



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA- ICEN
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

KARLA BIANCA SOARES XAVIER

ELETROSTÁTICA EM SISTEMAS COLOIDAIIS CARREGADOS

ACARAPE

2019

KARLA BIANCA SOARES XAVIER

ELETROSTÁTICA EM SISTEMAS COLOIDAIIS CARREGADOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza- ICEN da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Xavier, Karla Bianca Soares.

X17e

Eletrostática em Sistemas Coloidais Carregados / Karla Bianca
Soares Xavier. - Redenção, 2019.
63f: il.

Monografia - Curso de Física, Instituto De Ciências Exatas E Da
Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira, Redenção, 2019.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga.

1. Teoria Eletromagnética. 2. Eletrostática. 3. Coloides. I.
Título

CE/UF/BSCA

CDD 537.141

KARLA BIANCA SOARES XAVIER

ELETROSTÁTICA EM SISTEMAS COLOIDAIIS CARREGADOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza- ICEN da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Drª. Sílvia Helena Roberto de Sena
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Levi Rodrigues Leite
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

KARLA BIANCA SOARES XAVIER

ELETROSTÁTICA EM SISTEMAS COLOIDAIIS CARREGADOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza- ICEN da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr^a. Sílvia Helena Roberto de Sena
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. Levi Rodrigues Leite
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

À minha família, por ter acreditado em mim e me incentivado a continuar, apesar de todas as dificuldades. Mãe, seus cuidados e conselhos foi que me deram esperança e coragem para seguir. Todo o seu apoio me mostrou que nunca estive sozinha nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, à Deus pela dádiva da vida e saúde.

Aos meus pais, irmãos e namorado por sempre acreditarem em mim e me apoiarem nos momentos bons e ruins.

Ao Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga por me orientar em meu Trabalho de Conclusão de Curso.

Aos amigos e companheiros de graduação, Ismael Albuquerque, Mateus Alves, Joel Lopes, Neto Oliveira, Roberto Xavier, e Rogelândio Costa pelas discussões e pela força dada durante a caminhada.

Aos meus amigos (as), em geral, pelos bons momentos, pelos conselhos e palavras confortantes nos momentos ruins.

Agradeço a todos os professores que fizeram parte da minha formação acadêmica, em especial aos do curso de Física, Sílvia Helena, Levi Leite, Aristeu Lima, Cinthia Marques, Michel Lopes, Mylene Ribeiro, Elcimar Simão e Elisângela André pela dedicação a docência, pelos conselhos e, sobretudo, pelo conhecimento passado a mim.

“Não se deve ir atrás de objetivos fáceis, é preciso
buscar o que só pode ser alcançado por meio dos
maiores esforços.”

(Albert Einstein)

RESUMO

A teoria eletromagnética é uma das mais belas e consistentes teorias da Física, pois unifica ramos distintos provando que há uma relação entre eles, os quais são eletricidade, magnetismo, galvanismo e ótica. O estudo do eletromagnetismo se dá desde o ensino médio até cursos de graduação e pós-graduação em Física e áreas afins. Neste estudo, a eletrostática no vácuo é o primeiro assunto abordado e a partir dela se desenvolve toda a teoria eletromagnética. Neste trabalho é apresentado o estudo da eletrostática aplicada a sistemas coloidais com o intuito de fornecer um material de apoio que vai além do que é explicitado nos livros-textos. São derivadas expressões para Força, Campo e Potencial Elétrico para distribuições discretas e contínuas de cargas presentes em um meio coloidal. Além disso, é derivada uma equação equivalente à Lei de Gaus que possibilita a resolução de problemas que apresentam simetria. Por fim, são resolvidos alguns problemas clássicos da eletrostática modificados pela presença de coloides.

Palavras-chave: Teoria Eletromagnética. Eletrostática. Coloides.

ABSTRACT

Electromagnetic theory is one of the most beautiful and consistent theories of physics, because it unifies distinct branches proving that there is a relationship between them, which are electricity, magnetism, galvanism and optics. The study of electromagnetism takes place from high school to undergraduate and postgraduate courses in physics and related fields. In this study, vacuum electrostatics is the first subject addressed and from it develops the whole electromagnetic theory. In this work we presents the study of electrostatics applied to colloidal systems in order to provide support material that goes beyond what is explained in textbooks. Force, Field and Electric Potential expressions are derived for discrete and continuous load distributions present in a colloidal medium. Besides that, an equation equivalent to the Law of Gaus is derived that enables the resolution of symmetry problems. Finally, some classical electrostatic problems modified by the presence of colloids are solved

Keywords: Electromagnetic theory. Electrostatic. Colloids.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Classificação dos colóides de acordo com as fases dispersa e de dispersão . . .	14
Figura 2 – Movimento Browniano	15
Figura 3 – Imagem ilustrativa do Efeito Tyndall	15
Figura 4 – Feixes de luz incidindo sobre partículas coloidais	16
Figura 5 – Representação esquemática de uma partícula coloidal envolvida por íons do solvente	17
Figura 6 – Representação esquemática das cargas fontes e da carga de prova	19
Figura 7 – Distâncias das cargas	20
Figura 8 – Representação esquemática das linhas de campo gerado por uma carga pon- tual	23
Figura 9 – Representação esquemática do fluxo de campo elétrico através de uma super- fície	24
Figura 10 – Sistema coloidal formado por partículas esféricas carregadas positivamente e negativamente dispersas em um volume na presença de partículas pontuais com cargas positivas e negativas (figura 10a). A figura 2b mostra uma visão lateral do sistema evidenciando uma de suas faces para melhor visualização . . .	32
Figura 11 – Ponto r distante de uma partícula coloidal de carga positiva	39
Figura 12 – Gráfico do Potencial Elétrico em função da distância	40
Figura 13 – Esfera sólida uniformemente carregada	49
Figura 14 – Esfera sólida uniformemente carregada imersa numa dispersão coloidal . . .	50
Figura 15 – Gráfico do campo elétrico de uma esfera sólida uniformemente carregada . .	51
Figura 16 – Fio infinito carregado	52
Figura 17 – Fio infinito carregado imerso em um coloide	53
Figura 18 – Gráfico do campo elétrico de um fio infinito	54
Figura 19 – Plano infinito carregado	55
Figura 20 – Plano infinito carregado imerso em um coloide	56
Figura 21 – Gráfico do campo elétrico de um plano infinito	58

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	SISTEMAS COLOIDAIIS	13
2.1	Propriedades dos coloides	14
2.2	Estabilidade de sistemas coloidais	16
3	ELETROSTÁTICA NO VÁCUO	19
3.1	Formulação do problema	19
3.2	Lei de Coulomb	19
3.3	Campo elétrico	20
3.3.1	<i>Distribuição contínua de cargas</i>	21
3.4	Divergente e Rotacional de campos eletrostáticos	22
3.4.1	<i>O divergente de $\vec{E}$ e a Lei de Gauss</i>	22
3.4.2	<i>O rotacional de E</i>	26
3.5	Potencial Elétrico	27
3.5.1	<i>Equação de Poisson e equação de Laplace</i>	29
3.5.2	<i>O potencial para uma distribuição de carga localizada</i>	29
3.6	O trabalho feito para movimentar uma carga	30
4	ELETROSTÁTICA EM SISTEMAS COLOIDAIIS CARREGADOS . .	32
4.1	Formulação do problema	32
4.2	O cálculo do potencial eletrostático para sistemas coloidais	33
4.3	Campo Elétrico gerado por uma carga pontual	41
4.4	Força elétrica entre duas cargas pontuais	42
4.5	Campo elétrico gerado por uma distribuição discreta de cargas pontuais	43
4.6	Campo elétrico gerado por uma distribuição contínua	43
4.7	Lei de Gauss na forma integral e diferencial	44
4.8	Equação de Poisson	46
5	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA ELETROSTÁTICA EM SISTE- MAS COLOIDAIIS CARREGADOS ATRAVÉS DA LEI DE GAUSS MODIFICADA	48
5.1	O problema de uma esfera sólida uniformemente carregada imersa em um coloide	48

5.2	O problema do fio infinito imerso em um coloide	52
5.3	O problema do plano infinito imerso em um coloide	55
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	59
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Os fenômenos eletromagnéticos vêm sendo estudados desde a antiguidade quando foram percebidos na natureza pela primeira vez. Por volta de 640-550 a.C., Tales Mileto, um astrônomo e filósofo grego, observou um fenômeno curioso ao friccionar um âmbar com a pele de um animal: o âmbar depois de friccionado passava a atrair objetos próximos como grãos de poeira. Além disso, ele percebeu que havia atração e repulsão entre pedaços de um material encontrado na natureza chamados de magnetita [1].

A história do Eletromagnetismo é longa e fascinante, principalmente, porque trata-se da junção de ramos da Física que antes eram estudados separadamente e que hoje são unificados. Toda a teoria eletromagnética pode ser resumida por quatro equações fundamentais propostas por James Clerk Maxwell no fim do século XIX [2-3].

O eletromagnetismo compõe a grade curricular da disciplina de Física no Ensino Médio e também de determinados cursos de graduação e pós graduação. Geralmente, os conteúdos são abordados seguindo uma ordem metodológica com conteúdos de eletricidade e, por último, magnetismo. No estudo da eletricidade nos é apresentada a eletrostática, a qual possui um problema fundamental: calcular a força elétrica sobre uma carga de prova (que pode estar em movimento ou em repouso) na presença de um conjunto de cargas fontes estacionárias [4].

A partir daí, toda a teoria eletrostática se desenvolve utilizando-se dois fatos experimentais: A lei de Coulomb e o Princípio da Superposição. A primeira diz como calcular a força de interação entre duas cargas elétricas, revelando que o módulo desta é proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, enquanto o segundo diz que a interação entre quaisquer duas cargas não é afetada pela presença de outras [4-9]. É definido também o conceito de campo elétrico e apresentadas algumas ferramentas matemáticas que simplificam a resolução dos problemas como Potencial Elétrico e a Equação de Poisson. Este breve resumo de como se dá o estudo da eletrostática segue a mesma ordem na maioria dos livros de Eletromagnetismo.

As definições e o formalismo da eletrostática são muito bem estruturados e são aplicados tanto no vácuo como na matéria, por exemplo, nos dielétricos. E se, por acaso, esse modelo fosse estendido para um sistema específico, como ficariam as equações da eletrostática caso as cargas elétricas estivessem em outro meio que não fosse o vácuo ou dielétricos?

Com base nessas perguntas, este trabalho apresenta o formalismo da eletrostática

aplicada a sistemas coloidais, a fim de obter as expressões para Força, Campo e Potencial Elétrico para esses sistemas, bem como, discutir as implicações físicas de cada uma delas.

Para um melhor entendimento, este trabalho está dividido em seis capítulos. Esta introdução corresponde ao capítulo 1. No capítulo 2 foi abordado, de modo geral, os sistemas coloidais. Os aspectos considerados foram: as propriedades, a classificação e a estabilidade dos sistemas coloidais. No capítulo 3 são demonstrados e discutidos os resultados referente à formulação da eletrostática no vácuo. No capítulo 4 as equações da eletrostática são adaptadas para um sistema específico, coloides, e discutido o significado físico de cada uma. No capítulo 5 foram adaptados e discutidos alguns problemas típicos da eletrostática no vácuo, agora, na presença de coloides. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões, com foco nos resultados mais relevantes e as perspectivas de trabalhos futuros. Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas.

2 SISTEMAS COLOIDAIS

É comum em nosso dia a dia usarmos produtos industrializados para a nossa alimentação (maionese, iogurte) e higiene pessoal (creme dental, xampu). Além disso, ao longo do dia podemos ainda nos deparar com alguns fenômenos da natureza, tais como neblina e fumaça. O que pouco se sabe é o que os produtos e fenômenos citados têm em comum, do ponto de vista físico. O ponto em comum é que todos são formados pela mistura de substâncias e são heterogêneos. Nesse sistema um componente da mistura aparece em maior quantidade e outro em menor quantidade. Em outras palavras, podemos tratá-los como um sistema no qual solutos (ou partículas de tamanhos variados) estão imersos em um solvente. As partículas constituem a fase dispersa, enquanto o solvente, a fase contínua. Se as partículas dispersas têm tamanhos diferentes, o sistema coloidal é denominado polidisperso. Por outro lado, os sistemas coloidais com partículas de mesmo tamanho são denominados monodispersos [10]. Ao adicionar solutos em solventes podem ser formados três tipos de sistemas: suspensão, solução ou coloide, onde a diferença está no tamanho das partículas dispersas [11]. Nos exemplos citados, o tamanho típico das partículas variam entre 1 e 100 nanômetros e por isso, são caracterizados como coloides [11-12].

Uma solução coloidal (ou sistema coloidal) é denominada como uma mistura heterogênea composta por, pelo menos, duas fases, sendo elas a fase contínua e a fase dispersa. Entretanto, alguns sistemas coloidais podem parecer homogêneos, pois, a diferença só pode ser determinada pelo uso de instrumentos. Um exemplo disso é o sangue, que nos parece líquido apenas, mas ao ser analisado no microscópico constata-se que ele é formado por vários componentes. Uma característica dos coloides é que eles não se sedimentam, isto é, não é possível separar as fases pela diferença de densidade, como é feito em misturas de sólidos em suspensão. Além disso, também não é possível filtrá-los [13].

Quanto à classificação dos sistemas coloidais, esta leva em conta o estado físico das fases dispersa e de dispersão. Para uma melhor compreensão dos tipos de coloides existentes, a tabela abaixo mostra alguns exemplos e classifica-os de acordo com o estado físico dos componentes, ou seja, sólido, líquido ou gasoso [11,13].

Figura 1 – Classificação dos colóides de acordo com as fases dispersa e de dispersão

		Fase Dispersa		
		Gás	Líquido	Sólido
Fase Contínua	Gás	Não existe	Aerossol líquido	Aerossol Sólido
	Líquido	Espuma líquida	Emulsão	Sol
	Sólido	Espuma Sólida	Emulsão sólida	Sol sólido

Fonte: Adaptado da Ref. [12]

2.1 Propriedades dos colóides

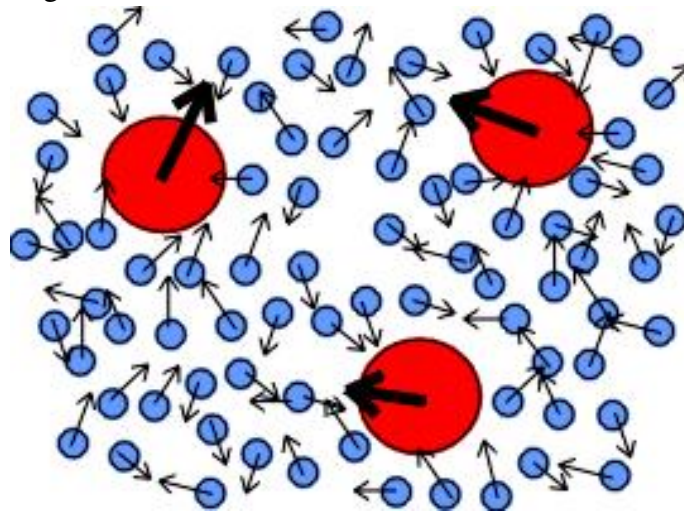
Pela forma que são constituídos, os sistemas coloidais possuem duas importantes propriedades: o Movimento Browniano e Efeito Tyndall.

A olho nu não é possível perceber, mas observando por um microscópio nota-se que as partículas da fase dispersa do coloide não se encontram paradas, mas, em constante movimento aleatório. A explicação para tal fenômeno é que as partículas dispersas colidem incessantemente umas com as partículas da fase contínua e, eventualmente, entre si. Essas colisões fazem com que as partículas dispersa adquiram um movimento perpétuo de ziguezague chamado de Movimento Browniano [14-15]. Na Figura 2, os pontos azuis representam as partículas que constituem a fase dispersante e os círculos vermelho representam as partículas dispersas. As setas pretas indicam a orientação da velocidade das partículas.

O efeito Tyndall possui esse nome devido a observação do fenômeno de espalhamento da luz por John Tyndall, um físico irlandês e é fruto do tamanho mesoscópico das partículas. Inicialmente, observou-se o espalhamento por partículas de poeiras dispersas no ar, mas, posteriormente percebeu que o mesmo fenômeno acontecia quando a luz atravessava outros sistemas [16].

O efeito Tyndall acontece quando um feixe de luz é projetado em um sistema coloidal. O que acontece é que a luz é dispersa no meio pelas partículas coloidais, o que torna possível a visualização da trajetória da luz. Um exemplo disso é quando colocamos dois copos, um

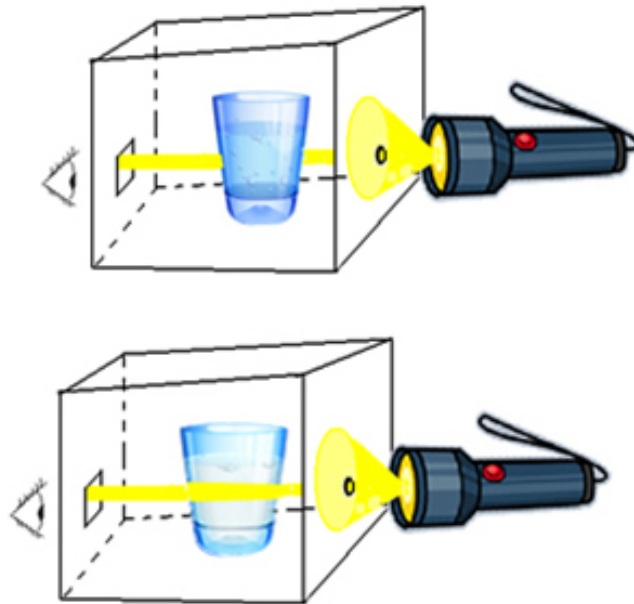
Figura 2 – Movimento Browniano



Fonte: ASTROPT

contendo só água e outro contendo água e creme hidratante, e fazemos passar por eles um feixe de luz, só é possível ver a trajetória da luz no segundo copo (Figura 2) [17]. Isso ocorre porque as partículas coloidais do creme hidratante dispersaram os raios luminosos. Esse fenômeno também é visto na natureza. Por exemplo, vemos as partículas de poeira suspensas no ar quando um raio de sol que atravessa uma fenda incide sobre elas.

Figura 3 – Imagem ilustrativa do Efeito Tyndall

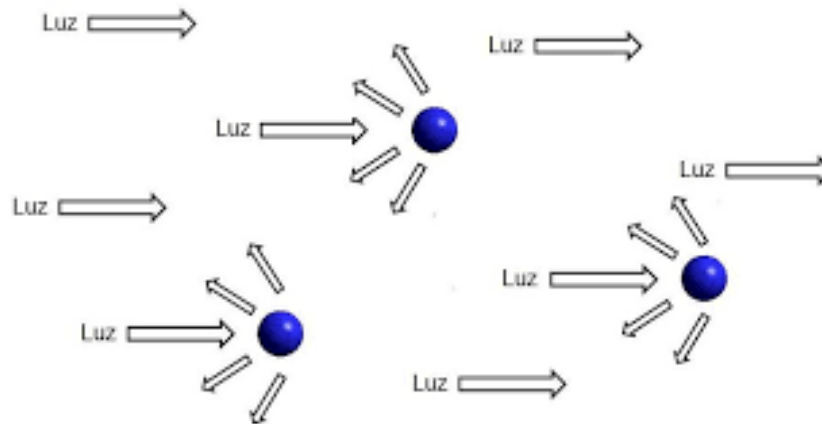


Fonte: BRASIL ESCOLA

As partículas dispersas presentes nos coloides são pequenas demais para serem vistas a olho nu, mas grande o suficiente para ultrapassar o comprimento de onda da luz visível e

espalhar o feixe luminoso (Figura 3). Por isso, tal fenômeno não ocorre em soluções verdadeiras (homogêneas), onde as partículas são muito pequenas (íons ou moléculas).

Figura 4 – Feixes de luz incidindo sobre partículas coloidais



Fonte: BRASIL ESCOLA

2.2 Estabilidade de sistemas coloidais

A observação de sistemas coloidais através de ultramicroscópio revela uma interação entre as fases, ou seja, um constante movimento das partículas dispersas devido a agitação que causa choque entre as moléculas que constituem a fase contínua. Naturalmente, a tendência dessas partículas é se aglomerarem e, conseqüentemente, coagularem [11,18]. Para que isso não ocorra, estas partículas devem ser grandes o bastante para a fase dispersante (solvente) possa ser considerada contínua, mas pequenas o suficiente para apresentarem movimento browniano [10,11,19].

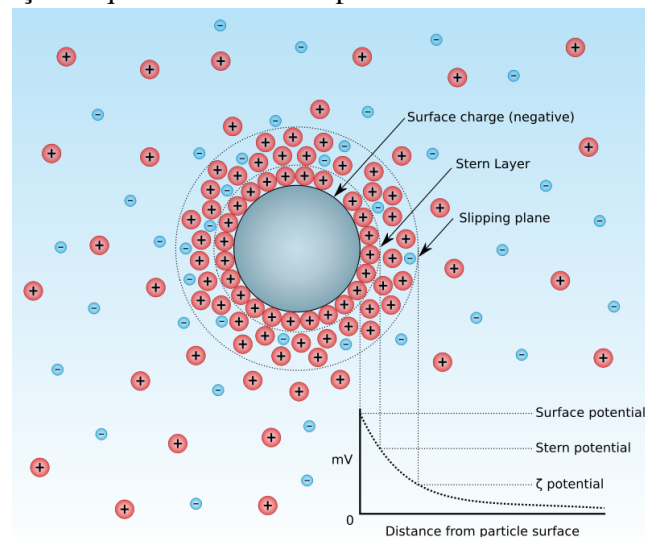
A interação entre partículas coloidais são regidas pelas propriedades físico-químicas de ambas as fases e dependem da quantidade de partículas dispersas no solvente e também da distância de separação entre elas [19].

As forças de interação entre as superfícies das partículas coloidais resultam da natureza eletromagnética das interações entre a própria matéria. Nos coloides aquosos, essas interações incluem interação atrativa e repulsiva de duplas camadas de cargas, interação atrativa de Van der Waals, interação estérica repulsiva de cadeias de polímeros adsorvidos nas partículas, interação atrativa de polímeros, interação de moléculas de solvente e interação hidrofóbica [11].

Ao entrarem em contato com o solvente polar, isto é, aqueles constituídos por moléculas que apresentam regiões eletronicamente densas e por isso, têm facilidade de envolver

outras substâncias polares [20], as partículas dispersas adquirem cargas elétricas em sua superfície por causa de três fatores: dissociação das moléculas da superfície, fricção ou por adsorção de íons por parte do solvente. A carga líquida na superfície da partícula afeta a distribuição de íons na sua vizinhança, aumentando a concentração de contra-íons junto à superfície. Assim, em regiões próximas à superfície das partículas forma-se uma “nuvem iônica”, a qual chamamos também de dupla camada elétrica. Cada uma das camadas recebe um nome: a mais próxima da superfície é chamada de camada compacta (ou camada de Stern) e a mais afastada é chamada de camada difusa (ou camada de Gouy-Chapman), a qual distribui-se em volta da primeira, e é também onde ocorre constante troca de íons com a fase contínua [19] e deste modo são gerados diferentes potenciais desde a superfície das partículas até o interior do solvente [11].

Figura 5 – Representação esquemática de uma partícula coloidal envolvida por íons do solvente



Fonte: WIKIPEDIA

Conforme a força iônica aumenta, o potencial entre o solvente e superfície da partícula diminui porque a dupla camada elétrica formada em volta dela é comprimida na direção à superfície desta devido a concentração de íons do solvente. Deste modo, é razoável afirmar que as interações coulombianas regem as propriedades elétricas dos colóides [11]. Analisando o fenômeno é possível perceber que a dupla camada elétrica é uma das responsáveis pela repulsão entre as partículas coloidais, impedindo assim, a aglomeração destas e possibilitando a estabilização do sistema e se a dupla camada não existe as partículas poderiam se aproximar devido a força de Van der Waals [21].

Os processos descritos e as definições dadas compõe a chamada Teoria DLVO, que passou a ser tratada com maior rigor a partir da década de 40 quando Derjaguin, Landau, Verwey

e Overbeek tentavam descrever a estabilidade dos sistemas coloidais [22-23].

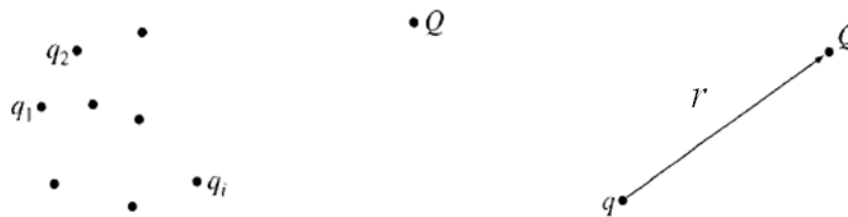
3 ELETROSTÁTICA NO VÁCUO

A eletrostática é a área da Física que estuda as cargas elétricas em repouso. Os fenômenos por ela estudados são decorrentes das forças de atração e repulsão que estas cargas exercem umas sobre as outras. Neste capítulo, faremos um breve resumo do estudo da eletrostática no vácuo, que servirá como base para a reformulação das equações para sistemas coloidais carregados.

3.1 Formulação do problema

O principal problema eletrostática que queremos resolver é: seja $q_1, q_2, q_3 \dots$ cargas fontes, e estas exercem sobre uma carga Q , uma força como representado na Figura 6.

Figura 6 – Representação esquemática das cargas fontes e da carga de prova



Fonte: Adaptado de Griffiths (2011)

O princípio da superposição afirma que a interação entre quaisquer duas cargas não sofre alteração devida à presença de outras. Este princípio simplifica muito a resolução do nosso problema, pois, podemos encontrar a força total em Q fazendo a soma vetorial de todas as forças individuais devido a cada carga, ou seja:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \quad (3.1)$$

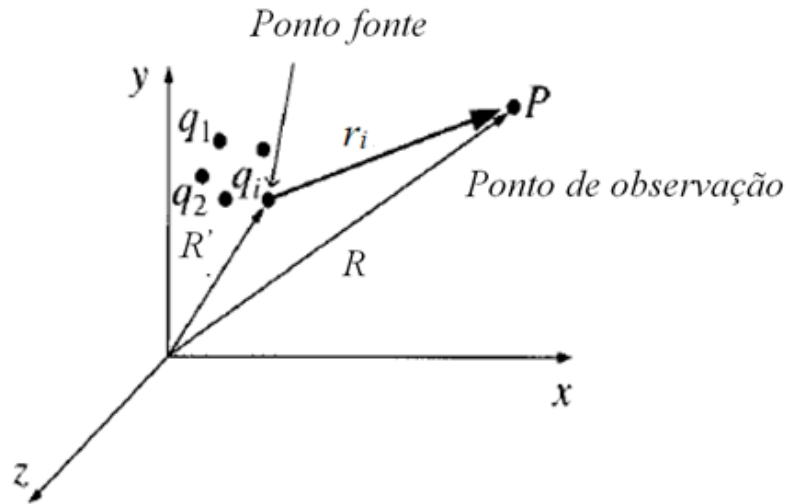
3.2 Lei de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb formulou, através da experimentação, a lei que descreve a interação eletrostática entre duas cargas. Esta lei diz que a força incidente sobre a carga de prova Q devido a uma carga pontual estacionária à uma distância r é dado por:

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (3.2)$$

onde ϵ_0 é a constante de permissividade do vácuo. Ou seja, o módulo da força é proporcional ao produto das cargas e é inversamente proporcional ao quadrado da distância de separação entre elas, de módulo $\hat{r} = \vec{R} - \vec{R}'$ e direção $\hat{r}$, onde $\vec{R}$ é a distância entre a origem do sistema de coordenadas e o ponto de observação e $\vec{R}'$ entre a origem do sistema de coordenadas e as cargas fontes como mostra a Figura 7. e pelo princípio da superposição, a interação entre duas cargas

Figura 7 – Distâncias das cargas



Fonte: Adaptado de Griffiths (2011)

quaisquer não é modificada pela presença de outras cargas [4-9]. A lei de Coulomb e o princípio da superposição são os principais ingredientes da eletrostática.

3.3 Campo elétrico

Agora, estamos aptos para definir uma grandeza chamada campo elétrico da seguinte maneira. Seja $q_1, q_2, \dots, q_n$ cargas pontuais, às distâncias de $Q, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, a força total sobre esta carga de prova é:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2 Q}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right), \quad (3.3)$$

onde

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (3.4)$$

$\vec{E}$ é definido como o campo elétrico gerado pelas cargas fontes e como os vetores de separação $\vec{r}_i$ dependem do ponto de observação, o campo elétrico é função da posição $\vec{R}$.

E por fim,

$$\vec{F} = Q\vec{E}. \quad (3.5)$$

3.3.1 Distribuição contínua de cargas

Agora, ao invés de considerarmos várias cargas pontuais isoladas, dizemos que a carga está distribuída continuamente sobre uma tal região. Dessa forma, o somatório da Eq. (3.5) torna-se uma integral:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{r}}{r^2} dq, \quad (3.6)$$

onde dq é determinada para cada distribuição, seja esta uma linha de cargas, uma carga superficial ou volumétrica. Escreveremos dq e, consequentemente, $\vec{E}$ para cada uma destas distribuições. Para uma carga espalhada ao longo de uma linha, com carga por unidade de comprimento λ e com elemento de carga ao longo da linha dl' , temos:

$$dq = \lambda dl'. \quad (3.7)$$

Desta forma, o campo elétrico para uma distribuição linear será:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{r^2} \hat{r} dl'. \quad (3.8)$$

No caso de uma carga espalhada sobre uma superfície, com carga por unidade de área σ e com elemento de área da' , temos:

$$dq = \sigma da'. \quad (3.9)$$

Desta forma, o campo elétrico para uma distribuição superficial será:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r^2} \hat{r} da'. \quad (3.10)$$

Por fim, se a carga preenche um volume, com com carga por unidade de área ρ e elemento de volume $d\tau'$, temos:

$$dq = \rho d\tau'. \quad (3.11)$$

Desta forma, o campo elétrico para uma distribuição volumétrica será:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r^2} \hat{r} d\tau'. \quad (3.12)$$

Em situações físicas reais, a Eq. (3.12) é a mais usada, pois, no geral, é a que melhor descreve a realidade [4].

3.4 Divergente e Rotacional de campos eletrostáticos

3.4.1 O divergente de $\vec{E}$ e a Lei de Gauss

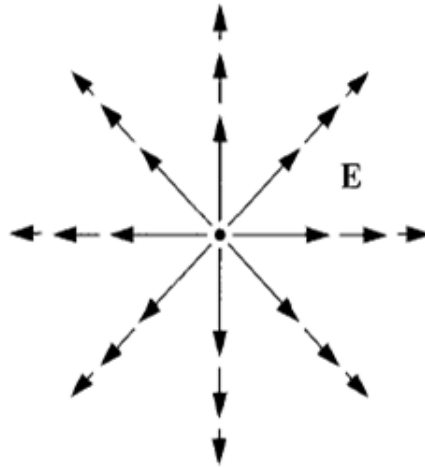
A Eq. (3.12) mostra como calcular o campo elétrico gerado por uma distribuição volumétrica de carga. Além disso, sabemos como calcular a força sobre uma carga Q colocada nesse campo. Porém, em alguns casos, o cálculo do campo torna-se complicado demais para ser resolvido e, portanto, é necessário encontrar maneiras de evitar estas integrais. As técnicas utilizadas para isso tem seu estudo iniciado a partir do cálculo do divergente e do rotacional do campo eletrostático.

Como sempre começamos com o caso mais simples, consideremos uma carga pontual na origem do sistema de coordenadas. Deste modo, o campo gerado é dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{R}. \quad (3.13)$$

Notemos que este campo é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre a carga e o ponto em que queremos calculá-lo. Para tentar entender o comportamento do campo elétrico, Michael Faraday [24] criou o conceito das chamadas linhas de força, as quais seriam linhas imaginárias cujas tangentes é indica a direção do campo elétrico gerado por uma dada distribuição de cargas. Como representado na Figura 8, a magnitude do campo é tal que quanto mais densas são as linhas, mais forte é o campo.

Figura 8 – Representação esquemática das linhas de campo gerado por uma carga pontual



Fonte: Griffiths (2011)

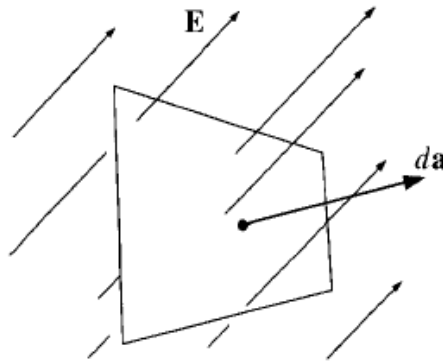
Por essa lógica, então, perto do centro, onde se encontra a carga, o campo é gigantesco e a medida que nos afastamos dela, ele vai enfraquecendo. Nesse caso, o problema nos mostra uma simetria esférica, pois as linhas que representam o campo são radiais. Nesta seção, queremos mostrar que em sistemas onde existem alguma simetria, o campo é facilmente calculado por meio da uma lei chamada de Lei de Gauss, a qual é demonstrada a partir do conceito de fluxo elétrico [25].

O conceito de fluxo pode ser entendido por analogia. Imagine uma janela de área A que, em dado momento, é aberta e uma certa quantidade de vento começa a passar por ela. Conforme o tempo passa, o vento que atravessa a janela fica cada vez mais forte, passando então uma grande quantidade por ela. Podemos então dizer que quanto mais vento passa pela janela em um determinado intervalo de tempo, maior é o fluxo. No exemplo citado, é nítido que o fluxo, da forma que foi definido, depende da quantidade que flui por determinada área e do módulo desta. Esta analogia nos dá uma noção intuitiva do que seria o fluxo elétrico.

Adaptando para o que nos interessa, definiremos o fluxo elétrico de maneira mais clara dividindo a superfície considerada em elementos infinitesimais $d\vec{a}'$ de forma que, o campo seja constante nessa área. A direção de $d\vec{a}'$ é perpendicular à superfície e seu módulo é igual a área como representado na Figura 9. Mantendo a ideia intuitiva, temos que o fluxo infinitesimal é $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{a}'$.

Deste modo, o fluxo total através da área de uma superfície fechada é calculado pela

Figura 9 – Representação esquemática do fluxo de campo elétrico através de uma superfície



Fonte: Griffiths (2011)

seguinte integral de superfície:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a}. \quad (3.14)$$

Agora, utilizando o teorema da divergência, o qual diz que:

$$\int \nabla \cdot \vec{V} d\tau = \oint \vec{V} \cdot d\vec{a}, \quad (3.15)$$

onde $\vec{V}$ é uma função vetorial, podemos escrever

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int \nabla \cdot \vec{E} d\tau, \quad (3.16)$$

onde o campo elétrico já foi calculado anteriormente. Para uma carga pontual o campo é dado pela Eq. (3.13) e para uma distribuição discreta de cargas pontuais pela Eq. (3.4). A partir daqui, podemos calcular a integral do lado direito da Eq. (3.16) através da aplicação do gradiente direto na Eq. (3.12). Estendemos a integração para todo o espaço e observando que a dependência em r está contida em $r = R - R'$, temos

$$\nabla_{\vec{R}} \cdot \vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla_{\vec{R}} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \rho(\vec{R}') \right) d\tau'. \quad (3.17)$$

Como $\vec{R}'$ não depende de $\vec{R}$, então

$$\nabla_{\vec{R}} \cdot \vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla_{\vec{R}} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \rho(\vec{R}') d\tau'. \quad (3.18)$$

Precisamos saber quem é esse divergente, então escrevendo em coordenadas esféricas, temos:

$$\nabla_{\vec{R}} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r^2}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 1}{dr^2} = 0, \quad (3.19)$$

onde $r \neq 0$ Agora, utilizando novamente o teorema da divergência. Pela Eq. (3.15), se $\vec{V}$ não contém a origem ($r = 0$) a equação anterior é igual a zero. Por outro lado, se $\vec{V}$ não contém a origem, então a superfície será uma esfera de raio R centrada em ($r = 0$) e

$$\int \nabla \cdot \vec{V} d\tau = \int \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{R} = 4\pi. \quad (3.20)$$

Logo:

$$\int \nabla \cdot \vec{V} d\tau = 4\pi. \quad (3.21)$$

Voltando para a Eq. (3.18), temos então

$$\nabla_{\vec{R}} \cdot \vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int 4\pi \delta^3(\vec{r}) \rho(\vec{R}') d\tau', \quad (3.22)$$

Assim, como $\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}'$, então $\delta(\vec{r}) = \delta^3(\vec{R} - \vec{R}')$ de modo que ficamos com

$$\nabla_{\vec{R}} \cdot \vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int 4\pi \delta^3(\vec{R} - \vec{R}') \rho(\vec{R}') d\tau', \quad (3.23)$$

Pela propriedade da função delta que diz que:

$$\int f(x) \delta(x - a) dx = f(a), \quad (3.24)$$

E, finalmente obtemos

$$\nabla_{\vec{R}} \cdot \vec{E}(\vec{R}) = \frac{\rho(\vec{R}')}{\epsilon_0}. \quad (3.25)$$

que é a lei de Gauss na forma diferencial. Se quisermos obter a forma integral basta utilizar o teorema do divergente. Pela Eq. (3.16),

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\vec{R}') d\tau', \quad (3.26)$$

onde $\rho(\vec{R}')$ é a densidade de cargas envolvida pela superfície. Logo sua integral nos dá a carga envolvida (Q_{env}), isto é:

$$Q_{env} = \int \rho(\vec{R}') d\tau'. \quad (3.27)$$

Deste modo, obtemos a Lei de Gauss na forma integral:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{env}}{\epsilon_0}. \quad (3.28)$$

A lei de Gauss é muito importante, pois simplifica a resolução de integrais, de modo que muitas vezes é possível calcular o campo elétrico sem dificuldades quando há alguma simetria no problema.

3.4.2 O rotacional de E

Da mesma forma que no cálculo do divergente do campo, aqui consideraremos o caso mais simples possível, ou seja, uma carga pontual na origem:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{R}. \quad (3.29)$$

Vamos calcular a integral de linha desse campo a partir de um ponto a até b

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (3.30)$$

Em coordenadas esféricas $d\vec{l} = dR\hat{R} + R d\theta\hat{\theta} + R \sin\theta d\phi\hat{\phi}$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} dR. \quad (3.31)$$

Consequentemente,

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{R^2} dR = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \Big|_{R_a}^{R_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_a} - \frac{q}{R_b} \right), \quad (3.32)$$

onde R_a é a distância da origem até o ponto a e R_b é a distância da origem até o ponto b . A integral de caminho fechado é evidentemente zero, pois, nesse caso $R_a = R_b$. Logo:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (3.33)$$

Aplicando o teorema de Stokes, temos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = 0 \quad (3.34)$$

Se a integral é sempre nula para qualquer superfície, então:

$$\nabla \times \vec{E} = 0. \quad (3.35)$$

Para chegar neste resultado, consideramos apenas o caso em que o campo gerado é devido a uma única carga pontual localizada na origem, mas na verdade, estes resultados continuam válidos independente da localização da carga [4]. Além disso, se tivermos mais de uma carga podemos usar o princípio da superposição para encontrar o campo total, que será a soma vetorial dos campos individuais:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots \quad (3.36)$$

Consequentemente,

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) = \nabla \times \vec{E}_1 + \nabla \times \vec{E}_2 + \nabla \times \vec{E}_3 + \dots = 0. \quad (3.37)$$

3.5 Potencial Elétrico

Até aqui, podemos dizer que já foi definido o problema da eletrostática. Vimos que força de interação entre duas cargas pontuais é dada pela Lei de Coulomb e nos permite definir Campo Elétrico. Este campo pode ser gerado um carga pontual, por um conjunto de cargas pontuais ou por distribuições contínuas de cargas.

Entretanto, em alguns casos, o cálculo do campo elétrico é muito complicado, o que nos faz buscar formas mais simples de resolvê-los. Nesse sentido, podemos utilizar uma propriedade especial dos campos elétricos para simplificar a resolução do problema.

Uma propriedade do campo elétrico é que este é uma função vetorial cujo rotacional é sempre zero. Existe um teorema que diz que se o rotacional de um campo vetorial é zero, então este campo pode ser escrito como o gradiente de um escalar [4]. Portanto, os passos seguintes consiste na utilização desse argumento matemático no contexto da eletrostática.

Pelo teorema de Stokes:

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (3.38)$$

Como a integral de linha é independente do caminho escolhido, então, podemos definir uma função escalar

$$V(R) = - \int_O^R \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (3.39)$$

A função que definimos chama-se potencial elétrico e O é algum ponto de referência padrão escolhido previamente, então, V depende apenas do ponto R . A diferença entre dois pontos a e b .

$$V(a) - V(b) = - \int_O^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_O^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.40)$$

Pelo teorema fundamental do gradiente:

$$V(a) - V(b) = \int_a^b (\nabla V) \cdot d\vec{l} \quad (3.41)$$

$$\int_a^b (\nabla V) \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (3.42)$$

Como isso é verdade para quaisquer pontos a e b , os integrando devem ser iguais:

$$\vec{E} = -(\nabla V). \quad (3.43)$$

Ou seja, a Eq. (3.43) nos fornece uma relação entre o campo elétrico e o potencial eletrostático, facilitando a resolução do problema, isto é, o cálculo do campo (que é uma grandeza vetorial) através da substituição pelo gradiente de um potencial escalar.

3.5.1 Equação de Poisson e equação de Laplace

O resultado ao qual chegamos na seção anterior mostra que é possível escrever o campo elétrico como o gradiente de um potencial, o que sugere que podemos também reescrever as equações fundamentais para $\vec{E}$ em termos de V . Segue dos resultados anteriores que $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ e $\nabla \times \vec{E} = 0$. Então, em termos de V , temos;

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V. \quad (3.44)$$

De modo que obtemos a seguinte expressão:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.45)$$

A Eq. (3.45) é conhecida como equação de Poisson. Em regiões onde não há carga ($\rho = 0$), a equação de Poisson é reduzida à equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (3.46)$$

Isto é o que acontece com a lei de Gauss. Quanto ao rotacional, temos:

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (-\nabla V) = 0. \quad (3.47)$$

Na verdade, este resultado não é uma condição para o potencial, pois o rotacional de um gradiente é sempre nulo.

3.5.2 O potencial para uma distribuição de carga localizada

Escolhendo o infinito como ponto de referência, o potencial de uma carga pontual localizada na origem é:

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{R'^2} dR' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad (3.48)$$

onde r é a distancia entre o ponto de observação e a carga.

Pelo princípio da superposição, para um conjunto de cargas, temos:

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (3.49)$$

Logo, para uma distribuição contínua de cargas, o somatório torna-se uma integral:

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r} dq. \quad (3.50)$$

Particularmente, para uma distribuição volumétrica de cargas, o potencial será dado por:

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(R')}{r} dq. \quad (3.51)$$

Esta equação é a que facilitará o cálculo do campo elétrico. Como V é um escalar é muito mais fácil trabalhar com ele que com $\vec{E}$, que é um vetor. A equação nos diz que, se conhecermos a densidade volumétrica de cargas, podemos obter o potencial elétrico calculando a integral e, conhecendo V chegamos ao resultado de $\vec{E}$ pela Eq. (3.43).

3.6 O trabalho feito para movimentar uma carga

A situação imaginada nesta seção é a seguinte: suponhamos que existe determinada configuração de cargas fontes estacionárias e também uma carga de prova Q . A pergunta que queremos responder é: qual é o trabalho necessário para movimentar a carga Q de um ponto a até um ponto b ? Ao longo de todo o percurso, a força exercida sobre Q é $\vec{F} = Q\vec{E}$ e, portanto, a força mínima que precisamos exercer em oposição a esta para movimentar a carga é a mesma, porém com sinal contrário. Portanto, o trabalho será:

$$W = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q[V(b) - V(a)] \quad (3.52)$$

É notável que o resultado obtido não depende do trajeto escolhido, apenas do ponto inicial e final, por isso, a força elétrica é uma força conservativa. Por fim, obtemos:

$$\frac{W}{Q} = [V(b) - V(a)], \quad (3.53)$$

que nos diz que a diferença de potencial entre os pontos equivale ao trabalho por unidade carga realizado para movimentar a carga de um ponto a até um ponto b . Então, para trazer Q de um ponto distante (escolhemos nosso ponto de referência no infinito) e colocá-la no ponto R , deve-se realizar um trabalho W , tal que

$$W = Q[V(R) - V(\infty)]. \quad (3.54)$$

E, finalmente,

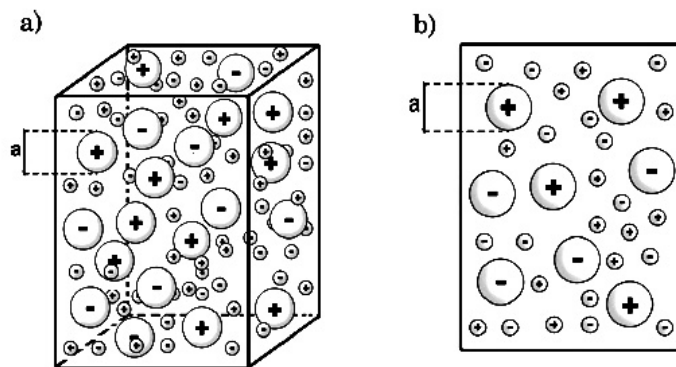
$$W = QV(R). \quad (3.55)$$

4 ELETROSTÁTICA EM SISTEMAS COLOIDAIS CARREGADOS

4.1 Formulação do problema

Como apresentado no capítulo 2, os sistemas coloidais são classificados segundo o estado físico da fase contínua e da fase dispersa. Neste trabalho, o sistema coloidal estudado é do tipo Sol, no qual a fase contínua (solvente) é líquida e a fase dispersa (soluto) é sólida. Em coloides deste tipo, as partículas coloidais estão bem separadas, porém, o sistema apresenta aspecto líquido. Na figura abaixo está a representação esquemática do sistema em questão.

Figura 10 – Sistema coloidal formado por partículas esféricas carregadas positivamente e negativamente dispersas em um volume na presença de partículas pontuais com cargas positivas e negativas (figura 10a). A figura 2b mostra uma visão lateral do sistema evidenciando uma de suas faces para melhor visualização



Fonte: Revista Brasileira de Ensino de Física, 40, e5408 (2018)

A Figura 10a mostra um sistema coloidal constituído de partículas esféricas de diâmetro a com carga positiva ou negativa no centro, as quais estão dispersas em um meio de permissividade ϵ na presença de íons de carga positiva ou negativa. A Figura 10b mostra uma visão lateral do sistema evidenciando uma de suas faces para melhor visualização. Além disso, no sistema considerado o número de partículas com carga positiva é igual ao de partículas com cargas negativas e, portanto, é eletricamente neutro.

No modelo apresentado, consideramos uma partícula coloidal i de carga positiva que se encontra na origem do sistema de coordenadas ($r = 0$). Como no capítulo anterior, deduziremos equações da eletrostática, desta vez, aplicada a sistemas coloidais carregados. No estudo da eletrostática no vácuo, vimos que existem maneiras alternativas simples de resolver o problema fundamental da eletrostática. O cálculo do campo elétrico gerado por uma carga Q pode ser facilmente efetuado se calcularmos primeiro o potencial elétrico.

Deste modo, nosso objetivo é calcular o potencial elétrico V gerado por uma partícula a uma distância r , na presença dos contra-íons co-íons dentro do volume v . A equação de Poisson que é uma equação de derivadas parciais com ampla utilidade na eletrostática, pois estabelece uma relação entre o potencial elétrico e a distribuição de cargas que o gera, nos permitirá encontrar este potencial.

4.2 O cálculo do potencial eletrostático para sistemas coloidais

Inicialmente, consideramos duas regiões: a primeira é a região onde $r > a$ (onde a é o diâmetro da partícula que estamos estudando) e a segunda região é aquela em que $0 \leq r < a$. Na região I ($r > a$):

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_q(r)}{\epsilon}. \quad (4.1)$$

onde ϵ é a permissividade do meio e $\rho_q(r)$ é a densidade volumétrica de cargas do meio.

Na região II ($0 \leq r < a$, onde $\rho_q = 0$), a equação de Poisson reduz-se à equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (4.2)$$

Um ponto importante a ser ressaltado é que ao tentar descrever a eletrostática em um sistema coloidal, estamos lidando com um número imenso de partículas que estão em movimento constante e colidem umas com as outras. O movimento de cada uma dessas partículas obedece as leis da mecânica, todavia seria impossível descrever o comportamento do sistema aplicando às leis do movimento para cada partícula e resolver as equações associadas. Como já foi dito no início, a distribuição dos íons no coloide varia no espaço. A partir dessas considerações físicas, vemos que trata-se de um sistema termodinâmico e é preciso recorrer a uma distribuição estatística.

Macroscopicamente, podemos descrever o modo com que uma dada energia distribui-se ao longo de um número grande de partículas em um dado sistema clássico em equilíbrio térmico com volume e número de partículas fixos. A lei que rege o comportamento clássico da distribuição de partículas é chamada de lei de distribuição de Boltzman [26-27] e é dada por:

$$\rho(r) = \rho e^{-W/k_B T}, \quad (4.3)$$

onde $\rho(r)$ é a densidade de partículas do sistema no ponto r , ρ é a densidade total de partículas com carga positiva e com carga negativa e W é o trabalho necessário para movimentar uma carga. Para esse modelo, a densidade de carga pode ser escrita como [12, 25]:

$$\rho_q(r) = q\rho_+e^{-\beta W_{++}(r)} - q\rho_-e^{-\beta W_{+-}(r)}, \quad (4.4)$$

onde $\beta = \frac{1}{\kappa_B T}$ (κ_B é a constante de Boltzman e T é a temperatura do sistema), $W_{ij}(r) = q_j V(r)$ é o trabalho necessário para trazer os íons do infinito e posicioná-los à uma distância r de uma partícula coloidal i , q_j é a carga do íon j e V é o potencial eletrostático a uma distância r devido à partícula coloidal i na origem. ρ_+ e ρ_- são a densidade de partículas com carga positiva e negativa, respectivamente (número de partículas por unidade de volume).

Assim, temos:

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon} [(q\rho_+e^{-\beta W_{++}(r)} - q\rho_-e^{-\beta W_{+-}(r)})]. \quad (4.5)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon} [(q\rho_+e^{-\beta qV(r)} - q\rho_-e^{\beta qV(r)})]. \quad (4.6)$$

Como o sistema é eletricamente neutro $\rho_+ = \rho_- = \frac{\rho}{2}$. Então, temos que

$$\nabla^2 V = \frac{\rho q}{\epsilon} \left[\frac{e^{\beta qV(r)} - e^{-\beta qV(r)}}{2} \right]. \quad (4.7)$$

Esta equação pode ser escrita também na forma:

$$\nabla^2 V = \frac{\rho q}{\epsilon} \sinh(\beta qV). \quad (4.8)$$

A partir daqui, supomos que a energia térmica é muito maior que a energia potencial elétrica de interação entre as partículas. Esta imposição nos permite linearizar a Eq. (4.8) o que equivale a escrever $\beta qV \ll 1$,

$$\beta qV \ll 1 \Rightarrow \sinh(\beta qV) \sim \beta qV$$

Então, temos

$$\nabla^2 V = \frac{\rho q}{\varepsilon} \frac{1}{\kappa_{BT}} qV = \frac{\rho q^2 V}{\kappa_{BT} \varepsilon} \quad (4.9)$$

Definindo um parâmetro κ , cujo significado físico será discutido posteriormente, tal que:

$$\kappa^2 = \frac{\rho q^2}{\kappa_B T \varepsilon}. \quad (4.10)$$

Observe que existem duas variáveis disputando para fazer κ aumentar ou diminuir. Por um lado, se a densidade de ρ de íons for muito grande κ tende a aumentar e se a temperatura do sistema for alta κ tende a diminuir. Este parâmetro é conhecido e seu inverso é chamado de comprimento de Debye, o qual é a espessura da dupla camada de íons que envolve a partícula. Fisicamente, o resultado obtido faz sentido, pois se κ está relacionado à blindagem da partícula pelos íons, então quanto maior a densidade destes, mais forte será a blindagem e se o sistema estiver com a temperatura muito alta, as partículas do meio estarão muito agitadas, uma vez que a temperatura está ligada a energia de movimento destas, e mais difícil será de os íons envolverem a partícula coloidal.

Pela definição da Eq. (4.10), a Eq. (4.9) reduz-se à equação de Helmholtz, isto é:

$$\nabla^2 V = \kappa^2 V. \quad (4.11)$$

Escrevendo o laplaciano em coordenadas esféricas, podemos explorar a simetria esférica do problema e encontrar apenas a solução para a parte radial:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \kappa^2 V \quad (4.12)$$

ou

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) - \kappa^2 V = 0. \quad (4.13)$$

Essa expressão pode ser calculada de facilmente fazendo uma mudança de variável $u = rV(r)$, de modo que temos:

$$V(r) = \frac{u}{r}; \quad (4.14)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{r \frac{du}{dr} - u}{r^2}; \quad (4.15)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = r \frac{d^2 u}{dr^2}. \quad (4.16)$$

Substituindo as Eq. (4.15) e (4.16) na Eq. (4.12), obtemos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\kappa^2 u}{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} - \kappa^2 u \right) = 0 \quad (4.17)$$

Portanto, só precisamos resolver a seguinte EDO:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \kappa^2 u = 0. \quad (4.18)$$

Queremos soluções do tipo $u = e^{\pm \kappa r}$, então

$$\frac{d^2}{dr^2} e^{\pm \kappa r} - \kappa^2 e^{\pm \kappa r} = 0. \quad (4.19)$$

Como $V(r) = \frac{u}{r}$, então

$$V(r) = \frac{Ae^{\kappa r}}{r} + \frac{Be^{-\kappa r}}{r} \quad (4.20)$$

Por definição, nosso ponto de referência é no infinito, então o potencial é nulo para grandes distâncias. Para $r \rightarrow \infty$, $V(r) = 0$. Então, a Eq. (4.20) fica

$$\frac{Ae^{\kappa r}}{r} + \frac{Be^{-\kappa r}}{r} = 0 \quad (4.21)$$

Como $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{e^\infty} = 0$ e $\lim_{r \rightarrow \infty} e^\infty = \infty$, a condição para que a Eq. (4.21) seja verdadeira é que $A = 0$. Assim, ficamos com

$$V(r) = \frac{Be^{-\kappa r}}{r}. \quad (4.22)$$

Encontramos uma expressão para o potencial na região I, mas ainda nos resta encontrar a constante B , o que será feito posteriormente. Na região II, ou seja, para $0 < r < a$, devemos resolver a equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0. \quad (4.23)$$

Utilizando novamente a parte radial do laplaciano em coordenadas esféricas e a mesma mudança de variável, $u = rV(r)$.

$$\nabla^2 V = 0. \quad (4.24)$$

Utilizando resultados anteriores chegamos a uma nova EDO:

$$\frac{1}{r^2} r \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{\kappa^2 u}{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} \right) = 0. \quad (4.25)$$

Obtendo

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = 0, \quad (4.26)$$

onde vemos claramente que $u = r$ é solução. Logo, temos $u = Cr + D$ e a o potencial fica

$$V(r) = C + \frac{D}{r}. \quad (4.27)$$

No segundo termo da equação é possível perceber a dependência da distância, r , o que sugere que este termo esteja relacionado ao potencial produzido pela partícula coloidal fixa, de carga Q . Logo temos que:

$$D = \frac{Q}{4\pi\epsilon}. \quad (4.28)$$

Agora, para encontrar as constantes C e B , utilizaremos a continuidade do potencial e do campo elétrico na fronteira entre as regiões I e II. Se $r = a$, o potencial em I será igual ao potencial em

II, ou seja,

$$V(a) = \frac{Be^{-\kappa a}}{a} = C + \frac{D}{a} \quad (4.29)$$

Como $\vec{E} = -\nabla V$, pela continuidade do campo em $r = a$, temos

$$\vec{E} = \frac{dV}{da} \Rightarrow \frac{d}{da} \left(C + \frac{D}{a} \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{Be^{-\kappa a}}{a} \right)$$

$$\frac{D}{a^2} = B \left(\frac{\kappa e^{-\kappa a}}{a} + \frac{e^{-\kappa a}}{a^2} \right)$$

$$D = B \left(\kappa a e^{-\kappa a} + e^{-\kappa a} \right)$$

.

Assim, obtemos

$$D = Be^{-\kappa a} (1 + \kappa a). \quad (4.30)$$

Como $D = \frac{Q}{4\pi\epsilon}$, então

$$B = \frac{Qe^{\kappa a}}{4\pi\epsilon(1 + \kappa a)}. \quad (4.31)$$

Pela equação de continuidade do potencial,

$$C = \frac{Be^{-\kappa a}}{a} - \frac{D}{a} \quad (4.32)$$

Substituindo os valores de B e D na Eq. (4.32), temos que

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a(1 + \kappa a)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1 - 1 + \kappa a}{a(1 + \kappa a)} \right)$$

.

E assim, obtemos

$$C = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\kappa}{1 + \kappa a} \right). \quad (4.33)$$

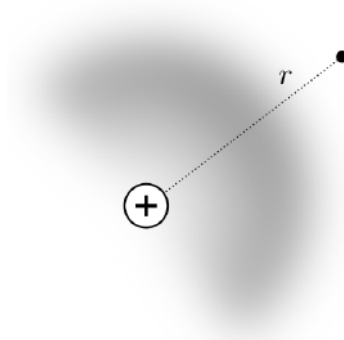
Agora que encontramos o valor de cada constante, temos que o potencial eletrostático é:

Para a região I ($r > a$)

$$V(r) = \frac{Qe^{\kappa a}}{4\pi\epsilon(1 + \kappa a)} \frac{e^{-\kappa r}}{r}. \quad (4.34)$$

O resultado obtido partiu da proposta inicial de encontrar o potencial eletrostático associado a uma partícula coloidal imersa em um solvente contendo íons de carga positiva e negativa em um ponto r distante no solvente como representado na Figura 11.

Figura 11 – Ponto r distante de uma partícula coloidal de carga positiva



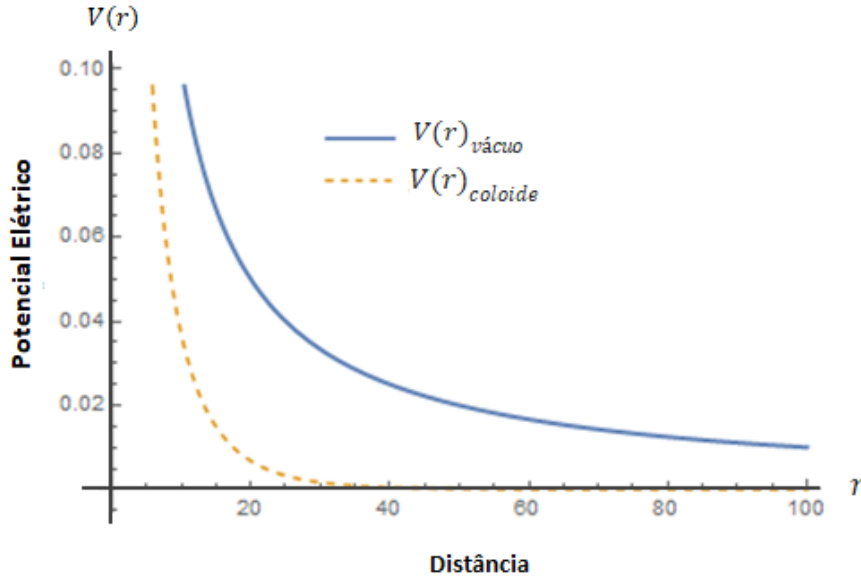
Fonte: Adaptado da referência [27]

Na ausência de outras variáveis (contra- íons e co-ions), o valor do potencial seria simplesmente devido a partícula de carga Q e raio a , como também da permissividade do meio em que se encontra, ϵ . Entretanto, a partícula possui uma dupla camada elétrica (nuvem iônica), o que faz com o potencial percebido em r seja diferente. Isto acontece porque em torno da partícula de carga positiva há uma concentração de íons de carga negativa, do mesmo modo que em torno da partícula de carga negativa há uma concentração de íons de carga positiva.

Deste modo, a concentração de íons em volta da partícula leva a um decaimento exponencial do potencial eletrostático, fazendo com que este seja menor que o potencial sentido sem a nuvem iônica envolvendo a partícula. Assim, podemos afirmar que a atenuação do potencial deve-se à existência da dupla camada elétrica. Na Figura 12, a linha azul representa

o potencial eletrostático que decai com $f(r) = \frac{1}{r}$, enquanto que a linha tracejada representa o potencial que decai com $g(r) = \frac{1}{r}e^{-\kappa r}$ para $0 \leq r \leq 100$ e $\kappa = 0, 1$.

Figura 12 – Gráfico do Potencial Elétrico em função da distância



Fonte: autor

Além disso, o termo de decaimento, $e^{-\kappa r}$, depende do parâmetro κ definido anteriormente, assim, o alcance do potencial também dependerá dele. Sendo $\lambda = \kappa^{-1}$, a distância na qual a interação elétrica continua significativa, é comumente denominado como espessura da camada difusa [22]. Da Eq. (4.10), κ é um parâmetro que depende carga, densidade dos íons e da temperatura do sistema e, por isso, o decaimento do potencial está diretamente relacionado a estes parâmetros. Por exemplo, se houver maior concentração de íons ou eles tiverem maior carga, isso resultará em um maior efeito de blindagem, consequentemente, κ será maior e o decaimento será mais rápido. Por outro lado, quanto maior a temperatura do sistema, mais desordenados estarão os íons e o efeito de blindagem será menor, consequentemente, κ será menor e o decaimento será mais lento. Portanto, o potencial encontrado sugere que dependerá da própria distribuição dos íons no solvente, ou seja, distribuições diferentes geram potenciais diferentes.

Note que o termo $\frac{e^{\kappa a}}{1 + \kappa a}$ desaparece se considerarmos essa partícula como uma carga pontual, de modo que a tende a zero e o potencial torna-se:

$$V(r) = \frac{Qe^{-\kappa r}}{4\pi\epsilon r}, \quad (4.35)$$

ou seja, o potencial decai com $\frac{1}{r}$, que é o potencial eletrostático efetivo gerado por uma partícula carregada no sistema considerado. Se a partícula estiver no vácuo, $\kappa = 0$ e $\varepsilon = \varepsilon_0$, e ficamos com o potencial elétrico devido a uma carga pontual no vácuo.

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}.$$

Para a região II ($0 > r > a$), temos

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r} - \frac{Q\kappa}{4\pi\varepsilon(1 + \kappa a)}. \quad (4.36)$$

A Eq. (4.36) mostra que o potencial eletrostático nessa região é dado por de dois termos. O primeiro sugere um potencial análogo ao potencial gerado por uma única carga pontual de módulo Q , ou seja, com decaimento com $\frac{1}{r}$. No segundo termo, é notável a dependência do parâmetro κ , o qual tem o inverso igual a espessura da dupla camada elétrica, de modo que concluímos que o potencial eletrostático percebido nesta região é gerado tanto pela partícula coloidal como pela nuvem iônica que a envolve.

4.3 Campo Elétrico gerado por uma carga pontual

Agora que encontramos o potencial eletrostático, podemos encontrar também o campo gerado por uma carga pontual nessa formulação da eletrostática. Usando a relação entre o campo elétrico e o potencial encontrado no capítulo anterior

$$\vec{E} = -\nabla V,$$

a partir do modelo considerado, portando, o campo elétrico gerado por uma partícula coloidal pontual é:

$$\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right) \hat{r}, \quad (4.37)$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right) = \frac{r(-\kappa e^{-\kappa r}) - e^{-\kappa r}}{r^2} = -\frac{1}{r^2} (\kappa r e^{-\kappa r} + e^{-\kappa r})$$

. o que nos permite encontrar a seguinte expressão para o campo elétrico:

$$\vec{E} = \frac{Qe^{-\kappa r}(1 + \kappa r)}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}. \quad (4.38)$$

A Eq. (4.38) mostra que o campo não só cai com $\frac{1}{r^2}$ como no caso de uma carga pontual no vácuo, mas é reduzido pelo termo de decaimento devido a blindagem da partícula. Se a partícula estivesse no vácuo, onde $\kappa = 0$ e $\epsilon = \epsilon_0$, o campo elétrico se reduziria a:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r},$$

que é uma equação conhecida da eletrostática no vácuo. Note que se definirmos $Qe^{-\kappa r}(1 + \kappa r)$ como uma carga efetiva (Q_{ef}), a Eq. (4.38) fica semelhante a do campo de uma carga pontual no vácuo. Isso acontece também nas expressões para força elétrica e lei de Gauss que serão demonstradas a seguir.

4.4 Força elétrica entre duas cargas pontuais

Conhecendo a expressão do campo elétrico é possível encontrar a força incidente em uma carga de prova q devido a uma única carga pontual Q que está em repouso à uma distância r , onde

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (4.39)$$

De modo que obtemos:

$$\vec{F} = \frac{qQe^{-\kappa r}(1 + \kappa r)}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}. \quad (4.40)$$

Sabemos que a força elétrica origina-se da interação entre cargas elétricas e tal força pode ser tanto de atração quanto de repulsão. Experimentalmente, verifica-se que a força é proporcional ao quadrado da distância entre as duas cargas e sua intensidade depende do meio em que estas se encontram. Esta dependência aparece na Lei de Coulomb através da constante dielétrica do meio, K . Como no vácuo o valor dessa constante é $K = 1$ e no ar, este valor é muito próximo de 1, omitimo-a da equação da força elétrica, restando apenas o valor da constante eletrostática, $k_0 = 1/4\pi\epsilon_0$. Em meios diferentes do vácuo, constante dielétrica definida com

base na seguinte relação: $K = \varepsilon/\varepsilon_0$ e é sempre maior que um. Consequentemente, a força de interação entre duas cargas imersas em um determinado meio será diferente da que seria caso elas estivessem no vácuo. No caso como a contante dielétrica tem valor maior, a força elétrica terá valor menor. Note que na equação que encontramos, a força elétrica é dada pela soma de dois termos. Observe que na expressão da força, assim como na do campo, aparece um fator multiplicativo extra que vale $\kappa r e^{-\kappa r}$. Podemos, então, afirmar que no nosso modelo de sistemas coloidais, esta equação substitui efetivamente a lei de Coulomb, tendo esta como caso particular no qual $\kappa = 0$.

Como era de se esperar, a expressão que obtemos para a força de interação entre duas partículas no sistema considerado é menos intensa que a força de interação entre duas cargas pontuais no vácuo. Isto se dá pelo efeito de blindagem da nuvem iônica que envolve a partícula coloidal carregada.

4.5 Campo elétrico gerado por uma distribuição discreta de cargas pontuais

Continuando o estudo da eletrostática aplicada a sistemas coloidais, analisaremos a situação na qual temos N cargas pontuais discretas, $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$, às distâncias $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n$ de um ponto do espaço. Nosso objetivo é calcular o campo gerado por essa distribuição. Como a Eq. (4.38) nos dá a fórmula do campo gerado por uma única carga pontual, então, para N cargas, basta generalizar este resultado admitindo que o princípio da superposição continua válido já que o potencial e o campo foram solucionados a partir da resolução de uma equação diferencial ordinária homogênea e portanto, suas soluções obedecem ao princípio da superposição. Dessa forma, temos que

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i (1 + \kappa r_i) e^{-\kappa r_i}}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (4.41)$$

4.6 Campo elétrico gerado por uma distribuição contínua

Agora, se ao invés de cargas pontuais discretas, tivermos cargas distribuídas continuamente sobre determinada região, então, ao invés de um somatório, teremos uma integral. Deste modo, o campo gerado por uma distribuição contínua de cargas é dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{(1 + \kappa r) e^{-\kappa r}}{r^2} \hat{r} dQ. \quad (4.42)$$

onde r é a distância entre dQ (elemento infinitesimal de cargas) e o ponto onde queremos calcular o campo. Para cada distribuição, dQ terá um certo valor.

Para uma distribuição linear de carga:

$$dQ = \lambda dl$$

Para uma distribuição superficial de carga:

$$dQ = \sigma da$$

E para uma distribuição volumétrica de carga:

$$dQ = \rho d\tau$$

Deste modo, quando a distribuição de cargas for especificada, basta substituir dQ na integral por seu valor correspondente.

4.7 Lei de Gauss na forma integral e diferencial

No capítulo anterior determinamos a lei de Gauss, que relaciona o fluxo de campo elétrico através de qualquer superfície com a carga existente dentro do volume delimitado por esta. Anteriormente, o nosso estudo limitou-se a cargas onde o meio em que estavam inseridas era o vácuo. Agora, queremos saber como fica a lei de Gauss aplicada a um sistema específico, no caso, sistemas coloidais.

O fluxo de campo gerado por uma carga pontual na origem através de uma superfície fechada é:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

onde $\vec{E}$ é dado pela Eq. (4.38). Deste modo, obtemos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \frac{Q(1 + \kappa R) e^{-\kappa R}}{4\pi\epsilon R^2} dS = \frac{Q(1 + \kappa R) e^{-\kappa R}}{4\pi\epsilon R^2} \oint_S dS. \quad (4.43)$$

A integral fechada da equação anterior nos dá a área da esfera, a qual sabemos que é $4\pi R^2$.

Assim:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon} (1 + \kappa R) e^{-\kappa R}. \quad (4.44)$$

Note que esta equação é análoga à Eq. (3.18) que é a Lei de Gaus para a eletrostática no vácuo, exceto pelo termo $(1 + \kappa R)e^{-\kappa R}$. Não é sensato dizer que esta é uma nova Lei de Gauss, mas é notável que equivale a ela quando se trata de problemas com simetria em um meio coloidal. Aqui a carga envolvida não é simplesmente a da partícula, mas, também a dos íons. Mesmo que não esteja explícito nesta equação, a carga dos íons está sendo levada em conta. Isso pode ser verificado na definição de κ , o qual depende não só da carga, mas, também da densidade dos íons. Podemos ainda escrever esta equação de um outra maneira. Para isto, observe que a integral de volume do potencial é dada por

$$\int_v V(r) d\tau, \quad (4.45)$$

onde o elemento de volume em coordenadas esféricas é $d\tau = 4\pi r^2 dr$. De modo que:

$$\int_v V(r) d\tau = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int \frac{e^{-\kappa r}}{r} d\tau = \int \frac{Qe^{-\kappa r}}{4\pi\epsilon r} 4\pi\epsilon r^2 dr = \frac{Q}{\epsilon} \int r e^{-\kappa r} dr.$$

Utilizando integração por partes, obtemos:

$$\int_v V(r) d\tau = \frac{Q}{\epsilon} \left(\frac{1}{\kappa^2} - \frac{e^{-\kappa R}}{\kappa^2} - \frac{Re^{-\kappa R}}{\kappa} \right), \quad (4.46)$$

que nos dá

$$\int_v V(r) d\tau = \frac{Q}{\epsilon\kappa^2} (1 - e^{-\kappa R}(1 + \kappa R)) \quad (4.47)$$

Somando as Eq. (4.44) e (4.47), temos:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \kappa^2 \int_v V(r) d\tau &= \frac{Q}{\epsilon} (1 + \kappa R)e^{-\kappa R} + \frac{Q}{\epsilon\kappa^2} (1 - e^{-\kappa R}(1 + \kappa R)) \\ &= \frac{Q}{\epsilon} + \frac{Q\kappa R e^{-\kappa R}}{\epsilon} + \frac{Q\kappa^2 e^{-\kappa R}}{\epsilon\kappa^2} - \frac{Q\kappa^2 e^{-\kappa R}}{\epsilon\kappa^2} - \frac{Q\kappa R e^{-\kappa R}}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte expressão:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \kappa^2 \int_v V(r) d\tau = \frac{Q}{\epsilon}. \quad (4.48)$$

Agora, se em vez de uma carga na origem, tivermos N cargas distribuídas em torno da origem. Pelo princípio da superposição, o campo será:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad (4.49)$$

e o potencial

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \quad (4.50)$$

Deste modo, temos:

$$\sum_{i=1}^N \int_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} + \kappa^2 \int_v V_i = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{\epsilon} \quad (4.51)$$

Logo, obtivemos uma expressão que nos dá uma forma alternativa da Lei de Gauss aplicada a sistemas coloidais:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \kappa^2 \int_v V d\tau = \frac{Q}{\epsilon} \quad (4.52)$$

onde Q é toda a carga envolvida pelo volume v . Note que o segundo termo no lado esquerdo da igualdade está sendo multiplicado pelo quadrado do parâmetro κ . Isto sugere que está intimamente ligado à espessura da dupla camada elétrica que envolve a partícula. Observe ainda que o fluxo de campo elétrico através de qualquer superfície fechada na presença de coloides é sempre menor do que seria caso o coloide não existisse, o que é consequência da existência da nuvem iônica ao redor da partícula.

4.8 Equação de Poisson

Usando o teorema da divergência:

$$\oint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{U} d\tau, \quad (4.53)$$

onde $\vec{U}$ é um campo vetorial. De modo que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \kappa^2 \int_V V(r) d\tau = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau + \kappa^2 \int_V V(r) d\tau. \quad (4.54)$$

Além disso, sabemos que a carga da partícula envolvida pela superfície é:

$$Q = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho_Q d\tau. \quad (4.55)$$

Então:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau + \kappa^2 \int_V V(r) d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho_Q d\tau. \quad (4.56)$$

E com isso, obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \kappa^2 V(r) = \frac{\rho_Q}{\varepsilon} \quad (4.57)$$

onde $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Deste modo, temos que

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) + \kappa^2 V(r) = \frac{\rho_Q}{\varepsilon}. \quad (4.58)$$

Assim, obtemos uma equação análoga a equação de Poisson para a eletrostática em sistemas coloidais carregados

$$-\nabla^2 V + \kappa^2 V(r) = \frac{\rho_Q}{\varepsilon}. \quad (4.59)$$

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA ELETROSTÁTICA EM SISTEMAS COLOIDAI CARREGADOS ATRAVÉS DA LEI DE GAUSS MODIFICADA

No capítulo 3, vimos que é possível simplificar a resolução de problemas com alguma simetria utilizando a lei de Gauss. A Eq. (3.18) nos dá a sua forma integral, na qual é estabelecida uma relação entre o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada com a carga elétrica que existe dentro do volume limitado por esta superfície. Entretanto, esta equação só é válida se na região envolvida pela superfície gaussiana existe apenas vácuo ou ar. Para outros meios como dielétricos ou coloides, a lei de Gauss possui uma versão modificada que possibilita a análise de situações em que a região não é preenchida por ar ou vácuo.

Neste capítulo, resolveremos alguns problemas clássicos da eletrostática como calcular o campo elétrico à uma distância r de um fio infinitamente longo com densidade linear de cargas λ ou de uma placa não condutora com densidade superficial de cargas σ em um meio coloidal. Neste problemas, assim como nos outros, não podemos utilizar a lei de Gauss usual porque não estamos mais no vácuo, mas a Eq. (4.44) é uma equação análoga a Eq. (3.18) e relaciona o fluxo de campo elétrico através de uma superfície fechada com a carga encerrada pelo volume delimitado pela superfície considerada e com o termo de decaimento que advém do fato de ter que levar em conta a contribuição das partículas do coloide no cálculo do campo elétrico. Portanto, a partir de agora adaptaremos estes problemas que já conhecemos, sendo que, os objetos considerados não estão mais no vácuo, mas imersos em coloides. O objetivo é verificar as implicações físicas da mudança do meio de vácuo para o meio coloidal. Todos os problemas abordados possuem alguma simetria e, por isso, são facilmente resolvidos utilizando a lei de Gauss modificada. O outro modo seria calcular o campo a partir da lei de Coulomb e do princípio da superposição, porém, as integrais poderiam ser complicadas demais.

Diferentes tipos de simetria podem ser percebidas ao resolver alguns problemas da eletrostática. Por isso, os exemplos resolvidos neste capítulo possuem simetria esférica, cilíndrica e planas, respectivamente.

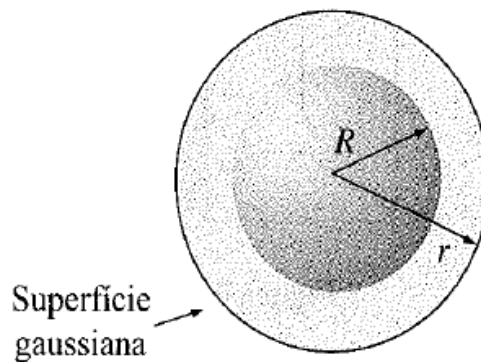
5.1 O problema de uma esfera sólida uniformemente carregada imersa em um coloide

A Figura 13 mostra uma esfera sólida de raio R uniformemente carregada e com carga total q . Queremos encontrar o campo produzido em um ponto que dista r do centro da esfera. Note que, neste caso, há uma simetria esférica e, por isso, podemos envolver a esfera com

uma superfície gaussiana esférica. A lei de Gauss afirma que para qualquer superfície fechada o fluxo de campo elétrico é:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{env}}{\epsilon_0},$$

Figura 13 – Esfera sólida uniformemente carregada



Fonte: Griffiths (2011)

onde $Q_{env} = q$. Podemos extrair $\vec{E}$ de dentro da integral aproveitando a simetria do problema, onde o campo aponta radialmente para fora e tem módulo constante sobre a superfície visto que, nesse caso, deve depender apenas da distância em relação à esfera. Como o elemento de área, $d\vec{S}$, é paralelo ao vetor campo elétrico, então, o produto escalar resulta em $E dS$ e

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS.$$

A integral sobre a superfície nos dá a área da esfera que é $4\pi r^2$. Logo:

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

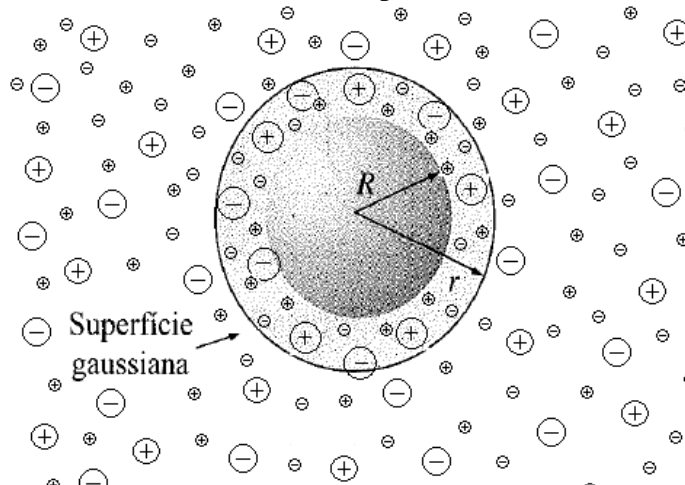
Assim, o módulo do campo elétrico em um ponto externo da esfera é dado por:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

O resultado obtido afirma que o campo no exterior de uma esfera carregada decresce com o inverso do quadrado da distância da mesma forma que o de uma carga pontual. Isto significa dizer que o campo produzido no exterior da esfera é exatamente o mesmo que teríamos se toda a carga estivesse concentrada no centro. Pode-se imaginar que muito longe da esfera o campo elétrico que se sente é como o campo de uma carga pontual.

Neste problema, a esfera encontrava-se no vácuo, mas agora, imagine que esta mesma esfera carregada seja colocada dentro um coloide do tipo que estamos considerando (nanopartículas sólidas imersas em um líquido) com permissividade ϵ , como mostra a Figura 14. Observe que agora a superfície gaussiana envolve não apenas a esfera, mas o coloide em que esta está imersa.

Figura 14 – Esfera sólida uniformemente carregada imersa numa dispersão coloidal



Fonte: Adaptado de Griffiths (2011)

O problema é, basicamente, o mesmo: calcular o campo elétrico em um ponto r no exterior da esfera. No entanto, é necessário levar em conta no cálculo a contribuição de todas as partículas dentro do coloide. A Eq. (4.44) já faz esta consideração quando introduz o termo $(1 + \kappa r) e^{-\kappa r}$ na equação que conhecemos como Lei de Gauss. Deste modo, para qualquer superfície fechada que envolva uma dispersão coloidal, temos que o fluxo de campo elétrico através de uma superfície fechada é dado por:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r},$$

onde r é o ponto onde queremos calcular o campo que, neste caso, é o raio da superfície gaussiana e Q é a carga da esfera e as cargas dos co-íons e contra-íons já são levadas em conta no parâmetro

κ definido anteriormente. No problema modificado, a simetria se mantém e o campo ainda deve apontar na direção radial e, portanto, $\vec{E}$ e $d\vec{S}$ possuem a mesma direção e sentido e, por isso, segue que $\vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS$. Logo:

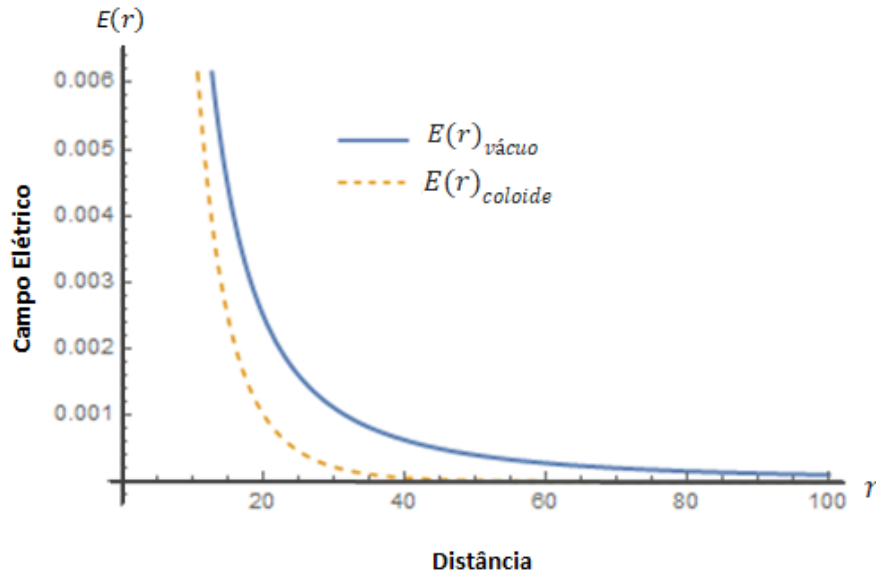
$$E \oint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r} = (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r},$$

deste modo, obtemos o campo elétrico em um ponto externo de uma esfera sólida uniformemente carregada imersa em um coloide

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r}.$$

A Figura 15 mostra o gráfico do módulo do campo elétrico em função da distância. A linha azul representa o gráfico do campo em função da distância de uma esfera carregada no vácuo, o qual decresce com $f(r) = \frac{1}{r^2}$, enquanto que a linha tracejada representa o campo em função da distância de uma esfera carregada imersa em um coloide, o qual decresce com $g(r) = \frac{(1 + \kappa r)e^{-\kappa r}}{r^2}$ para $0 \leq r \leq 100$ e $\kappa = 0, 1$.

Figura 15 – Gráfico do campo elétrico de uma esfera sólida uniformemente carregada



Fonte: autor

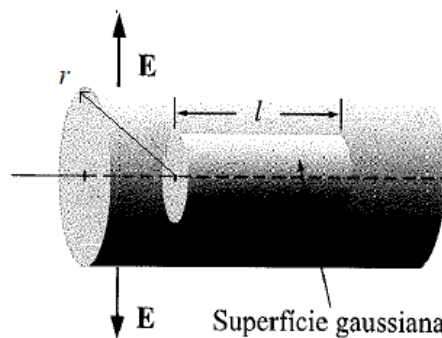
Note que o resultado obtido é idêntico à Eq. (4.38) que nos dá o campo gerado por uma carga pontual numa dispersão coloidal. Embora este resultado seja diferente do anterior, tanto no vácuo quanto no coloide, o campo produzido em um ponto distante no exterior da esfera

é igual ao de uma carga pontual no meio considerado. Entretanto, no segundo caso, o campo total no exterior da esfera é dado pela soma de dois termos, o que sugere que é devido tanto à distribuição de cargas na esfera quanto pela nuvem iônica que se forma ao redor desta. Além disso, o campo resultante é menor devido a blindagem que ocorre pelos íons, o que já era de se esperar pela discussão do capítulo anterior como foi possível comprovar analisando o gráfico.

5.2 O problema do fio infinito imerso em um coloide

Considere a situação mostrada na Figura 16, na qual temos um fio não condutor infinito carregado com uma densidade linear uniforme de cargas λ . Queremos encontrar o campo produzido em um ponto que dista r do fio. Neste caso, há uma simetria cilíndrica.

Figura 16 – Fio infinito carregado



Fonte: Griffiths (2011)

A fim de facilitar os cálculos, exploraremos a simetria do problema, que no caso é cilíndrica. A superfície gaussiana escolhida é, então, um cilindro de raio r e comprimento l coaxial com o fio. Incluímos as bases do cilindro, pois, a superfície gaussiana deve ser fechada. Note que esse problema apresenta alto grau de simetria. Não importa o ponto sobre o fio que tomarmos, de um lado ou outro desse ponto temos uma semirreta de comprimento infinito. Podemos, sem perda de generalidade, escolher a origem do sistema de coordenadas o ponto do fio que se liga ao ponto r por um segmento de reta perpendicular ao fio. Deste modo, é possível perceber que o campo elétrico resultante é sempre perpendicular a lateral e paralelo às bases do cilindro. Portanto, nas base do cilindro $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$, ou seja, não há fluxo de campo elétrico, de

modo que, o produto escalar do campo com o vetor unitário normal à superfície será diferente de zero somente para a face lateral e neste caso, o elemento de área, $d\vec{S}$, é paralelo ao vetor campo elétrico, então, o produto escalar resulta em $E dS$. Podemos escrever, então:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{env}}{\epsilon_0},$$

que neste caso, $Q_{env} = \lambda l$.

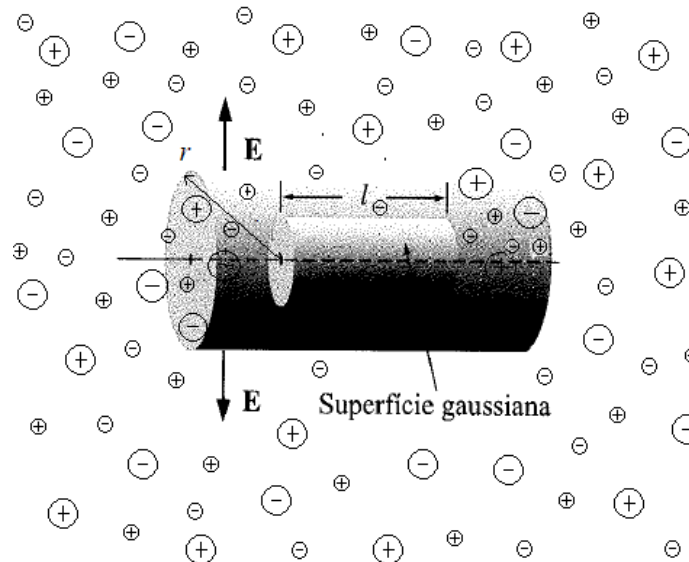
$$E \oint_S dS = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}.$$

A área do cilindro é dada por $2\pi r l$, o que nos leva a obter o seguinte resultado para o campo elétrico:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}.$$

Este é campo gerado por uma linha reta de cargas infinitamente longa em um ponto situado a uma distância r da reta. Note que ao contrário do exemplo anterior, este campo não cai com o inverso do quadrado da distância e sim com o inverso da distância. Agora, para descobrir como este campo se comporta se essa linha de cargas não estiver no vácuo, considere a Figura 17. Esta figura ilustra o segundo caso, no qual este mesmo fio infinitamente longo carregado com uma densidade linear uniforme de cargas λ está imerso em um coloide.

Figura 17 – Fio infinito carregado imerso em um coloide



Fonte: Adaptado de Griffiths (2011)

Nosso objetivo é calcular o campo elétrico em um ponto dentro da solução, à uma distância r do fio. Pela Eq. (4.44) que estabelece a relação entre o fluxo de campo elétrico e a carga envolvida pela gaussiana:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r},$$

onde r é o ponto onde queremos calcular o campo e $Q = \lambda l$ é a carga distribuída no fio e envolvida pela superfície gaussiana. Na superfície lateral, o produto escalar entre o vetor campo elétrico e o vetor unitário normal é simplesmente $E dS$ e, além disso, o módulo do campo elétrico é constante. Portanto, temos:

$$E \oint_S dS = \frac{\lambda l}{\varepsilon} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r}.$$

A integral sobre a superfície lateral nos dá a sua área que é $2\pi r l$. Logo:

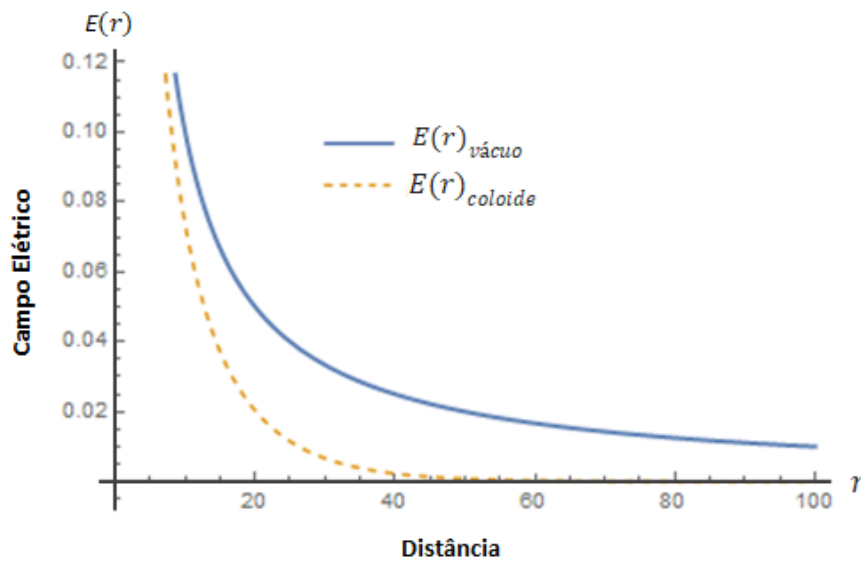
$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\varepsilon} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r}.$$

Assim, o módulo do campo elétrico à uma distância r do fio infinito é dado por:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r}.$$

A Figura 18 mostra o gráfico do campo elétrico em função da distância.

Figura 18 – Gráfico do campo elétrico de um fio infinito



Fonte: autor

A linha azul representa o gráfico do campo em função da distância de um fio infinito carregado com uma densidade linear de cargas que se encontra no vácuo, o qual decresce com

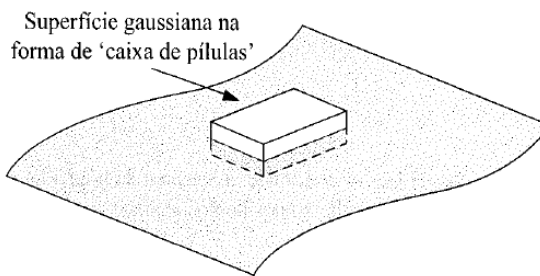
$f(r) = \frac{1}{r}$, enquanto que a linha tracejada representa o campo em função da distância de um fio infinito carregado com uma densidade linear de cargas imerso em um coloide, o qual decresce com $g(r) = (1 + \kappa r) \frac{e^{-\kappa r}}{r}$ para $0 \leq r \leq 100$ e $\kappa = 0, 1$.

Pelo gráfico vemos que o campo produzido no ponto r é menor se o fio carregado está dentro de um coloide. Como já foi falado várias vezes, mas é sempre importante ressaltar, a diminuição do campo é devido á blindagem, ou seja, a nuvem iônica que se forma ao redor das cargas e está diretamente ligada a espessura da camada iônica definida como o inverso de κ .

5.3 O problema do plano infinito imerso em um coloide

O último exemplo que vamos resolver está representado na Figura 19. O problema consiste em calcular o campo à uma distância r de uma placa fina, infinita com uma densidade superficial de cargas σ . Uma folha fina de plástico com uma das superfícies carregadas ilustra bem esse modelo. É notável que este problema pode ser facilmente resolvido ao considerar a sua simetria planar. Podemos então considerar uma superfície gaussiana na forma de uma caixa retangular deixando distâncias iguais em cima e embaixo do placa. O material existente entre a tampa da caixa e o plano é vácuo.

Figura 19 – Plano infinito carregado



Fonte: Griffiths (2011)

Aplicando a lei de Gauss para essa superfície, temos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{env}}{\epsilon_0},$$

onde $Q_{env} = \sigma A$, sendo A a área da tampa da caixa. Por simetria, o campo elétrico aponta para fora do plano, assim as superfícies superior e inferior resultam em

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2AE,$$

enquanto que a contribuição dos lados é nula. Deste modo, temos:

$$2AE = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

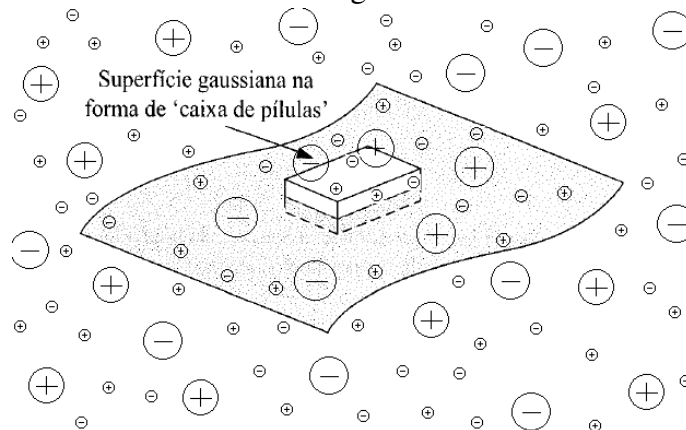
obtendo a seguinte expressão para o campo elétrico, em módulo:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

O resultado obtido para o campo a uma distância r do plano é interessante, pois não existe dependência da distância na equação, isto é, em qualquer ponto acima e abaixo do plano o campo elétrico continua o mesmo.

Agora, imagine que a mesma placa é colocada dentro de um recipiente infinitamente grande contendo coloide. Neste caso, qual será o campo produzido no ponto r ? Resolvemos este problema repetindo os passos dos exemplos anteriores e escolhendo a simetria planar como acabamos de fazer para o plano infinito no ar. Como mostra a Figura 20, imaginamos uma superfície gaussiana no formato de uma caixa retangular envolvendo o plano e o coloide e seguimos os passos anteriores para encontrar o campo elétrico total sentido no ponto r .

Figura 20 – Plano infinito carregado imerso em um coloide



Fonte: Adaptado de Griffiths (2011)

Pela Eq. (4.38), temos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r}.$$

Utilizando os argumentos de simetria, eliminamos o produto escalar e tiramos E de dentro da integral, de modo que temos:

$$E \oint_S dS = \frac{\sigma A}{\epsilon} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r}.$$

Como vimos, apenas as tampas contribuem para o fluxo de campo elétrico, então esta equação torna-se:

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r}.$$

Desta forma, obtemos:

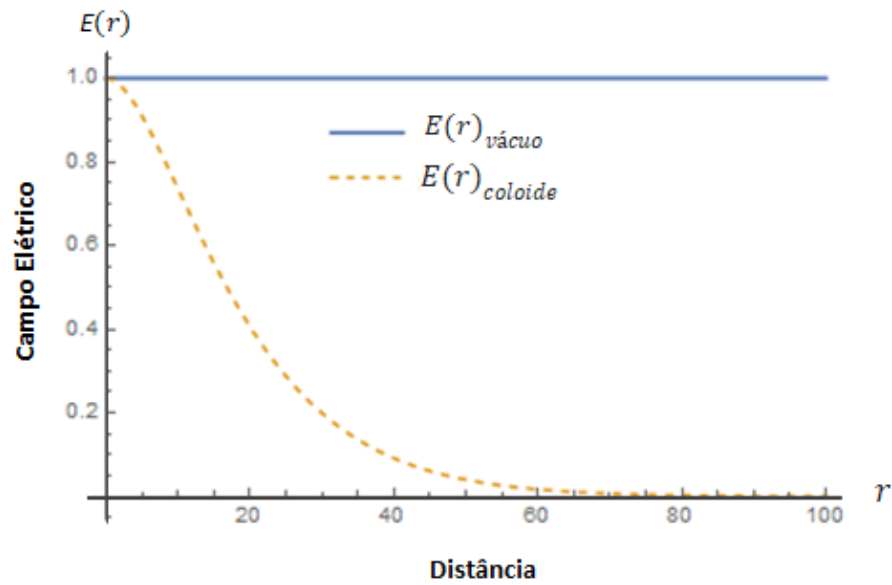
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon} (1 + \kappa r) e^{-\kappa r}.$$

O ponto mais interessante deste resultado é que, diferente da primeira situação, o campo elétrico vai depender da distância, o que não ocorre se o plano estiver no vácuo. Note que na segunda situação aparece o termo $(1 + \kappa r)e^{-\kappa r}$ e é justamente ele que vai ser responsável pelo fato de o campo não ser mais constante. O aparecimento do termo de decaimento na equação significa que a nuvem iônica que se forma nas proximidades do plano infinito vai causar a blindagem que, por sua vez, resultará em um campo que diminui conforme nos afastamos do plano. Pode-se pensar que quanto mais distante estivermos do plano, mais íons estarão presentes na solução e maior será a blindagem. A Figura 21 mostra o gráfico do campo elétrico em função da distância.

A linha azul representa o gráfico do campo em função da distância de um plano infinito carregado com uma densidade superficial de cargas que se encontra no vácuo, o qual é constante, isto é, não muda mesmo se nos aproximarmos ou nos afastarmos do plano. A linha tracejada representa o campo em função da distância de um plano infinito carregado com uma densidade superficial de cargas imerso em um coloide, o qual decresce com $g(r) = (1 + \kappa r)e^{-\kappa r}$ para $0 \leq r \leq 100$ e $\kappa = 0,1$.

Estes foram apenas três dos diversos problemas que poderíamos ter resolvido. É importante ressaltar que mesmo que o uso da Lei de Gauss para o cálculo do campo esteja limitado à problemas com simetria esférica, cilíndrica ou plana, é possível montar combinações de objetos com essas simetrias ainda que o conjunto como um todo não seja simétrico. Por

Figura 21 – Gráfico do campo elétrico de um plano infinito



Fonte: autor

exemplo, utilizando o princípio da superposição é possível encontrar o campo nas proximidades de dois planos infinitos ou dois cilindros paralelos com distribuição uniforme de cargas ou o campo de uma esfera nas proximidades de um plano infinito carregado [4].

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Os coloides são constituídos de um número muito grande de partículas, as quais se movem e colidem umas com as outras constantemente percorrendo trajetórias desordenadas. Deste modo, o comportamento clássico da distribuição das partículas coloidais se dá através da lei de distribuição de Boltzman. No modelo apresentado, o potencial eletrostático nas regiões I e II foi encontrado a partir da resolução da equação de Poisson e Laplace, respectivamente. Constatamos que em torno de uma partícula coloidal de carga positiva existe uma concentração de íons com carga negativa e vice versa, de modo que a partícula fica envolvida por uma dupla camada elétrica. Esta nuvem de íons em volta da partícula leva a um decaimento exponencial do potencial eletrostático no ponto considerado fazendo com que este seja menor que o potencial sentido caso o meio onde a partícula se encontre seja o vácuo. Além disso, concluímos que a atenuação do potencial está diretamente ligada ao termo κ conhecido como parâmetro de Debye.

Posteriormente, encontramos expressões para o campo elétrico gerado por uma carga pontual e por uma distribuição discreta ou contínua de cargas. Ademais, constatamos que a força de interação entre duas cargas puntiformes imersas em um coloide é menos intensa que a força de interação destas mesmas cargas no vácuo e isso é consequência da existência da nuvem iônica que blindar a partícula. O efeito de blindagem é representado pelo termo que chamamos de decaimento $e^{-\kappa r}$. Este termo está presente ainda na equação que relaciona o fluxo de campo elétrico através de uma superfície fechada com a carga existente dentro do volume delimitado por esta superfície, a qual chamamos de Lei de Gauss modificada.

Por fim, resolvemos alguns problemas de eletrostática considerando as distribuições contínuas de cargas no vácuo e no coloide a fim de comparar os resultados. Observamos que a diferença dos resultados obtidos está relacionada à existência da dupla camada elétrica que se forma em torno da distribuição quando esta está imersa em um sistema coloidal. Para uma esfera sólida uniformemente carregada o campo elétrico decai com $(1 + \kappa r) e^{-\kappa r} / r^2$, para um fio infinito com uma densidade linear uniforme de cargas ele decai com $(1 + \kappa r) e^{-\kappa r} / r$ e para um plano infinito decai com $(1 + \kappa r) e^{-\kappa r}$. Uma perspectiva para este trabalho seria a verificação do teorema da existência e unicidade das soluções da equação de Poisson no caso da eletrostática em sistemas coloidais.

O estudo da eletrostática em sistemas coloidais constitui um importante contributo para a compreensão dos conceitos de eletrostática, uma vez que mostra uma aplicação direta do conhecimento em um meio específico que não seja o abordado nos livros de Eletromagnetismo

que desenvolvem a teoria no vácuo e em meios dielétricos.

REFERÊNCIAS

- [1] G. A. SILVA, **De Tales a Ptolomeu: um breve panorama histórico dos principais sistemas cosmológicos gregos** (PDF). HCTE-UFRJ. Consultado em 30 de junho de 2019.
- [2] J. C MAXWELL, "**A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field**", Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155, 459-512 (1865).
- [3] J. C. MAXWELL, **A Treatise on Electricity e Magnetism**, 3rd ed., vols. 1-2 (1891) (reprinted: Dover, New York NY, 1954; ISBN 0-486-60636-8 e ISBN 0-486-60637-6).
- [4] D.J. GRIFFITHS, **Introduction to Electrodynamics** (Prentice Hall, New Jersey, 1999), 3a ed.
- [5] D. HALLIDAY, R. RESNICK e J. WALKER, **Fundamentos de Física** (LTC editora, Rio de Janeiro, 2012), v.3, 9a ed.
- [6] H.M. NUSSENZVEIG, **Curso de Física Básica** (Edgard Blücher, São Paulo, 1997), v. 3, 1a ed.
- [7] J.R. REITZ, F.J. MILFORD e R.W. CHISTY, **Fundamentos da Teoria Eletromagnética** (Editora Campus, Rio de Janeiro, 1982), 1a ed.
- [8] J.D. JACKSON, **Classical Electrodynamics** (John Wiley Sons, New Jersey 1999).
- [9] E.M. PURCELL, **Curso de Física de Berkeley: Eletricidade e Magnetismo** (Edgard Blücher, São Paulo, 1973), v. 2.
- [10] T. A. ENOKI. **Caracterização por espalhamento de luz de dispersões aquosas de agregados lipídicos aniônicos**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Física, USP, (2010)
- [11] M. J. JUNIOR e L.C. VARANDA. **O mundo dos coloides** QNEsc 9, 9 (1999).
- [12] I.R.O. RAMOS, J.P.M. BRAGA, J.V.A. ATAÍDE, A.P. LIMA and L. HOLAND. **Eletrostática em Sistemas Coloidais Carregados**. Revista Brasileira de Ensino de Física, 40, e5408 (2018)
- [13] D.J. SHAW. **Introdução à Química dos Colóides e de Superfícies**. Editora Edgar Blucher. São Paulo, 1975.
- [14] A.F.C, CAMPOS. **Introdução aos Sistemas Coloidais**. Universidade de Brasília. Planaltina, 2017.
- [15] S. R.A. SALINAS, **Einstein e a teoria do movimento browniano**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 2, p. 263 - 269, (2005)
- [16] SOUZA, L. A de. **"Efeito Tyndall"**; Brasil Escola. Disponível em:

<https://brasilecola.uol.com.br/quimica/efeito-tyndall.htm>. Acesso em 27 de junho de 2019.

[17] "O QUE É O EFEITO TYNDALL?"; SóQ. Disponível em: <https://www.soq.com.br/curiosidades/c41.php>. Acesso em 27 de junho de 2019.

[18] L.B. SILVEIRA, **Estudos de propriedades magnéticas de fluidos e nanocompósitos magnéticos biocompatíveis**. Tese de Doutorado, Universidade de Brasília, Brasília (2006).

[19] M.S. LEAL, **Separação de fases de fluidos em perfuração base água utilizando tensoativo**. 2015. 85f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2015.

[20] **Solventes**. Info Escola. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/compostos-quimicos/solventes/>>. Acesso em 21 jun. 2019.

[21] C. COHEN TANNAOUDJ, **Quantum Mechanics**, Vol. 2, Chapter 11- Stationary perturbation theory, complement CXI- Van der Waal's forces.

[22] Coloides. Apresentação de Power Point. s.n.t. 26p.

[23] DEJAGUIN BV, CHURAEVC NV, MULLER VM (1987). **A Teoria da Estabilidade de Coloides** Lyophobic Derjaguin-Landau-Verwey-Overbeek (DLVO). Em: Forças De Superfície. Springer, Boston, MA.

[24] DIAS, V.S, MARTNS, R.A. **Michael Faraday: o caminho da livraria à descoberta da indução eletromagnética** Ciência Educação, v. 10, n. 3, p. 517-530, 2004

[25] J. E. VILLATE, **Eletricidade e Magnetismo**. Porto: 2013. 221 págs. Creative Commons Atribuição-Partilha (versão 3.0) ISBN 978-972-99396-2-4. Acesso em 21 jun. 2019.

[26] G.M KREMER. **Uma introdução à distribuição de Boltzman**. Editora USP, São Paulo, 2005.

[27] L. MARTINEZ. **Eletroquímica de equilíbrio e Teoria de Debye-Huckel**. [S.l.: s.n.], 2017. 12p.