



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SILVIO CESAR TEIXEIRA DE VASCONCELOS

**O PROBLEMA DA CONTAGEM DE FACES LATERAIS DA JUSTAPOSIÇÃO DE
DOIS SÓLIDOS REGULARES: NOVAS ABORDAGENS E RESULTADOS**

Redenção, Ceará
2021

SILVIO CESAR TEIXEIRA DE VASCONCELOS

**O PROBLEMA DA CONTAGEM DE FACES LATERAIS DA JUSTAPOSIÇÃO DE
DOIS SÓLIDOS REGULARES: NOVAS ABORDAGENS E RESULTADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Alisson Pessoa Guimarães

Redenção, Ceará

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Vasconcelos, Silvio Cesar Teixeira de.

V45p

O problema da contagem de faces laterais da justaposição de dois regulares: novas abordagens e resultados / Silvio Cesar Teixeira de Vasconcelos. - Redenção, 2022.

84f: il.

Dissertação - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Alisson Pessoa Guimarães.

1. Poliedros. 2. Geometria espacial. 3. Imaginação. I. Título

CE/UF/BSP

CDD 516.156

SILVIO CESAR TEIXEIRA DE VASCONCELOS

**O PROBLEMA DA CONTAGEM DE FACES LATERAIS DA JUSTAPOSIÇÃO DE
DOIS SÓLIDOS REGULARES: NOVAS ABORDAGENS E RESULTADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB) – Campus das Auroras.

Aprovada em: 17 de dezembro de 2021.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Antônio Alisson Pessoa Guimarães (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Ma. Kiara Lima Costa

Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará (IFCE/Campus Fortaleza)

Redenção, Ceará

2021

*Dedico este trabalho ao Meu Pai e Irmão (in memoriam)...
Homens redencionistas.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela proteção em todas as viagens que fiz no decorrer do curso, por conceder saúde para mim, para meus familiares e para as pessoas do meu convívio, em um momento de muitas dificuldades no mundo.

À minha família, minha esposa Mônica, e minhas duas filhas, Monique e Marina, que estão sempre ao meu lado, me incentivando. Ao meu irmão Thyago Vasconcelos, que proporcionou todo o apoio do início ao fim do curso.

Aos meus professores da Unilab, que de uma forma muito profissional e humana fizeram parte desse projeto com toda dedicação, superando minhas expectativas, mesmo neste momento atípico de pandemia.

Ao meu orientador e professor Alisson Pessoa Guimarães, por toda a atenção, empenho na construção deste trabalho, e pela incomensurável paciência em todos os momentos.

Aos meus colegas de curso: Ananias, Dennis, Fábio, Felipe, Paulo, Renato e Salustriano; pelo apoio e auxílio nos momentos dos estudos; e pelos muitos momentos de descontrações inesquecíveis. Neste presente momento, no final de curso, estamos mudando de colegas de curso para amigos.

À Unilab, por abrir suas portas para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), dando oportunidade de acesso aos professores de Matemática da educação básica da região.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela iniciativa de criação e coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) e à Coordenação Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio financeiro.

“Às vezes não acertamos com medo de errar e erramos com medo de acertar.”
(Arquimedes)

RESUMO

A Geometria tem vivenciada ao longo da *História da Matemática*, varias descobertas tomando como base métodos indutivo e dedutivo na sua construção. Neste trabalho, vamos apresentar uma história recente sobre um simples problema de Geometria Espacial, mais precisamente sobre dois poliedros, que obteve uma grande repercussão, sendo página de um famoso jornal. O fato ocorreu quando uma organização de testes e avaliações cometeu erros de elaboração e correção. Mas isso, não passou despercebido por um aluno de ensino médio. Ele percebeu, através da visualização geométrica espacial, que a questão teria uma outra resposta, diferente da àquela dada pela organização. Na *História da Matemática*, não existe uma definição única para poliedros convexos, então se aplica mais de uma resposta para o problema. Usando um número maior desses poliedros, com muita imaginação, podemos construir outros poliedros e descobrir algumas aplicações.

Palavras-chave: Visualização; Descobertas; História da Matemática; Imaginação; Geometria Espacial; Poliedros convexos.

ABSTRACT

Geometry has experienced throughout the *history of mathematics*, several discoveries based on inductive and deductive methods in its construction. In this paper, we will present a recent story about a simple problem of Spatial Geometry, more precisely about two polyhedra, which got a great repercussion, being the page of a famous newspaper. The fact occurred when an organization of tests and evaluations made mistakes in their elaboration and correction. But this did not go unnoticed by a high school student. He realized, through spatial geometric visualization, that the question would have another answer, different from the one given by the organization. In the *history of mathematics*, there is no single definition for convex polyhedra, so more than one answer to the problem applies. Using a larger number of these polyhedra, with a lot of imagination, we can construct other polyhedra and discover some applications.

Keywords: Visualization; Discoveries; History of Mathematics; Imagination; Spatial Geometry; Convex polyhedra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pirâmide $VA_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n$.	21
Figura 2 – Prisma e paralelepípedo.	22
Figura 3 – Pirâmides $VABC$ e $VPQR$.	23
Figura 4 – Pirâmides $VABC$ e $V'ABC$.	24
Figura 5 – Prisma $ABCDEF$.	24
Figura 6 – Tetraedro $ABCE$.	25
Figura 7 – Pirâmide $ACDEF$.	25
Figura 8 – Tetraedro $ACDE$.	26
Figura 9 – Tetraedro $CDEF$.	26
Figura 10 – Prisma $ABCDEF$ formado pelos tetraedros T_{ABCE} , T_{ACDE} e T_{CDEF} .	26
Figura 11 – Pirâmide qualquer.	28
Figura 12 – Pirâmide Regular $VA_1A_2 \cdots A_n$.	29
Figura 13 – Pirâmide regular $ABCDE$ e tetraedro regular $FGHI$.	29
Figura 14 – Pirâmide regular $ABCDE$.	30
Figura 15 – Face lateral da pirâmide $ABCDE$.	30
Figura 16 – Quadrado $BCDE$ inscrito.	32
Figura 17 – Triângulo retângulo AOM .	32
Figura 18 – Tetraedro regular $FGHI$.	33
Figura 19 – Triângulo equilátero GHI inscrito.	34
Figura 20 – Triângulo retângulo FOM .	34
Figura 21 – Pirâmides $ABCDE$ e $FGHI$.	36
Figura 22 – Poliedro $ABCDEF$.	37
Figura 23 – Triângulos EJC e EJF internos do poliedro $ABCDEF$.	40
Figura 24 – Triângulos EJC e EJF .	41
Figura 25 – Quadrado $BCDE$.	42
Figura 26 – Pirâmide $ABCDE$.	43
Figura 27 – Triângulo isósceles ABD .	44
Figura 28 – Poliedro $ABCDEF$.	45
Figura 29 – Triângulo isósceles AIF .	46
Figura 30 – Paralelogramo $AFIK$.	47
Figura 31 – Poliedro $ABCDEF$ com as coordenadas.	48
Figura 32 – Triângulos ACD e ADF .	49
Figura 33 – Vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .	51
Figura 34 – Vetores \vec{CA} e \vec{CD} no plano Π .	52
Figura 35 – Vetores \vec{v} e \vec{u} .	54
Figura 36 – Vetores \vec{n} , \vec{v} e \vec{u} .	55

Figura 37 – Pirâmide regular.	56
Figura 38 – Tetraedro regular.	57
Figura 39 – Base da pirâmide quadrada com lado $2l$	57
Figura 40 – Pirâmide com arestas $2l$	58
Figura 41 – Base da pirâmide quadrada com lado $3l$	58
Figura 42 – Pirâmide com arestas $3l$	59
Figura 43 – Números triangulares.	62
Figura 44 – Números quadrangulares.	63
Figura 45 – Pirâmide regular com arestas $3l$	64
Figura 46 – Base da Pirâmide regular com arestas $3l$	73

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pirâmides regulares	67
Tabela 2 – Bases das pirâmides regulares	76

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SBM	Sociedade Brasileira de Matemática.
RPM	Revista do Professor de Matemática.
ETS	Educational Testing Service (Serviço de Teste Educacional).
Promat	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
PIM	Princípio da Indução Matemática.

LISTA DE SÍMBOLOS

med	Medida do segmento de reta.
m	Matriz quadrada formada pelas coordenadas dos pontos C , M e F .
$\det m$	Determinante da matriz m .
l	Unidade de comprimento unitário.
T_{ABCE}	Tetraedro com vértices A , B , C e E .
V_{Prisma}	Volume de um prisma.
A_{Δ}	Área lateral de uma pirâmide.
F_3	Faces triangulares de um poliedro convexo.
V_3	Vértices com 3 arestas concorrentes de um poliedro convexo.
$\sin \alpha$	Senô de um ângulo alfa.
$\cos \alpha$	Cosseno de um ângulo alfa.
$d(C, M)$	Distância entre os pontos C e M .
Δ	Operador diferença.
\vec{v}	Vetor v .
\overrightarrow{BA}	Vetor BA com origem no ponto B e passando pelo ponto A .
Π	Plano pi.
Ω	Plano ômega.
Π_{xy}	Plano pi que contém os eixos ortogonais x e y .
Π_{ACD}	Plano pi que contém os vetores CA e CD .
$\vec{v} \times \vec{u}$	Produto vetorial entre os vetores \vec{v} e \vec{u} .
\in	Pertence.
\equiv	Equivalente.
(a_n)	Sequência numérica.
a_n	n -ésimo elemento da sequência (a_n) .

$\sum_{i=1}^n a_i$	Somatório de uma sequência real (a_n) .
$\prod_{i=1}^n a_i$	Produtório de uma sequência real (a_n) .
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\therefore	Consequentemente.
$P(n)$	Proposição por indução.
\forall	Para todo.
$>$	maior do que.
$<$	menor do que.
\geq	Maior ou igual do que.
\leq	Menor ou igual do que.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	POLIEDROS CONVEXOS	19
2.1	Definições de poliedros convexos	19
2.2	Pirâmide convexa	20
2.3	Pirâmides regulares	28
2.3.1	<i>Pirâmide regular</i>	29
2.3.2	<i>Tetraedro regular</i>	33
3	PROBLEMA DO TESTE DE APTIDÃO	36
3.1	Problema com uma pirâmide e um tetraedro	36
3.2	Demonstração apresentada pela <i>RPM 03</i>	40
4	OUTRAS DEMONSTRAÇÕES	42
4.1	Coordenadas do poliedro <i>ABCDEF</i> no espaço	42
4.2	Primeira demonstração	48
4.3	Segunda demonstração	51
4.4	Terceira demonstração	52
4.5	Quarta demonstração	53
5	CONSTRUÇÃO DE PIRÂMIDES REGULARES E SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS	56
5.1	Construção de pirâmides regulares	56
5.1.1	<i>Pirâmide com aresta medindo 2l</i>	59
5.1.2	<i>Pirâmide com aresta medindo 3l</i>	61
5.2	Sequências numéricas das pirâmides regulares	62
5.2.1	<i>As expressões do somatório dos termos das sequências (a_n), (b_n) e (c_n)</i>	67
5.3	Outras sequências numéricas das pirâmides regulares	73
5.3.1	<i>As expressões do somatório dos termos das sequências (d_n), (e_n) e (f_n)</i>	76
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	81
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

Na *Geometria* é necessário estabelecer conceitos básicos, existem os chamados elementos primitivos: ponto, reta e plano, e, assim, é possível deduzir relações com estes elementos somente através do raciocínio lógico. Dentro dos objetivos dessa subárea, podemos definir propriedades (teoremas ou proposições) e formar (ou construir) figuras planas e sólidos no plano e no espaço.

O raciocínio lógico-indutivo é muito frequente no pensamento matemático, na visualização geométrica e nos recursos heurísticos. A heurística é um procedimento algorítmico desenvolvido a partir de um modelo cognitivo, por meio de métodos práticos baseadas na experiência. A heurística matemática são usadas estratégias mais simples para encontrar respostas corretas em pouco tempo, de formas mais objetivas, a partir de processos cognitivos (individual ou em grupo) (CORDENONSI, 2008).

Na *História da Matemática*, mais precisamente no ápice da civilização grega, foi uma época muito produtiva na subárea da *Geometria*. Naquele momento, os conhecimentos passaram a ser encontrados pelo processo dedutivo, assim deixando em segundo plano o processo empírico. O primeiro grego a tomar essa postura, foi o engenheiro e mercador Tales de Mileto (624 a.C. - 547 a.C.). Todo esse processo de conhecimento e construção, aproximadamente, ao longo de 300 anos, ficou registrado na obra *Elementos*, constituída por 13 livros com mais variados assunto de Matemática, escrita pelo grego Euclides (330 a.C. - 270 a.C.), de uma forma didática para o ensino da Matemática básica, que até hoje é usado em quase todas as escolas do mundo (BARROS; ANDRADE, 2010).

No período helênico, viveu o maior matemático da Antiguidade, o grego *Arquimedes* de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), que contribuiu com várias descobertas no campo da *Ciências* e da *Matemática*. Dentre essas descobertas, foram encontradas uma série de poliedros arquimedianos e as relações proporcionais entre os volumes e as áreas dos sólidos geométricos, com esfera, cone e cilindro. O grande trabalho de Arquimedes é conhecido como *O Método*, e foram usadas por ele, formas meramente heurística para descobrir muitos de seus teoremas. Esse trabalho foi um aprimoramento pelo método da exaustão, que foi construído por outro matemático grego, muito importante da sua época, *Eudoxo* (408 a.C. – 355 a.C.) (EVES, 2007).

Na *Geometria Plana*, para Lima et al. (2006), quando nos referimos aos polígonos, estamos nos referindo à região interna, assim como também, seu contorno ou perímetro, o que se assemelha muito aos poliedros, na Geometria Espacial, pois esses são determinados como sendo a região do espaço (volume), e para nos referir à reunião de polígonos que limita esta região do espaço (área lateral).

Este trabalho, consiste em apresentar um problema sobre dois poliedros convexos, para o qual foi encontrado uma outra resposta de forma dedutiva, e outras aplicações para esses poliedros convexos. A estrutura deste trabalho está apresentada em seis capítulos, que correspondem à introdução, ao desenvolvimento e às considerações finais.

No primeiro capítulo, apresentamos de forma sucinta a importância do pensamento matemático, visualização geométrica e recursos heurísticos, para solucionar problemas matemáticos, estabelecer relações e construções de forma mais práticas. A partir dos processos dedutivos, a *História da Matemática* apresenta na sua literatura várias descobertas em determinado período da história da humanidade, principalmente, na *Geometria Plana* e *Geometria Espacial*.

No segundo capítulo, começaremos apresentando as definições para poliedros convexos e Teorema de Euler. Em seguida, mostraremos a definição de pirâmides convexas e demonstraremos o teorema do volume de uma pirâmide qualquer, tendo base o *Princípio de Cavalieri* e dos elementos básicos da Matemática à proporcionalidade. E, no final do capítulo, iremos mostrar uma relação de proporcionalidade entre os volumes de uma pirâmide regular de base quadrada e um tetraedro regular, ambos com arestas de comprimento unitário.

No terceiro capítulo, de acordo com o artigo [Ávila \(2010\)](#), apresentamos um problema de Geometria Espacial sobre dois poliedros convexos, aplicado por uma organização de testes de aptidão para alunos do ensino médio. O fato inusitado, foi que um jovem aluno encontrou uma resposta distinta, comparada com a resposta dos elaboradores do referido teste. Para chegarmos em outra resposta, e com auxílio do *Teorema de Euler*, teremos concluído que o problema possui duas respostas diferentes. Já no final desse capítulo, existe uma demonstração para o problema, que está presente no referido artigo, e que confirma a resposta distinta do aluno.

No capítulo quatro, serão apresentados mais quatro novas demonstrações do problema capítulo anterior, sobre os dois poliedros. Mas, antes das demonstrações, vamos fixar o novo poliedro do problema no espaço ortogonal tridimensional euclidiano. Por partes, vamos construir o novo poliedro no espaço, definindo as coordenadas de cada vértice a partir de um parâmetro genérico. Definidas as coordenadas, provaremos que, após a justaposição dos poliedros regulares, o novo poliedro possui dois pares de faces laterais pertencentes, cada par, ao mesmo plano.

No capítulo cinco, construiremos pirâmides regulares, com base quadrada, somente com os poliedros (pirâmide e tetraedro regulares), os quais foram mencionados nos últimos capítulos. Na sequência, apresentaremos os *números figurados* que surgiram com o nascimento da *Aritmética Teórica* e deram origem a algumas sequências numéricas. A partir da construção das pirâmides regulares do seção anterior, formaremos sequências numéricas com os números de pirâmides regulares e tetraedros com aresta de comprimento l . Com essas sequências determinaremos, de forma genérica, polinômios de segunda e

terceira ordem. Apresentaremos tabelas com os dados das sequências de construções das pirâmides regulares. Determinaremos as fórmulas dos somatórios das sequências numéricas. E, por fim, demonstraremos, pelo *Teorema da Indução Matemática*, que as fórmulas dos somatórios são verdadeiras.

No último capítulo, nas considerações finais, levaremos como destaque, não os erros da empresa organizadora do teste de aptidão, mas o fato de que foi descoberta uma resposta diferente, por um jovem aluno, de uma forma muito habilidosa e simples. Contaremos, também, que, após décadas sobre o ocorrido, o quanto é difícil preparar e avaliar os alunos, em Matemática, e, ainda, nos questionaremos sobre o ensino e formação dos professores de Matemática.

2 POLIEDROS CONVEXOS

Começaremos neste capítulo, pelas definições de poliedros convexos e em seguida definiremos uma pirâmide. Apresentaremos a demonstração do volume de uma pirâmide qualquer, utilizando o *Princípio de Cavalieri* e figuras homotéticas como ferramentas na proporcionalidade das figuras. A partir daí, vamos determinar as áreas laterais e os volumes das pirâmides regulares com aresta de comprimento l .

2.1 Definições de poliedros convexos

Vamos considerar três definições sobre *poliedros convexos*, encontrados atualmente na nossa literatura. Para [Lima et al. \(2006\)](#), sua definição sobre *poliedros convexos*, afirmam que: .

Definição 2.1.1. Poliedro é uma região de um número finito de polígonos planos chamados de faces onde:

- (i) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- (ii) A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.
- (iii) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice.

Segundo as afirmações de [Neto \(2013\)](#), sobre poliedros convexos, existe uma outra definição que difere dessa última. Vejamos:

Definição 2.1.2. Um Poliedro é um conjunto fechado e limitado do espaço, com interior não vazio e cuja fronteira consiste da união de número finito de polígonos satisfazendo as condições a seguir:

- (a) dois polígonos quaisquer não estão contidos em um mesmo plano.
- (b) se dois polígonos se intersectam, então eles têm um vértice ou um lado comum.
- (c) se dois polígonos P e Q não se intersectam, então existem polígonos

$$P_i = P_1, P_2, \dots, P_k = Q$$

tais que P_i e P_{i+1} se intersectam, para $1 \leq i < k$.

Mais uma definição, equivalente à definição anterior, a qual se encontra em vários livros de nível médio. Tomemos como exemplo a definição de [Dolce e Pompeo \(2013\)](#):

Definição 2.1.3. Considere o número finito n ($n \geq 4$) de polígonos em planos convexos tais que:

- (a) dois polígonos não estão no mesmo plano;
- (b) cada lado do polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- (c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo plano.

Nessas condições, ficam determinados n semiespaços, cada um com origem no plano de um polígono e contém os planos restantes. A interseção desses semiespaços é chamada de poliedro convexos.

Segundo [Lima et al. \(2006\)](#), uma condição muito simples para que um poliedro seja convexos, é:

Definição 2.1.4. Um poliedro é definido como convexo, basta que qualquer reta (não contida em nenhuma face) intersecta o poliedro, no máximo, em dois pontos.

De acordo [Eves \(2007\)](#), uma outra relação muito importante para os poliedros é o *Teorema de Euler*, descoberto no século XVIII, pelo matemático suíço que leva seu nome, *Leonhard Euler* (1707 - 1783), como um escritor na história da matemática foi incomparável, não existe um ramo da matemática que não tenha sua contribuição. Em destaque temos seus trabalhos nas subáreas da geometria diferencial, cálculo de diferenças finitas, cálculo de variações e teoria dos números, a qual apresentamos este *Teorema*:

Teorema 2.1.1 (Teorema de Euler). *Em todo poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação: $V - A + F = 2$.*

Esse teorema não se torna verdadeiro para todos os poliedros, mas é verdadeiro para os poliedros convexos.

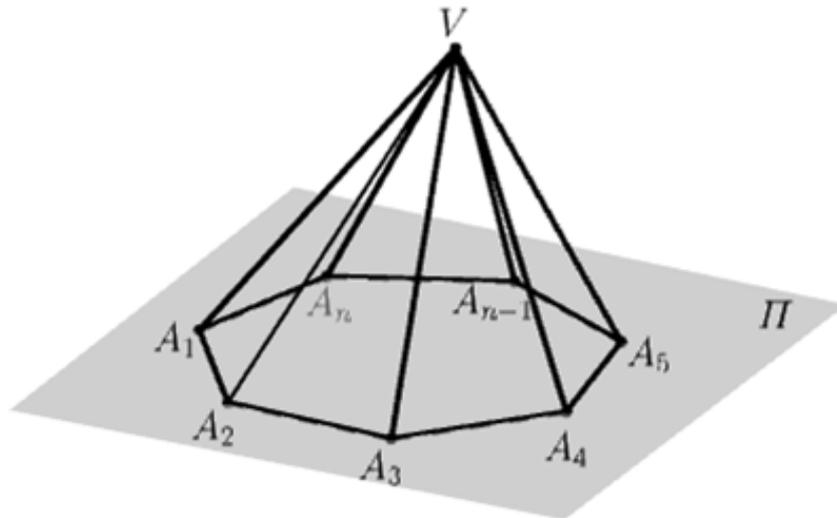
2.2 Pirâmide convexa

Definição 2.2.1. Pirâmide ou pirâmide convexa é a reunião dos segmentos com extremos nos pontos A_1, A_2, \dots, A_n de um polígono, que pertencente ao plano Π , e a outra extremidade em ponto V , que não pertencente ao plano Π .

Os segmentos VA_1, VA_2, \dots, VA_n (arestas laterais) formam com os lados (arestas da base) $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ do polígono, ou base da pirâmide, triângulos laterais

VA_1A_2 , $VA_2A_3, \dots, VA_{(n-1)}A_n$, que seriam área lateral da pirâmide. A reunião da área lateral com a área do polígono $A_1A_2 \dots A_n$ é definida como sendo a área total da pirâmide (CARVALHO, 2005).

Figura 1 – Pirâmide $VA_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$.



Fonte: Autor 2021.

Propriedade 2.2.1. *Sendo a pirâmide é um caso particular de poliedros convexos, então para qualquer pirâmide é verdadeiro o Teorema de Euler: $V - A + F = 2$ (DOLCE; POMPEO, 2013).*

Demonstração: Seja F o número de faces de uma pirâmide qualquer, formadas por: n faces laterais (triângulos) e mais uma face da base (polígono), logo $F = n + 1$. O número de arestas A , é formada por: n arestas laterais e mais n arestas da base, assim, $A = 2n$. O número de vértices V , é determinado por: n vértices no polígono da base, mais um vértice que fica fora do plano que contém o polígono ou base da pirâmide, então $V = n + 1$. Agora, substituindo na relação de *Euler*, temos

$$V - A + F = (n + 1) - 2n + (n + 1) = 2n - 2n + 2 = 2. \quad (2.1)$$

Concluimos que,

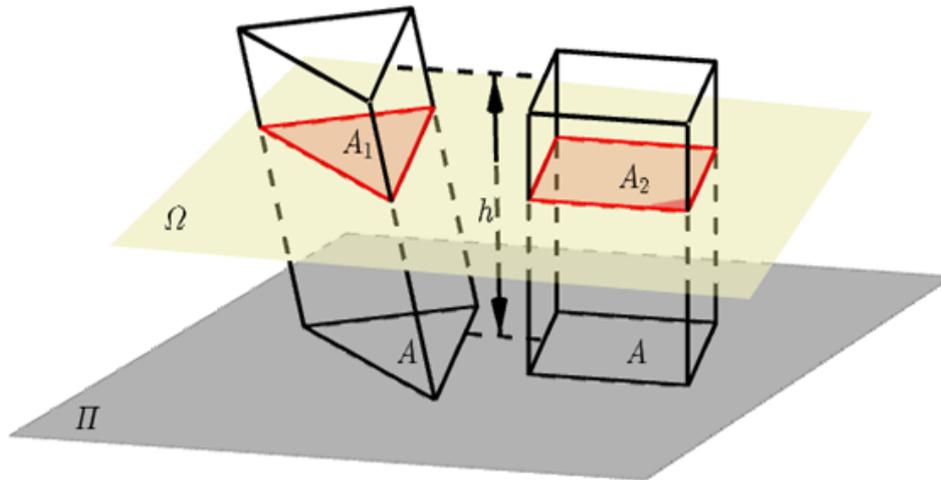
$$V - A + F = 2. \quad (2.2)$$

O volume de sólido qualquer tem como ferramenta fundamental o axioma conhecido como *Princípio de Cavalieri*, segundo Lima et al. (2006) afirmam que:

Axioma 2.2.1 (Princípio de Cavalieri). *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então, esses sólidos têm mesmo volume.*

Aplicando esse princípio, suponha um prisma cuja base triangular de área A , contido em plano Π , e de altura h . Ao lado, no mesmo plano Π , tem um paralelepípedo de base retangular de área A e altura h . Vejamos a *Figura* :

Figura 2 – Prisma e paralelepípedo.



Fonte: Autor 2021.

Sejam os dois sólidos, prisma e paralelepípedo, seccionados pelo plano Ω , o qual é paralelo ao plano Π , determinando as áreas A_1 e A_2 nos sólidos respectivamente. Nesses sólidos simples, toda secção paralela à base é congruente a base do sólido. Logo, temos que as áreas $A_1 = A = A_2$, então pelo *Princípio de Cavalieri*, os dois têm o mesmo volume (LIMA et al., 2006).

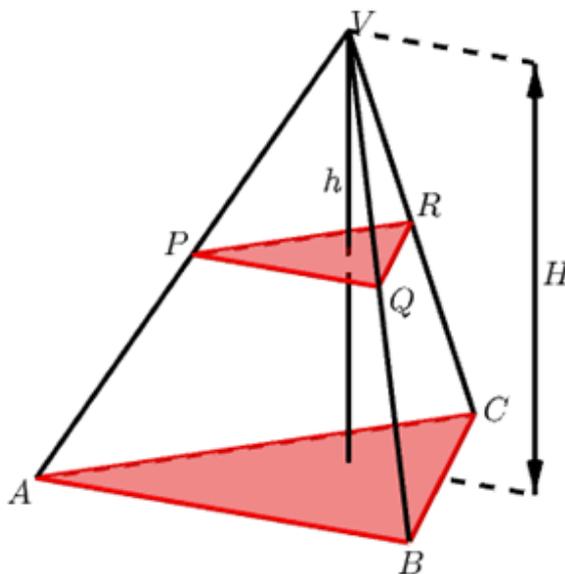
Como o volume de um paralelepípedo ($V_{\text{Paralelepípedo}}$), é:

$$V_{\text{Paralelepípedo}} = A \cdot h. \quad (2.3)$$

Portanto, o volume do prisma (V_{Prisma}), é:

$$V_{\text{Prisma}} = A \cdot h. \quad (2.4)$$

A proporcionalidade é um conceito muito importante para Matemática básica, com ela vamos demonstrar que, se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base da mesma pirâmide, então o volume dessa pirâmide permanece o mesmo. Seja uma pirâmide $VABC$ de vértice V e base triangular ABC e altura H . Se traçarmos um plano paralelo a base ABC , seccionando a pirâmide $VABC$, numa distância h do vértice V , forma um triângulo PQR .

Figura 3 – Pirâmides $VABC$ e $VPQR$.

Fonte: Autor 2021.

Os triângulos ABC e PQR são figuras homotéticas, pois existe uma homotetia entre estas figuras. O ponto V no espaço é o centro da homotetia e um número real k é a função que associa o ponto A com o ponto P sobre VA tal que $VP = k \cdot VA$. Isso também é verdade, para os casos $VQ = k \cdot VB$ e $VR = k \cdot VC$. Logo todas figuras homotéticas são semelhantes (WAGNER, 2007).

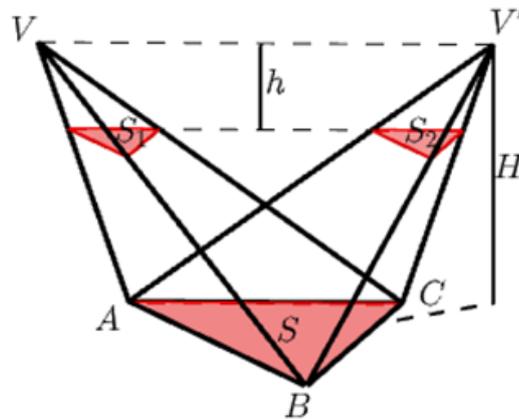
Podemos concluir que:

- (i) Os triângulos ABC e PQR são figuras semelhantes e as razões de semelhanças entre os lados correspondentes e as alturas é k .
- (ii) A razão entre as áreas de figura semelhantes é o quadrado da razão de semelhança k .
- (iii) A razão entre os volumes de figura semelhantes é o cubo da razão de semelhança k .

Agora, de acordo Lima et al. (2006), segue o seguinte Teorema:

Teorema 2.2.1. *Duas ou mais pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.*

Demonstração: Sejam duas pirâmides com a mesma base ABC de área S , com vértices V e V' e mesma altura H , como mostra a Figura 4. Um plano paralelo a base ABC , intersecta a pirâmide $VABC$, a uma distância h dos vértice V e V' das pirâmides.

Figura 4 – Pirâmides $VABC$ e $V'ABC$.

Fonte: Autor 2021.

Estas secções produzem duas áreas S_1 e S_2 nas duas pirâmides $VABC$ e $V'ABC$. Como são figuras semelhantes, temos que:

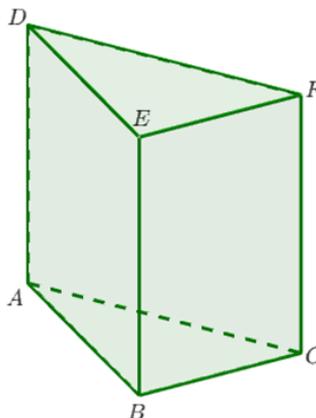
$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{S}{S_2} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \quad (2.5)$$

Concluiremos, pelo *Princípio de Cavalieri*, as duas pirâmides $VABC$ e $V'ABC$ têm o mesmo volume.

Segundo [Dolce e Pompeo \(2013\)](#), considere um outro *Teorema* sobre o volume de uma pirâmide triangular:

Teorema 2.2.2. *o volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço de produto da área da base pela altura.*

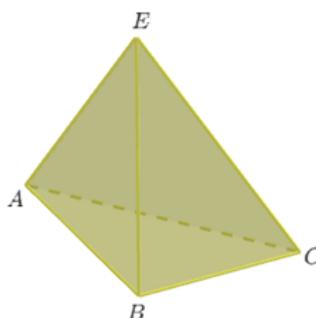
Demonstração: Seja o prisma com base triangular $ABCDEF$.

Figura 5 – Prisma $ABCDEF$.

Fonte: Autor 2021.

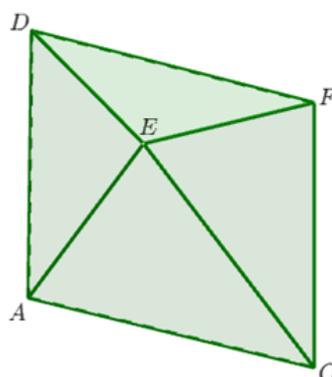
Seccionando esse prisma por um plano que passa pelos pontos A , C e E , obtemos o tetraedro $ABCE$ (T_{ABCE}) e a pirâmide $ACDEF$ com base quadrada $ACDF$.

Figura 6 – Tetraedro $ABCE$.



Fonte: Autor 2021.

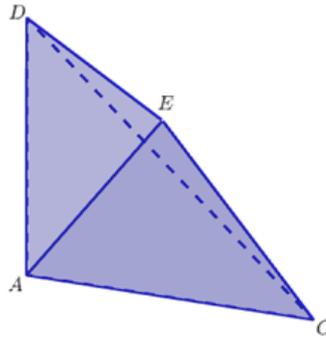
Figura 7 – Pirâmide $ACDEF$.



Fonte: Autor 2021.

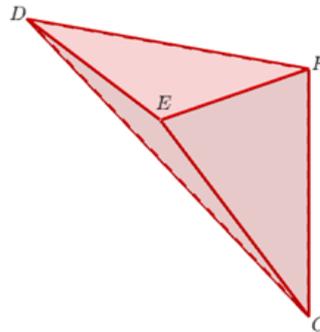
Agora, seccionando a pirâmide $ACDEF$ por plano que passa pelos pontos C , D e E , obtemos dois tetraedros $ACDE$ (T_{ACDE}) e $CDEF$ (T_{CDEF}).

Figura 8 – Tetraedro $ACDE$



Fonte: Autor.

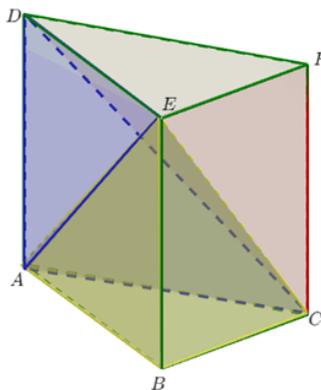
Figura 9 – Tetraedro $CDEF$



Fonte: Autor 2021.

Se o prisma $ABCDEF$ é formado por três tetraedros: T_{ABCE} , T_{ACDE} e T_{CDEF} . Então, o volume do prisma é igual à soma dos volumes dos três tetraedros, ou seja,

Figura 10 – Prisma $ABCDEF$ formado pelos tetraedros T_{ABCE} , T_{ACDE} e T_{CDEF} .



Fonte: Autor 2021.

$$V_{Prisma} = V_{T_{ABCE}} + V_{T_{ACDE}} + V_{T_{CDEF}} \quad (2.6)$$

Os tetraedros T_{ABCE} e T_{CDEF} possuem mesma área para as bases ABC e DEF ($ABC \equiv DEF$), dos respectivos tetraedros, e mesma altura, pois é a distância entre os planos. Então, os tetraedros T_{ABCE} e T_{CDEF} têm o mesmo volume, ou seja,

$$V_{T_{ABCE}} = V_{T_{CDEF}}. \quad (2.7)$$

Os tetraedros T_{ACDE} e T_{CDEF} possuem as bases ACD e CDF congruentes, pois CD é diagonal do paralelogramo $ACFD$, logo a mesma área para as bases ACD e CDF e mesma altura, que seria a distância de E ao plano $ACFD$. Então, os tetraedros T_{ACDE} e T_{CDEF} têm o mesmo volume, ou seja,

$$V_{T_{ACDE}} = V_{T_{CDEF}} \quad (2.8)$$

logo,

$$V_{T_{ABCE}} = V_{T_{ACDE}} = V_{T_{CDEF}}. \quad (2.9)$$

O volume de uma pirâmide triangular V_T , ou tetraedro, é definido a partir do volume do prisma com base triangular. Sendo A_b a área da base e h a altura do prisma, então o volume do prisma, é: $V_{Prisma} = A_b \cdot h$. Sabendo que os tetraedros, que formam o prisma $ABCDEF$, tem o mesmo volume, podemos representar cada volume dos três tetraedros por V_T , assim

$$V_T = V_{T_{ABCE}} = V_{T_{ACDE}} = V_{T_{CDEF}} \quad (2.10)$$

como,

$$V_{T_{ABCE}} + V_{T_{ACDE}} + V_{T_{CDEF}} = V_{Prisma} \quad (2.11)$$

ao substituir os três volumes por V_T tem-se,

$$3V_T = A_b \cdot h \quad (2.12)$$

portanto,

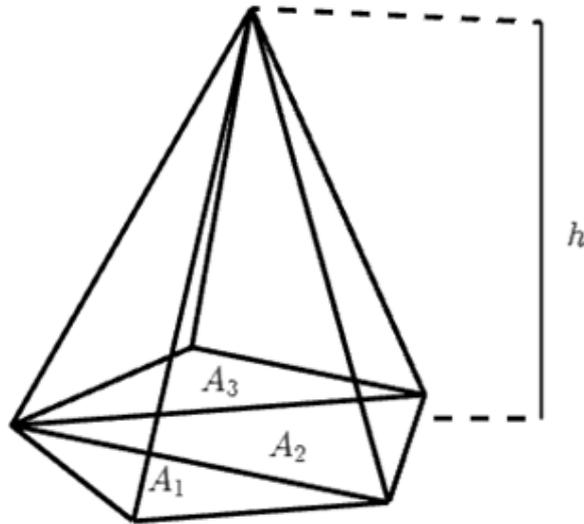
$$V_T = \frac{1}{3} A_b \cdot h. \quad (2.13)$$

Por fim, de acordo [Lima et al. \(2006\)](#), vamos apresentar o volume de uma pirâmide qualquer, pelo *Teorema*:

Teorema 2.2.3. *O volume de uma pirâmide qualquer (V_P) é igual a um terço do produto da área (A_b) da base pela altura h .*

Demonstração: Primeiro, podemos dividir qualquer pirâmide em pirâmides com base triangular. Tomando a base da pirâmide um polígono qualquer, vamos traçar todas as diagonais possíveis, a partir de um único vértice do polígono, essa base poligonal tem n triângulos de áreas: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

Figura 11 – Pirâmide qualquer.



Fonte: Autor 2021.

Se a área do polígono (base) é A_b , então ela é definida pela soma das áreas triangulares, ou seja,

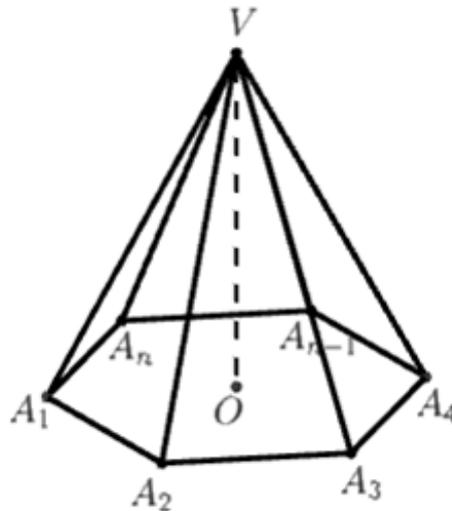
$$A_b = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n. \quad (2.14)$$

O volume de uma pirâmide qualquer V_P é a soma dos volumes das pirâmides triangulares (tetraedros), justapostos na pirâmide qualquer. Sabendo que a altura de uma pirâmide qualquer é h . Logo, todas as outras pirâmides triangulares também terão altura h . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} V_P &= \frac{1}{3}A_1 \cdot h + \frac{1}{3}A_2 \cdot h + \frac{1}{3}A_3 \cdot h + \cdots + \frac{1}{3}A_n \cdot h \\ &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n) \cdot h \\ &= \frac{1}{3}A_b \cdot h. \end{aligned} \quad (2.15)$$

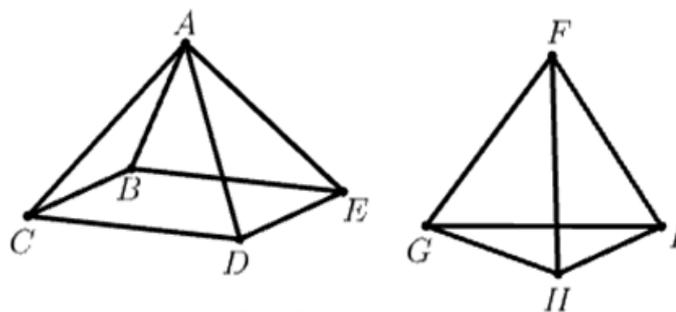
2.3 Pirâmides regulares

Sobre os estudos dos poliedros, vamos nos limitar as pirâmides regulares que fazem para da questão que se refere ao nosso estudo. As pirâmides regulares possuem na base um polígono regular $A_1A_2 \cdots A_n$ e um vértice V forma com o centro O do polígono o segmento VO que é a altura da pirâmide. Assim, teríamos que as arestas laterais são iguais $VA_1 = VA_2 = \cdots = VA_n$, por seguinte as faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles (CARVALHO, 2005).

Figura 12 – Pirâmide Regular $VA_1A_2 \cdots A_n$.

Fonte: Autor 2021.

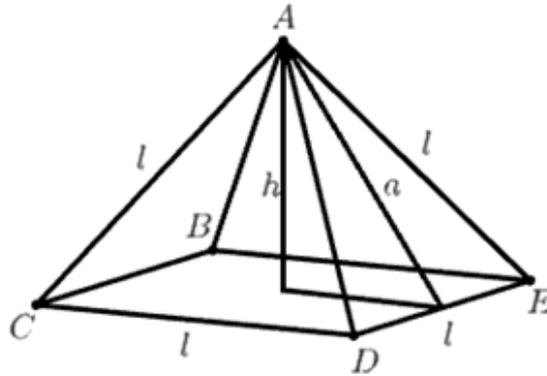
Sendo mais preciso sobre as pirâmides regulares, pois temos como referências as pirâmides: Uma primeira pirâmide $ABCDE$ tem base quadrada e todas as arestas (arestas da base e arestas laterais) iguais, ou seja, com uma mesmo comprimento; e uma outra pirâmide regular $FGHI$ que possui todas faces triangulares com arestas iguais (triângulos equiláteros), ou seja, tetraedro regular com arestas de mesmo comprimento da primeira pirâmide regular.

Figura 13 – Pirâmide regular $ABCDE$ e tetraedro regular $FGHI$.

Fonte: Autor 2021.

2.3.1 Pirâmide regular

Como uma pirâmide regular possui como base um polígono regular (polígono com lados com mesma medida) e as faces laterais são triângulos isósceles. A pirâmide $ABCDE$ possui como base um quadrada, com lados de comprimento l , as faces laterais são triângulos equiláteros com lados de comprimento l , e altura da pirâmide mede h .

Figura 14 – Pirâmide regular $ABCDE$.

Fonte: Autor 2021.

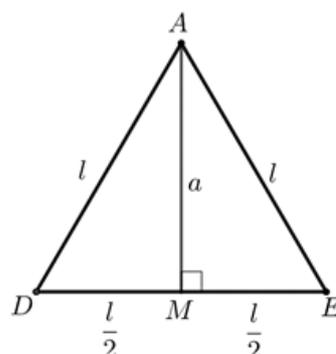
A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais. Como as faces laterais da pirâmide $ABCDE$ são triângulos equiláteros congruentes, com base de comprimento l e altura do triângulo equilátero de comprimento a (apótema), coincide com a mediana do triângulo equilátero (DOLCE; POMPEO, 2013).

Utilizaremos para algumas demonstrações o famoso teorema da geometria, conhecido na literatura ocidental, como *Teorema de Pitágoras*, citado por Barbosa (2012), temos:

Teorema 2.3.1 (Teorema de Pitágoras). *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa a é igual a soma dos quadrados dos catetos b e c .*

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2.16)$$

Assim, M é o ponto médio do segmento DE . Logo a altura a do triângulo equilátero ADE é definida, em função de l , usando o último teorema no triângulo retângulo ADM , retângulo em M , na figura abaixo, temos:

Figura 15 – Face lateral da pirâmide $ABCDE$.

Fonte: Autor 2021.

$$l^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad (2.17)$$

isolando-se o segmento a^2 , tem-se

$$a^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \quad (2.18)$$

extraindo-se a raiz quadrada nas duas extremidades, encontramos

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}. \quad (2.19)$$

Temos, a área de uma face lateral da pirâmide $ABCDE$ (A_Δ) determinada por:

$$\begin{aligned} A_\Delta &= \frac{1}{2} \cdot (\text{base}) \cdot (\text{altura}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{l^2\sqrt{3}}{4}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

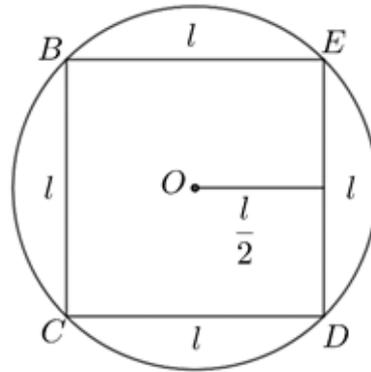
Como a pirâmide $ABCDE$ tem base quadrada, então possui quatro faces laterais. A área lateral da pirâmide (A_L), é:

$$\begin{aligned} A_L &= 4 \cdot A_\Delta \\ &= 4 \cdot \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) \\ &= l^2\sqrt{3}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

A área total de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais com a área da base, como a base da pirâmide $ABCDE$ é um quadrado com lado de comprimento l . Temos, a área da base (A_b) da pirâmide, é: $A_b = l^2$. Então, a área total da pirâmide (A_T), é:

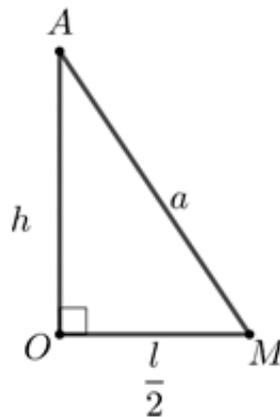
$$\begin{aligned} A_T &= A_L + A_b \\ &= l^2\sqrt{3} + l^2 \\ &= l^2(\sqrt{3} + 1) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como já foi demonstrado, o volume de uma pirâmide qualquer é um terço do produto da área da base pela medida da altura. Sendo a base da pirâmide $ABCDE$ um quadrado de lado com comprimento l . Logo, a área da base é: $A_b = l^2$. A altura da pirâmide $ABCDE$ mede h , é um segmento perpendicular à base da pirâmide, no centro O de uma circunferência circunscrita a base quadrada da pirâmide. Temos a [Figura 16](#), abaixo:

Figura 16 – Quadrado $BCDE$ inscrito.

Fonte: Autor 2021.

Sendo $a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, a altura h da pirâmide $ABCDE$ a partir do triângulo retângulo AOM , retângulo no vértice O , em função de l . Obtemos aplicando *Teorema de Pitágoras*:

Figura 17 – Triângulo retângulo AOM .

Fonte: Autor 2021.

$$a^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 \quad (2.23)$$

isolando-se o segmento h , tem-se

$$h^2 = \frac{3l^2}{4} - \frac{l^2}{2} = \frac{l^2}{2} \quad (2.24)$$

extraindo-se a raiz quadra nas extremidades, obtemos

$$h = \frac{l\sqrt{2}}{2}. \quad (2.25)$$

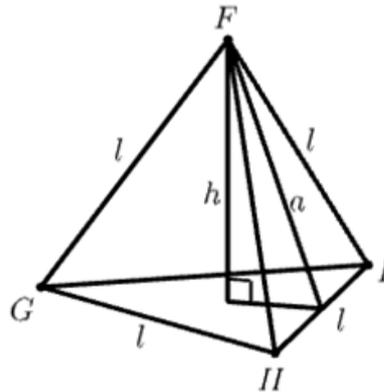
Então, o volume da pirâmide $ABCDE$ (V_{ABCDE}), é:

$$\begin{aligned} V_{ABCDE} &= \frac{1}{3} A_b \cdot h \\ &= \frac{1}{3} l^2 \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{l^3\sqrt{2}}{6}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3.2 Tetraedro regular

Uma pirâmide triangular ou tetraedro possui todas as faces triangulares e qualquer uma das faces pode ser a base da pirâmide. O tetraedro regular $FGHI$ tem todas as arestas de comprimento l , logo todas as faces são triângulos equiláteros de lados medindo l , a altura do triângulo de qualquer face mede a (apótema) e a altura do tetraedro mede h (CARVALHO, 2005).

Figura 18 – Tetraedro regular $FGHI$.



Fonte: Autor 2021.

A área total do tetraedro é a soma das áreas de todas as faces. Como as faces do tetraedro são triângulos equiláteros congruentes, com base medindo l e a altura do triângulo medindo a , são congruentes as faces laterais da pirâmide $ABCDE$. Como já mostramos a altura de um triângulo equilátero em função de l , é: $a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Temos, a área de uma face triangular do tetraedro regular $FGHI$, é: $A_{\Delta} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Como o tetraedro regular possui quatro faces triangulares congruentes. Então, a área total do tetraedro $FGHI$, é:

$$A_T = 4 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_T = l^2\sqrt{3}. \quad (2.27)$$

De acordo ao *Teorema do volume da pirâmide*, temos que o volume do tetraedro é um terço do produto da área de uma face qualquer, escolhida como base, pela medida da

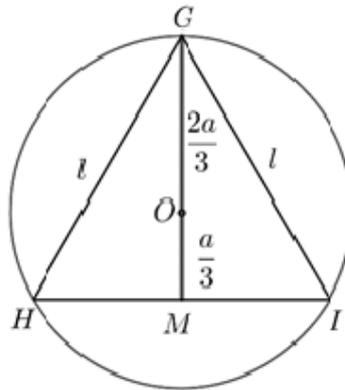
altura relativa a base. O tetraedro regular $FGHI$ tem como base um triângulo equilátero com lado de comprimento l , temos que a área da base em função de l , é:

$$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}. \quad (2.28)$$

A altura do tetraedro $FGHI$ mede h , é um segmento perpendicular à base do tetraedro, no centro de uma circunferência circunscrita à base triangular. Como a base é um triângulo equilátero, logo o centro da circunferência circunscrita coincide com baricentro da base triangular. Então, o baricentro divide o segmento GM , relativo a base triangular, em dois segmentos de $\frac{2a}{3}$ e $\frac{a}{3}$ (DOLCE; POMPEO, 2013).

Vejam os a figura abaixo:

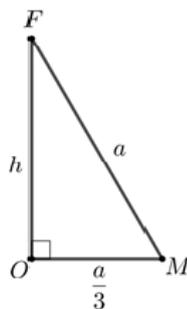
Figura 19 – Triângulo equilátero GHI inscrito.



Fonte: Autor 2021.

Agora, formando o triângulo retângulo FOM , interno ao tetraedro regular $FGHI$. Vamos determinar a altura h do tetraedro regular $FGHI$, em função de l , mais uma vez utilizando o *Teorema de Pitágoras* no triângulo retângulo FOM , retângulo no vértice O , obtemos:

Figura 20 – Triângulo retângulo FOM .



Fonte: Autor 2021.

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{3} \quad (2.29)$$

isolando-se o termo h^2 tem-se,

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{8a^2}{9} \quad (2.30)$$

sabendo que $a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, e após elevar ao quadrado ambos os lados, obtemos

$$a^2 = \frac{3l^2}{4} \quad (2.31)$$

ao substituir 2.30 encontra-se,

$$h^2 = \frac{8}{9} \cdot \frac{3l^2}{4} = \frac{2l^2}{3} \quad (2.32)$$

agora, extraindo a raiz nas extremidades e racionalizando, obtemos

$$h = \frac{l\sqrt{6}}{3}. \quad (2.33)$$

O volume do tetraedro regular V_{FGHI} , é:

$$\begin{aligned} V_{FGHI} &= \frac{1}{3} A_b \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{l\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{l^3\sqrt{2}}{12}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Observação 1. Sobre os volumes da pirâmide regular $ABCDE$ e do tetraedro regular $FGHI$, podemos concluir que o volume da pirâmide regular (V_{ABCDE}) é o dobro do volume do tetraedro regular (V_{FGHI}):

$$V_{ABCDE} = 2 \cdot V_{FGHI}. \quad (2.35)$$

3 PROBLEMA DO TESTE DE APTIDÃO

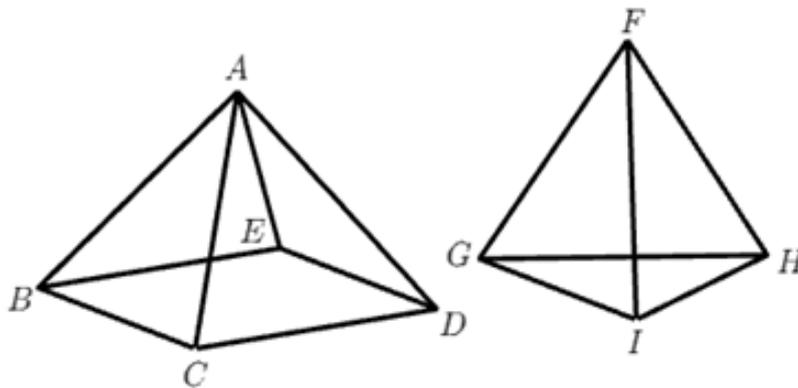
Neste capítulo, será apresentado um problema sobre geometria espacial no qual foram utilizados dois poliedros convexos, no *Teste de Aptidão*, que foi aplicado por uma grande organização educacional privada. Na prática, esse problema gerou divergências sobre a sua resposta, pois um jovem aluno encontrou uma resposta diferente, uma história tão interessante que foi para a primeira página de jornal.

3.1 Problema com uma pirâmide e um tetraedro

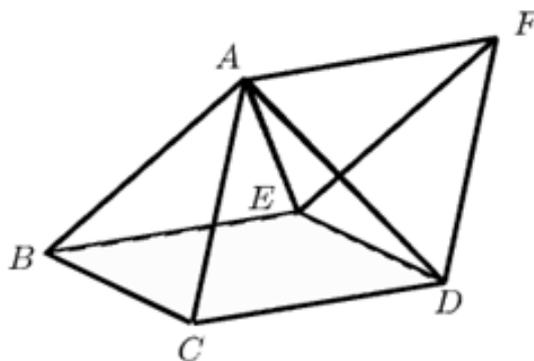
Vejamos, então um problema que se encontra no artigo [Ávila \(2010\)](#), que se equivale a *Questão 44* proposto pelo *Teste Preliminar de Aptidão*, no ano 1980, aplicado nos Estados Unidos para alunos do ensino médio:

Seja $ABCDE$ uma pirâmide de base quadrada, cujas laterais são triângulos equiláteros; e seja $FGHI$ um tetraedro regular, cujas faces sejam (triângulos equiláteros) congruentes às faces laterais da pirâmide ([Figura 21](#)). Suponhamos que se juntem os sólidos de maneira que a face ADE da pirâmide coincida com a face GIH do tetraedro, o resultado sendo o poliedro $ABCDEF$ ([Figura 22](#)). Quantas faces tem este poliedro?

Figura 21 – Pirâmides $ABCDE$ e $FGHI$.



Fonte: Autor 2021

Figura 22 – Poliedro $ABCDEF$.

Fonte: Autor 2021

Uma possível solução para esse problema seria que a pirâmide regular e o tetraedro possuem 5 faces e 4 faces, respectivamente. Como os dois sólidos possuem faces triangulares congruentes, ao unificar os dois, obteremos o novo sólido, que terá 7 faces. Para chegar a essa solução, basta somar as 5 faces da pirâmide com as 4 faces do tetraedro e, depois, subtrair por 2 (as duas faces ADE da pirâmide e GIH do tetraedro [Figura 22](#)). Essa foi a resposta considerada como única solução pela organização do Teste - *Serviço de Teste Educacional (ETS - Educational Testing Service)* - maior organização privada de teste e avaliação educacional sem fins lucrativos - fundada em 1947, sediada em Lawrence Township, New Jersey, nos Estados Unidos. Esse teste é conhecido como *Teste Preliminar de Aptidão Escolar*, cuja aplicação é realizada para, aproximadamente, 1,3 milhão de alunos do segundo ano do Ensino Médio, todos os anos, no mês de outubro. Vinculado ao *Programa Nacional de Bolsas de Mérito*, os melhores alunos classificados recebem “cartas de recomendação” e concorrem a bolsas de estudo por um período de quatro anos. Ele é preliminar ao *Teste de Aptidão Escolar*, que é aplicado no mês de outubro, no último ano do Ensino Médio, sendo utilizado para admissões em faculdades ([FISKE, 1981](#)).

O estudante Daniel Lowen, de 17 anos, da Escola da Flórida (*Cocoa Beach High School*), em entrevista ao *Jornal New York Times* o qual foi publicada na primeira página no dia 17 março de 1981 por Edward B. Fiske, o estudante afirmou que a *Questão 44* do *Teste Preliminar de Aptidão Escolar* lhe pareceu muito simples e, por isso, lhe trouxe desconfiança: “Achei que devia ser um truque” - disse ele. A ideia que desaparecem duas faces, não seria a única situação ocorrida através da justaposição. Com essa observação mais detalhada, após unificar as duas pirâmides pelas faces triangulares congruentes, as faces expostas triangulares adjacentes seriam coplanares e formariam duas faces em forma de quadriláteros (losango). À noite, ao chegar em casa, por achar a questão mais interessante do teste, Daniel Lowen construiu dois modelos de papel dos poliedros: pirâmide de base quadrada, cujas laterais são triângulos equiláteros, e o tetraedro; ambos com

arestas medindo mesmo comprimento. Em seguida, fez a justaposição das faces triangulares dos poliedros de acordo com as instruções da questão. O resultado foi que, ao juntar estes dois poliedros, gerou um novo poliedro que, para Daniel Lowen, teria 5 faces.

No entanto, o resultado do *Serviço do Teste Educacionais* considerava que a resposta correta para *questão 44*, seria 7 faces. Inconformado com o resultado, o estudante procurou seu pai, Douglas J. Lowen, engenheiro mecânico da Rockwell International (empresa responsável pela construção do ônibus espacial e anteriormente a missão *Apollo*), que inicialmente considerava que seu filho estava errado e iria prova para ele. Para surpresa de Douglas J. Lowen, não encontrou nenhum erro na resposta do seu filho. Então, elaborou duas demonstrações e enviou uma correspondência como recurso à comissão *ETS*, mostrando que a resposta 5 faces, escolhida pelo filho, era a opção correta.

Os aplicadores do *Teste Preliminar de Aptidão Escolar*, assim como a comissão de 16 professores universitários pertencente a organização, não aceitavam essa segunda solução. Não satisfeito, Douglas J. Lowen, persistiu com as correspondências ao *ETS*, afim de comprovar que a resposta de seu filho estava correto. Até que meses depois, a organização aceitou como corretas as duas respostas. A resposta 5 faces, encontrada por Daniel Lowen, e a resposta 7 faces, definida pela *ETS* de acordo ao primeiro resultado oficial (ANTONICK, 2013). As duas soluções estão corretas, pois, ao longo da história na literatura, existem mais de uma definição sobre poliedros convexos.

De acordo com as Definições 2.1.1 e 2.1.2, vamos representar por F , o número de faces que são polígonos convexos; por A , o número de arestas que são os lados dos polígonos, e por V o número de vértices que são os vértices dos polígonos. Como cada aresta do poliedro é lado de duas faces e, para os vértices as arestas concorrem para dois vértices, então, cada aresta terá sido contada duas vezes.

Encontra-se ainda Lima et al. (2006), as seguintes relações em poliedro convexo com faces e vértices de gêneros diferentes. As faces com representação: F_3 são faces triangulares; F_4 são faces quadrangulares; F_5 são pentagonais, assim se segue. Os vértices representados por: V_3 possuem 3 arestas concorrentes; V_4 possuem 4 arestas concorrentes; V_5 possuem 5 arestas concorrentes, assim por diante. Então, para o poliedro convexo, as relações seriam:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots \quad (3.1)$$

e

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots \quad (3.2)$$

Assim, teremos dois casos do poliedro $ABCEF$ (Figura 22) da *Questão 44*, um caso com as arestas AD e AE , ou seja, considerando as faces $ACDF$ e $ABEF$ com duas faces cada; e o caso sem as arestas AD e AE , ou seja, as faces $ACDF$ e $ABEF$ com uma única face. Logo, usando a relação anterior do número de arestas com o número de faces. Então, obtemos casos:

1º caso Com as arestas AD e AE , obtemos: $V_3 = 3$ (vértices: B, C e F); $V_4 = 2$ (vértices: D e E) e $V_5 = 1$ (vértice: A). Agora, vamos determinar o número de arestas:

$$\begin{aligned} 2A &= 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 \\ &= 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \\ &= 22 \end{aligned} \tag{3.3}$$

logo, $A = 11$.

2º caso Neste caso sem as arestas AD e AE , teríamos: $V_3 = 6$ (Em todos os vértices: A, B, C, D, E e F). Vamos determinar o número de arestas:

$$\begin{aligned} 2A &= 3V_3 \\ &= 3 \cdot 6 \\ &= 18 \end{aligned} \tag{3.4}$$

assim, $A = 9$.

No poliedro $ABCDFE$ o número de vértice é 6, ou seja, $V = 6$. Usado o teorema citado, obteremos o número de faces para $A = 11$ e para $A = 9$, teremos respectivamente:

$$6 - 11 + F = 2 \Rightarrow F = 7 \tag{3.5}$$

e

$$6 - 9 + F = 2 \Rightarrow F = 5 \tag{3.6}$$

Portanto, pelo **Teorema de Euler**, nos garante que as duas soluções estão corretas, pois é de fato que o poliedro $ABCDEF$ é convexo, com o mesmo número de vértices. A variação no número de arestas tem uma variação direta ao número de faces de um mesmo poliedro. Logo, se diminuir duas arestas, então diminui, também, duas faces, na mesma relação. Tomando como base uma outra definição para poliedros convexos, mudaria este contexto de duas soluções.

Por duas últimas definições, a resposta 5 faces, encontrada por Daniel Lowen, seria a única solução para a questão, pois, pelo primeiro item das Definições 2.1.1 ou 2.1.3 apresentadas pelos autores, assegura que, se as faces triangulares ACD e FGI , do poliedro $ABCDEF$ (Figura 22), pertencem ao mesmo plano, então, a face $ACDF$ é única. De modo análogo, a face $ABEF$ também é única. Portanto, pela visualização geométrica espacial, usada por Daniel Lowen, a única solução seria 5 faces.

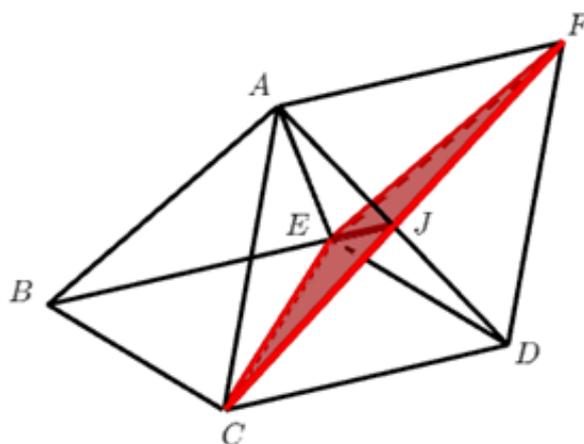
Essa história, sobre esse fato inusitado e muito interessante, também pode ser encontrado no Livro (HELLMEISTER, 2013).

3.2 Demonstração apresentada pela RPM 03

Agora, vamos apresentar uma demonstração que prova que Daniel Lowen estava correto em sua resposta para a *Questão 44* do *Teste Preliminar de Aptidão Escolar* de 1980. Essa demonstração se encontra no artigo (ÁVILA, 2010).

Na justaposição das pirâmides $ABCDE$ e $FGHI$ (tetraedro) pelas faces ADE e GIH , respectivamente, formam poliedro $ABCDFE$.

Figura 23 – Triângulos EJC e EJF internos do poliedro $ABCDEF$.

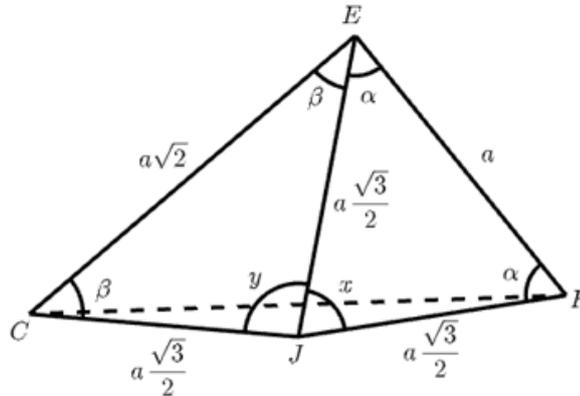


Fonte: Autor 2021.

Mostraremos que os triângulos equiláteros ACD e ADF representam uma única face $ACDF$. Basta mostrar que o ponto F está no mesmo plano que A , C e D . Seja J o ponto médio do segmento AD (Figura 23). Provaremos que C , J e F são pontos da mesma reta. Sendo J o ponto médio do segmento AD , então os segmentos FJ , EJ e CJ são perpendiculares ao segmento AD , pois cada um desses três segmentos é mediatriz de um triângulo equilátero de base AD . Isso demonstra que, os pontos C , E , F e J , pertencem ao mesmo plano, passando pelo ponto médio deste segmento. Logo, $ECJF$ é um quadrilátero plano, cujos lados podem ser calculados aplicando a *lei dos senos*, citado por Barbosa (2012), nos triângulos EJF e EJC (Figura 24) obtemos, respectivamente,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} y. \quad (3.7)$$

Figura 24 – Triângulos EJC e EJF .



Fonte: Autor 2021.

No triângulo isósceles EJF , os ângulos 2α e x são ângulos suplementares, de sorte que $\text{sen } 2\alpha = \text{sen } x$. Analogamente, no triângulo isósceles EJC , $\text{sen } 2\beta = \text{sen } y$. Nesse momento da demonstração, o autor comete alguns equívocos, usando as letras a e b , em vez das letras gregas α e β , que são ângulos, apresentados na generalização dos elementos da [Figura 24](#). Então, efetuando essa correção, temos:

$$2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = \text{sen } x \quad \text{e} \quad 2 \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \beta = \text{sen } y \quad (3.8)$$

Levando-se a [Equação 3.7](#) em [3.8](#) obtemos

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } x \cdot \cos \alpha = \text{sen } x \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (3.9)$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{sen } y \cdot \cos \beta = \text{sen } y \Rightarrow \cos \beta = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (3.10)$$

Então,

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \cos \beta. \quad (3.11)$$

Como $\text{sen } \alpha = \cos \beta$, assim os ângulos α e β são complementares, logo o triângulo CEF é retângulo em E . Utilizando o *Teorema de Pitágoras* [Barbosa \(2012\)](#), temos:

$$\text{med}(CF) = \sqrt{\text{med}(CE)^2 + \text{med}(EF)^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = \text{med}(CJ) + \text{med}(JE). \quad (3.12)$$

Concluimos que o ponto J está alinhado com C e F , como queríamos demonstrar. A demonstração de que as faces ABE e AEF ([Figura 23](#)) se fundem-se numa única face $ABEF$ é inteiramente análoga.

4 OUTRAS DEMONSTRAÇÕES

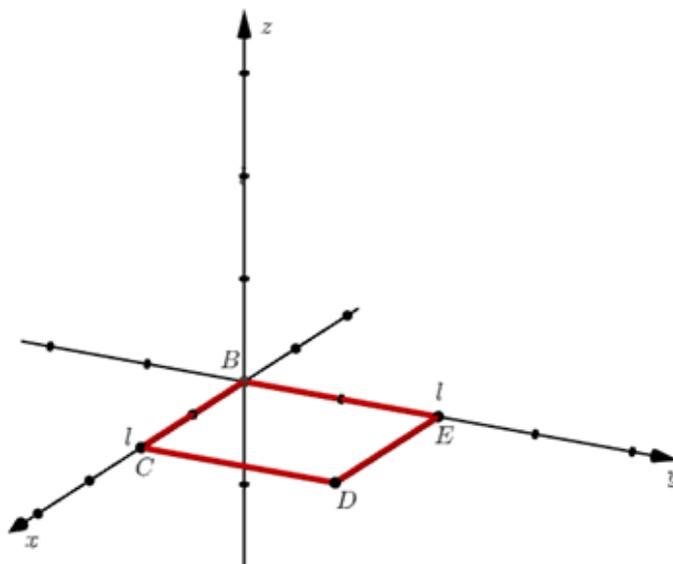
Neste capítulo, vamos apresentar quatro outras demonstrações do problema sobre os poliedros convexos $ABCDE$ e $FGHI$ seção 3.1. Mas antes, determinaremos as coordenadas do novo poliedro $ABCDEF$ no espaço euclidiano tridimensional. As demonstrações provam em que as faces triangulares ACD e ADF , pertençam ao mesmo plano, ou seja, formam um quadrilátero $ACDF$. Assim, como as faces triangulares ABE e AEF formam um outro quadrilátero $ABEF$.

4.1 Coordenadas do poliedro $ABCDEF$ no espaço

Na Geometria Espacial, um sistema de coordenadas cartesianas, é um espaço euclidiano tridimensional formado por três eixos OX , OY e OZ , com mesma origem O , indicado pela notação $OXYZ$ e os eixos são perpendiculares entre se. O sistema $OXYZ$ determina uma relação biunívoca entre o espaço euclidiano tridimensional e cada ponto P pertencente ao espaço. As coordenadas desse ponto P nesse espaço são definidas pelo o terno (x, y, z) , ou pela notação $P = (x, y, z)$ (LIMA, 2007).

Começaremos fixando o poliedro $ABCDEF$ no sistema $OXYZ$ de eixos ortogonais, no espaço euclidiano tridimensional, com arestas de mesmos comprimentos. Para determinar as coordenadas do poliedro $ABCDEF$ no espaço. Primeiro, vamos fixar o quadrado $BCDE$, com o lado de comprimento l , no sistema OXY de eixos ortogonais x e y . Obtemos:

Figura 25 – Quadrado $BCDE$.



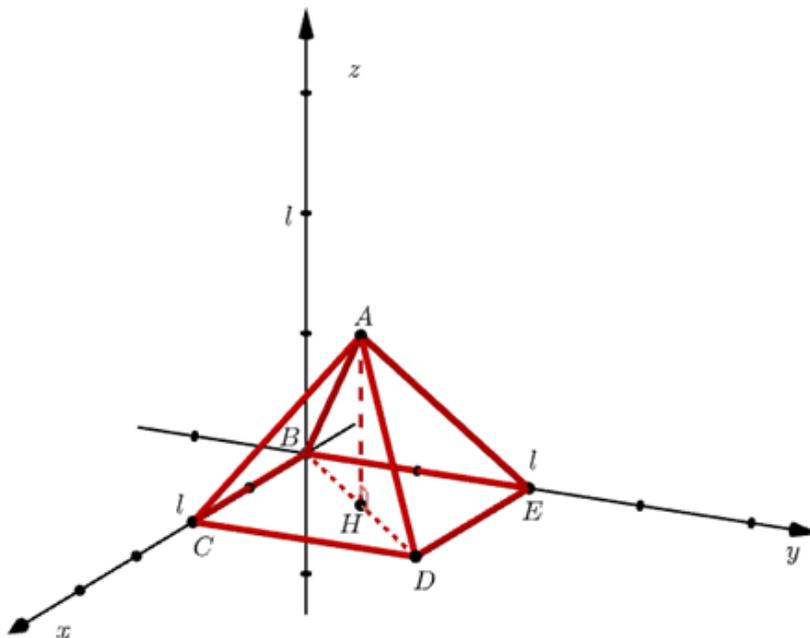
Logo, os vértices do quadrado $BCDE$, possuem coordenadas: $B(0, 0, 0)$; $C(l, 0, 0)$; $D(l, l, 0)$ e $E(0, l, 0)$.

Seja o segmento BD a diagonal do quadrado $BCDE$, como o lado do quadrado de comprimento l , formando dois triângulos retângulos, então aplicando o *Teorema de Pitágoras* no triângulo retângulo BCD , retângulo em C . Obtemos,

$$\text{med}(BD) = \sqrt{\text{med}(BC)^2 + \text{med}(CD)^2} = \sqrt{l^2 + l^2} = l\sqrt{2} \quad (4.1)$$

Considerando o quadrado $BCDE$, base da pirâmide $ABCDE$ e o ponto A , sendo o vértice superior da pirâmide, o segmento AH é a altura da pirâmide. Na construção do poliedro $ABCDE$ (pirâmide), todas as arestas têm comprimentos iguais. Como os lados do quadrado tem comprimento l , logo as outras arestas do poliedro $ABCDE$, também medem l , no sistema $OXYZ$ ortogonal.

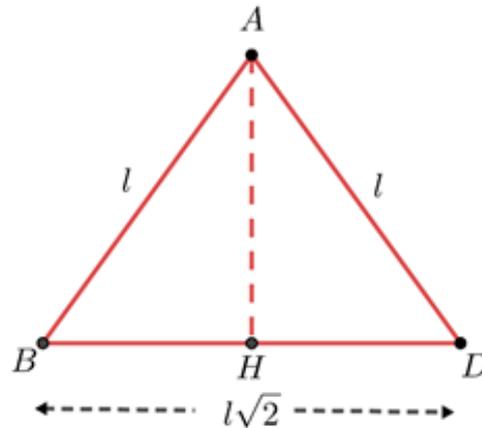
Figura 26 – Pirâmide $ABCDE$.



Fonte: Autor 2021.

Agora, o triângulo ABD interno a pirâmide é isósceles com base BD , pois $\text{med}(AB) = \text{med}(AD) = l$. Assim, a altura AH coincide com a mediana relativa ao lado BD do triângulo ABD , assim como, H é o ponto médio do segmento BD . Então, temos que

$$\text{med}(BH) = \text{med}(DH) = \frac{\text{med}(BD)}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2}. \quad (4.2)$$

Figura 27 – Triângulo isósceles ABD .

Fonte: Autor 2021.

Considere o triângulo retângulo ABH , retângulo em H . Vamos determinar o valor de AH a altura da pirâmide, em função de l , usando o *Teorema de Pitágoras*.

Sendo AB a hipotenusa, temos

$$\text{med}(AB)^2 = \text{med}(BH)^2 + \text{med}(AH)^2, \quad (4.3)$$

ao substituir os lados do triângulo retângulo ABH , em função do parâmetro l , tem-se,

$$l^2 = \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \text{med}(AH)^2 \quad (4.4)$$

isolando-se o termo $\text{med}(AH)^2$ encontra-se

$$\text{med}(AH)^2 = l^2 - \frac{l^2}{2} = \frac{l^2}{2} \quad (4.5)$$

extraindo a raiz quadrada das extremidades, a medida do segmento AH implica em

$$\text{med}(AH) = \frac{l\sqrt{2}}{2}. \quad (4.6)$$

Então, a projeção ortogonal do ponto A sobre no eixo- z é $\frac{l\sqrt{2}}{2}$.

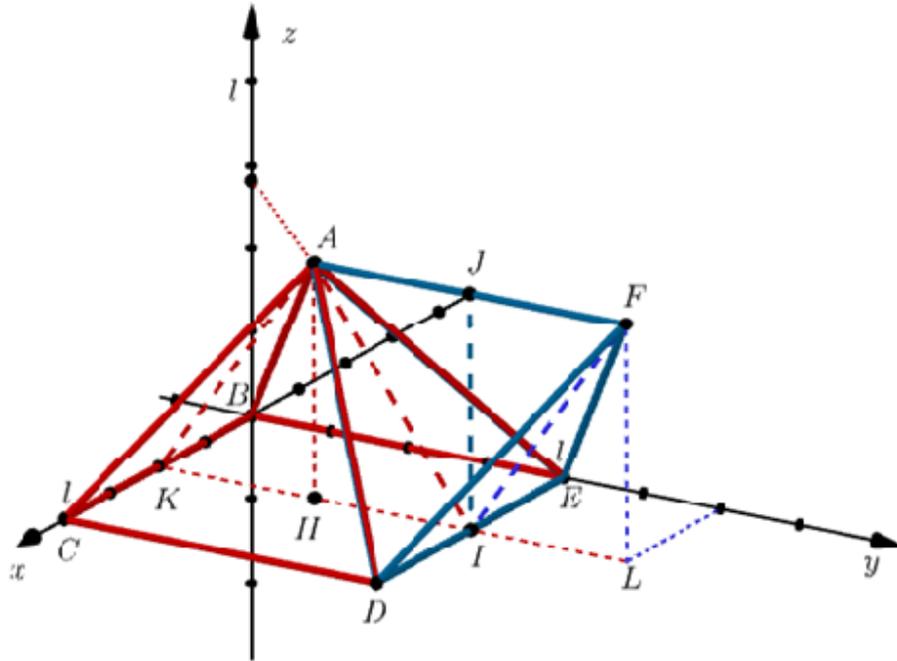
A projeção ortogonal do ponto A sobre no plano Π_{xy} , plano formado pelos eixos x e y , é o ponto H que representa o ponto médio de BD (Figura 27). Então as coordenadas ponto H com suas projeções sobres os eixos x e y são determinadas pela metade da soma das coordenadas dos pontos $B = (0, 0, 0)$ e $D = (l, l, 0)$, obtemos:

$$H = \frac{1}{2} \cdot (B + D) = \frac{1}{2} \cdot (l, l, 0) = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, 0\right). \quad (4.7)$$

Logo, as coordenadas do ponto A é $\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$.

Agora, justapondo um tetraedro $FGHI$ com faces triangulares congruentes as faces triangulares da pirâmide $ABCDE$, de acordo a [Figura 28](#), formamos um poliedro $ABCDEF$, sistema $OXYZ$ no espaço tridimensional euclidiano.

Figura 28 – Poliedro $ABCDEF$.



Fonte: Autor 2021.

Sabendo que os segmentos AI e FI , são as alturas dos triângulos ADE e DEF , respectivamente. Como estes triângulos são equiláteros de lado medindo l e também sabendo que I é o ponto médio do segmento DE . Então,

$$med(DI) = med(IE) = \frac{l}{2} \tag{4.8}$$

A partir dos triângulos retângulos ADI e EFI , retângulos em I . Consequentemente suas alturas são definidas pelo *Teorema de Pitágoras*, temos

$$med(AD)^2 = med(DI)^2 + med(AI)^2 \tag{4.9}$$

ao substituir as medidas dos segmentos AD e DI em função de l , tem-se,

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + med(AI)^2 \tag{4.10}$$

isolando-se a medida do segmento $(AI)^2$ obtemos,

$$med(AI)^2 = \frac{3l^2}{4} \tag{4.11}$$

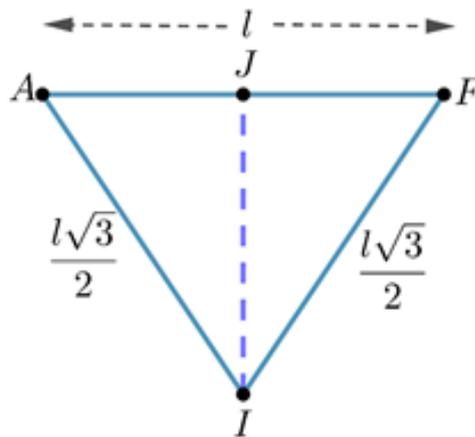
logo, extraindo a raiz quadrada em cada membro, a medida do segmento AI , é:

$$\text{med}(AI) = \frac{l\sqrt{3}}{2}. \quad (4.12)$$

Analogamente, no triângulo EFI , temos que $\text{med}(FI) = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Destacando o triângulo AFI , interno ao tetraedro $ADEF$, temos que o mesmo é isósceles com base relativa a AF , pois $\text{med}(AI) = \text{med}(FI) = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Sendo J o ponto médio do segmento AF , então IJ é a mediana. Temos que, $\text{med}(AJ) = \text{med}(JF) = \frac{l}{2}$. E por consequência, IJ é a altura do triângulo AFI , relativa ao lado AF . Sabendo que o triângulo AIJ é retângulo em J , na figura a seguir, e aplicando o *Teorema de Pitágoras*, temos que:

Figura 29 – Triângulo isósceles AFI .



Fonte: Autor 2021.

$$\text{med}(AI)^2 = \text{med}(AJ)^2 + \text{med}(IJ)^2 \quad (4.13)$$

ao substituir os segmentos AI e AJ em função de l obtemos,

$$\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \text{med}(IJ)^2 \quad (4.14)$$

isolando-se a medida do termo $(IJ)^2$ tem-se,

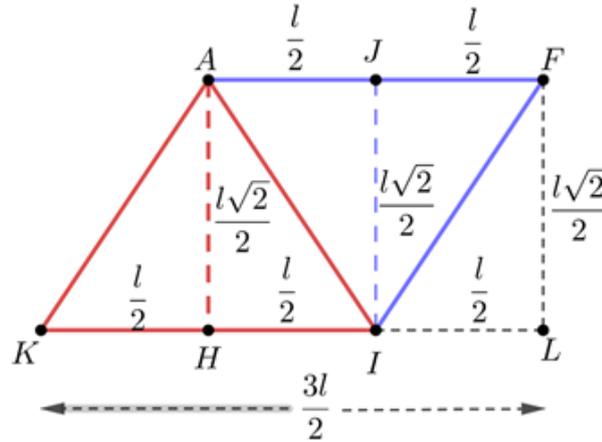
$$\text{med}(IJ)^2 = \frac{3l^2}{4} - \frac{l^2}{4} = \frac{2l^2}{4} \quad (4.15)$$

logo, extraindo a raiz quadrada nas extremidades, a medida do segmento IJ é igual a,

$$\text{med}(IJ) = \frac{l\sqrt{2}}{2}. \quad (4.16)$$

Acrescentando na Figura 29, o triângulo AIK , interno a pirâmide $ABCDE$, o qual é congruente ao triângulo AFI , ambos pertencente ao plano que é paralelo ao plano YOZ (Figura 30). Estes triângulos, formam um quadrilátero $AFIK$, que em particular é um paralelogramo, pois seus lados opostos são paralelos e congruentes; e os lados adjacentes, em relação aos ângulos que formam, são oblíquos.

Figura 30 – Paralelogramo $AFIK$.



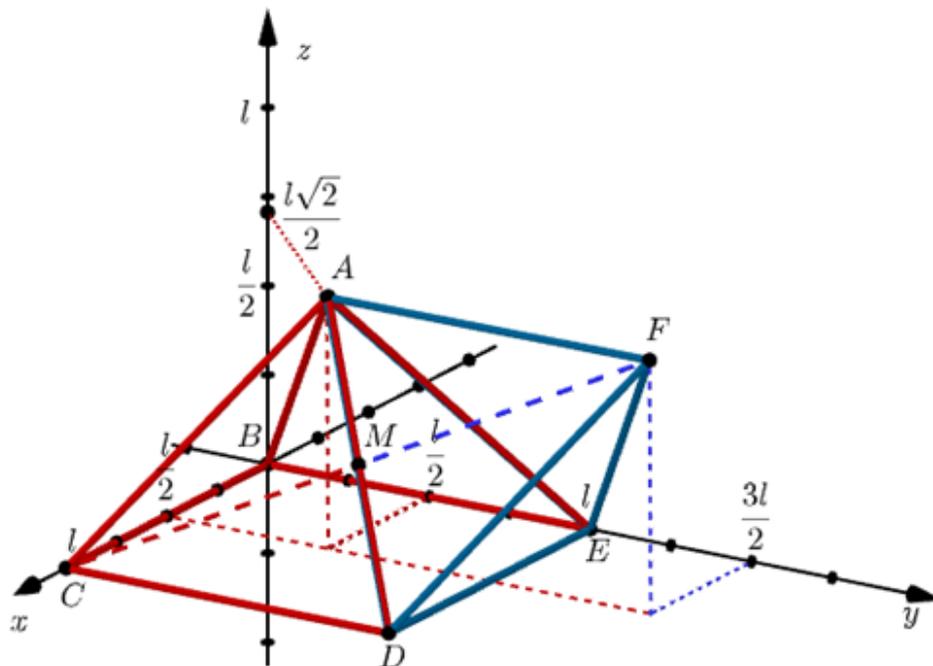
Fonte: Autor 2021.

Por consequência temos que $med(AH) = med(IJ) = med(FL) = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ e assim a projeção do ponto F sobre o eixo- z é $\frac{l\sqrt{2}}{2}$. Como a projeção ortogonal de F ao plano Π_{xy} é o ponto L e a $med(KL) = \frac{3l}{2}$, então as coordenadas do ponto L sobre os eixos x e y são $L = \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, 0\right)$. Logo as coordenadas do ponto F são: $F = \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$.

Seja M o ponto médio do segmento AD , vamos determinar suas coordenadas este ponto, pois usaremos as coordenadas do ponto M em algumas demonstrações mais adiante. Sabendo que as coordenadas dos pontos $A = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$ e $D = (l, l, 0)$. Então, as coordenadas do ponto M são determinadas pela metade da soma das coordenadas dos ponto A e D , encontramos:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{1}{2} \cdot (A + D) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + l, \frac{l}{2} + l, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{3l}{4}, \frac{3l}{4}, \frac{l\sqrt{2}}{4}\right).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Figura 31 – Poliedro $ABCDEF$ com as coordenadas.



Fonte: Autor 2021.

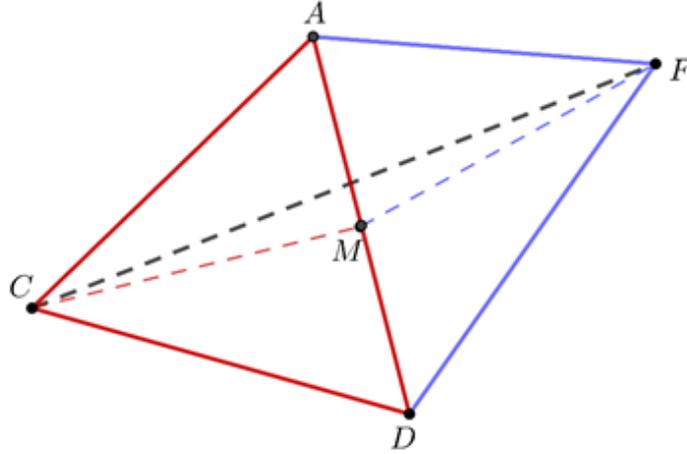
Definidas as coordenadas dos vértices do poliedro $ABCDEF$ e do ponto médio M do segmento AD , todas com o parâmetro l no sistema de coordenadas ortogonais $OXYZ$. Vamos apresentar algumas demonstrações, que mostra as faces ACD e ADF formam um quadrilátero $ACDF$, e assim como as faces ABE e AEF formam um quadrilátero $ABEF$, ou seja, pertencem ao mesmo plano no espaço euclidiano tridimensional.

4.2 Primeira demonstração

Nesta demonstração, utilizaremos a fórmula da distância de dois pontos no espaço em termos das coordenadas no sistema $OXYZ$. Sendo $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, os pontos no espaço euclidiano, a fórmula que representa a distância entre esse dois pontos P_1 e P_2 , é expressa por Lima (2007):

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (4.18)$$

Utilizando apenas as coordenadas dos vértices $C = (l, 0, 0)$, $F = \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$ e o ponto médio $M = \left(\frac{3l}{4}, \frac{3l}{4}, \frac{l\sqrt{2}}{4}\right)$ do lado comum AD dos triângulos ACD e ADF . Se considerarmos que o segmento CF não passa por M (Figura 32) como hipótese para o problema, temos

Figura 32 – Triângulos ACD e ADF .

Fonte: Autor 2021.

A distância $d(C, M)$ entre os pontos C e M , é:

$$\begin{aligned}
 d(C, M) &= \sqrt{\left(\frac{l}{4} - 0\right)^2 + \left(\frac{3l}{4} - 0\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{4} - 0\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{l^2}{16} + \frac{9l^2}{16} + \frac{2l^2}{16}} \\
 &= \frac{l\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

A distância $d(M, F)$ entre os pontos M e F , é:

$$\begin{aligned}
 d(M, F) &= \sqrt{\left(\frac{l}{2} - \frac{3l}{4}\right)^2 + \left(\frac{3l}{2} - \frac{3l}{4}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{2} - \frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{l^2}{16} + \frac{9l^2}{16} + \frac{2l^2}{16}} \\
 &= \frac{l\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

A distância $d(C, F)$ entre os pontos C e F , sem passar pelo ponto M , por hipótese:

$$\begin{aligned}
 d(C, F) &= \sqrt{\left(\frac{l}{2} - l\right)^2 + \left(\frac{3l}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{9l^2}{4} + \frac{2l^2}{4}} \\
 &= l\sqrt{3}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Sabendo que os segmentos

$$CF = d(C, F), \quad CM = d(C, M) \quad \text{e} \quad MF = d(M, F). \tag{4.22}$$

Agora, somando

$$CM + MF = \frac{l\sqrt{3}}{2} + \frac{l\sqrt{3}}{2} = l\sqrt{3}. \quad (4.23)$$

Como

$$CF = CM + MF = l\sqrt{3}. \quad (4.24)$$

Então os pontos C , M e F são colineares.

Para demonstrar que os pontos C , M e F são colineares no sistema ortogonal $OXYZ$, vamos determinar uma matriz quadrada \mathbf{m} formada pelas coordenadas dos pontos C , M e F no espaço euclidiano tridimensional. Seja a matriz \mathbf{m} cuja a primeira linha, segunda linha e terceira linha são formadas pelas coordenadas dos respectivos pontos $C = (l, 0, 0)$, $M = \left(\frac{3l}{4}, \frac{3l}{4}, \frac{l\sqrt{2}}{4}\right)$ e $F = \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$. Obtemos

$$m = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 \\ \frac{3l}{4} & \frac{3l}{4} & \frac{l\sqrt{2}}{4} \\ \frac{l}{2} & \frac{3l}{2} & \frac{l\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Se o determinante da matriz \mathbf{m} for igual a zero, então os três pontos são colineares. Vejamos a propriedade, citado por Lima (2015), diz:

Propriedade 4.2.1. *Tem-se $\det m = 0$ se, e somente se, as coordenadas C , M e F que formam a matriz m , são linearmente dependentes, isto é, um deles é combinação linear dos demais. Podemos afirma que os pontos C , M e F pertencem as mesma reta.*

Aplicando o determinante na matriz \mathbf{m} , obtemos:

$$\det m = \begin{vmatrix} l & 0 & 0 \\ \frac{3l}{4} & \frac{3l}{4} & \frac{l\sqrt{2}}{4} \\ \frac{l}{2} & \frac{3l}{2} & \frac{l\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}. \quad (4.26)$$

Utilizando algumas propriedades para os determinantes, de acordo ao Lima (2015), determinamos que:

$$\det m = \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot \begin{vmatrix} l & 0 & 0 \\ 3l & l & l \\ l & l & l \end{vmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot 0 = 0. \quad (4.27)$$

Como o $\det m = 0$, então os pontos C , M e F são colineares.

Logo os segmentos AD e CF são concorrentes, ou seja, têm exatamente um ponto comum M , então pertencem a um único plano. Concluimos que as faces triangulares ACD e ADF formam um quadrilátero $ACDF$. E ainda, sendo os segmentos AD e CF diagonais do quadrilátero $ACDF$, e os mesmos se intersectam no ponto médio M comum, então o quadrilátero $ACDF$ é um paralelogramo.

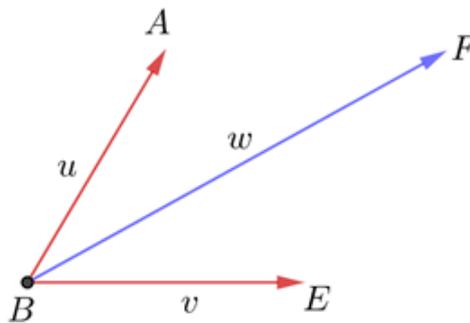
Portanto, o quadrilátero $ACDF$ é uma face do poliedro $ABCDEF$. De modo análogo, os segmentos BF e AE são concorrentes e pertencem ao quadrilátero $ABEF$, sendo face do poliedro $ABCDEF$.

4.3 Segunda demonstração

Nesta segunda demonstração, sem perda de generalidade, usaremos os vetores no espaço tridimensional, assim como a operação de soma entre dois vetores com mesma origem e não colineares. Utilizando as coordenadas dos vértices $A = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$, $B = (0, 0, 0)$, $E = (0, l, 0)$ e $F = \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$.

Segundo Lima (2007), fixando os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BE}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{BF}$, no espaço um sistema de eixos $OXYZ$, definidos como segmentos orientados a partir do mesma origem (vértice B), na figura abaixo, temos:

Figura 33 – Vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .



Fonte: Autor 2021.

Determinando os vetores \vec{u} e \vec{v} , a partir das coordenadas no espaço, obtemos:

$$\vec{u} = \overrightarrow{BA} = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{BE} = (0, l, 0). \quad (4.28)$$

Somando os vetores \vec{u} e \vec{v} , encontramos:

$$\vec{u} + \vec{v} = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right) + (0, l, 0) = \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right). \quad (4.29)$$

Agora, definimos o vetor \vec{w} , a partir das coordenadas no espaço, obtemos:

$$\vec{w} = \overrightarrow{BF} = \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2} \right). \quad (4.30)$$

Logo, observamos que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}$, assim o segmento BF é a diagonal do quadrilátero $ABEF$ de tal modo, o quadrilátero seja em particular um paralelogramo. Portanto, os triângulos equiláteros ABE e AEF formam uma única face $ABEF$ (paralelogramo). De modo análogo, o segmento CF é a diagonal do quadrilátero $ACDF$.

4.4 Terceira demonstração

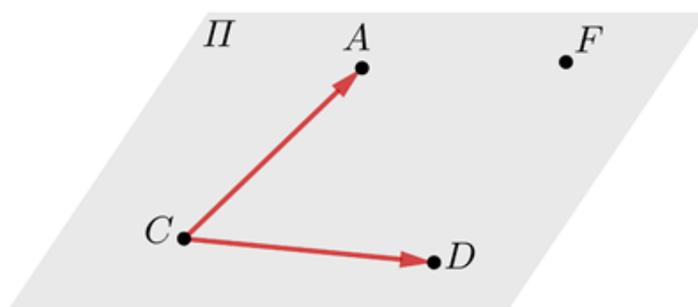
Nesta demonstração utilizaremos, sem perda de generalidade, os vértices A , C , D e F , com suas coordenadas definidas no espaço euclidiano tridimensional. Sabendo que na Geometria Espacial existem propriedades fundamentais, conhecidas como postulados ou axiomas, que são isentas de demonstração. Pois faz parte de nossa realidade e são usadas para a demonstração outras propriedades conhecidas como teorema.

Agora, de acordo ao [Lima \(2007\)](#), aplicaremos o seguinte *Teorema*:

Teorema 4.4.1. *Sejam A , C e D pontos não colineares. Para que um ponto F pertença ao mesmo plano Π , determinados pelos pontos A , C e D é necessário e suficiente que o vetor \overrightarrow{CF} seja uma combinação linear dos vetores \overrightarrow{CD} e \overrightarrow{CA} , isto é, que existam números reais x e y , tais que*

$$\overrightarrow{CF} = x \cdot \overrightarrow{CD} + y \cdot \overrightarrow{CA}. \quad (4.31)$$

Figura 34 – Vetores CA e CD no plano Π .



Fonte: Autor 2021.

A partir das coordenadas dos vértices do poliedro, utilizaremos os pontos:

$$A = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2} \right), C = (l, 0, 0), D = (l, l, 0) \text{ e } F = \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2} \right).$$

Obtemos os vetores $\overrightarrow{CD} = (0, l, 0)$ e $\overrightarrow{CA} = \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$ que não são múltiplos um do outro, ou seja, linearmente independentes. Assim os pontos A , C e D não pertencem a uma mesma reta (fácil ver na [Figura 34](#)).

Utilizando o Teorema 4.4.1, temos

$$\overrightarrow{CF} = x \cdot \overrightarrow{CA} + y \cdot \overrightarrow{CD}, \quad (4.32)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right) &= x \cdot (0, l, 0) + y \cdot \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= (0, lx, 0) + \left(-\frac{ly}{2}, \frac{ly}{2}, \frac{ly\sqrt{2}}{2}\right), \\ &= \left(-\frac{ly}{2}, lx + \frac{ly}{2}, \frac{ly\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

em que,

$$-\frac{l}{2} = -\frac{ly}{2} \Rightarrow y = 1 \quad (4.34)$$

e

$$\frac{3l}{2} = lx + \frac{l}{2} \Rightarrow l = lx \Rightarrow x = 1. \quad (4.35)$$

Logo, independente do comprimento l , existem valores reais para x e y . Então os pontos A , C , D e F são coplanares. Portanto, os triângulos equiláteros ACD e ADF formam uma única face $ACDF$. De modo análogo, os pontos A , B , E e F são coplanares e os triângulos equiláteros ACE e AEF formam uma única face $ACEF$.

4.5 Quarta demonstração

Nesta quarta demonstração, utilizaremos o produto vetorial para determinar o vetor normal \vec{n} ao plano Π_{ACD} , que contém os pontos A , C e D . Em seguida, aplicando o produto interno do vetor normal \vec{n} com um vetor qualquer do plano Π_{ACD} com o ponto de origem definido, encontraremos a equação do plano Π_{ACD} . E substituindo as coordenadas do ponto F na equação do plano, concluiremos se o ponto F pertence ao plano Π_{ACD} e as faces triangulares ACD e ADF pertencem ao mesmo plano.

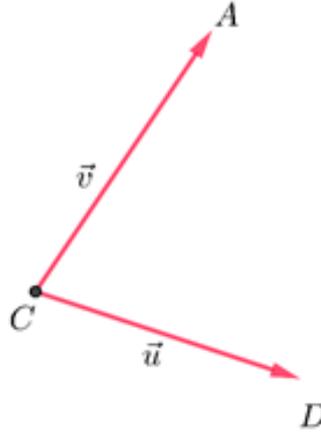
Utilizaremos as coordenadas dos pontos $A = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$, $C = (l, 0, 0)$, $D = (l, l, 0)$ e $F = \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right)$. Iniciaremos determinando a equação do plano Π_{ACD} , ao qual, os pontos A , C e D pertencem.

Sejam, os vetores \vec{v} e \vec{u} pertencem aos segmentos CA e CD , encontramos:

$$\vec{v} = \overrightarrow{CA} = A - C = \left(\frac{l}{2} - l, \frac{l}{2} - 0, \frac{l\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right) \quad (4.36)$$

e

$$\vec{u} = \overrightarrow{CD} = (l - l, l - 0, 0 - 0) = (0, l, 0). \quad (4.37)$$

Figura 35 – Vetores \vec{v} e \vec{u} .

Fonte: Autor 2021.

Agora, vamos determinar o vetor normal \vec{n} ao plano Π_{ACD} , pois qualquer vetor pertencente ao plano Π_{ACD} é perpendicular ao vetor normal \vec{n} com mesma origem. Para definir o vetor normal, vamos considerar os vetores $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{u} = (a_2, b_2, c_2)$ no eixos ortogonais tridimensional. O produto vetorial de \vec{v} e \vec{u} , de acordo [Delgado, Frensel e Crissaff \(2017\)](#), é o vetor:

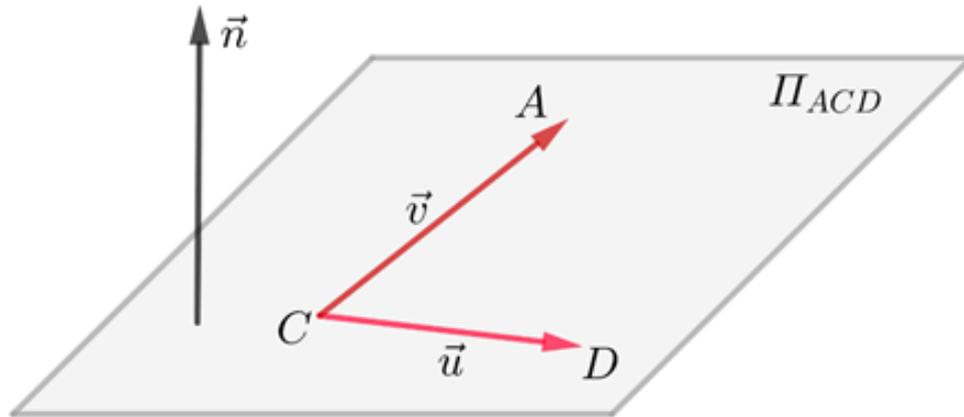
$$\vec{v} \times \vec{u} = (b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1, -(a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1), a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1). \quad (4.38)$$

Efetuando o produto vetorial do vetores \vec{v} e \vec{u} com sua coordenadas em função do parâmetro l , obtemos

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{u} &= \left(\frac{l}{2} \cdot 0 - l \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2}, - \left(-\frac{l}{2} \cdot 0 - 0 \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} \right), -\frac{l}{2} \cdot l - 0 \cdot \frac{l}{2} \right) \\ &= \left(-\frac{l^2\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{l^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Logo, o vetor normal \vec{n} , é:

$$\vec{n} = \left(-\frac{l^2\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{l^2}{2} \right). \quad (4.40)$$

Figura 36 – Vetores \vec{n} , \vec{v} e \vec{u} .

Fonte: Autor.

Seja o ponto qualquer $X \in \Pi_{ACD}$, com coordenadas $X = (x, y, z)$, assim, vetor \overrightarrow{CX} também pertencente ao plano. O produto interno entre o vetor \overrightarrow{CX} e o vetor normal \vec{n} é igual a zero, assim obtemos a equação do plano Π_{ACD} (LIMA, 2007).

$$0 = \overrightarrow{CX} \cdot \vec{n} = (x - l, y, z) \cdot \left(-\frac{l^2\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{l^2}{2} \right) = -\frac{l^2\sqrt{2}}{2}x + \frac{l^3\sqrt{2}}{2} - \frac{l^2}{2}z. \quad (4.41)$$

Multiplicando a última equação por $\left(\frac{2}{l^2} \right)$, obtemos a equação do plano Π_{ACD} ,

$$\sqrt{2}x + z = l\sqrt{2}. \quad (4.42)$$

Agora, substituindo os valores das coordenadas do ponto $F = \left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}, \frac{l\sqrt{2}}{2} \right)$ na equação do plano, encontramos:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{2}}{2} &= l\sqrt{2} \\ \frac{2l\sqrt{2}}{2} &= l\sqrt{2} \\ l\sqrt{2} &= l\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Portanto concluímos que o ponto $F \in \Pi_{ACD}$, logo as faces triangulares ACD e ADF pertencem ao mesmo plano, ou seja, o quadrilátero $ACDF$ representa uma face do poliedro $ABCDEF$. De modo análogo, as faces triangulares ABE e AEF , formam um quadrilátero.

5 CONSTRUÇÃO DE PIRÂMIDES REGULARES E SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

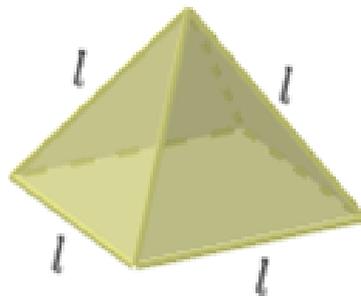
Neste capítulo, construiremos as pirâmides regulares com base quadrada e com todas as arestas medindo: $l, 2l, 3l, \dots$, utilizando somente as pirâmides regulares com arestas de comprimento l . Por fim, demonstraremos que as pirâmides construídas (arestas: $l, 2l, 3l, \dots$) tem o mesmo volume do somatório de todos os volumes das pirâmides regulares e tetraedros regulares.

Em seguida, vamos determinar polinômios que representam o número de pirâmides regulares de base quadrada e tetraedros regulares. Mostraremos duas tabelas com os dados sobre as construções das pirâmides regulares. Apresentaremos as sequências numéricas e seus polinômios que são consequências das construções anteriores. Serão determinadas varias as expressões ou fórmulas dos somatórios das sequências numéricas (a_n) , (b_n) , (c_n) , (d_n) , (e_n) e (f_n) . Por fim, demonstraremos por *Indução Matemática* que as fórmulas dos somatórios são verdadeiras para qualquer número natural.

5.1 Construção de pirâmides regulares

Na construção ou montagem de pirâmides regulares, com base quadrada e arestas de mesmo comprimento: $l, 2l, 3l, \dots$, será utilizado somente pirâmides regulares e tetraedros regulares com todas as arestas de comprimento l . Vamos considerar nas ilustrações, que todas as pirâmides regulares com arestas de comprimento l são congruentes. Assim como, os tetraedros regulares com arestas l . Vejamos agora, as ilustrações da pirâmide regular de base quadrada e do tetraedro regular com arestas de comprimento l :

Figura 37 – Pirâmide regular.



Fonte: Autor 2021.

Figura 38 – Tetraedro regular.

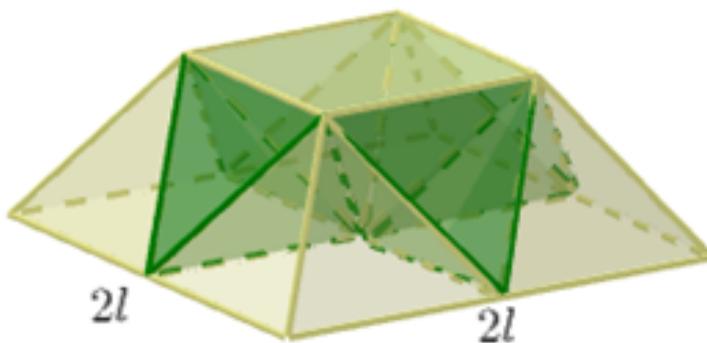


Fonte: Autor 2021.

Na série de construções das pirâmides regulares, serão apresentadas nas seguinte ordem: 1^a pirâmide regular \rightarrow arestas com comprimento: l ; 2^a pirâmide regular \rightarrow arestas com comprimento $2l$; 3^a pirâmide regular \rightarrow com arestas $3l$; e assim por diante nas próximas construções. Vejamos então cada construção:

1^a Pirâmide com arestas medindo l : É formada por uma única pirâmide regular (Figura 37).

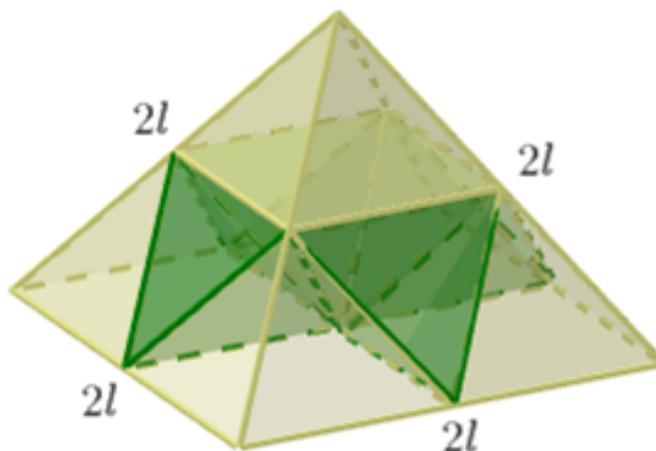
2^a Pirâmide com arestas de comprimento $2l$: Vamos começar construindo uma base quadrada de lado medindo $2l$. Para construir essa base são necessários 5 pirâmides regulares (Figura 37) e 4 tetraedros (Figura 38) com arestas medindo l .

Figura 39 – Base da pirâmide quadrada com lado $2l$.

Fonte: Autor 2021.

Acrescentado nessa base à pirâmide anterior de aresta l . Então, a pirâmide de aresta $2l$ é formada por 6 pirâmides regulares (Figura 37) e 4 tetraedros regulares (Figura 38): um total de 10 pirâmides regulares.

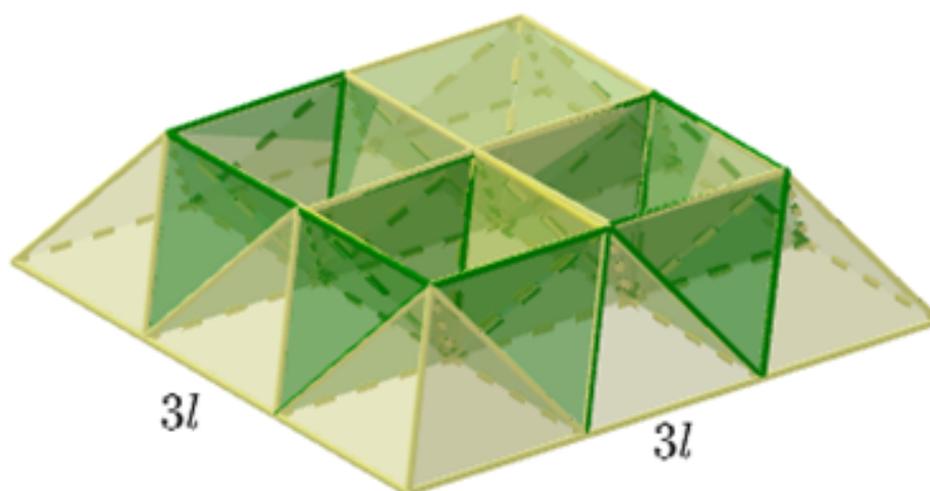
Figura 40 – Pirâmide com arestas $2l$.



Fonte: Autor 2021.

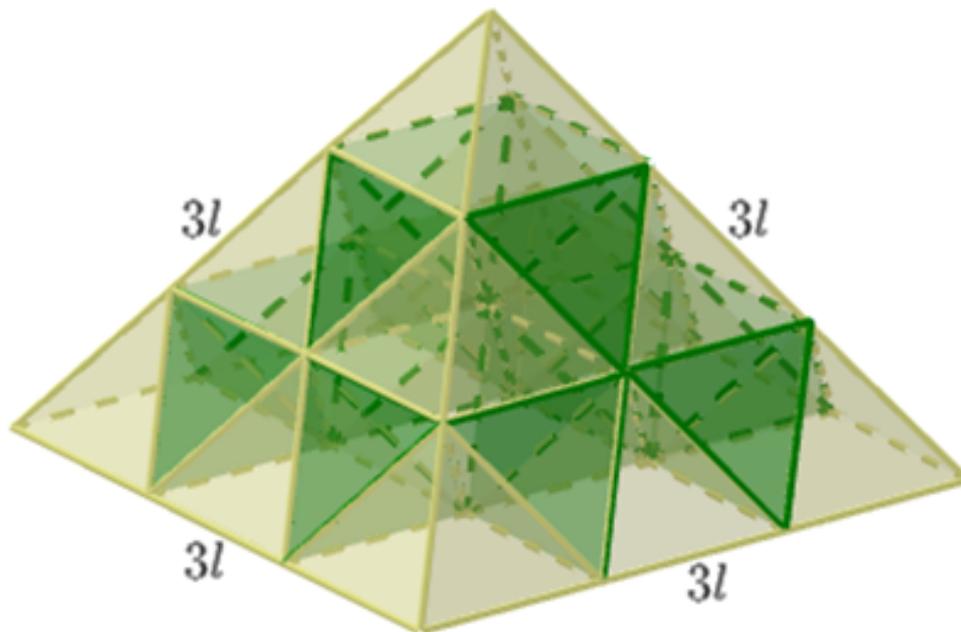
3ª pirâmide com arestas medindo $3l$: Vamos construir uma base quadrada de lado $3l$. Na construção dessa base são necessários 13 pirâmides regulares (Figura 37) e 12 tetraedros (Figura 38) com arestas de comprimento l .

Figura 41 – Base da pirâmide quadrada com lado $3l$.



Fonte: Autor 2021.

Encaixando a pirâmide regular anterior com aresta $2l$ com a base quadrada, de lado $3l$. Então, formamos uma pirâmide regular com arestas $3l$ é composta por 19 pirâmides regulares (Figura 37) e 16 tetraedros regulares (Figura 38): um total de 35 pirâmides regulares.

Figura 42 – Pirâmide com arestas $3l$.

Fonte: Autor 2021.

Essa construção segue em seqüência para outras pirâmides regulares. Na construção da base quadrada de lado com comprimento $4l$, são necessárias 25 pirâmides regulares (Figura 37) e 24 tetraedros (Figura 38) com arestas de comprimento l , acrescentando a base à pirâmide anterior, formamos uma pirâmide regular com arestas $4l$ (totalizando 44 pirâmides regulares e 40 tetraedros); e na construção da base quadrada de lado com comprimento $5l$, são necessárias 41 pirâmides regulares e 40 tetraedros com arestas de comprimento l , acrescentando a base à pirâmide anterior, formamos uma pirâmide regular com aresta $5l$ (totalizando 85 pirâmides regulares e 80 tetraedros), e assim, de forma sucessiva.

5.1.1 Pirâmide com aresta medindo $2l$

A pirâmide com $2l$ de aresta, é formada por 6 pirâmides regulares (Figura 37) e 4 tetraedros regulares (Figura 38) com todas arestas com comprimento l . Vamos determinar o volume (V_{2l}) da pirâmide com aresta $2l$. Sabendo a área da base (A_{2b}), a altura (h_2) e aplicando o teorema do volume de uma pirâmide qualquer, temos:

$$V_{2l} = \frac{1}{3} A_{2b} \cdot h_2. \quad (5.1)$$

Sendo a base da pirâmide um quadrado de lado $2l$. Então a área da base, é:

$$A_{2b} = (2l)^2 = 4l^2. \quad (5.2)$$

Antes de determinar a altura da pirâmide, vamos definir o apótema a_2 da face lateral da pirâmide com $2l$ de aresta. Como a face lateral da pirâmide é um triângulo equilátero, então o apótema coincide com a altura desse triângulo equilátero, obtemos:

$$a_2 = \frac{(2l)\sqrt{3}}{2} = l\sqrt{3}. \quad (5.3)$$

Agora, a altura da pirâmide h_2 é determinada mais uma vez usando *Teorema de Pitágoras*, obtemos:

$$(l\sqrt{3})^2 = (h_2)^2 + l^2 \quad (5.4)$$

isolando-se o termo h_2 tem-se,

$$(h_2)^2 = 3l^2 - l^2 = 2l^2 \quad (5.5)$$

na sequência, extraindo a raiz quadrada nas extremidades, encontra-se

$$h_2 = l\sqrt{2}. \quad (5.6)$$

Logo, o volume da pirâmide regular com arestas de comprimento $2l$ (V_{2l}), é:

$$\begin{aligned} V_{2l} &= \frac{1}{3} \cdot 4l^2 \cdot l\sqrt{2} \\ &= \frac{4l^3\sqrt{2}}{3}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Por outro lado, sem perda de generalidade, os volumes da pirâmide regular (V_P) e do tetraedro regular (V_T) com arestas medindo l , já foram definidos como sendo:

$$V_P = \frac{l^3\sqrt{2}}{6} \quad (5.8)$$

e

$$V_T = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}. \quad (5.9)$$

Sabendo que, na construção da pirâmide regular com arestas $2l$, são necessárias 6 pirâmides regulares ([Figura 37](#)) e 4 tetraedros regulares ([Figura 38](#)). Logo, o volume formado pelas dez pirâmides V_{10P} , é:

$$\begin{aligned} V_{10P} &= 6 \cdot V_P + 4 \cdot V_T \\ &= 6 \cdot \left(\frac{l^3\sqrt{2}}{6} \right) + 4 \cdot \left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12} \right) \\ &= l^3\sqrt{2} + \frac{l^3\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{4l^3\sqrt{2}}{3}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Portanto, na construção da pirâmide regular com arestas de comprimento $2l$, são necessárias formada 6 pirâmides regulares de base quadrada e 4 tetraedros regulares, com arestas de comprimento l . Pois o volume da pirâmide com aresta $2l$ é o mesmo volume das 10 pirâmides regulares, formadas por: 6 pirâmides regulares e 4 tetraedros regulares com l de arestas.

5.1.2 Pirâmide com aresta medindo $3l$

Nesta pirâmide com $3l$ de aresta, é de forma análoga a subseção anterior, a pirâmide é formada por 19 pirâmides regulares de base quadrada (Figura 37) e 16 tetraedros regulares (Figura 38) com todas arestas medindo l . Vamos determinar o volume (V_{3l}) da pirâmide com aresta $3l$, sabendo que a área da base (A_{3b}), a altura (h_3) e aplicando o teorema do volume de uma pirâmide qualquer, obtemos:

$$V_{3l} = \frac{1}{3} A_{3b} \cdot h_3. \quad (5.11)$$

Sabendo que a área da base da pirâmide com aresta $3l$ de comprimento, é definida, por:

$$A_{3b} = (3l)^2 = 9l^2. \quad (5.12)$$

Para determinar a altura da pirâmide h_3 , vamos antes definir o apótema a_3 da face lateral da pirâmide com $3l$ de aresta. Como a face lateral da pirâmide é um triângulo equilátero, então o apótema coincide com a altura, obtemos:

$$a_3 = \frac{(3l) \sqrt{3}}{2} = \frac{3l\sqrt{3}}{2}. \quad (5.13)$$

A altura da pirâmide h_3 , vamos aplicar mais uma vez o *Teorema de Pitágoras*, tem-se:

$$\left(\frac{3l\sqrt{3}}{2}\right)^2 = h_3^2 + \left(\frac{3l}{2}\right)^2 \quad (5.14)$$

isolando o termo h_3 encontra-se,

$$h_3^2 = \frac{27l^2}{4} - \frac{9l^2}{4} = \frac{18l^2}{4} \quad (5.15)$$

finalizando com a extração da raiz quadrada nas extremidades, obtemos:

$$h_3 = \frac{3l\sqrt{2}}{2}. \quad (5.16)$$

Agora, o volume da pirâmide regular com arestas $3l$ de comprimento, é:

$$\begin{aligned} V_{3l} &= \frac{1}{3} \cdot 9l^2 \cdot \frac{3l\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{9l^3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Por outro lado, sem perda de generalidade, já sendo definidos os volumes da pirâmide regular $V_P = \frac{l^3\sqrt{2}}{6}$ e do tetraedro regular $V_T = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$ com arestas de comprimento l , e como, na construção da pirâmide com aresta $3l$ é formada por 19 pirâmides regulares e 16 tetraedros regulares. Logo, o volume formado pelas 35 pirâmides V_{35P} , é:

$$\begin{aligned} V_{35P} &= 19 \cdot V_P + 16 \cdot V_T \\ &= 19 \cdot \left(\frac{l^3\sqrt{2}}{6} \right) + 16 \cdot \left(\frac{l^3\sqrt{2}}{12} \right) \\ &= \frac{19l^3\sqrt{2}}{6} + \frac{8l^3\sqrt{2}}{6} \\ &= \frac{9l^3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Portanto, a construção da pirâmide com aresta $2l$, de forma análoga para construção da pirâmide com aresta medindo $3l$ é formada por 19 pirâmides regulares de base quadrada e 16 tetraedros regulares com arestas de comprimento l .

5.2 Sequências numéricas das pirâmides regulares

Na antiga cidade Crotona, colônia grega, surgia a escola pitagórica por volta de 520 *a.C.*, os estudos dessa comunidade se baseavam na Filosofia, Ciências e Matemática, com certo grau de misticismo, segundo os historiadores. A escola lidava com Matemática de forma filosófica e abstrata, era comum para os pitagóricos dividir os cálculos práticos, dos estudos teóricos dos números, tomando esse último aspecto como mais relevante. É creditado a essa escola o nascimento da *Aritmética Teórica*, dentre suas descobertas, temos os *números figurados*, pois na época era comum no processo de contagem fazer pontos na areia ou utilizando pedrinhas. Esses *números figurados*, como é de supor, formam num plano varias figuras geométricas (DOMINGUES, 2017).

Como exemplo, de acordo Domingues (2017), temos a sequência: 1, 3, 6, 10, \dots , são conhecidos como números triangulares, pois é possível as seguintes formações:

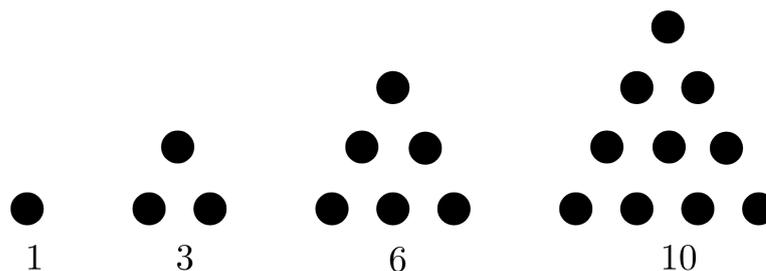


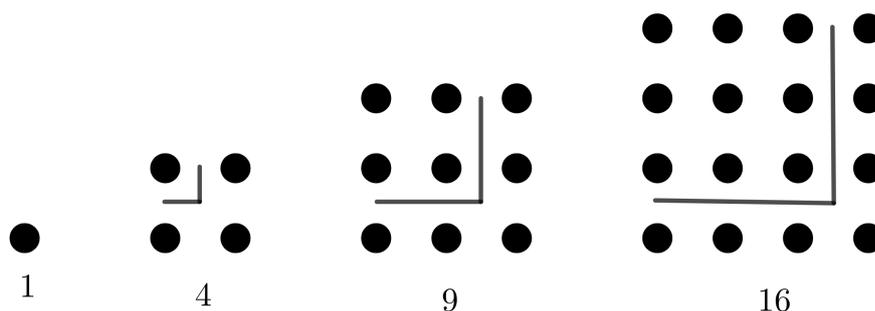
Figura 43 – Números triangulares.

Se o n ésimo número triangular for $T(n)$, então é válida a expressão:

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{5.19}$$

Um outro exemplo, seria a seqüência: 1, 4, 9, 16, \dots , são conhecidos como números quadrados ou quadrangulares, pois de acordo com Domingues (2017), temos as seguintes formações:

Figura 44 – Números quadrangulares.



Fonte: Autor 2021.

Se indicarmos $Q(n)$, como sendo o n ésimo número quadrangular, então temos a expressão:

$$Q(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{n[1 + (2n - 1)]}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2. \tag{5.20}$$

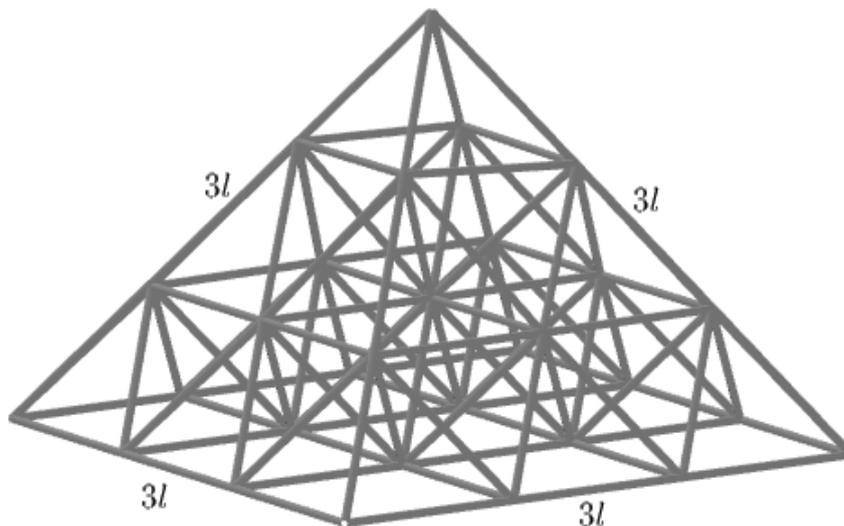
Seqüências de números são estudadas com frequência até hoje na Matemática e em suas aplicações. A seqüência infinita, usaremos somente o termo “seqüência”, é um tipo particular de função, que vamos agora definir, de acordo Leithold (1994), temos:

Definição 5.2.1. Seqüência é uma função cujo o domínio é o conjunto 1, 2, 3, \dots , n, \dots de todos os números inteiros positivos.

Os números na imagem da seqüência são chamados de **elementos da seqüência**. Se o n ésimo elemento for dado a_n , então a seqüência será o conjunto de pares ordenados da forma (n, a_n) ; onde n é um inteiro positivo, ou seja, $n \in \mathbb{N}$.

Encontramos seqüências numéricas nas construções de pirâmides regulares com arestas de comprimento: $l, 2l, 3l, \dots$. Estas seqüências são determinadas a partir dos números de pirâmides regulares, tetraedros regulares e o pirâmides maiores, as quais são formadas por pirâmides regulares e tetraedros regulares com arestas de mesmo comprimento. Todas as seqüências numéricas $(a_n), (b_n)$ e (c_n) , são em função de n , sendo em $n \in \mathbb{N}$. Vejamos a figura, abaixo:

Figura 45 – Pirâmide regular com arestas $3l$.



Fonte: Autor 2021.

Definição 5.2.2. Seja a seqüência numérica (a_n) uma progressão aritmética, com o operador diferença Δ , se, e somente se, as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ entre cada termo e o termo anterior é constante. Uma seqüência ou progressão é de segunda ordem, quando as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, formam uma progressão não estacionária (termos que não se repetem). Uma seqüência ou progressão é de terceira ordem, quando as segundas diferenças $\Delta^2 a_n = a_{n+1} - a_n$, forma uma progressão aritmética não estacionaria. E assim por diante, ou seja, para outras seqüências numéricas (LIMA et al., 2006).

Tomaremos esse Definição para nosso caso: seja seqüência numérica (a_n) que representa o número de pirâmides regulares com arestas medindo l , que formam pirâmides regulares com arestas medindo: $l, 2l, 3l, 4l, 5l, \dots$, é:

$$\begin{aligned}
 a_n &: 1 \longrightarrow 6 \longrightarrow 19 \longrightarrow 44 \longrightarrow 85 \longrightarrow \dots \\
 \Delta a_n &: 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 25 \longrightarrow 41 \longrightarrow \dots \\
 \Delta^2 a_n &: 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 16 \longrightarrow \dots \\
 \Delta^3 a_n &: 4 \longrightarrow 4 \longrightarrow \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

Logo, por Definição 5.2.2, a seqüência (a_n) é uma progressão aritmética de terceira ordem, pois as segundas diferenças $(\Delta^2 a_n)$ forma uma progressão aritmética não estacionaria. Então, a forma polinomial de terceiro grau da seqüência, e dado por:

$$a_n = an^3 + bn^2 + cn + d, \quad \text{com } a \neq 0.
 \tag{5.22}$$

Para seqüência numérica (a_n) , temos:

$$a_1 = 1; a_2 = 6; a_3 = 19 \quad \text{e} \quad a_4 = 44.
 \tag{5.23}$$

Substituindo esses valores no polinômio a_n , temos um sistema de equações S_1 :

$$S_1 = \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 6 \\ 27a + 9b + 3c + d = 19 \\ 64a + 16b + 4c + d = 44 \end{cases}. \quad (5.24)$$

Escalonando o sistema S_1 , obtemos:

$$S_1 = \begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ -4b - 6c - 7d = -2 \\ 3c + \frac{11}{2}d = 1 \\ -d = 0 \end{cases}. \quad (5.25)$$

Então encontramos os valores: $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$, $c = \frac{1}{3}$ e $d = 0$.

Portanto, o termo a_n é dado por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3}n^3 + \frac{1}{3}n \\ &= \frac{2n^3 + n}{3} \\ &= \frac{n(2n^2 + 1)}{3}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Para a seqüência numérica (b_n) que representa o número de tetraedros regulares com arestas de comprimento l , que formam pirâmides regulares com arestas medindo: $l, 2l, 3l, 4l, 5l, \dots$, temos:

$$\begin{aligned} b_n &: 0 \longrightarrow 4 \longrightarrow 16 \longrightarrow 40 \longrightarrow 80 \longrightarrow \dots \\ \Delta b_n &: 4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 24 \longrightarrow 40 \longrightarrow \dots \\ \Delta^2 b_n &: 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 16 \longrightarrow \dots \\ \Delta^3 b_n &: 4 \longrightarrow 4 \longrightarrow \dots \end{aligned} \quad (5.27)$$

Assim, por Definição 5.2.2, a seqüência numérica (b_n) é uma progressão aritmética de terceira ordem, pois as segundas diferenças $(\Delta^2 a_n)$ forma uma progressão aritmética não estacionaria. Então, a seqüência é um polinômio de terceiro grau da forma:

$$b_n = an^3 + bn^2 + cn + d, \quad \text{com } a \neq 0. \quad (5.28)$$

Para seqüência numérica (b_n) , temos:

$$b_1 = 0; \quad b_2 = 4; \quad b_3 = 16 \quad \text{e} \quad b_4 = 40. \quad (5.29)$$

Substituindo os valores no polinômio b_n , temos um sistema de equações S_2 :

$$S_2 = \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 27a + 9b + 3c + d = 16 \\ 64a + 16b + 4c + d = 40 \end{cases}. \quad (5.30)$$

Escalonando o sistema S_2 , obtemos:

$$S_2 = \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -4b - 6c - 7d = 4 \\ 3c + \frac{11}{2}d = -2 \\ -d = 0 \end{cases}. \quad (5.31)$$

Encontramos, $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$, $c = -\frac{2}{3}$ e $d = 0$.

Portanto, o termo b_n é definido por:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{3}n^3 - \frac{2}{3}n \\ &= \frac{2n^3 - 2n}{3} \\ &= \frac{2n(n^2 - 1)}{3}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Agora, para seqüência numérica (c_n) que representa o número de poliedros, que formam as pirâmides regulares com arestas de comprimento: $l, 2l, 3l, 4l, 5l, \dots$, seria o número total de pirâmides regulares e tetraedros regulares. Esse total será representada pela seqüência (c_n) , a qual é determinada pela soma dos polinômios de terceiro grau a_n e b_n , encontramos:

$$\begin{aligned} c_n &= a_n + b_n \\ &= \left[\frac{n(2n^2 + 1)}{3} \right] + \left[\frac{2n(n^2 - 1)}{3} \right] \\ &= \frac{2n^3 + n}{3} + \frac{2n^3 - 2n}{3} \\ &= \frac{4n^3 - n}{3} \\ &= \frac{n(4n^2 - 1)}{3}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

A Tabela 1, a seguir, representa um resumo das pirâmides regulares construídas a partir dos poliedros: pirâmides regulares com base quadrada e tetraedros regulares (com arestas de comprimento l). Temos essas seqüências numéricas (a_n) , (b_n) e (c_n) das

pirâmides regulares com seus termos genéricos ou polinomiais. As sequências (a_n) , (b_n) e (c_n) são progressões aritméticas de ordem 3. Podemos concluir que essas progressões aritméticas resultam em polinômios de grau 3 em n .

Vejamos a Tabela 1 com os dados sobre as pirâmides regulares:

Tabela 1 – Pirâmides regulares

Pirâmide	\mathbb{N}	Aresta	Pirâmides Regulares	Tetraedro Regulares	Total de Pirâmides
1^a	1	l	1	0	1
2^a	2	$2l$	6	4	10
3^a	3	$3l$	19	16	35
4^a	4	$4l$	44	40	84
5^a	5	$5l$	85	80	165
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n^a	n	nl	$\frac{n(2n^2 + 1)}{3}$	$\frac{2n(n^2 - 1)}{3}$	$\frac{n(4n^2 - 1)}{3}$

Fonte: Autor 2021.

5.2.1 As expressões do somatório dos termos das sequências (a_n) , (b_n) e (c_n)

As sequências (a_n) , (b_n) e (c_n) que formam os polinômios de terceiro grau, são definidas as expressões dos somatório dos termos de cada sequências. A recorrência determina o somatório e produtório de uma sequênciã real (a_n) , onde são denotados por, $\sum_{i=1}^n a_i$ e $\prod_{i=1}^n a_i$, respectivamente. Podemos definir o somatório e produtório como sendo:

Definição 5.2.3. Somatório

$$(i) \sum_{i=1}^n a_i = a_1$$

$$(ii) \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + a_{n+1}, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Definição 5.2.4. Produtório

$$(i) \prod_{i=1}^n a_i = a_1$$

$$(ii) \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) + a_{n+1}, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Nas somas polinomiais, utilizaremos um teorema que relaciona progressões aritméticas de ordem superior com polinômios e um corolário, citado por [Morgado \(2015\)](#):

Teorema 5.2.1.

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \sum_{k=1}^n k^p \quad (5.34)$$

é um polinômio de grau $p + 1$ em n , para todo $p \in \mathbb{N}$.

A partir desse último teorema podemos chegar ao seguinte corolário:

Corolário. Se P é um polinômio de grau p então $\sum_{k=1}^n P(k)$ é um polinômio de grau $p + 1$ em n , para todo $p \in \mathbb{N}$.

Então para polinômios de terceira ordem após da aplicação dos somatórios encontraremos polinômios de grau 4.

Utilizaremos nas seqüências numéricas somente o somatório e suas propriedades. De acordo com [Domingues \(2017\)](#):

Propriedades: Sejam as seqüências (a_n) , (b_n) e (c_n) , e um número real k , são válidas as seguintes propriedades para o somatório:

Propriedade 5.2.1.

$$(i) \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n k \cdot c_i = k \sum_{i=1}^n c_i$$

A expressão ou fórmula do somatório dos termos de $a_n = \frac{n(2n^2 + 1)}{3}$, é determinado pelo somatório com a notação $\sum_{i=1}^n a_i$ e com suas propriedades do somatório, temos:

$$\begin{aligned} 1 + 6 + 19 + \cdots + \frac{n(2n^2 + 1)}{3} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{i(2i^2 + 1)}{3} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i^3}{3} + \frac{i}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n i^3 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n i \end{aligned} \quad (5.35)$$

sabendo que os somatórios,

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (5.36)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (5.37)$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (5.38)$$

substituindo, obtemos

$$\begin{aligned}
 1 + 6 + 19 + \cdots + \frac{n(2n^2 + 1)}{3} &= \frac{2}{3} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + \frac{1}{3} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \\
 &= \frac{n^2(n+1)^2}{6} + \frac{n(n+1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(n^2 + n + 1)}{6}.
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Logo,

$$1 + 6 + 19 + \cdots + \frac{n(2n^2 + 1)}{3} = \frac{n(n+1)(n^2 + n + 1)}{6}. \tag{5.40}$$

Usaremos a *Princípio da Indução Matemática (PIM)*, o qual é uma *Proposição* relativamente fácil, para demonstrar que essas expressões são verdadeiras. Segundo [Hefez \(2016\)](#), descreve o seguinte enunciado:

Proposição 5.2.2. *Seja $a \in \mathbb{N}$ e seja $P(n)$ uma sentença aberta em $n \in \mathbb{N}$. Suponha que:*

- (i) $P(a)$ é verdadeiro, e que
- (ii) $\forall n \geq a, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq a$.

Aplicando o *PIM*, vamos mostrar que a fórmula do somatório $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Sabendo que:

$$P(n) = 1 + 6 + 19 + \cdots + \frac{n(2n^2 + 1)}{3} = \frac{n(n+1)(n^2 + n + 1)}{6}. \tag{5.41}$$

Por indução, obtemos para:

$$n = 1 \therefore P(1) = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (1^2 + 1 + 1)}{6} = 1, \tag{5.42}$$

logo é verdadeiro para $n = 1$.

Por hipótese, suponha que:

$$P(n) = \frac{n(n+1)(n^2 + n + 1)}{6}, \tag{5.43}$$

é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, para $P(n+1)$, vamos somar em ambos os membros de $P(n)$ a expressão

$$\frac{(n+1) [2(n+1)^2 + 1]}{3} \tag{5.44}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
P(n+1) &= 1 + 6 + 19 + \dots + \frac{n(2n^2+1)}{3} + \frac{(n+1)[2(n+1)^2+1]}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6} + \frac{(n+1)[2(n+1)^2+1]}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6} + \frac{2(n+1)[2n^2+4n+3]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n^3+n^2+n+4n^2+8n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n^3+5n^2+9n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n^3+2n^2+3n^2+6n+3n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n^2(n+2)+3n(n+2)+3(n+2)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n^2+3n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n^2+2n+1+n+1+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)[(n+1)^2+(n+1)+1]}{6}.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

O que demonstra que é verdadeiro para $P(n+1)$.

A fórmula do somatório dos termos de $b_n = \frac{2n(n^2-1)}{3}$, é encontrada pelo somatório com a notação $\sum_{i=1}^n b_i$ e com suas propriedades, temos:

$$\begin{aligned}
0 + 4 + 16 + 40 + \dots + \frac{2n(n^2-1)}{3} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{2i(i^2-1)}{3} \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i^3}{3} - \frac{2i}{3} \right) \\
&= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n i^3 - \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n i
\end{aligned} \tag{5.46}$$

substituindo os somatórios, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 + 4 + 16 + 40 + \dots + \frac{2n(n^2-1)}{3} &= \frac{2}{3} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{6} - \frac{2n(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n^2+n-2)}{6}.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Logo,

$$0 + 4 + 16 + 40 + \dots + \frac{2n(n^2-1)}{3} = \frac{n(n+1)(n^2+n-2)}{6}. \tag{5.48}$$

A partir do *PIM*, vamos demonstrar a veracidade da fórmula do somatório $T(n)$. Tendo que:

$$T(n) = 0 + 4 + 16 + 40 + \dots + \frac{2n(n^2 - 1)}{3} = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 2)}{6}. \quad (5.49)$$

Iniciando o processo por indução, obtemos para:

$$n = 1 \therefore T(1) = \frac{1 \cdot (1 + 1) \cdot (1^2 + 1 - 2)}{6} = 0, \quad (5.50)$$

então para $n = 1$ é verdadeiro.

Por hipótese, suponha que:

$$T(n) = \frac{n(n+1)(n^2 + n - 2)}{6}, \quad (5.51)$$

seja verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, para $T(n+1)$, vamos somar em ambos os membros de $T(n)$ a expressão

$$\frac{2(n+1)[(n+1)^2 - 1]}{3}, \quad (5.52)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} T(n+1) &= 0 + 4 + 16 + 40 + \dots + \frac{2n(n^2 - 1)}{3} + \frac{2(n+1)[(n+1)^2 - 1]}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(n^2 + n - 2)}{6} + \frac{2(n+1)[(n+1)^2 - 1]}{3} \\ &= \frac{(n+1)[n(n^2 + n - 2) + 4(n^2 + 2n)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n^3 + 5n^2 + 6n)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n^3 + 2n^2 + 3n^2 + 6n)}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n^2(n+2) + 3n(n+2)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n^2 + 3n)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 2)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)[(n+1)^2 + (n+1) - 2]}{6}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

O que demonstra que $T(n+1)$ é verdadeiro.

A fórmula do somatório dos termos de $c_n = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$, é determinado pelo somatório com a notação $\sum_{i=1}^n c_i$ e suas propriedades, teremos:

$$\begin{aligned} 1 + 10 + 35 + 84 + \dots + \frac{n(4n^2 - 1)}{3} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{i(4i^2 - 1)}{3} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{4i^3}{3} - \frac{i}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \sum_{i=1}^n i^3 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n i \end{aligned} \quad (5.54)$$

substituindo os somatórios, obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + 10 + 35 + 84 + \dots + \frac{n(4n^2 - 1)}{3} &= \frac{4}{3} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \frac{2n^2(n+1)^2}{6} - \frac{n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)[2n(n+1) - 1]}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 1)}{6}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Usando o *PIM*, vamos determinar que a fórmula do somatório $V(n)$ é verdadeira. Sendo que:

$$V(n) = 1 + 10 + 35 + 84 + \dots + \frac{n(4n^2 - 1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 1)}{6}. \quad (5.56)$$

Por indução, temos para:

$$n = 1 \therefore V(1) = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1)}{3} = 1 \quad (5.57)$$

então para $n = 1$ é verdadeiro.

Por hipótese, suponha que:

$$V(n) = \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 1)}{6}, \quad (5.58)$$

é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, para $V(n+1)$, vamos somar em ambos os membros de $V(n)$ a expressão

$$\frac{(n+1)[4(n+1)^2 - 1]}{3}, \quad (5.59)$$

obtemos:

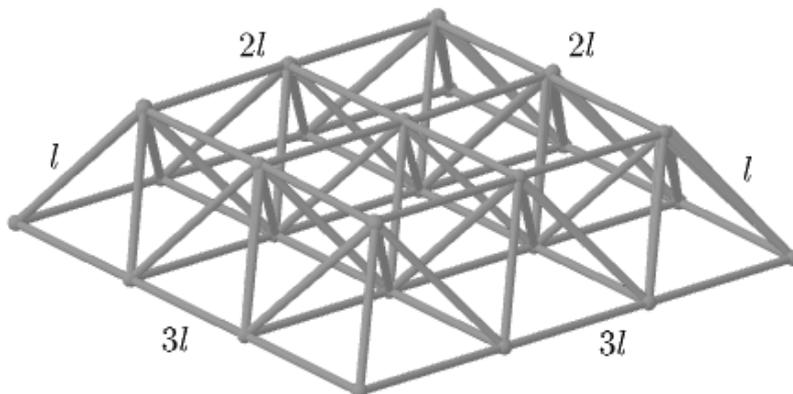
$$\begin{aligned}
 V(n+1) &= 1 + 10 + 35 + 84 + \dots + \frac{n(4n^2 - 1)}{3} + \frac{(n+1)[4(n+1)^2 - 1]}{3} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 1)}{6} + \frac{(n+1)[4(n+1)^2 - 1]}{3} \\
 &= \frac{(n+1)[n(2n^2 + 2n - 1) + 8(n+1)^2 - 2]}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^3 + 2n^2 - n + 8n^2 + 16n + 8 - 2)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^3 + 10n^2 + 15n + 6)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^3 + 4n^2 + 6n^2 + 12n + 3n + 6)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)[2n^2(n+2) + 6n(n+2) + 3(n+2)]}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n^2 + 6n + 3)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n^2 + 4n + 2 + 2n + 2 - 1)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)^2 + 2(n+1) - 1]}{6}.
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Portanto, demonstra que $V(n+1)$ é verdadeiro.

5.3 Outras seqüências numéricas das pirâmides regulares

Nas construções das bases de pirâmides regulares com arestas de comprimento: $l, 2l, 3l, \dots$ são formadas seqüências numéricas d_n, e_n e f_n , em função de n , sendo $n \in \mathbb{N}$. Essas seqüências, são determinadas a partir do número de pirâmides regulares, tetraedros regulares e poliedros, que são formados por pirâmides regulares e tetraedros regulares, com arestas de mesmo comprimento. Vejamos como exemplo a figura, abaixo:

Figura 46 – Base da Pirâmide regular com arestas $3l$.



Fonte: Autor 2021.

A seqüência numérica (d_n) que representa o número de pirâmides regulares com arestas medindo l , que formam a base das pirâmides regulares com arestas de comprimento: $l, 2l, 3l, 4l, 5l, \dots$, encontramos:

$$\begin{aligned} d_n &: 1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 25 \longrightarrow 41 \longrightarrow \dots \\ \Delta d_n &: 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 16 \longrightarrow \dots \\ \Delta^2 d_n &: 4 \longrightarrow 4 \longrightarrow 4 \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{5.61}$$

De acordo a Definição 5.2.2, a seqüência (d_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois as segundas diferenças (Δd_n) forma uma progressão aritmética não estacionaria. Então, o polinômio é de segundo grau, dado por:

$$d_n = an^2 + bn + c, \quad \text{com } a \neq 0. \tag{5.62}$$

Assim, para seqüência numérica (d_n) , temos:

$$d_1 = 1; d_2 = 5 \quad \text{e} \quad d_3 = 13. \tag{5.63}$$

Substituindo no polinômio d_n , formamos um sistema de equações S_3 :

$$S_3 = \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases} . \tag{5.64}$$

Escalonando o sistema S_3 , obtemos:

$$S_3 = \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -2b - 3c = 1 \\ c = 1 \end{cases} \tag{5.65}$$

encontramos os valores: $a = 2, b = -2$ e $c = 1$.

O polinômio d_n , de segunda ordem, é:

$$\begin{aligned} d_n &= 2n^2 - 2n + 1 \\ &= 2n(n - 1) + 1. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Uma outra seqüência numérica (e_n) que representa o número de tetraedro regulares com arestas de comprimento l , que formam a base das pirâmides regulares com arestas de comprimento: $l, 2l, 3l, 4l, 5l, \dots$, encontramos:

$$\begin{aligned} e_n &: 0 \longrightarrow 4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 24 \longrightarrow 40 \longrightarrow \dots \\ \Delta e_n &: 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 16 \longrightarrow \dots \\ \Delta^2 e_n &: 4 \longrightarrow 4 \longrightarrow 4 \longrightarrow \dots \end{aligned} \tag{5.67}$$

Pela Definição 5.2.2, a seqüência (e_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois as segundas diferenças (Δd_n) forma uma progressão aritmética não estacionaria. Logo, a forma polinomial é de segundo grau, dado por:

$$e_n = an^2 + bn + c, \quad \text{com } a \neq 0. \quad (5.68)$$

Logo, para seqüência numérica (e_n) , temos:

$$e_1 = 0; \quad e_2 = 4 \quad \text{e} \quad e_3 = 12. \quad (5.69)$$

Substituindo esses os valores no polinômio e_n , formamos um sistema de equações S_4 :

$$S_4 = \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 12 \end{cases} . \quad (5.70)$$

Escalonando o sistema S_4 , obtemos:

$$S_4 = \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2b - 3c = 4 \\ c = 0 \end{cases} \quad (5.71)$$

encontramos os valores: $a = 2$, $b = -2$ e $c = 0$.

Então, o polinômio e_n , de segunda ordem, é:

$$\begin{aligned} e_n &= 2n^2 - 2n \\ &= 2n(n - 1). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Para seqüência numérica (f_n) que representa o número de poliedros, o número total de pirâmides regulares e tetraedros regulares, que formam as bases das pirâmides regulares com arestas medindo: $l, 2l, 3l, 4l, 5l, \dots$. O polinômio da seqüência (f_n) é determinada pela soma dos polinômios de segunda ordem (d_n) e (e_n) , obtemos:

$$\begin{aligned} f_n &= d_n + e_n \\ &= [2n(n - 1) + 1] + [2n(n - 1)] \\ &= 2n^2 - 2n + 1 + 2n^2 - 2n \\ &= 4n^2 - 4n + 1 \\ &= (2n - 1)^2. \end{aligned} \quad (5.73)$$

A Tabela 2 representa os dados das bases das pirâmides regulares construídas a partir dos poliedros: pirâmides regulares com base quadrada e tetraedro regulares, ambos com arestas de comprimento l . Temos as seqüências numéricas (d_n) , (e_n) e (f_n) das

pirâmides com seus termos genéricos ou polinomiais. Como as sequências (d_n) , (e_n) e (f_n) são progressões aritméticas de ordem 2. Logo, essas progressões aritmética resultam em polinômios de grau 2 em n .

Vejamos a Tabela 2 com os dados das bases das pirâmides regulares:

Tabela 2 – Bases das pirâmides regulares

Pirâmide	\mathbb{N}	Aresta	Pirâmides Regulares	Tetraedro Regulares	Total de Pirâmides
1^a	1	l	1	0	1
2^a	2	$2l$	5	4	9
3^a	3	$3l$	13	12	25
4^a	4	$4l$	25	24	49
5^a	5	$5l$	41	40	81
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n^a	n	nl	$2n(n-1)+1$	$2n(n-1)$	$(2n-1)^2$

Fonte: Autor 2021.

5.3.1 As expressões do somatório dos termos das sequências (d_n) , (e_n) e (f_n)

As expressões dos somatórios dos termos das sequências numéricas (d_n) , (e_n) e (f_n) , de ordem 2, serão polinômios de ordem 3. Utilizaremos a *Princípio da Indução Matemática (PIM)* para demonstrar a veracidade das expressões de cada somatório.

A expressão ou fórmula do somatório dos termos de $d_n = 2n(n-1)+1$, é determinada pelo somatório com a notação $\sum_{i=1}^n d_i$, com auxílio das suas propriedades, temos:

$$\begin{aligned}
 1 + 5 + 13 + 25 + \dots + 2n(n-1) + 1 &= \sum_{i=1}^n [2i(i-1) + 1] \\
 &= \sum_{i=1}^n (2i^2 - 2i + 1) \tag{5.74} \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1
 \end{aligned}$$

substituindo os somatórios, obtemos

$$\begin{aligned}
 1 + 5 + 13 + 25 + \dots + 2n(n-1) + 1 &= 2 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] - 2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] + n \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{3n(n+1)}{3} + \frac{3n}{3} \\
 &= \frac{n(2n^2 + n + 2n + 1 - 3n - 3 + 3)}{3} \\
 &= \frac{n(2n^2 + 1)}{3}. \tag{5.75}
 \end{aligned}$$

Aplicando o *PIM*, vamos provar que a fórmula do somatório $P'(n)$ é verdadeira. Tendo que:

$$P'(n) = 1 + 5 + 13 + 25 + \cdots + 2n(n-1) + 1 = \frac{n(2n^2 + 1)}{3}. \quad (5.76)$$

Pela prova de indução, temos para:

$$n = 1 \therefore P'(n) = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1^2 + 1)}{3} = 1 \quad (5.77)$$

então para $n = 1$ é verdadeiro.

Por hipótese, suponha que:

$$P'(n) = \frac{n(2n^2 + 1)}{3}, \quad (5.78)$$

seja verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos que é verdadeiro para $P'(n+1)$, vamos somar em ambos os lados de $P'(n)$ a expressão

$$2n(n+1) + 1 \quad (5.79)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} P'(n+1) &= 1 + 5 + 13 + 25 + \cdots + 2n(n-1) + 1 + 2n(n+1) + 1 \\ &= \frac{n(2n^2 + 1)}{3} + 2n(n+1) + 1 \\ &= \frac{n(2n^2 + 1)}{3} + \frac{6n(n+1)}{3} + \frac{3}{3} \\ &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 7n + 3}{3} \\ &= \frac{2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n + 1}{3} \\ &= \frac{2(n+1)^3 + (n+1)}{3} \\ &= \frac{(n+1)[2(n+1)^2 + 1]}{3}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Portanto, é verdadeiro para $P'(n+1)$.

A expressão ou fórmula do somatório dos termos de $e_n = 2n(n-1)$, é determinada pelo somatório com a notação $\sum_{i=1}^n e_i$, com auxílio das suas propriedades, temos:

$$\begin{aligned} 0 + 4 + 12 + 24 + \cdots + 2n(n-1) &= \sum_{i=1}^n [2i(i-1)] \\ &= \sum_{i=1}^n (2i^2 - 2i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i \end{aligned} \quad (5.81)$$

substituindo os somatórios, obtemos:

$$\begin{aligned}
 0 + 4 + 12 + 24 + \dots + 2n(n-1) &= 2 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] - 2 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] \\
 &= \frac{n(n+1)[(2n+1) - 3]}{3} \\
 &= \frac{2n(n+1)(n-1)}{3} \\
 &= \frac{2n(n^2-1)}{3}.
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

Vamos provar que a fórmula do somatório $T'(n)$ é verdadeira, utilizando o *PIM*. Sabendo que:

$$T'(n) = 0 + 4 + 12 + 24 + \dots + 2n(n-1) = \frac{2n(n^2-1)}{3}. \tag{5.83}$$

Assim, pela prova de indução, temos para:

$$n = 1 \therefore T'(1) = \frac{2 \cdot 1 \cdot (1^2 - 1)}{3} = 0, \tag{5.84}$$

então para $n = 1$ é verdadeiro.

Por hipótese, suponha que:

$$T'(n) = \frac{2n(n^2-1)}{3}, \tag{5.85}$$

seja verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, mostraremos que é verdadeiro para $T'(n+1)$, vamos somar em ambos os lados de $T'(n)$ a expressão

$$2n(n+1), \tag{5.86}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 T'(n+1) &= 0 + 4 + 12 + 24 + \dots + 2n(n-1) + 2n(n+1) \\
 &= \frac{2n(n^2-1)}{3} + 2n(n+1) \\
 &= \frac{2n^3 - 2n + 6n^2 + 6n}{3} \\
 &= \frac{2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 2n - 2}{3} \\
 &= \frac{2(n+1)^2 - 2(n+1)}{3} \\
 &= \frac{2(n+1)[(n+1)^2 - 1]}{3}.
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

Portanto, é verdadeiro para $T'(n+1)$.

A fórmula do somatório dos termos de $f_n = (2n - 1)^2$, é determinada pelo somatório com a notação $\sum_{i=1}^n f_i$, aplicando suas propriedades, temos:

$$\begin{aligned} 1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + (2n - 1)^2 &= \sum_{i=1}^n [(2i - 1)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (4i^2 - 4i + 1) \\ &= 4 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \end{aligned} \quad (5.88)$$

substituindo os somatórios, obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + (2n - 1)^2 &= 4 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] - 4 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] + n \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 3n}{3} \\ &= \frac{4n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 2n - 6n^2 - 6n + 3n}{3} \\ &= \frac{4n^3 - n}{3} \\ &= \frac{n(4n^2 - 1)}{3}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Utilizando o *PIM*, vamos provar que a fórmula do somatório $V'(n)$ é verdadeira. Sendo que:

$$V'(n) = 1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}. \quad (5.90)$$

Pelo método de indução, temos para:

$$n = 1 \therefore V'(1) = \frac{1 \cdot (4 \cdot 1^2 - 1)}{3} = 1, \quad (5.91)$$

então para $n = 1$ é verdadeiro.

Por hipótese, suponha que:

$$V'(n) = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}, \quad (5.92)$$

seja verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que é verdadeiro para $V'(n+1)$, somando em ambos os lados de $V'(n)$ a expressão

$$[2(n+1) - 1]^2, \quad (5.93)$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
 V'(n) &= 1 + 9 + 25 + 49 + \cdots + (2n - 1)^2 + [2(n + 1) - 1]^2 \\
 &= \frac{n(4n^2 - 1)}{3} + [2(n + 1) - 1]^2 \\
 &= \frac{n(4n^2 - 1) + 3(2n + 1)^2}{3} \\
 &= \frac{4n^3 - n + 12n^2 + 12n + 3}{3} \\
 &= \frac{4n^3 + 4n^2 + 8n^2 + 8n + 3n + 3}{3} \\
 &= \frac{4n^2(n + 1) + 8n(n + 1) + 3(n + 1)}{3} \\
 &= \frac{(n + 1)(4n^2 + 8n + 4 - 1)}{3} \\
 &= \frac{(n + 1)[4(n^2 + 2n + 1) - 1]}{3} \\
 &= \frac{(n + 1)[4(n + 1)^2 - 1]}{3}
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

Portanto, é verdadeiro para $V'(n + 1)$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na apresentação do problema (*Questões 44*) do *Serviço do Teste Educacionais* sobre poliedros convexos, aparentemente, não existia nada de contraditório, eram apenas duas pirâmides regulares que se juntam com as faces laterais congruentes, formando, então, um único poliedro. Quanto à pergunta, o problema quer saber: *Quantas faces tem este poliedro?*. No *capítulo 2*, mostramos mais de uma definição para poliedros que, basicamente, se resume em duas definições distintas usuais na literatura. Concluímos que, a partir das definições, o problema apresentado possui duas respostas distintas.

Na controvérsia dos fatos, a empresa organizadora do *Teste de Aptidão* considerava 7 faces como única resposta, mesmo com a correspondência enviada por Douglas J. Lowen, logo não admitindo seu erro. Para *ETS*, sua resposta, 7 faces, não seria por uma das definições existentes, (Definição 2.1.1), mas, por considerar que novo poliedro possuía faces adjacentes não coplanares. Após a persistência de Douglas J. Lowen, a organização do teste reconheceu seu erro, e a correta acertiva Daniel Lowen, que haveria dois pares de faces adjacentes coplanares, ou seja, essas faces adjacentes poderiam ser consideradas como uma face, evidenciando uma outra resposta com 5 faces. Entretanto, para a organização do teste, não seria a única resposta; considerava, também, que o novo poliedro possuía 7 faces.

De acordo com Fiske (1981), a organização privada, *Teste e Avaliação Educacional (ETS - Educational Testing Service)*, relata que esse problema foi aplicado somente para alunos de nível médio, que não se aplica para aluno de nível superior. Quando pesquisamos a definição para poliedros nos livros didáticos para os alunos do nível médio, a mais usada seria a Definição 2.1.3, que afirma no item (a) que: *dois polígonos (faces) não estão no mesmo plano*. Como os alunos, em sua grande maioria, têm acesso a essa definição, então a resposta considerada seria 5 faces. Dessa forma, a organização do teste se contradiz de seus propósitos em aplicar testes e avaliações para aluno de nível médio.

Nessa história, não queremos apresentar apenas o fato de que grandes organizações aplicadoras de avaliação educacional cometem erros na elaboração, aplicação e correção, em suas avaliações. O destaque nesse caso é a visualização e imaginação do aluno Daniel Lowen ao perceber algo diferente do qual seria óbvio para muitos alunos e professores de vários níveis. Através de um raciocínio lógico-dedutivo, visualizou de forma prática e precisa, planos entre duas faces laterais dos dois poliedros, sem se deixar enganar pela simplicidade do novo poliedro em questão, uma descoberta não extraordinária, mas algo raro para um aluno de nível médio.

Mesmo esse fato tendo ocorrido há mais ou menos 40 anos, nos leva a refletir como

é difícil elaborar um problema e, mais difícil ainda, avaliar um aluno, em Matemática. Mesmo para o professor de Matemática, com toda sua formação profissional, seja ela de qualquer nível, essa reflexão chega em vários momentos na sua vida profissional. Colocando em debate, a construção de um currículo que possa impactar em uma melhora na formação do professor de Matemática, nos questionamos: “Como um profissional, pós-graduado, está formando os futuros profissionais (educadores) em Matemática?”

No Brasil, o ensino secundário nos anos 30, foi adotado a introdução do Cálculo nos currículos escolares que é equivalente ao ensino médio de hoje. Essa era uma das teses do respeitado matemático alemão Felix Klein. No início século 20, ele comandou um movimento de modernização do ensino da matemática nas escolas. Pois, para Klein, Áreas e Volumes eram exemplos notáveis na aplicação do Cálculo. De forma gradativa, permitia conhecer de forma mais simples certos conceitos físicos e geométricos. Assim, de uma forma mais geral, o estudo Cálculo na universidade seria de certo modo mais elementar. Esse movimento de modernização perdurou por mais de uma década no Brasil, pois a partir da reforma de 1943, foi retirado o Cálculo Integral e deixado no último ano do colegial o estudo do Cálculo Diferencial. Por consequência, os estudos de Áreas e Volumes dos sólidos geométricos voltaram ao modelo de Euclides e Arquimedes, com uma linguagem aperfeiçoada por autores modernos (LIMA, 1991).

Embora não tenho a pretensão de qualquer generalização, mas afirmo a hipótese de que é muito importante que os alunos de todos os níveis de estudo, em se tratando desse caso de Geometria Espacial, tenham oportunidade de conhecer, construir e praticar com matérias manipuláveis ou virtuais. Para isso, requer profissionais capacitados em educação matemática para ambientes, físico e/ou virtual, e que os mesmos sejam propícios para novas reflexões, com muita criatividade e imaginação, e que os discentes possam visualizar novas descobertas.

REFERÊNCIAS

- ANTONICK, G. *O problema da pirâmide*. 2013. Disponível em: <<https://wordplay.blogs.nytimes.com/2013/09/23/pyramid-2/>>. Citado na página 38.
- BARBOSA, J. *Geometria euclidiana plana*. 11^a edição, 2012. (Coleção do Professor de Matemática). Citado 3 vezes nas páginas 30, 40 e 41.
- BARROS, A.; ANDRADE, P. *Introdução à Geometria Projetiva*. 1^a edição, 2010. (Textos universitários). Citado na página 16.
- CARVALHO, P. C. P. *Introdução a Geometria Espacial*. 4^a edição, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 21, 28 e 33.
- CORDENONSI, A. Z. Ambientes, objetos e dialogicidade: uma estratégia de ensino superior em heurísticas e metaheurísticas. *Informática na educação: teoria & prática*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, v. 11, n. 1, apr 2008. Citado na página 16.
- DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *GEOMETRIA ANALÍTICA*. 2^a edição, 2017. (Coleção PROFMAT). Citado na página 54.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR: Geometria espacial*. 7^a Edição, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 20, 21, 24, 30 e 34.
- DOMINGUES, H. H. *FUNDAMENTOS DE ARITMÉTICA*. 2^a Edição, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 62, 63 e 68.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. 1^a edição (2^a reimpressão), 2007. Tradução: Higyno H. Domingues. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 20.
- FISKE, E. B. Juventude exala o exame de merito, aumentando 240.000 pontos. *New York Times*, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 81.
- HEFEZ, A. *ARITMÉTICA*. 2^a edição, 2016. (Coleção PROFMAT). Citado na página 69.
- HELLMEISTER, A. C. P. *Geometria em Sala de Aula*. 1^a edição, 2013. Citado na página 39.
- LEITHOLD, L. *O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA*. 3^a Edição, 1994. Citado na página 63.
- LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. 1^a Edição, 1991. Citado na página 82.
- LIMA, E. L. *Coordenadas no Espaço*. 4^a edição, 2007. Citado 5 vezes nas páginas 42, 48, 51, 52 e 55.
- LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2^a edição (8^a impressão), 2015. Citado na página 50.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 2*. 6^a edição, 2006. v. 2. Citado 9 vezes nas páginas 16, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 38 e 64.

MORGADO, P. C. P. C. A. C. *MATEMÁTICA DISCRETA*. 2ª Edição, 2015. Citado na página 67.

NETO, A. C. M. *Geometria*. 1ª edição, 2013. (Coleção PROFMAT). Citado na página 19.

ÁVILA, G. Geometria e imaginação. *Revista do Professor de Matemática (RPM 03)*, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 17, 36 e 40.

WAGNER, E. *Construções Geométricas*. 6ª edição, 2007. Citado na página 23.