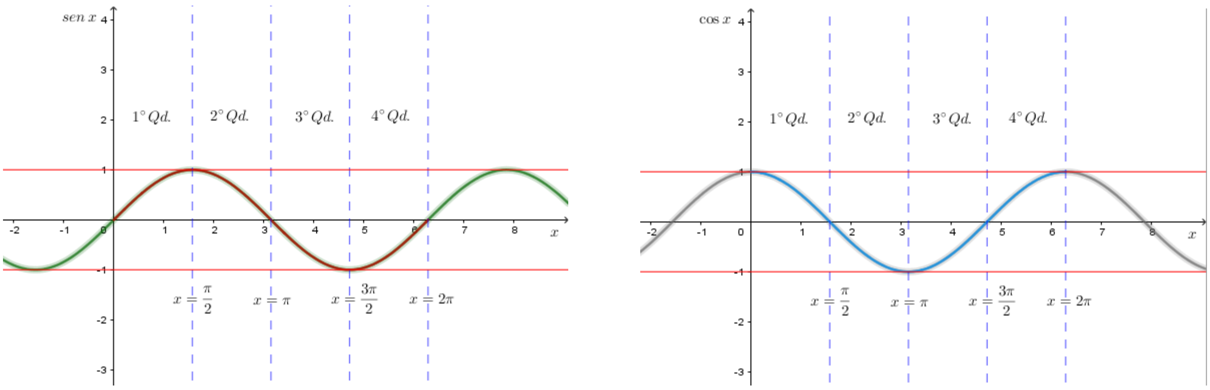


(a) $\operatorname{sen} x$ (b) $\cos x$

Fonte: Autor, 2020.

Podemos também visualizar o gráfico de seno e cosseno a partir dos quadrantes do círculo trigonométrico, como mostrado na Figura 21.

Figura 21 – Gráficos de seno e cosseno de acordo com os quadrantes do círculo.



(a) $\operatorname{sen} x$ (b) $\cos x$

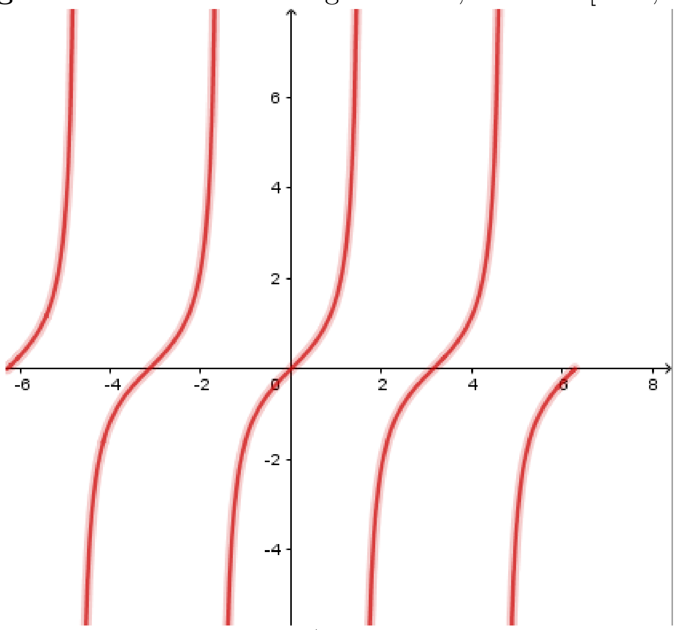
Fonte: Autor, 2020.

Destas funções, surgem outras, como a função tangente ($\operatorname{tg} x$), secante ($\sec x$), cossecante($\csc x$) e cotangente ($\operatorname{cotg} x$), dadas por

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x}, \\ \csc x &= \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \\ \operatorname{cotg} x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

Destas, podemos dizer que a mais importante é a função tangente, devido a sua aplicabilidade, cujo gráfico é dado pela Figura 22.

Figura 22 – Gráfico da tangente de x, com $x \in [-2\pi, 2\pi]$.



Fonte: Autor, 2020.

As funções trigonométricas, assim como as logarítmicas, transformam soma em produto, como veremos na proposição a seguir:

Proposição 6.1 *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, temos:*

(a) $\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$.

(b) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$.

(c) $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x - y}{2}\right)$.

(d) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos x \cos y}$.

Demonstração: Para demonstrar (a), tomemos $a = \frac{x + y}{2}$ e $b = \frac{x - y}{2}$, daí, temos que $x = a + b$ e $y = a - b$, logo, teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y &= \operatorname{sen}(a + b) \pm \operatorname{sen}(a - b) \\ &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \pm \operatorname{sen} a \cos b \mp \operatorname{sen} b \cos a \\ &= \operatorname{sen} a(\cos b \pm \cos b) + \operatorname{sen} b(\cos a \mp \cos a). \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= 2\operatorname{sen} a \cos b = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right). \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y &= 2\operatorname{sen} b \cos a = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x - y}{2}\right)\cos\left(\frac{x + y}{2}\right). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right).$$

Para demonstrar (b) e (c), faremos como no item anterior, logo, teremos:

$$\begin{aligned}
\cos x \pm \cos y &= \cos(a+b) \pm \cos(a-b). \\
&= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \pm \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \\
&= \cos a(\cos b \pm \cos b) - \operatorname{sen} a(\operatorname{sen} b \mp \operatorname{sen} b).
\end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos y &= 2\cos a \cos b = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right). \\
\cos x - \cos y &= -2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por fim, para demonstrar (d), observemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \pm \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos x \cos y}.
\end{aligned}$$

■

6.3 LEIS DO COSSENO E SENO

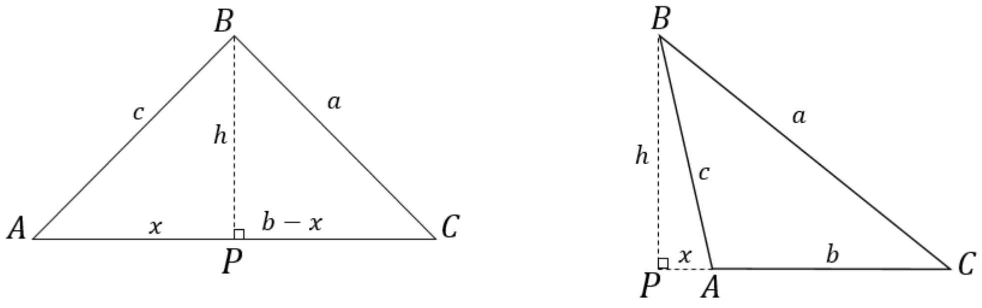
Nesta seção, trabalhamos as leis do cosseno e seno, que são de fundamental importância para o estudo da trigonometria e, principalmente, de geometria. A seguir veremos a lei dos cossenos, que faz com que o Teorema de Pitágoras seja apenas um caso particular dela, mas o mais interessante é que usamos o referido Teorema em sua demonstração, logo, talvez seja melhor dizer que a lei dos cossenos é uma extensão do Teorema de Pitágoras.

Proposição 6.2 (Lei dos Cossenos) *Dado um triângulo ABC de lados $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então vale a identidade*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\hat{A}.$$

Demonstração: Para demonstrar a identidade, utilizamos o Teorema de Pitágoras, e para tanto, seja P o pé da perpendicular baixada de B sobre o lado AC, ou seja, $\overline{AC}$ é a altura h relativa a $\hat{B}$, obviamente há duas possibilidades para a posição relativa de P, isto é, $P \in \overline{AC}$ ou $P \neq \overline{AC}$, como ilustrados na Figura 23.

Figura 23 – Possíveis posições relativas para P.



(a) $P \in \overline{AC}$ (b) Caso $P \neq \overline{AC}$

Fonte: Autor, 2020.

1° Caso: De acordo com a Figura 23.(a), temos por Pitágoras que

$$a^2 = h^2 + (b-x)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + h^2 + x^2 - 2bx. \tag{18}$$

$$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2. \tag{19}$$

Daí, substituindo Eq.19 na Eq.18, obtemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx,$$

mas como $x = c\cos\hat{A}$, obtemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\hat{A}.$$

2° Caso: Agora olhando para a Figura 23.(b), temos por Pitágoras que

$$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2. \tag{20}$$

$$a^2 = h^2 + (b+x)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + h^2 + x^2 + 2\,b\,x. \tag{21}$$

Substituindo a Eq.20 na Eq.21, obtemos que

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,x.$$

Seja $\angle PAB = y$, temos que $x = c\cos y$, por outro lado, $y = 180° - \hat{A}$, ou seja,

$$\cos y = -\cos\hat{A},$$

daí, obtemos, novamente que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\hat{A}.$$

■

Obviamente, da proposição anterior, também resulta que

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos \hat{B}. \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos \hat{C}. \end{aligned}$$

Partindo desta ideia, podemos demonstrar a seguinte

Proposição 6.3 (Lei dos Senos) *Seja ABC um triângulo qualquer de lados $\overline{AB} = c, \overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, então vale as identidade:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}.$$

Demonstração: Analisando a Figura 23, temos novamente 2 casos:
1° Caso: Analisando a Figura 23.(a), e chamando $A\hat{B}P = y$ e $C\hat{B}P = t$, temos que

$$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \operatorname{sen} \hat{A}. \tag{22}$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \operatorname{sen} \hat{C}. \tag{23}$$

$$\operatorname{sen} y = \frac{x}{c}. \tag{24}$$

$$\operatorname{sen} t = \frac{b - x}{a}. \tag{25}$$

Observe que $\operatorname{sen} \hat{B} = \operatorname{sen}(y + t) = \operatorname{sen} y \cos t + \operatorname{sen} t \cos y$ e observe que

$$\begin{aligned} \cos y &= \frac{h}{c}. \\ \cos t &= \frac{h}{a}. \end{aligned}$$

Daí, teremos

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{x}{c}\frac{h}{a} + \frac{b - x}{a}\frac{h}{c} = \frac{hb}{ac} \Rightarrow h = \frac{ac \operatorname{sen} \hat{B}}{b}. \tag{26}$$

Comparando Eq.22, Eq.23 e Eq.26, temos que

$$c \operatorname{sen} \hat{A} = a \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{ac \operatorname{sen} \hat{B}}{b},$$

com isso, concluímos que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}.$$

2° Caso: Analisando a figura 23.(b), temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\hat{C} &= \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \operatorname{sen}\hat{C}. & (27)\\ \operatorname{sen}\hat{A} &= \operatorname{sen}(\pi - P\hat{A}B) = \operatorname{sen}(P\hat{A}B) = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \operatorname{sen}\hat{A}. & (28) \end{aligned}$$

Para continuarmos com a demonstração, chamamos de $P\hat{B}A = y$, daí, temos que $\operatorname{sen}(\hat{B}+y) = \frac{b+x}{a}$ e $\cos(\hat{B}+y) = \frac{h}{a}$. Por outro lado, usando a propriedade da soma, teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\hat{B}+y) &= \operatorname{sen}\hat{B}\cos y + \operatorname{sen} y \cos\hat{B} \Rightarrow \frac{b+x}{a} = \frac{x}{c}\cos\hat{B} + \frac{h}{c}\operatorname{sen}\hat{B}. & (29)\\ \cos(\hat{B}+y) &= \cos\hat{B}\cos y + \operatorname{sen} y \operatorname{sen}\hat{B} \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{h}{c}\cos\hat{B} - \frac{x}{c}\operatorname{sen}\hat{B}. & (30) \end{aligned}$$

Da Eq.30, temos que

$$\frac{\cos\hat{B}}{c} = \frac{1}{a} + \frac{x}{hc}\operatorname{sen}\hat{B},$$

substituindo na Eq.29, teremos

$$\begin{aligned} \frac{b+x}{a} &= \frac{x}{a} + \frac{x^2}{h\,c}\operatorname{sen}\hat{B} + \frac{h}{c}\operatorname{sen}\hat{B}.\\ \Rightarrow \frac{b}{a} &= \left(\frac{x^2+h^2}{hc}\right)\operatorname{sen}\hat{B}. \end{aligned}$$

Como $x^2 + h^2 = c^2$, temos

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{h}\operatorname{sen}\hat{B} \Rightarrow h = \frac{ac}{b}\operatorname{sen}\hat{B}. \tag{31}$$

Daí, comparando as Eq.27, Eq.28 e Eq.31, obtemos que

$$c \operatorname{sen}\hat{A} = a \operatorname{sen}\hat{C} = \frac{ac \operatorname{sen}\hat{B}}{b},$$

com isso, concluímos que

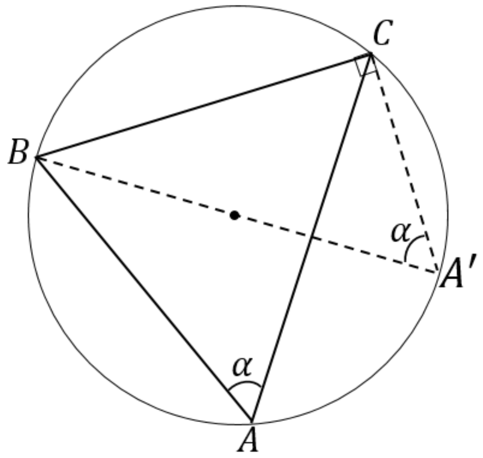
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}.$$

■

A lei dos senos nos diz que a razão entre o lado de um triângulo e o seno do ângulo oposto a este lado é constante. A explicação geométrica para este fato, é dada quando trabalhamos o círculo circunscrito ao triângulo, pois esta constante é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo. Lembre que todo triângulo é inscritível.

Afim de observar a lei dos senos geometricamente, e lembrando que ângulos iguais corresponde a arcos iguais na circunferência, analisando a Figura 24 temos o caso do triângulo ser acutângulo, ou seja, o centro do circulo é interno ao triângulo, os outros casos são completamente análogos.

Figura 24 – Circulo circunscrito ao triângulo ABC.



Fonte: Autor, 2020.

Sendo $\overline{BC} = a$ e R o raio do círculo, veja também que A' é o simétrico a B em relação ao centro do círculo, ou seja, $\overline{A'B} = 2R$ e que $\hat{A} = \hat{A}' = \alpha$, pois ambos correspondem ao mesmo arco do círculo, daí, temos que

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \operatorname{sen}\hat{A}' = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{a} = 2R$$

Daí, segue que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R.$$

Exemplo 6.1 (ITA, 2008) *O conjunto imagem e o período de* $f(x) = 2\operatorname{sen}^2(3x) + \operatorname{sen}6x - 1$ *são, respectivamente,*

(A) $[-3,3]$ *e* 2π.
(B) $[-2,2]$ *e* $\dfrac{2\pi}{3}$.
(C) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ *e* $\dfrac{\pi}{3}$.
(D) $[-1,3]$ *e* $\dfrac{\pi}{3}$.
(E) $[-1,3]$ *e* $\dfrac{2\pi}{3}$.

Resolução: Inicialmente devemos trabalhar melhor a função dada e tentar reduzi-la para uma expressão mais simples possível. Podemos reescrever f como

$$f(x) = \operatorname{sen}6x - (1 - 2\operatorname{sen}^2 3x),$$

agora, observemos que $\cos^2 3x = 1 - \operatorname{sen}^2 3x$, e com isso, veja que

$$\cos 6x = \cos(3x + 3x) = \cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 3x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 3x,$$

daí, temos que

$$f(x) = \operatorname{sen} 6x - \cos 6x.$$

Sempre que encontramos uma função da forma $g(x) = a\operatorname{sen} x + b\cos x$, é sempre bom escrevê-la como sendo

$$g(x) = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen} x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\Big),$$

pois desta forma, como $\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)^2 + \Big(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)^2 = 1$, podemos garantir que existe θ, tal que

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Em nosso problema, temos $a = 1$ e $b = -1$, logo, teremos que

$$f(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} 6x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 6x\right).$$

Agora, basta observar que $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, logo,

$$f(x) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos 6x)$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\Big(6x - \frac{\pi}{4}\Big).$$

Agora ficou muito simples encontrar a imagem e o período de f. Logo, observe que

$$-1 \leq \operatorname{sen}\Big(6x - \frac{\pi}{4}\Big) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\operatorname{sen}\Big(6x - \frac{\pi}{4}\Big) \leq \sqrt{2}.$$

Ou seja, $f(x) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Para obter o período, basta lembrar que o período da função seno é 2π, isto é, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+2\pi)$, daí, sendo T o período, temos que se $f(x) = f(x+T)$, então

$$6x - \frac{\pi}{4} + 2\pi = 6(x+T) - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 6T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{3}.$$

Logo, a alternativa correta é o item (C). ■

São problemas como o anterior, que nos traz uma ideia de como é importante conhecer as propriedades das funções trigonométricas, de fato, resolver tal problema seria um tanto exaustivo sem a simplificação feita.

Exemplo 6.2 *Determine os valores máximo e mínimo de* $y = \operatorname{sen} x + 2\cos x$.

Resolução: Como no exemplo anterior, temos uma função do tipo $y = a\operatorname{sen} x + b\cos x$, com $a = 1$ e $b = 2$, daí, $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, logo, podemos reescrever y como

$$y = \sqrt{5}\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen} x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\Big).$$

Como $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ e $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, nosso objetivo é encontrar α, tal que $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, mas primeiro devemos garantir sua existência, de fato, veja que

$$\Big(\frac{\sqrt{5}}{5}\Big)^2 + \Big(\frac{2\sqrt{5}}{5}\Big)^2 = 1,$$

e isto garante a existência de α. Com isso, podemos reescrever y, como sendo

$$y = \sqrt{5}\operatorname{sen}(\alpha + x).$$

Como o máximo de $\operatorname{sen}(\alpha + x) = 1$ e mínimo de $\operatorname{sen}(\alpha + x) = -1$, logo, temos que

$$-1 \leq \operatorname{sen}(\alpha + x) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq \sqrt{5}\operatorname{sen}(\alpha + x) \leq \sqrt{5}$$

Logo, $\max y = \sqrt{5}$ e $\min y = -\sqrt{5}$. ■

Outra observação importante sobre as funções trigonométricas é seu comportamento quando alteramos os valores dentro de seu argumento, pois com isso, o período da função pode mudar, ou apenas seus valores de imagem, por exemplo, tomemos $f(x) = \cos x$, que assim como a função seno, possui período 2π. Inicialmente, vamos somar um valor $k \in \mathbb{R}$, daí, temos uma nova função $g(x) = \cos(x + k)$. O período de g ocorre quando

$$x_1 + k = 0 \Rightarrow x_1 = -k,$$

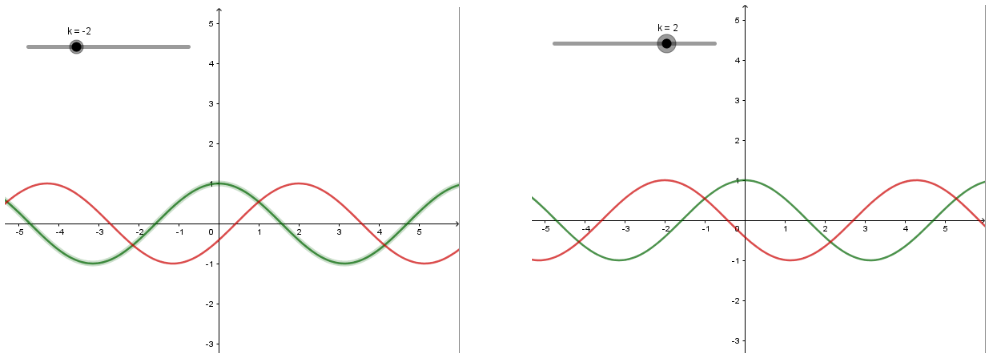
$$x_2 + k = 2\pi \Rightarrow x_2 = 2\pi - k.$$

Daí, perceba que $x_2 - x_1 = 2\pi$, logo, o período ainda é 2π, o que simplesmente acontece é um deslocamento do gráfico da função, como mostrado na Figura 25.

Perceba que quando $k > 0$ o gráfico se desloca imediatamente para a esquerda, em relação ao gráfico de $\cos x$, se $k < 0$, o gráfico se desloca imediatamente para a direita do gráfico original.

Agora, analisamos o caso em que multiplicamos o argumento, daí, tomemos $f(x) = \operatorname{sen} x$, e $g(x) = \operatorname{sen} kx$, agora vamos ver o que acontece com o período da função.

Figura 25 – Comportamento do gráfico de $\cos x$ (Verde) para diferentes valores de k.



(a) Em vermelho $\cos(x-2)$ (b) Em vermelho $\cos(x+2)$

Fonte: Autor, 2020.

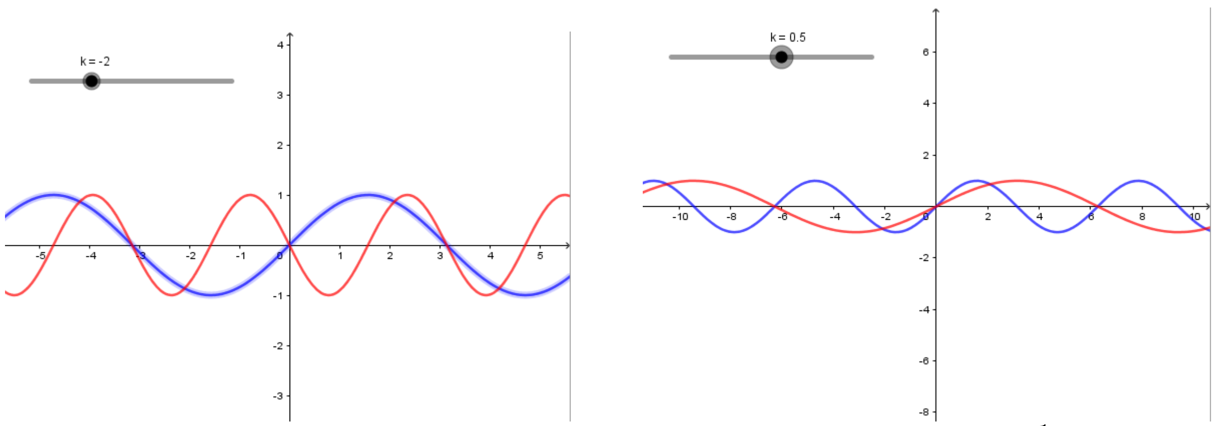
Como o período de f é 2π, observe que

$$kx_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$$

$$kx_2 = 2\pi \Rightarrow x_2 = \frac{2\pi}{k}.$$

Logo, o período de g é $x_2 - x_1 = \dfrac{2\pi}{k}$. Já podemos perceber que o período da função muda para $k \neq 1$, sendo que ele pode aumentar, se $0 < k < 1$ e diminuir se $k > 1$, os casos de $k < 0$, faz apena uma inversão de valores para o caso $k > 0$, uma vez que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. A Figura 26 traz a ideia exposta.

Figura 26 – Comportamento do gráfico de $\operatorname{sen} x$ (Azul) para diferentes valores de k.



(a) Em vermelho $\operatorname{sen}(-2x)$ (b) Em vermelho $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x\right)$

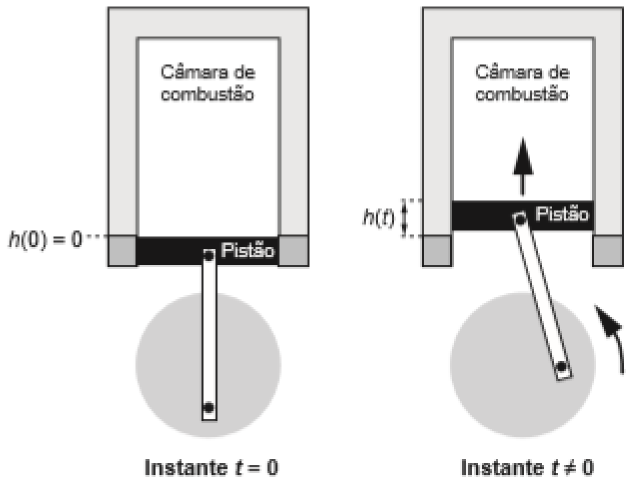
Fonte: Autor, 2020.

Observe que a alteração do período da função faz com que o gráfico seja "comprimido" caso $|k| > 1$ e "esticado" caso $0 < |k| < 1$.

6.4 PROBLEMAS SOBRE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção, trabalhamos a resolução de problemas sobre funções trigonométricas aplicadas no ENEM e provas diversas, incluindo Vestibulares e Olimpíadas.

Problema 6.1 (ENEM, 2019) *Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.*



A função $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ *definida para* $t \geq 0$ *descreve como varia a altura* h*, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo* t*, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos. O valor do parâmetro* β*, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante* $t = 0$*), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de* 6cm*. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para* π*. O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro* β *, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é*

(A) 1
(B) 2
(C) 4
(D) 5
(E) 8

Resolução: De acordo com a Competência de Área 5, Habilidade 23, do ENEM, o aluno deve ser capaz de responder este tipo de questão. Na BNCC, podemos encontrar os requisitos necessários para resolver este problema a partir da Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT306), o aluno deve ser capaz de utilizar as propriedades da função seno para resolver problemas do cotidiano que envolvam situações de periodicidade.

Observamos inicialmente que a função $h(t)$, deve atingir o valor de $6cm$, assim, fazemos a igualdade:

$$\begin{aligned} 4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) &= 6 \\ \Rightarrow 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) &= 2 \\ \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Agora, analisemos os três primeiros casos em que $\text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{2}$, ou seja, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ e $\theta = \dfrac{13\pi}{6}$, com isso, temos que analisar apenas valores de β para os quais $\dfrac{\beta t}{2} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{13\pi}{6}$, pois pela continuidade da função seno, neste ponto os outros dois valores para $h(t) = 6$ já ocorreram, daí, temos que:

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow \beta t = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{16\pi}{3\beta}.$$

Como $t < 4$, temos que

$$\frac{16\pi}{3\beta} < 4 \Rightarrow \frac{16\pi}{12} < \beta \Rightarrow \frac{48}{12} = 4 < \beta,$$

onde usamos $\pi = 3$. Daí, como $\beta \in \mathbb{Z}$, temos que $\beta \geq 5$, mas como queremos o menor valor de β, então tomamos $\beta = 5$, logo o item correto é (D).

Comentário: Esta questão não é simples, embora façamos uma resolução automática, nem percebemos tantas coisas que utilizamos implicitamente em sua resolução. O ponto de partida era igualar a função $h(t) = 6$, e a partir daí, saber quais valores de argumento nos dão seno igual a $\dfrac{1}{2}$, neste momento é de fundamental importância estabelecer os três primeiros ângulos que satisfazem esta condição e usar apenas o último ângulo encontrado. Os alunos podem perguntar o porquê de usar apenas o argumento $\dfrac{13\pi}{6}$ e o professor deve explicar que a função seno é contínua, ou seja, quando ela chegar neste argumento, certamente ela já passou pelos dois outros argumentos, ou seja, $h(t)$ já atingiu duas vezes $6cm$, por isso é suficiente analisar apenas o terceiro argumento. Obviamente outra dificuldade que pode aparecer é o fato de ficarmos com uma equação de duas variáveis β e t, mas aí devemos utilizar o fato de $t < 4$, e analisar os valores inteiros de β que satisfazem esta condição e concluir a resposta com o menor valor de β que satisfaz a desigualdade.

O aluno também poderia utilizar o seno da diferença, para obter que

$$\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\beta t}{2}\right),$$

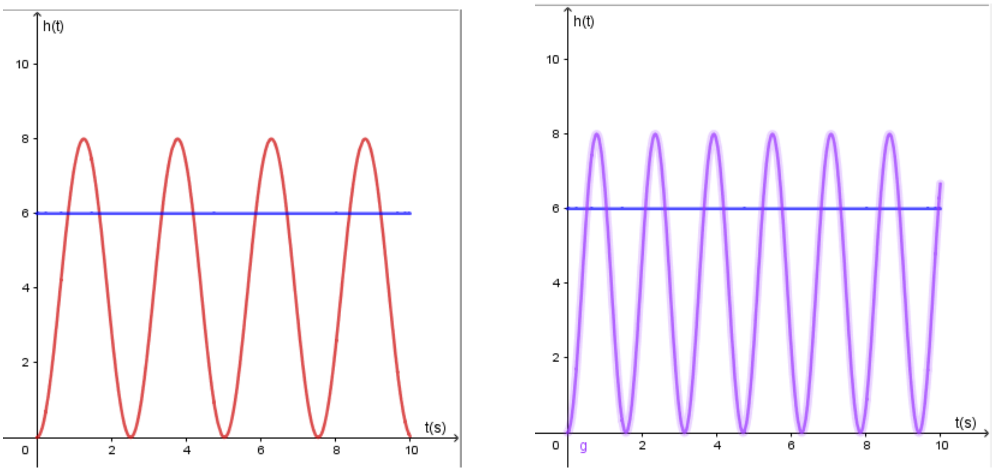
e daí, obter que

$$h(t) = 4 - 4\cos\frac{\beta t}{2},$$

e a partir disto, seguir como resolvemos a questão.

O professor pode utilizar o software Geogebra, para plotar o gráfico desta função com os valores de $\beta = 5$ e $\beta = 8$, como mostrado na Figura 27, para os alunos compreenderem um pouco mais sobre a periodicidade de tal função:

Figura 27 – Gráfico de $h(t)$ para diferentes valores de β.



(a) Caso $\beta = 5$ (b) Caso $\beta = 8$

Fonte: Autor, 2020.

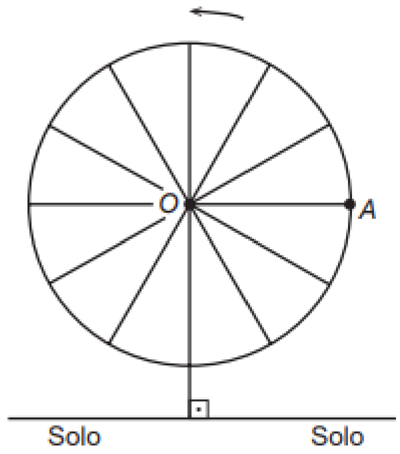
Podemos ver que quanto maior o valor de β, mais vezes a função atinge $6cm$, mais rapidamente, ou seja, a variável β comprime o gráfico da função $h(t)$.

Esta não é uma questão de trigonometria, propriamente dita, é uma questão sobre funções trigonométricas, e daí notamos a importância de trabalhar tais funções não só relacionadas a triângulos, mas sobretudo, seu comportamento, continuidade, periodicidade, entre outros, e aplicá-las em situações problemas, para que os alunos consigam compreender tais funções, que tem um importante papel em nossas vidas.

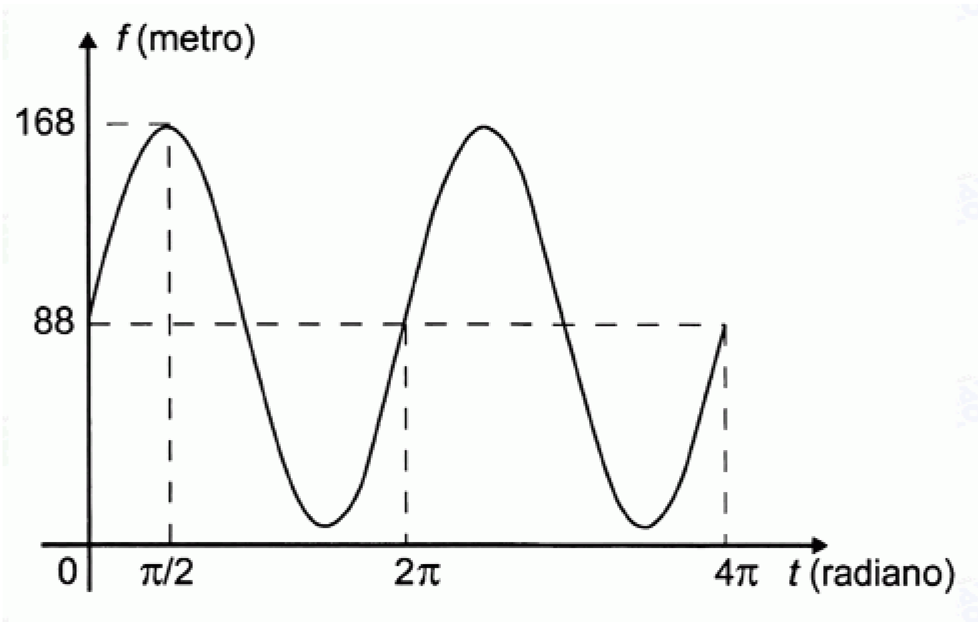
Problema 6.2 (ENEM 2018.) *Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:*

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação a sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).



A expressão da função é dada por:

(A) $f(t) = 80\text{sen}\,(t) + 88$.

(B) $f(t) = 80\cos\,(t) + 88$.

(C) $f(t) = 88\cos\,(t) + 168$.

(D) $f(t) = 168\text{sen}\,(t) + 88\cos\,(t)$.

(E) $f(t) = 88\text{sen}\,(t) + 168\cos\,(t)$.

Resolução: Para resolvermos esta questão, utilizaremos a Competência de Área 5, Habilidade 19 do ENEM, juntamente com Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT306) da BNCC.

Movimentos periódicos logo nos remete as funções trigonométricas, neste caso, basta obter a expressão algébrica a partir do gráfico obtido. Já que o movimento é periódico, neste caso, a partir de 2π, ele se repete. Vemos, pelo gráfico, que o valor máximo de f é 168 e ocorre, inclusive, para $\dfrac{\pi}{2}$ e que $f(0) = 88$. Inicialmente, vamos supor que f é uma função do tipo

$$f(t) = a\text{sen}\,(t) + b\cos\,(t) + c.$$

Uma vez que o período se mantém em 2π não há alteração dentro do argumento da função. Agora, basta aplicar os valor de f dados pelo gráfico:

$$\begin{aligned} 88 &= a\text{sen}\,(0) + b\cos\,(0) + c \Rightarrow 88 = b + c. \\ 168 &= a\text{sen}\,(\frac{\pi}{2}) + 88\cos\,(\frac{\pi}{2}) + c \rightarrow 168 = a + c. \\ 88 &= a\text{sen}\,(\pi) + b\cos\,(\pi) + c \Rightarrow 88 = -b + c. \end{aligned}$$

Daí, temos que $b = 0$ e $c = 88$, consequentemente $a = 168 - 88 = 80$. Agora, já obtivemos tudo que era necessário para formar a expressão de f que é da forma

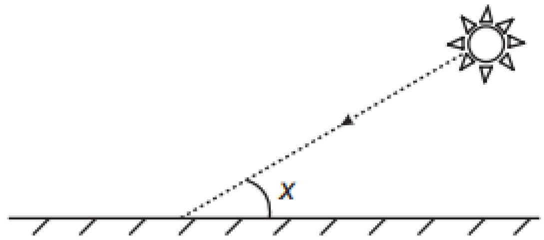
$$f(t) = 80\text{sen}\,(t) + 88.$$

Logo, o item correto é a alternativa (A). ■

Comentário: Certamente há mais de uma maneira de se resolver este problema, porém o mais importante para o aluno é conseguir interpretar corretamente o gráfico, pois foi basicamente o que fizemos. Apenas supomos uma função geral para o problema que trata de um fenômeno periódico e substituímos os valores visíveis no gráfico. Lembramos também que a alteração dentro do argumento da função muda o período da mesma, mas pelo gráfico vimos que não se alterava, logo, já descartamos qualquer tipo de alteração no argumento, desta forma criamos a equação mais geral possível. Um ponto importante foi que utilizamos o valor de $t = \pi$ que dava 88, embora no gráfico isto não é tão visível porém pela simetria da função podíamos usar este fato. Contudo, este é um bom tipo de problema para trabalharmos a obtenção da expressão algébrica de uma função trigonométrica a partir de seu gráfico, pois com isto, trabalhamos várias propriedades importantes das funções trigonométricas, como por exemplo, o comportamento quando multiplicamos a função por uma constante ou somamos, e somar e multiplicar por uma constante ao mesmo tempo.

Problema 6.3 (ENEM 2017.) *Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura. Em deter-*

minadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \operatorname{sen}(x)$*, sendo* k *uma constante, e supondo-se que* x *está entre* $0°$ *e* $90°$*.*



Quando $x = 30°$*, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?*
(A) 33%
(B) 50%
(C) 57%
(D) 70%
(E) 86%

Resolução: Usaremos a Competência de Área 2, Habilidade 8 do ENEM, juntamente com a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT306) da BNCC, para resolver o problema que envolve funções trigonométricas.

Obviamente a Intensidade Luminosa atinge seu valor máximo para $\operatorname{sen} x = 1$, ou seja, para $x = 90°$ e neste ponto, $I(x) = k$. Quando $x = 30°$, temos

$$I = k \cdot \operatorname{sen}(30°) \Rightarrow I = \frac{k}{2}.$$

Assim, a intensidade luminosa se reduziu a metade de seu valor máximo, ou seja, reduziu em 50%, logo, a alternativa correta é o item (B). ■

Comentário: Esta é uma questão bastante simples, como podemos ver, porém ela exige que o aluno conheça os valores de seno dos ângulos notáveis, neste caso de 90° e 30° e por último, saber representar uma fração em sua forma percentual, coisas simples mas que são fundamentais para a completeza da resolução do problema.

Problema 6.4 (Enem 2017) *Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa utiliza uma função do tipo* $P(t) = A + B\cos(kt)$*, em que* A, B *e* k *são constantes reais positivas e* t *representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.*
Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi:

(A) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$.

(B) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$.

(C) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$.

(D) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$.

(E) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$.

Resolução: Usaremos a Competência de Área 5, Habilidade 20 do ENEM juntamente com a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT306) da BNCC para resolver este problema.

Basicamente, começamos pelos dados do enunciado do problema, de onde temos que o valor mínimo de $P(t)$ é 78, e como as constantes A, B são positivas, temos que o mínimo de $P(t)$ ocorre quando o cosseno for mínimo, logo, temos que

$$P(\pi) = 78 \Rightarrow 78 = A - B.$$

Já o máximo de $P(t)$ ocorre quando o cosseno for máximo, logo,temos

$$P(0) = 120 \Rightarrow 120 = A + B.$$

Destas duas igualdades, temos que $A = 99$ e $B = 21$. Com isso, o que precisamos descobrir é o período da função, que o próprio enunciado diz que é $90\, bat./min.$ ou ainda

$$\frac{90}{60}\, bat/seg. \Rightarrow \frac{3}{2}\, bat/seg.$$

Daí, temos 1 batimento a cada 2/3 segundos. O enunciado diz que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas pressões máximas, ou seja, representa o tamanho do período da função $P(t)$ e como o período é dado por

$$\frac{2\pi}{k},$$

temos que

$$\frac{2}{3} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = 3\pi,$$

com isso, temos que $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$, logo, a alternativa correta é o item (A). ■

Comentário: Esta questão já trabalha mais informações. A princípio o aluno deve observar para quais valores de t, $P(t)$ é máximo e mínimo, para assim obter A e B. Após isto, o aluno deve obter o valor de k, que afeta diretamente o período da função, e ver no enunciado da questão que o período é o intervalo de tempo entre duas pressões máximas, no qual obtivemos o intervalo de tempo de 1 batimento, e isto fez toda a diferença para a resolução do problema. Enfim, é um belo problema, do ponto de vista que trabalha os valores extremos e o período de uma função trigonométrica. Neste sentido, reforçamos ao professor a necessidade de trabalhar com seus alunos a leitura e interpretação de problemas matemáticos, pois como vimos, isto foi de fundamental importância para encontrar o período da função.

Problema 6.5 (ENEM 2015) *Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função* $P(x) = 8 + 5\cos\left(\dfrac{\pi x - \pi}{6}\right)$*, onde x representa o mês do ano, sendo* $x = 1$ *associado ao mês de janeiro,* $x = 2$ *ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até* $x = 12$ *associado ao mês de dezembro.*

Disponível em: : www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

(A) janeiro.
(B) abril.
(C) junho.
(D) julho.
(E) outubro.

Resolução: Utilizaremos o Competência de Área 5, Habilidade 21 do ENEM, juntamente com a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT306) da BNCC, para resolver este problema.

A questão basicamente se resume a encontrar o mínimo da função (pois quando o preço for mínimo a produção é máxima) que obviamente ocorre para $\cos\theta = -1$, ou seja, devemos obter o valor de argumento de $\cos\left(\dfrac{\pi x - \pi}{6}\right)$ que seja equivalente a cosseno de π, pois este dá o valor mínimo da função cosseno. Veja que

$$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \Rightarrow \pi x = 7\pi \Rightarrow x = 7.$$

Logo, a produção máxima ocorre para $x = 7$, ou seja, no mês de julho, e com isso, a alternativa correta é o item (D). ■

Comentário: Como podemos ver, esta é uma questão de solução rápida e simples, bastando o aluno ter o mínimo de conhecimento sobre funções trigonométricas. Para resolver esta questão é de fundamental importância compreender que devemos calcular o mínimo da função preço, e não o máximo, e para isto, é fundamental uma leitura correta do enunciado do problema. Outro ponto abordado é o ponto de mínimo da função cosseno, e para qual ou quais valores de argumento ele ocorre. Obviamente, como x assume valores entre 1 e 12, não precisamos escrever $x = 7 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$, já que os meses são bem limitados. Sabendo destas informações, basicamente o aluno tem que resolver uma igualdade bastante simples. Para provas como o ENEM, o aluno não precisa ser expert em tudo de todas as áreas, porém conhecer as propriedades fundamentais de cada uma, neste caso, conhecer o mínimo da função cosseno e quando ele ocorre, cabe ao professor, em suas aulas, tentar fixar esta ideia com seus alunos, não somente jogando as coisas no quadro, mas tentando construir os conteúdos com significados, e se possível, com auxílio de tecnologias, para poder explorar mais de maneira mais otimizada.

Problema 6.6 (ITA, 2020- 1ª.Fase) *Seja a um número real satisfazendo* $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$. *Então, a soma de todos os valores de* $x \in [0, 2\pi]$ *que satisfazem a equação*

$$\cos x \operatorname{sen}(a + x) = \operatorname{sen} a$$

é igual a

(A) $5\pi + 2a$
(B) $5\pi + a$
(C) 5π
(D) $5\pi - a$
(E) $5\pi - 2a$

Resolução: Para resolver este problema, usaremos a Competência de Área 5, Habilidade 21 do ENEM, juntamente com a Competência Específica 3, Habilidade EM13MAT306 da BNCC, as quais sugerem a utilização de conhecimentos algébricos e conhecimento de funções periódicas.

Inicialmente, percebemos que

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}((a + x) - x) = \operatorname{sen}(a + x)\cos x - \operatorname{sen} x \cos(a + x).$$

Daí, basta resolver o igualdade

$$\cos x \operatorname{sen}(a + x) = \operatorname{sen}(a + x)\cos x - \operatorname{sen} x \cos(a + x).$$

De onde obtemos que

$$\operatorname{sen} x \cos(a + x) = 0.$$

Então, temos duas opções, $\operatorname{sen} x = 0$ ou $\cos(a+x) = 0$, veja que $a + x < \dfrac{5\pi}{2}$, logo, temos os seguintes casos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi. \\ \cos(a+x) &= 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - a, x = \frac{3\pi}{2} - a. \end{aligned}$$

Somando todos os possíveis valores de x, temos

$$S = 0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{2} - a + \frac{3\pi}{2} - a = 5\pi - 2a.$$

Logo, a alternativa correta é o item (E). ■

Comentário: Há mais de uma forma de resolver este problema, mas é importante conhecer as relações trigonométricas das somas de ângulos. Outro ponto importante é a capacidade criativa do aluno em utilizar manipulações algébricas para simplificar a resolução do problema, como foi feito ao escrever $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen}((a+x) - x)$, o que ajudou bastante na resolução do problema. E por fim, conhecer os ângulos que zeram as funções seno e cosseno. Este problema não é difícil de se resolver se o aluno tiver domínio dos conteúdos citados acima, além disso, é muito comum em provas que abordam questões relacionadas a funções trigonométricas que pedem o conjunto de ângulos que impliquem em uma determinada igualdade, por isso, é sugestivo que o professor trabalhe este tipo de questões com seus alunos, seja por questões mais simples que contemplem toda a turma, ou questões mais elaboradas para os alunos que buscam desafios maiores. O importante é não passar questões que, de certa forma, excluem uma parte da turma, principalmente os alunos que possuem mais dificuldades, pois isso implica ainda mais na desmotivação destes alunos pela Matemática.

Problema 6.7 (ITA, 2021-1ª Fase) *Considere um Triângulo ABC tal que $m(\overline{AB}) = 14$, $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{3}{5}$ e $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{5}{13}$. Então o raio da circunferência inscrita ao triângulo é igual a:*

(A) 2.

(B) $2\sqrt{2}$

(C) 3

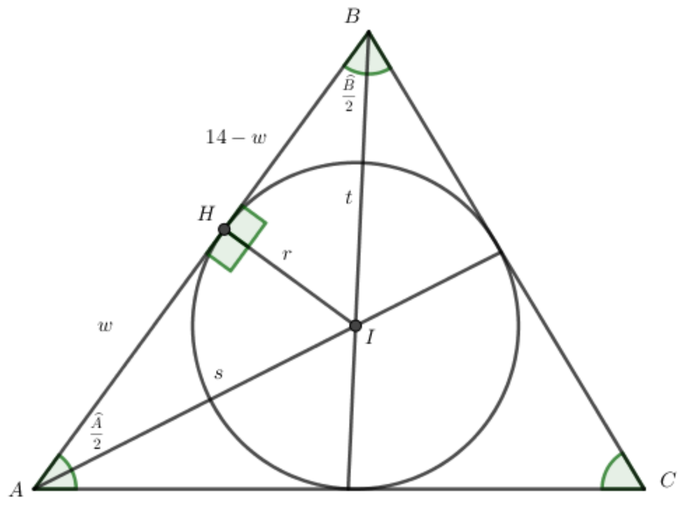
(D) 4

(E) $4\sqrt{2}$

Resolução: Para resolver este problema faremos usa da Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT308) da BNCC, além de um bom desenho.

É verdade que existe uma fórmula que associa o perímetro do triângulo com raio da circunferência inscrita, mas vamos resolver o problema de outra forma. Primeiramente, faremos um desenho pra ilustrar o problema.

Figura 28 – Circunferência inscrita no triângulo.



Fonte: Autor, 2020.

Observando a Figura 28, temos que I é o incentro do triângulo, ou seja, o encontro das bissetrizes. Perceba que $\text{sen}\,\widehat{A} = \dfrac{4}{5}$ e que $\text{sen}\,\widehat{B} = \dfrac{12}{13}$. E como $\widehat{A} + \widehat{B} = 180° - \widehat{C}$, temos que

$$\text{sen}\,(A + B) = \text{sen}\,(180 - C) = \text{sen}\,C.$$

Como $\text{sen}\,(A + B) = \text{sen}\,A \cos B + \text{sen}\,B \cos A$, obtemos que

$$\text{sen}\,C = \frac{4}{5}\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\frac{3}{5}$$

$$\therefore \text{sen}\,C = \frac{56}{65}.$$

Agora, veja que

$$\text{sen}\,A = \text{sen}\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right) = 2\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right),$$

$$\cos A = \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right).$$

Como

$$\text{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{A}{2}\right).$$

Obtemos que

$$\cos A = \frac{3}{5} = 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Perceba que o valor do ângulo $\dfrac{A}{2}$ é menor ou igual a 90°, desse modo, temos que $\cos\left(\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ e consequentemente, $\text{sen}\left(\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Observando o triângulo retângulo AHI, temos que

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{w}{s} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{r}{s} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ou seja, $w = 2r$.

Agora, analisemos o triângulo retângulo BHI, no qual, fazemos os mesmos passos anteriores, e com isso, obtemos que

$$\cos\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Além disso, temos que

$$t^2 = r^2 + (14 - w)^2 \rightarrow t^2 = 5r^2 - 56r + 196. \tag{32}$$

Por outro lado, temos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{r}{t} \Rightarrow t = \frac{r\sqrt{13}}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{13r^2}{4}.$$

Substituindo em 32, obtemos que

$$r^2 - 32r + 112 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos raízes $r = 28$ e $r = 4$, por outro lado, $r = \dfrac{w}{2}$ e w é menor que 14, ou seja, o valor correto de r é $r = 4$, portanto, a alternativa correta é o item (D). ■

Comentário: Sem dúvida não é uma questão tão imediata, do modo que fizemos, é necessário que o aluno tenha conhecimento das relações de triângulos circunscritos à circunferência, além de dominar as principais relações entre seno e cosseno de ângulos, além de poder observar os detalhes da questão, como por exemplo concluir que o cosseno do ângulo metade é positivo, e no final descartar o valor de $r = 28$, embora não tenha nenhum item do problema com essa alternativa, de fato, o raio é menor que qualquer lado do triângulo. A resolução do problema ainda ficou um pouco longa mesmo omitindo várias contas simples, porém, para a resolução do problema usamos basicamente as propriedades das funções trigonométricas, que era nosso intuito. Por isso, destacamos a importância do conhecimento das funções trigonométricas, pois com elas podemos resolver vários problemas no qual o intuito é utilizar fórmulas que às vezes não conhecemos ou nem lembramos, nesse caso que a área do triângulo é igual ao produto do semi perímetro e o raio da circunferência inscrita.

Problema 6.8 (IME, 2020/2021-1ª Fase) *Seja a equação*

$$2\text{sen}\,(e^\theta) - 4\sqrt{3}\text{sen}\,(e^\theta)\cos(e^\theta) - \cos(2e^\theta) = 1,$$

$\theta \in \mathbb{R}^+$. *O menor valor de θ que é raiz da equação é:*

(A) $\ln\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

(B) $\ln\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(C) $\ln\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

(D) $\ln\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

(E) $\ln\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Resolução: Novamente vamos utilizar a Competência Específica 3, Habilidade (EM13MAT308) da BNCC para resolver este problema.

A primeira observação é que $2\text{sen}\,x\cos x = \text{sen}\,(2x)$ e que $\cos(2x) = 1 - 2\text{sen}^2 x$. Além disso, vamos tomar $e^\theta = x$. Com essas informações, a equação se reduz a $4\text{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\text{sen}\,2x - 2 = 0$. Dividindo tudo por 2, obtemos

$$2\text{sen}^2 x - \sqrt{3}\text{sen}\,(2x) = 1. \tag{33}$$

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos de 33 que

$$2\text{sen}^2 x - \sqrt{3}\text{sen}\,(2x) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x.$$

$$\therefore -\cos(2x) = \sqrt{3}\text{sen}\,(2x).$$

Observe que $\cos(2x) \neq 0$, pois se o fosse, então $\text{sen}\,(2x) = 0$ o que não ocorre. Desse modo, temos que

$$\text{tg}\,(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Muito bem. Sabemos que $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, mas queremos um valor negativo da tangente. Como temos vários valores de ângulos que satisfazem essa igualdade, mas queremos o menor, nesse contexto, vem a seguinte questão, no ciclo trigonométrico quem fica negativo primeiro? é o cosseno, assim, basta tomar o simétrico a $\dfrac{\pi}{6}$ no segundo quadrante, que seria basicamente

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Com isso, temos que

$$2x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}.$$

E por fim, temos que

$$e^{\theta} = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \theta = \ln\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

Logo, a alternativa correta é o item (E). ■

Comentário: Muitas vezes o que percebe-se na resolução de problemas como estes na internet, é o uso exagerado de fórmulas e artifícios, não que esta resolução seja a melhor ou mais fácil, mas só precisa que o aluno tenha o conhecimento das relações entre seno e cosseno, além de um conhecimento básico do ciclo trigonométrico, como por exemplo concluir que o ângulo procurado é o simétrico do ângulo de $\frac{\pi}{6}$. Além da capacidade criativa de renomear as variáveis afim de facilitar os cálculos, mas sempre respeitando as restrições dadas. Por fim, há mais de um modo de resolver o problema, como muito ocorre na Matemática, mas a função do professor é capacitar seus alunos para que ao menos um dos modos de resolução o aluno tenha o conhecimento para efetuá-lo.

Problema 6.9 (UECE 2020.2-1ª Fase) *Se M e m são respectivamente os valores máximo e mínimo que a função real de variável real $f(x) = 2\text{sen}^2 x + 5\cos^2 x - 1$ assume, então, a média aritmética entre M e m é igual a:*

(A) 2,0.

(B) 2,5.

(C) 1,5.

(D) 3,0.

Resolução: Utilizaremos a Competência Específica 3, com a Habilidade (EM13MAT308) da BNCC para resolver o problema.

Veja que podemos escrever $f(x) = 2(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) + 3\cos^2 x - 1$, com isso, usando a relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos que

$$f(x) = 1 + 3\cos^2 x.$$

Daí, temos que

$$0 \leq 3\cos^2 x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq 1 + 3\cos^2 x \leq 4.$$

Ou seja,

$$1 \leq f(x) \leq 4$$

Daí, a média aritmética entre o máximo e o mínimo de f nos dá $\frac{4+1}{2} = 2,5$, logo, a alternativa correta é o item (B). ■

Comentário: É uma questão bem simples, que trabalha apenas os valores que a função seno e cosseno assumem, além do conhecimento da relação fundamental, e obviamente umas pequenas manipulações de inequações. Este tipo de problema é aquele o qual o aluno que presta o Vestibular tem que acertar, pela dificuldade que o problema nos dá, de todo modo, fica evidente a necessidade do conhecimento de pequenos detalhes das funções trigonométricas, pois, praticamente todas as provas de Vestibulares cobram funções trigonométricas e nem sempre são tão imediatas.

Problema 6.10 (ITA 2021, 2ª Fase.) *Sejam* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tais que* $\alpha + \beta + \gamma = -3\pi$, $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{2}$ *e* $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -\frac{1}{2}$. *Determine o valor de* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

Resolução: Utilizaremos a Competência Específica 3, com a Habilidade (EM13MAT308) da BNCC para nos auxiliar na resolução do problema.

De início, elevamos as duas igualdades ao quadrado, pois com isso, já aparece a expressão que estamos procurando.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma + 2(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma) = \frac{1}{4}. \quad (34)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma) = \frac{1}{4}. \quad (35)$$

Agora, lembremos que $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$ e que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. Com isso, subtraindo a Eq.35 da Eq.34, obtemos que

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\gamma) + \cos(\beta+\gamma)) = 3. \quad (36)$$

Agora, perceba que $\cos(-3\pi) = \cos(3\pi) = \cos\pi = -1$ e $\operatorname{sen}(-3\pi) = \operatorname{sen}(-\pi) = 0$, além disso, veja que

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -3\pi - \gamma \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma. \\ \alpha + \gamma &= -3\pi - \beta \Rightarrow \cos(\alpha+\gamma) = \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta. \\ \beta + \gamma &= -3\pi - \alpha \Rightarrow \cos(\beta+\gamma) = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha. \end{aligned}$$

Substituindo em 36, obtemos que

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 2(\cos(\alpha) + \cos(\gamma) + \cos(\beta)) = 3.$$

Como $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -\frac{1}{2}$, temos

$$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 1 = 3 \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

■

Comentário: O que usamos para resolver este problema foram apenas conhecimentos básicos das relações de funções trigonométricas. Por outro lado, isso não quer dizer que o problema é simples, visto que tomando um caminho errado para a resolução, acabamos em cair em contas cíclicas. É bom deixar claro para os alunos que todo problema que deseja encontrar o valor de uma expressão, é fundamental obter tal expressão explícita, como aqui fizemos ao elevar a igualdade dos cossenos ao quadrado. A partir daí, é tudo manipulação algébrica e conhecimentos dos valores de ângulos do cosseno, além do conhecimento do cosseno da soma de ângulos. São pequenos detalhes como estes que fazem com que o aluno consiga resolver um problema como esse. Quem conhece os Vestibulares ITA, sabem que suas provas não são simples, mas o que ocorre quase sempre em suas resoluções é um conhecimento do básico do conteúdo, associado a astúcia do aluno em organizar suas ideias, e é nesse ponto que o professor se faz fundamental, pois ele é capaz de enriquecer os conhecimentos dos alunos propondo novas formas de resolução de um problema, ou até mesmo indagando o aluno se tem outra maneira de resolver o problema, esses pequenos detalhes que vão despertando a curiosidade do aluno.

Na resolução dos problemas aqui propostos, procuramos ver na internet o modo como os outros professores a fizeram, nem sempre a nossa era a mais fácil, e quando a resolução era diferente é que nos sentíamos bem, pois procuramos auxiliar os professores de tal modo a enriquecer o repertório de resolução de problemas. O que se pode perceber muito em algumas resoluções é a forma mecânica de como resolvemos o problema, sem fazer as pequenas observações, estas que deixam o problema bem mais interessante. Na graduação tinha um professor que em suas aulas sempre deixavam perguntas abertas no quadro, tipo, “Se a função for contínua, pode-se derivar sobre o sinal da integral (Por quê?)” e ficava a critério do aluno em ir atrás de saber o porquê. É interessante que cada professor busque deixar sua marca em suas aulas, saindo da parte mecânica e retrógrada, desse modo seus frutos de trabalho podem se tornar bem mais saborosos.

7 ESTUDO DE FUNÇÕES COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Neste capítulo, trabalhamos com o programa Geogebra, que é um software livre com muitas aplicações que podem ser utilizadas tanto em Matemática quanto em Física. O Geogebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2001 com o intuito de auxiliar o professor dentro da sala de aula, porém muitos ainda não conhecem esta importante ferramenta.

O Geogebra é capaz de criar vários objetos geométricos no ambiente 2D e 3D, e possui várias funções, desde criação de campo de vetores até o cálculo de áreas, por meio de integrais. Muitas das figuras usadas neste trabalho foram desenvolvidas neste software. Contudo, o que pode se observar é que muitos professores "parados no tempo", e não buscam usar as novas tecnologias a seu favor. Como bem sabemos, a Matemática é o "terror"da maioria dos alunos, algo cultural, desde cedo os próprios professores da educação infantil, na maioria, não dominam a Matemática, e por isso os seus alunos absorvem esta dificuldade e criam uma barreira entre o aluno e o aprendizado da Matemática. A ideia exposta não parte apenas da experiência do autor, mas também de colegas, que relatam a mesma dificuldade, por isso, a necessidade da formação continuada de professores.

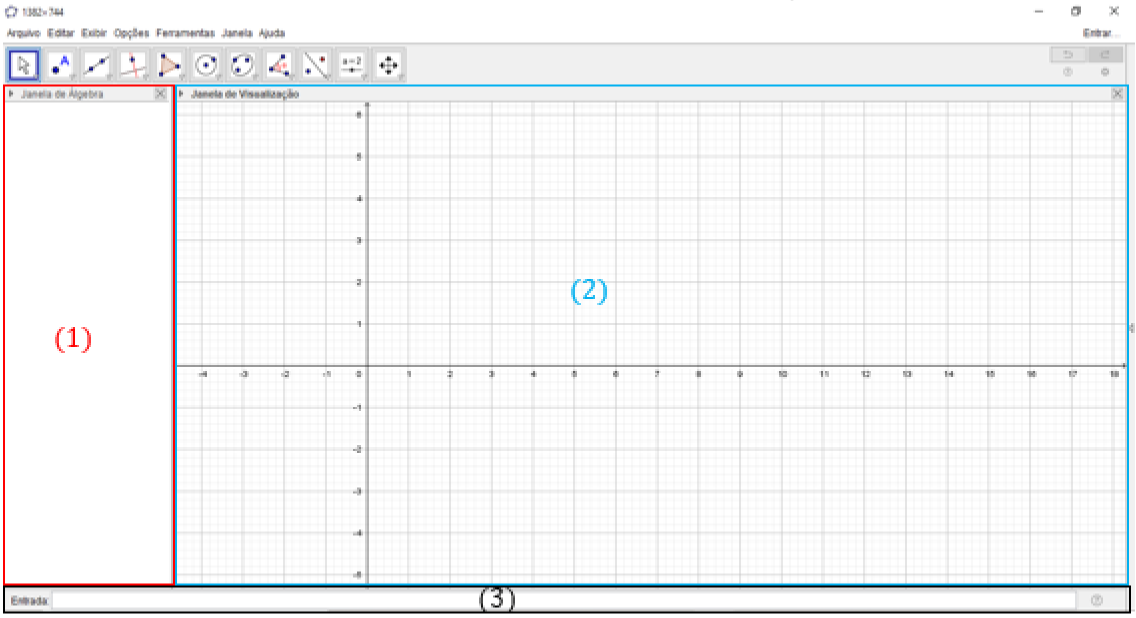
Existem algumas atualizações do Geogebra, mas a versão aqui usada é a Clássica 5, embora possa ter menos funções que as versões mais modernas, mas é suficiente para o ensino de Matemática. O mais interessante em usar o aplicativo nas as aulas é para modelar os problemas de Matemática, assim como já dizia Resende, Ferreira e Barbosa (2015),

> através da Modelagem Matemática, os alunos despertem e desenvolvam a capacidade e o interesse de aprender a aprender, valorizando sempre o conhecimento vigente, possibilitando a correlação dos conteúdos já estudados com as necessidades do dia a dia.(Resende, Ferreira e Barbosa, 2015, p. 2).

Partindo do princípio que o grande desafio dos professores de Matemática na atualidade é quebrar o paradigma de que a Matemática é difícil, por isso é de fundamental importância os professores deixarem suas aulas mais atraentes, pois com isto, o professor pode despertar o aluno para o interesse matemático, facilitando assim tanto sua vida como professor como a do aluno.

Obviamente, não dá para explicar toda a utilização do Geogebra neste capítulo, porém, encontramos na internet, tanto em vídeos no YouTube como em trabalhos ensinando as mais diversas construções com o software. A Figura 29 nos traz a interface do programa. Em (1) temos a janela de álgebra, é onde ficam os comandos digitados no programa, (2) é a janela de visualização da construção que está em (1) e (3) é a entrada, onde digitamos os comandos que aparecerão em (1).

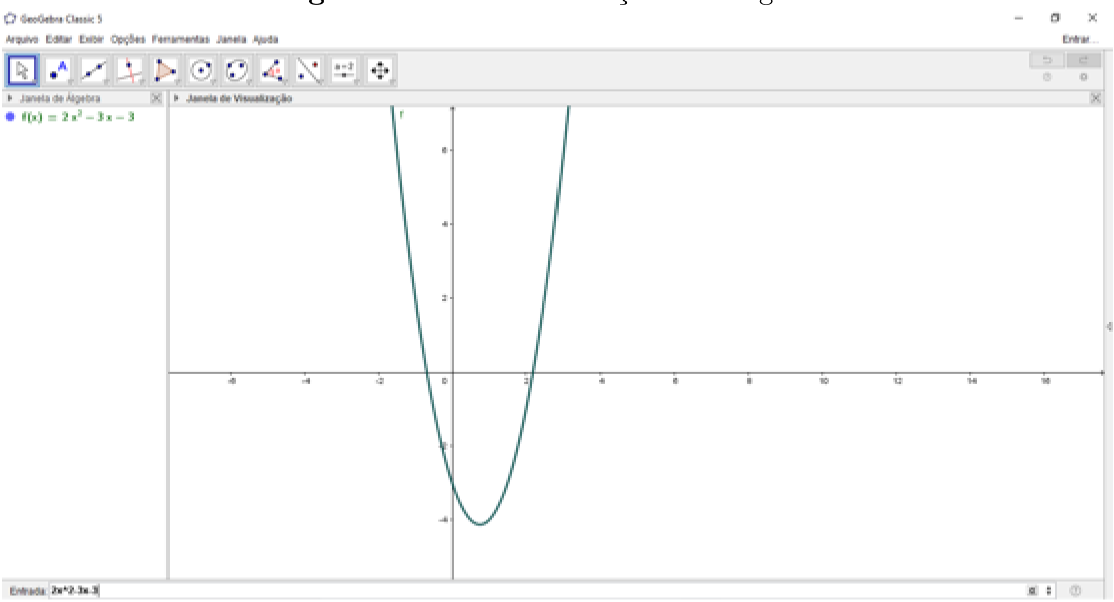
Figura 29 – Interface do Software Geogebra.



Fonte: Autor, 2020.

Podemos fazer várias alterações na janela de visualização, desde mudar os eixos ou a malha. A Figura 30 traz a construção do gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$.

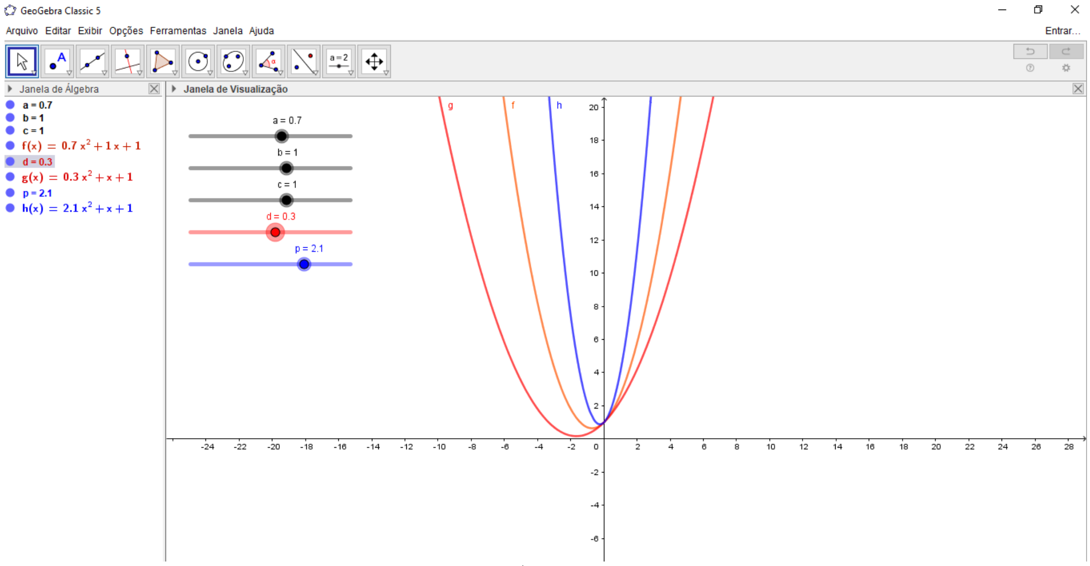
Figura 30 – Uma construção no Geogebra.



Fonte: Autor, 2020.

Uma aplicação interessante do software é o controle deslizante. Suponha que o professor queira trabalhar os coeficientes a, b e c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, o Geogebra só entende valores numéricos além de x, y ou z no caso tridimensional. Logo, se o professor escrever os coeficientes a, b, c o programa criará controles deslizantes, que serão valores em que o professor pode variar. Utilizando a opção animar, o coeficiente irá variar automaticamente no intervalo fixado, deste modo o aluno pode ver com clareza a função que cada coeficiente tem na função quadrática. A Figura 31 traz variações apenas dos valores de a, com $b = c = 1$.

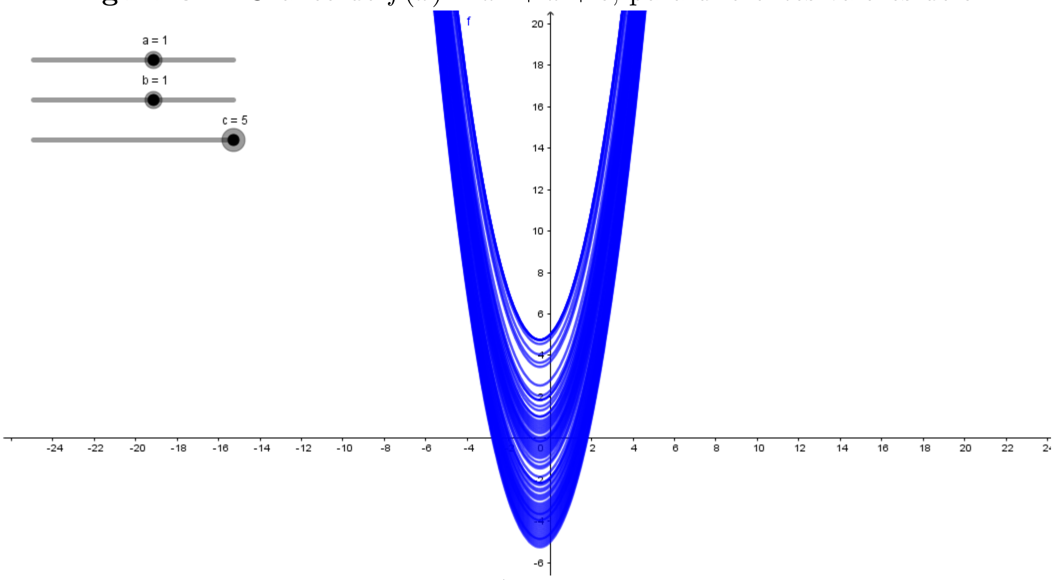
Figura 31 – Gráfico de $f(x) = ax^2 + x + 1$, para diferentes valores de a.



Fonte: Autor, 2020.

Habilitando a opção **Habilitar Rastro**, a cada variação do controle deslizante, fica o rastro do gráfico. A Figura 32 traz o rastro deixado pela variação de c, com a e b fixado em 1.

Figura 32 – Gráfico de $f(x) = x^2 + x + c$, para diferentes valores de c.



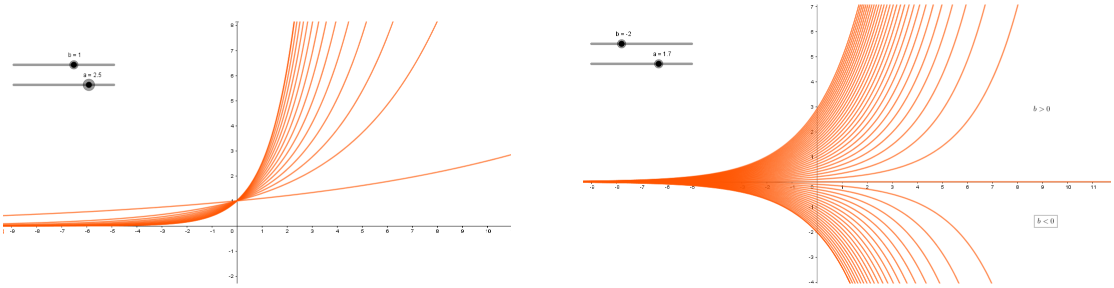
Fonte: Autor, 2020.

Certamente, uma aula de funções quadráticas utilizando estas funções do Geogebra fica bem mais atraente para os alunos, principalmente, se houver a possibilidade de levar os alunos para um laboratório de informática para os mesmos utilizarem os comandos sugeridos pelo professor, lembrando que, além de ser um programa livre, ou seja, de graça para download, possui a versão online e a versão mobile, para celular, o que pode facilitar ainda mais para as aulas do professor, visto que quase todos os alunos, se não todos, possuem celulares que rodam o programa.

Alguns comandos o usuário do programa aprende a partir das necessidades que vão aparecendo, mas muitos comandos, quando começamos a digitar no campo Entrada, o próprio programa já abre opções com o início do comando que está sendo digitado, por exemplo, ao querer plotar o gráfico da função seno, quando digitamos **sen** na entrada, já aparecem as opções $sen(x)$ ou $\operatorname{senh}(x)$, este último o seno hiperbólico.

Suponha que o professor vá trabalhar as funções exponenciais, o caso geral de tal função é $f(x) = ba^x$. Vamos digitar este comando no Geogebra e deixar um fixo e variar o outro, como mostra a Figura 33.

Figura 33 – Gráfico de $f(x) = ba^x$ para diferentes valores de a e b.

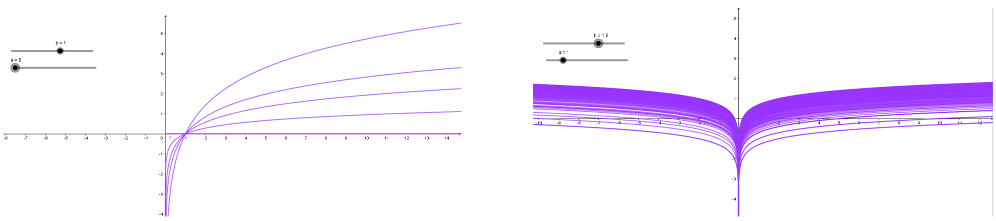


(a) Caso $b = 1$ e a variando. (b) Caso $a = 1,7$ e b variando.

Fonte: Autor, 2020.

Também podemos utilizar o programa para estudar o comportamento da função $f(x) = a\log(bx)$, como mostrado na Figura 34.

Figura 34 – Gráfico de $f(x) = a\log(bx)$ para diferentes valores de a e b.

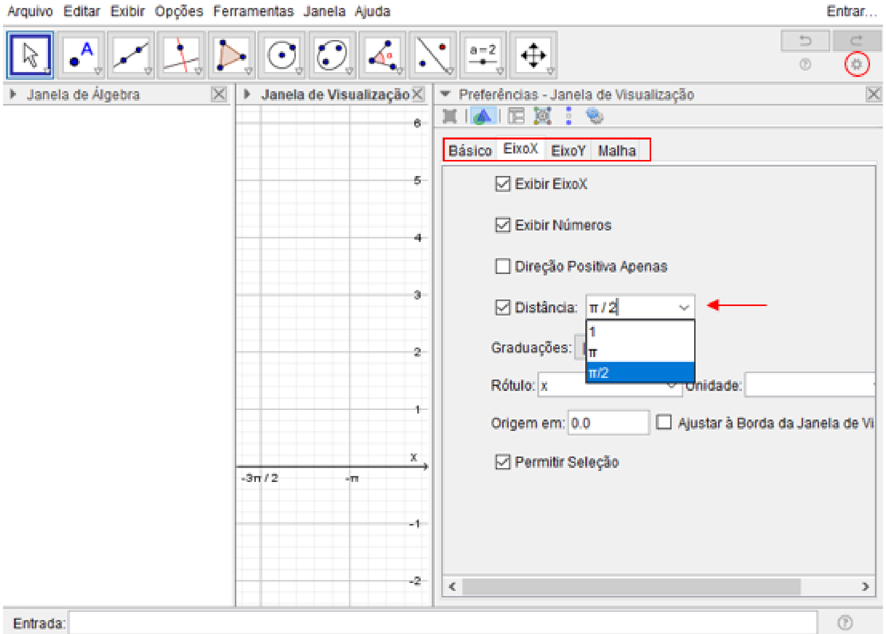


(a) Caso $a = 1$ e b variando. (b) Caso $b = 1$ e a variando.

Fonte: Autor, 2020.

Da mesma forma, o estudo de funções trigonométricas com o Geogebra pode se tornar bem atraente aos alunos. Vamos construir o gráfico da função $\operatorname{sen} x$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Para isto, abrindo o programa vamos personalizar a Janela de Visualização,para tanto observe a Figura 35. Clicando sobre a engrenagem no canto superior direito, escolhemos **Janela de Visualização**, onde abrirá um ambiente para configurar, por exemplo, os eixos e a malha, neste caso, desmarcamos a opção exibir malha, e modificamos x na opção distância, usamos a opção $\pi/2$, pois com isso, o eixo x mostrará os valores no intervalo de $\pi/2$.

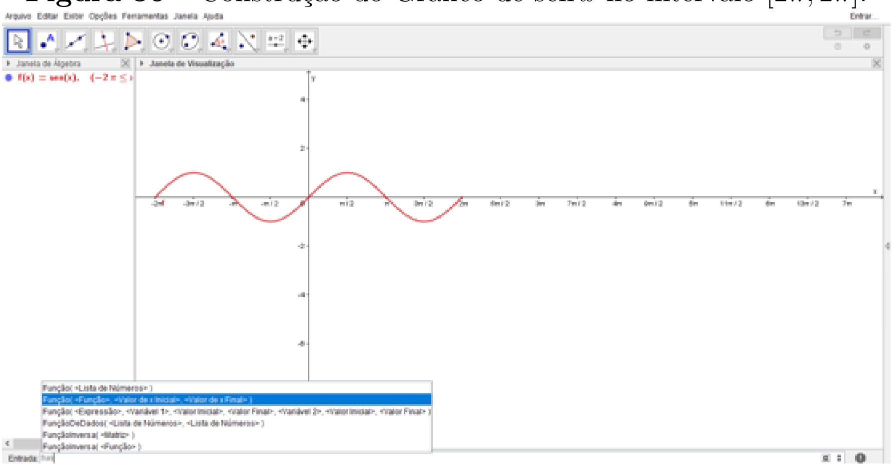
Figura 35 – Configurando a Janela de Visualização.



Fonte: Autor, 2020.

Depois de configurado a Janela de Visualização, no campo Entrada, digite função, logo, aparecerá algumas opções, escolhemos o campo **(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)** e escrevemos nos espaços os seguintes comandos. (sen x,-2pi, 2pi), como mostrado na Figura 36.

Figura 36 – Construção do Gráfico de $\operatorname{sen} x$ no intervalo $[2\pi, 2\pi]$.

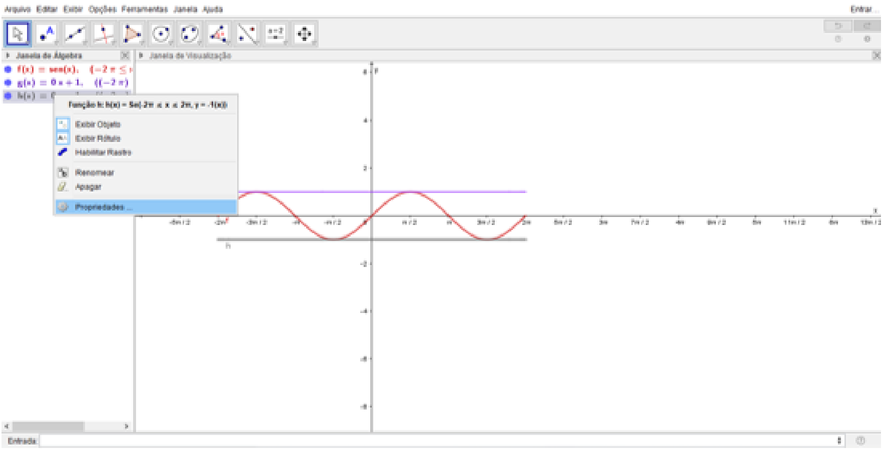


Fonte: Autor, 2020.

Observe que se escrevêssemos no campo de Entrada apenas $\operatorname{sen} x$ teríamos o gráfico da função seno com x percorrendo todos os reais.

Agora, para uma melhor visualização por parte dos alunos, podemos criar as retas horizontais $y = -1$ e $y = 1$, e para isto, com os mesmos passos anteriores para função, mas com o comando **Função(y=1, -2pi, 2pi)** e **Função(y=-1, -2pi, 2pi)**, assim criamos as duas retas horizontais. Para modificar as cores dos gráficos, clicando com o botão direito do mouse sobre o objeto, clicando em propriedades, podemos fazer várias alterações no desenho, desde a mudança de cor, como colocar uma espessura de linha maior, ou tracejar, observe na Figura 37.

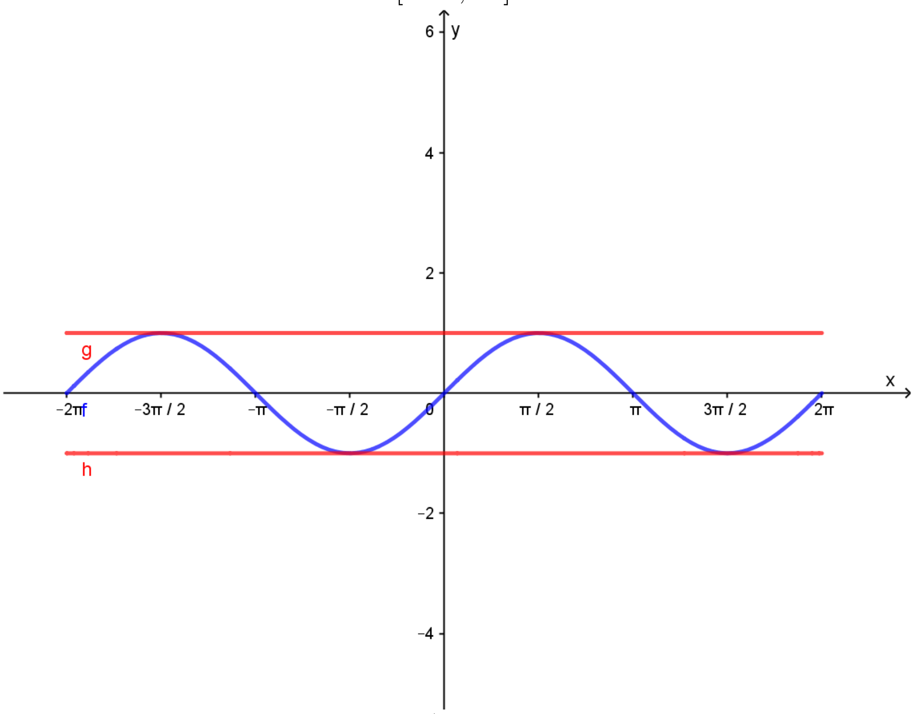
Figura 37 – Configurando as propriedades visuais dos gráficos.



Fonte: Autor, 2020.

Após todos estes passos, obtemos o gráfico mostrado na Figura 38.

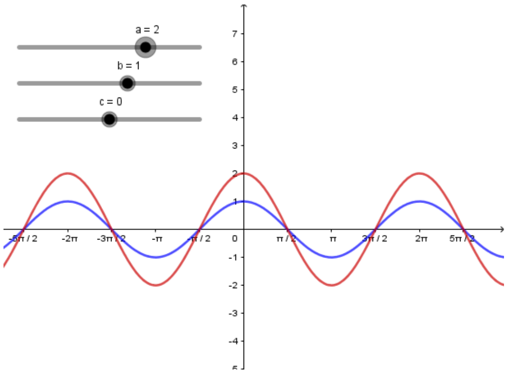
Figura 38 – Resultado Final da Construção do gráfico de $\operatorname{sen} x$ em $[-2\pi, 2\pi]$.



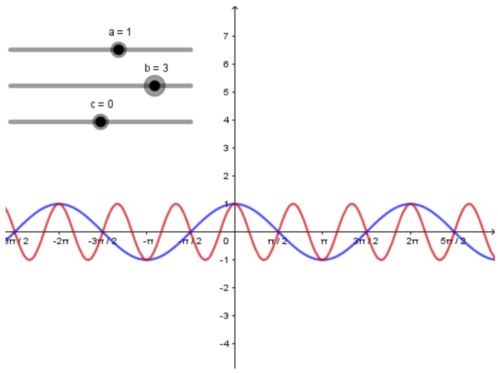
Fonte: Autor, 2020.

A partir do Software, podemos mostrar visualmente de maneira mais prática o comportamento das funções trigonométricas em sua forma geral, por exemplo, tomaremos a função $f(x) = a\cos(bx+c)$, e para isto, criaremos três controles deslizantes, o de a, b e c, pois quando colocarmos este comando no Geogebra, tudo que for diferente de x ou y, ele entende como sendo uma constante, e por isso, a transforma em controle deslizante. Com isso, no Geogebra, no campo entrada, colocaremos **Função(a*cos(b*x+c), $-\infty$, ∞)**, automaticamente serão criados os controles deslizantes. Na Figura 39, à seguir, iremos variar apenas uma das constantes. Em azul, o gráfico de $\cos x$, em vermelho a variação obtida dando valores para a, b e c.

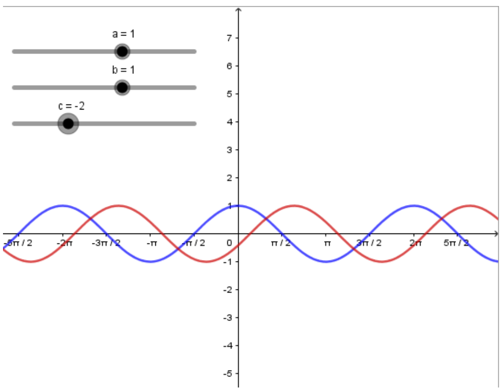
Figura 39 – Gráfico de $f(x) = a\cos{(bx + c)}$ para diferentes valores de a, b e c.



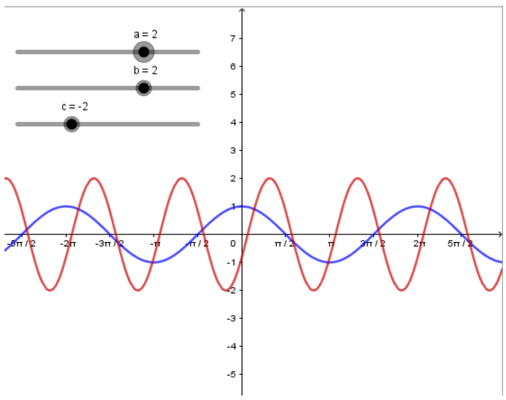
(a) Caso $a = 2, b = 1, c = 0$



(b) Caso $a = 2, b = 3, c = 0$



(c) Caso $a = 1, b = 1, c = -2$



(d) Caso $a = 2, b = 2, c = -2$

Fonte: Autor, 2020.

Obviamente, não caberia aqui as tantas ferramentas que podemos trabalhar com este Software, porém, nosso intuito com estes exemplos é despertar o desejo do professor, em querer deixar suas aulas mais dinâmicas e atrativas, visto que no cenário atual, com tantas tecnologias, é quase que uma obrigação o professor usá-las a seu favor, e não somente, vê-las como uma adversária, e por isto, acreditamos que podemos mudar, de fato, as rotinas de nossas aulas através da tecnologia, não só para o ensino de Matemática, mas para todas as áreas.

8 CONCLUSÃO

O ensino de Matemática, sem dúvida, é um dos grandes desafios em qualquer escola do Brasil, principalmente nas escolas públicas. Atualmente há constantes debates sobre novas formas de ensinar Matemática, principalmente na inclusão das novas tecnologias, uma dessas formas é a própria implementação da BNCC, contudo, percebemos, ainda, uma dificuldade pelos professores em aplicar as ideias propostas na BNCC, e até mesmo por isso existem constantes formações, não somente na área de Matemática, mas em todas, a fim de auxiliar o professor na correta utilização deste documento normativo.

Vimos que para qualquer problema sobre funções, em Matemática, encontramos os traços de sua resolução nas Habilidades propostas na BNCC, seja problemas fáceis ou difíceis. O professor não deve se limitar a BNCC para o ensino de funções, porque sempre podemos melhorar.

O estudo de funções com o auxílio da tecnologia, em especial de softwares que plotam gráficos pode tornar a aula bem mais dinâmica, o que pode propiciar o despertar do interesse do aluno pelo estudo de Matemática.

A partir deste trabalho, podemos ver como relacionar os mais diversificados tipos de problemas, sobre funções, e associar sua resolução as Competências e Habilidades propostas pela BNCC e/ou ENEM, deste modo contribuindo para uma abordagem mais ampla de todas estas Habilidades pelos professores do ensino médio, bem como uma proposta de auto avaliação das metodologias empregadas em sala de aula.

Como todos sabemos, a aula é um ambiente não homogêneo de conhecimento, ou seja, há diversos níveis de conhecimento, logo, se faz necessário um bom planejamento antes de aplicar qualquer método de ensino em sala, pois, tão importante quanto o objeto de ensino é o planejamento de execução.

REFERÊNCIAS

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC, 2018. Disponível em: `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf`. Acesso em: 30 de Junho de 2020.

BRASIL. *Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Matriz de Referência para o ENEM 2015. Brasília: INEP/MEC. Disponível em:`https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf`. Acesso em: 25 de Abril de 2021.

CAMINHA, Antonio . *Geometria - 1a Edição.* 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. v. 1. 502p .

LIMA, E. L..*Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

LIMA, E. L.. *Análise Real: Coleção Matemática Universitária.* Rio de Janeiro:IMPA, 1999. v. 1.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais.* Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

IEZZI, Gelson; DOLCE, Oswaldo e MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos. Volume 2.* São Paulo: Editora Atual, 2006.

IEZZI, Gelson; *Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria. Volume 3.* São Paulo: Editora Atual, 2006.

RESENDE, A. C., FERREIRA, L.L. & BARBOSA, R. A. *A modelagem matemática aplicada no acompanhamento do crescimento de um minhocário: Um estudo de caso na disciplina de matemática no 2º ano do Ensino Médio do curso técnico em florestas do IFBAIANO- Campus Teixeira de Freitas.* In: Encontro Baiano de Educação Matemática, XVI, 2015, Salvador, Brasil.

STEWART, James. *Cálculo: volume 1.* São Paulo: Cengage Learning, 2010.