



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA - ICEN
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA**

ABMAEL RODRIGUES DE OLIVEIRA

PRINCÍPIO DA INCERTEZA ESTENDIDO A PARTIR DE PRIMEIROS PRINCÍPIOS

REDENÇÃO - CE

2021

ABMAEL RODRIGUES DE OLIVEIRA

PRINCÍPIO DA INCERTEZA ESTENDIDO A PARTIR DE PRIMEIROS PRINCÍPIOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em licenciatura em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de Física em licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga

REDENÇÃO - CE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Oliveira, Abmael Rodrigues de.

O48p

Princípio da incerteza estendido a partir de primeiros princípios / Abmael Rodrigues de Oliveira. - Redenção, 2021.
64f: il.

Monografia - Curso de Física, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga.

1. Translação - Operador. 2. Espaços Curvos. 3. Física - Princípios. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 541

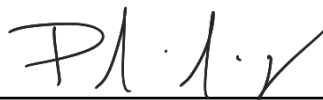
ABMAEL RODRIGUES DE OLIVEIRA

PRINCÍPIO DA INCERTEZA ESTENDIDO A PARTIR DE PRIMEIROS PRINCÍPIOS

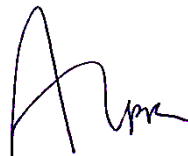
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em licenciatura em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Antônio Isael Paz Pires
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Ivanildo Rui Barbosa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir. Pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela dádiva da vida, por seu amor e cuidado.

Ao Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga por me orientar em minha defesa de TCC.

Ao Prof. Dr. Levi Leite do Curso de Física da UNILAB pelo primeiro incentivo para o uso do *Latex*.

A minha noiva, Alaine Cassiano, por seu amor, carinho e companheirismo.

Ao aluno de graduação em licenciatura em história e amigo, Natanael Silva pela motivação e por suas palavras.

Ao aluno de graduação em Letras, Paulo Roberto pelo apoio na inscrição no curso.

Ao aluno de graduação em licenciatura em Física, Lucas por me apresentar a plataforma *ShareLatex*.

Aos amigos graduandos em Física e matemática, Marinaldo Braga, Cristiano, Ismael, Karla Bianca, Maria José, Emília, Mateus Guimarães, Veridiano, Karolyne, pela parceria e contribuições na minha vida profissional e pessoal.

Aos meus pais e irmãos, que nos momentos de estudos dedicados ao estudo superior, sempre me esforçaram e me deram forças pra prosseguir.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas científicos, mas ter ética e afetividade da educação e no ensino.

E à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), na pessoa do Presidente Anderson Ribeiro Correia pelo financiamento do programa PRP via bolsa de estudos.

“Deus tem um plano para todos, basta olhar o mundo com olhos perspicazes e até uma pequena borboleta parecerá o mais belo leão.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Neste trabalho, inicialmente apresentamos o formalismo da mecânica Quântica tradicional usando a notação de Dirac de *bras* e *kets*. Dirac definiu um estado de uma partícula como sendo descrito por um ket. Os observáveis físicos são representados por operadores, seus autovalores representam os possíveis resultados de uma medida desse observável. Em um espaço euclidiano, uma translação infinitesimal dx , necessariamente leva uma partícula da posição x para $x + dx$, a partir disso, define-se o operador translação em termos do operador momentum, encontrando a relação de comutação entre os operadores posição e momentum, e conseqüentemente, o princípio da incerteza de Heisenberg. Na seqüência, estudamos o formalismo da Mecânica Quântica Não-Aditiva (MQNA), uma teoria desenvolvida a partir de primeiros princípios que busca entender os efeitos da métrica do espaço na teoria quântica. Em espaços não-euclidianos, uma translação infinitesimal dx , não necessariamente leva uma partícula da posição x para $x + dx$. Assim, através de uma redefinição do operador translação, obtem-se novas relações de comutação deformada entre os operadores posição e momentum, dando origem a uma incerteza mínima diferente de zero no momentum. Por fim, utilizando uma equação tipo Schrödinger, resolvemos o problema da partícula livre para um espaço curvo com uma métrica específica, onde obtemos que a energia é quantizada.

Palavras-chave: Operador Translação. Espaços Curvos. Princípio da Incerteza Estendido.

ABSTRACT

In this work, we initially present the formalism of traditional quantum mechanics using Dirac's notation of *bras e kets*. Dirac defined a state of a particle as being described by a ket. Physical observables are represented by operators, their eigenvalues represent the possible results of a measurement of that observable. In an Euclidean space, an infinitesimal translation dx , necessarily takes a particle from the position x to $x + dx$, from that, the translation operator is defined in terms of the momentum operator, finding the switching relationship between the position and momentum operators, and consequently, the Heisenberg uncertainty principle. In sequence, study the formalism of Non-Additive Quantum Mechanics (MQNA), a theory developed from the first principles that seeks to understand the effects of the space metric on quantum theory. In non-Euclidean spaces, an infinitesimal translation dx does not necessarily take a particle from the position x to $x + dx$. so, through a redefinition of the translation operator, new deformed switching relations are obtained between the position and momentum operators, giving rise to a minimum uncertainty other than zero in the momentum. Finally, using a Schrödinger equation, we solve the problem of the free particle for a curved space with a specific metric, where we obtain that the energy is quantized.

Keywords: Translation operator. Curved Spaces. Extended Uncertainty Principle.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Translações sucessivas em diferentes direções 35
- Figura 2 – Incerteza Mínima no *momentum* quando levamos em consideração o segundo termo da série de $g(x)^{1/2}$. A região sombreada representa os estados proibidos para a métrica considerada aqui (Braga, 2015). 59

LISTA DE SÍMBOLOS

$ a\rangle$	ket
$\langle a $	bra
$\hat{\mathcal{S}}(dx)$	Operador translação
$g(x)$	Tensor métrico
σ	Desvio padrão
Σ	Somatório
δ	Delta de Kroneker, delta de Dirac
$\hat{T}_g(dx)$	Operador translação generalizado
H_g	Hamiltoniano
$\Delta\hat{P}_g$	Incerteza mínima no <i>momentum</i>
η	Variável de integração <i>eta</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FORMALISMO MATEMÁTICO DA MECÂNICA QUÂNTICA TRA- DICIONAL	15
2.1	Kets, Bras e Operadores	15
2.1.1	<i>Vetores de estado</i>	15
2.1.2	<i>Observáveis físicos</i>	16
2.2	Representação matricial e kets de base	18
2.3	Representações matriciais	20
2.3.1	<i>Sistemas de Spin $\frac{1}{2}$</i>	22
2.4	Medidas, observáveis físicos e relações de incerteza	23
2.4.1	<i>Observáveis compatíveis e incompatíveis</i>	24
2.4.2	<i>Relações de incerteza</i>	26
2.5	Espectro contínuo de observáveis	29
2.5.1	<i>Caso unidimensional</i>	29
2.5.2	<i>Autovetores, e autovalores de posição</i>	30
2.5.3	<i>Operador translação</i>	31
2.5.4	<i>Princípio de incerteza de Heisenberg</i>	34
2.5.5	<i>Translação sucessiva</i>	35
2.5.6	<i>Funções de onda no espaço de posição</i>	37
2.5.7	<i>Operador momento na base de autovetores de posição</i>	38
2.5.8	<i>Funções de onda no espaço de momento</i>	40
3	FORMALISMO UNIDIMENSIONAL DA MECÂNICA QUÂNTICA NÃO- ADITIVA	43
3.1	Caso unidimensional	43
3.2	Operador <i>momentum</i> no espaço das posições	47
4	APLICAÇÃO DA MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-ADITIVA	51
4.1	Partícula livre	51
4.1.1	<i>Mudança de variável</i>	51
5	PRINCÍPIO DA INCERTEZA ESTENDIDO	56
5.1	Incerteza Mínima no <i>momentum</i>	56

5.2	Considerando apenas o termo linear	60
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	62
	REFERÊNCIAS	63

1 INTRODUÇÃO

A mecânica quântica desempenha um papel importante na descrição e compreensão dos fenômenos naturais [1][2]. Os fenômenos em escala atômica (ou subatômica) só podem ser descritos pela mecânica quântica [3]. A teoria quântica é mais adequada para a descrição dos fenômenos na escala atômica, mas quando os objetos estudados se tornam macroscópicos essa teoria corresponde a mecânica clássica [4][5]. A descrição de fenômenos em uma escala pequena no início do século XX se distanciava da física clássica já conhecida, causando uma confusão crescente, solucionada por físicos renomados como Schrödinger, Heisenberg e Born [3].

O Princípio da incerteza de Heisenberg juntamente com o princípio da incerteza energia-tempo, desempenham um papel fundamental na solução de tais problemas. e . Dada uma função de onda ψ representando o estado de uma partícula, o princípio da incerteza de Heisenberg posição-momentum nos diz que, quanto mais precisa for a posição dessa partícula, menos preciso será seu momento, sendo o produto dos desvios padrão maior ou igual que $\hbar/2$ [6]. Já o princípio da incerteza Energia-tempo, embora quantitativamente parecido com o posição-momentum, tem significados completamente diferentes. Se a incerteza na energia tender a zero (estamos nos autoestados da Hamiltoniana), logo os valores esperados das grandezas físicas são constantes, portanto a quantidade de tempo para uma grandeza física variar um desvio padrão é infinito, no contrário, quando mensuramos o tempo para o valor médio de um observável variar um desvio padrão a incerteza na energia tende para ao infinito (ou seja, estamos em uma combinação linear dos autoestados do hamiltoniana) [6].

Atualmente, os campos teóricos Extended Uncertainty Principle (EUP) e Generalized Uncertainty Principle (GUP), usam como ferramentas as relações de comutação modificadas dos operadores posição e momento. Enquanto EUP surge naturalmente a partir de primeiros princípios usando os primeiros termos da expansão de uma métrica genérica, aparecendo uma incerteza mínima no momentum [7], e também nos possibilitando introduzir efeitos quânticos em distâncias macroscópicas. A GUP, por sua vez, traz modificações em princípios básicos da mecânica quântica desenvolvida no espaço dos momentos, como resultado surge uma incerteza mínima diferente de zero na medição de posição, sendo também uma correção gravitacional quântica para a relação de Heisenberg [8].

Com o objetivo de estudar o princípio da incerteza estendido por primeiros princípios, este trabalho é estruturado em 6 capítulos. No capítulo 2, iremos rever a formulação da matemática rudimentar de espaços lineares na mecânica quântica usando a notação de P. A. M. Dirac, de bras e kets. No capítulo 3, apresentaremos também a mecânica Quântica não-aditiva (MQNA) unidimensional, a partir de primeiros princípios. Em seguida, no capítulo 4, com uma equação de Schrödinger modificada, abordaremos o caso da partícula livre, e com relações de comutação modificadas no capítulo 5, encontraremos uma incerteza mínima no *momentum*.

2 FORMALISMO MATEMÁTICO DA MECÂNICA QUÂNTICA TRADICIONAL

Com o surgimento de experimentos, tipo Stern-Gerlach, houve a necessidade de abandonar princípios físicos clássicos e partir para uma mecânica em um espaço vetorial complexo. Iniciaremos revendo a formulação da matemática rudimentar de espaços lineares na mecânica quântica usando a notação criada por P. A. M. Dirac, de bras e kets [2][9]. Sua importância e elegância foram de tal forma que, até hoje, seu formalismo é utilizado.

2.1 Kets, Bras e Operadores

2.1.1 Vetores de estado

Inicialmente vamos considerar um espaço vetorial complexo, de forma que sua dimensão depende do sistema físico em questão. No formalismo de Dirac, um estado físico é representado por um vetor de estado em um espaço vetorial complexo, dado por $|\alpha\rangle$. Toda a informação do sistema físico está contido no ket.

Pode-se obter um ket somando outros dois kets, e também multiplicando por um escalar;

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \quad (2.1)$$

$$c|\alpha\rangle = |\gamma\rangle c, \forall c \neq 0, \quad (2.2)$$

e obtemos um ket nulo se $c = 0$. Fica postulado que o produto $c|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$, trata-se do mesmo estado físico [2].

O espaço vetorial em questão, é gerado pelos autovetores $\{|a'\rangle\}$. Agora, veremos um espaço vetorial dual ao espaço de kets; o espaço de bras $\{\langle a'|\}$. Sendo que, para cada ket $|\alpha\rangle$, existe um bra correspondente $\langle\alpha|$, ou seja, existe uma correspondência dual, da forma,

$$|\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\alpha|$$

$$|a'\rangle, |a''\rangle, \dots \leftrightarrow \langle a'|, \langle a''|, \dots$$

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle \leftrightarrow \langle\alpha| + \langle\beta|,$$

fica definido então, o produto de um bra com um ket

$$(\langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle) = \langle\beta|\alpha\rangle, \quad (2.3)$$

chamamos este produto de braket. Segue as propriedades dos produtos internos

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^* \quad (2.4)$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0, \quad (2.5)$$

onde na (2.4) o produto é um número complexo, e o produto $\langle\alpha|\alpha\rangle$ é zero se for um ket nulo. A norma de um ket fica

$$\| |\alpha\rangle \| = \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}. \quad (2.6)$$

Se $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, então o estado quântico representado está normalizado, então vale

$$|\alpha\rangle = \frac{|\alpha\rangle}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}}. \quad (2.7)$$

2.1.2 Observáveis físicos

No formalismo de Dirac, os observáveis físicos são representados por operadores hermitianos, que atuam sobre os kets pelo lado esquerdo

$$\hat{A} \cdot (|\alpha\rangle) = \hat{A} |\alpha\rangle, \quad (2.8)$$

resultando em ket. Existem kets importantes, a qual chamamos de autokets de um operador \hat{A} no espaço vetorial em questão,

$$|a'\rangle, |a''\rangle, |a'''\rangle, \dots \quad (2.9)$$

aplicando o operador em questão nesses kets, temos

$$\hat{A} |a'\rangle = a' |a'\rangle, \hat{A} |a''\rangle = a'' |a''\rangle, \hat{A} |a'''\rangle = a''' |a'''\rangle, \quad (2.10)$$

sendo a', a'', a''', \dots em geral números complexos. O conjunto $\{a', a'', a''', \dots\}$ é o conjunto de autovalores do operador \hat{A} . Para um ket $|\alpha\rangle$, se obtermos $\hat{X} |\alpha\rangle = \hat{Y} |\alpha\rangle$, então os operadores \hat{X} e \hat{Y} são iguais. Se $\hat{X} |\alpha\rangle = 0$, logo o operador \hat{X} é dito nulo.

Em relação a soma, é válida a comutatividade, a associatividade e distributiva

$$\hat{X} + \hat{Y} = \hat{Y} + \hat{X},$$

$$\hat{X} + (\hat{Y} + \hat{Z}) = (\hat{X} + \hat{Y}) + \hat{Z},$$

$$\hat{Z}(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a\hat{Z}|\alpha\rangle + b\hat{Z}|\beta\rangle.$$

Os operadores atuam em um bra pela direita

$$\hat{A} \cdot (\langle\beta|) = \langle\beta|\hat{A}, \quad (2.11)$$

sendo o resultado um outro bra. Agora, ver-se que, nem sempre que um operador atua em um ket e em um bra, obedecem a uma correspondência dual

$$\hat{X}|\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\alpha|\hat{X}^\dagger, \quad (2.12)$$

sendo \hat{X}^\dagger o adjunto hermitiano do operador \hat{X} , sendo que, um operador é dito hermitiano se $\hat{X} = \hat{X}^\dagger$.

Já em relação a multiplicação, não é válida a comutatividade,

$$\hat{X}\hat{Y} \neq \hat{Y}\hat{X}.$$

Já a associatividade entre operadores fica

$$\hat{X}(\hat{Y}\hat{Z}) = (\hat{X}\hat{Y})\hat{Z},$$

em relação a multiplicação entre operadores, temos a seguinte propriedade

$$(\hat{X}\hat{Y})^\dagger = \hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger,$$

sendo

$$\hat{X}\hat{Y}|\alpha\rangle = \hat{X}(\hat{Y}|\alpha\rangle) \leftrightarrow (\langle\alpha|\hat{Y}^\dagger)\hat{X}^\dagger = \langle\alpha|\hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger. \quad (2.13)$$

O axioma da associatividade na multiplicação postulado por Dirac, diz que

$$(|\alpha\rangle\langle\beta|) \cdot |z\rangle = |\alpha\rangle \cdot (\langle\beta|z\rangle), \quad (2.14)$$

onde $(|\alpha\rangle\langle\beta|)$ é o que chamamos de produto externo, e $(\langle\beta|z\rangle)$ é apenas um número. O axioma da associatividade diz também que

$$(\langle\beta|) \cdot (\hat{X}|\alpha\rangle) = (\langle\beta|\hat{X}) \cdot (|\alpha\rangle). \quad (2.15)$$

Pela igualdade, pode-se escrever

$$\langle \beta | \hat{A} | \alpha \rangle, \quad (2.16)$$

logo

$$\begin{aligned} \langle \beta | \hat{A} | \alpha \rangle &= \langle \beta | \cdot (\hat{X} | \alpha \rangle) \\ &= \{ \langle \alpha | \hat{X}^\dagger \cdot | \beta \rangle \}^* \\ &= \langle \alpha | \hat{X}^\dagger | \beta \rangle^*, \end{aligned} \quad (2.17)$$

sendo $\langle \alpha | \hat{X}^\dagger$ o bra dual de $\hat{X} | \alpha \rangle$ [2].

2.2 Representação matricial e kets de base

Agora estamos prontos para enunciar e provar o seguinte teorema

Teorema : Os autovalores de um operador hermitiano \hat{A} são reais: os autovetores de \hat{A} , correspondentes aos diferentes autovalores, são ortogonais.

Prova:

Pela relação de autovetor, operador e autovalor, temos

$$\hat{A} | a' \rangle = a' | a' \rangle, \quad (2.18)$$

pelo fato de \hat{A} ser hermitiano, logo

$$\langle a'' | \hat{A}^\dagger = a'' \langle a'' |, \quad (2.19)$$

sendo os números a', a'', \dots autovalores do operador \hat{A} . Agora, multiplicando em ambos os lados de (2.18) por $\langle a'' |$ pela esquerda, e também ambos os lados de (2.19) por $| a' \rangle$, e depois subtraindo, temos

$$\begin{aligned} a' \langle a'' | a' \rangle - a''^* \langle a'' | a' \rangle &= 0 \\ (a' - a'') \langle a'' | a' \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Escolhemos primeiramente a' e a'' como sendo iguais,

$$a' = a''^*, \quad (2.20)$$

para $|a'\rangle$ não nulo, logo os autovalores são reais.

Agora, consideramos que os autovalores a' e a'' são diferentes, a diferença $(a' - a''^*)$ ou $(a' - a'')$ não pode ser zero, o que implica em,

$$\langle a''|a'\rangle = 0, (a'' \neq a'), \quad (2.21)$$

concluindo a prova do teorema, que os autovetores são ortogonais. Vale lembrar que os autovalores são reais para operadores hermitianos.

Torna-se conveniente normalizar $|a'\rangle$ de tal forma que, o conjunto $\{|a'\rangle\}$ seja ortogonal

$$\langle a''|a'\rangle = \delta_{a''a'}, \quad (2.22)$$

logo, como esse conjunto gera o espaço de kets, é um conjunto completo.

Como esse pré-requisito em mãos, podemos agora expandir um ket qualquer $|\alpha\rangle$ como combinação linear dos autovetores de um observável hermitiano \hat{A} ,

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle. \quad (2.23)$$

Os coeficientes de expansão $c_{a'}$ podem ser obtidos se multiplicarmos um ket $\langle a''|$

$$\langle a''|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} \langle a''|a'\rangle, \quad (2.24)$$

pela relação (2.22) temos

$$\langle a'|\alpha\rangle = c_{a'} \langle a'|a'\rangle$$

$$\langle a'|\alpha\rangle = c_{a'} \cdot 1, \quad (2.25)$$

logo $c_{a'} = \langle a'|\alpha\rangle$, portanto

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle. \quad (2.26)$$

No entanto, na expressão acima pode ser entendida como sendo o operador $\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|$, atuando sobre o ket $|a'\rangle$, logo

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = \hat{\mathbf{1}}, \quad (2.27)$$

este $\hat{\mathbf{1}}$ é denominado de operador identidade, que corresponde ao somatório de todos os produtos externos dos autovetores correspondentes a \hat{A} .

Considerando o produto $\langle \alpha | \alpha \rangle$, podemos inserir no meio a relação de completeza (2.44),

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \alpha | \cdot \left(\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \right) \cdot | \alpha \rangle \quad (2.28)$$

$$= \sum_{a'} \langle \alpha | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle \quad (2.29)$$

$$= \sum_{a'} |\langle a' | \alpha \rangle|^2, \quad (2.30)$$

e se $|\alpha\rangle$ for normalizado, considerando o coeficiente de expansão $c_{a'} = \langle a' | \alpha \rangle$, temos

$$\sum_{a'} |c_{a'}|^2 = \sum_{a'} |\langle a' | \alpha \rangle|^2 = 1, \quad (2.31)$$

levando a ser definido o operador projeção, dado por

$$\Lambda_{a'} \equiv |a'\rangle \langle a'|, \quad (2.32)$$

e a relação de completeza fica

$$\sum_{a'} \Lambda_{a'} = \hat{\mathbf{1}}. \quad (2.33)$$

2.3 Representações matriciais

De posse da relação de completeza, podemos representar um operador qualquer \hat{X} , aplicando-se duas vezes da forma de uma matriz quadrada,

$$\hat{X} = \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle \langle a'' | \hat{X} | a' \rangle \langle a'|, \quad (2.34)$$

de modo que há N^2 números da forma $\langle a'' | a' \rangle$, sendo que o primeiro termo corresponde a linha, e o termo da direita a coluna da matriz quadrada. A representação matricial do operador \hat{X}^1 fica

$$\hat{X} \doteq \begin{bmatrix} \langle a^{(1)} | \hat{X} | a^{(1)} \rangle & \langle a^{(1)} | \hat{X} | a^{(2)} \rangle & \dots \\ \langle a^{(2)} | \hat{X} | a^{(1)} \rangle & \langle a^{(2)} | \hat{X} | a^{(2)} \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

¹ O Símbolo \doteq significa "é representado por"

Do mesmo modo, usando o coeficiente de expansão, representamos um ket por uma matriz coluna, e um bra por uma matriz linha

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^1|\alpha\rangle \\ \langle a^2|\alpha\rangle \\ \langle a^3|\alpha\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Vale a relação

$$\langle a''|\hat{X}|a'\rangle = \langle a'|\hat{X}^\dagger|a''\rangle^*, \quad (2.37)$$

onde \hat{X}^\dagger é a transposta complexa conjugada. A representação matricial de um produto externo qualquer fica

$$|\beta\rangle\langle\alpha| \doteq \begin{bmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* & \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* & \dots \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^* & \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle a^{(2)}|\alpha\rangle^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Já a representação do operador \hat{A} usando os kets de base, fica

$$\hat{A} = \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle \langle a''|\hat{A}|a'\rangle \langle a'|, \quad (2.39)$$

sendo a matriz quadrada $\langle a''|\hat{A}|a'\rangle$ diagonal, sendo

$$\langle a''|\hat{A}|a'\rangle = \langle a'|\hat{A}|a'\rangle \delta_{a''a'} \quad (2.40)$$

$$= a' \langle a'|a'\rangle \delta_{a''a'} \quad (2.41)$$

$$= a' \delta_{a''a'}, \quad (2.42)$$

portanto,

$$\hat{A} = \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle a' \delta_{a''a'} \langle a'| \quad (2.43)$$

$$= \sum_{a'} a' |a'\rangle \langle a'|, \quad (2.44)$$

com $\Lambda_{a'} = |a'\rangle \langle a'|$, então

$$\hat{A} = \sum_{a'} a' \Lambda_{a'}. \quad (2.45)$$

2.3.1 Sistemas de Spin $\frac{1}{2}$

O experimento de Stern-Gerlach é um experimento onde átomos de prata passam por um campo externo magnético inhomogêneo, sendo as possíveis trajetórias dos átomos descritas pelos kets $|\hat{S}_z : \pm\rangle$, sendo os graus de liberdade dos átomos *up* e *down*. O experimento de Stern-Gerlach consiste de um sistema de spin $1/2$.

Para sistemas de spin $1/2$, pode-se escrever o operador identidade usando os kets $|\hat{S}_z; \pm\rangle$, ou só $|\pm\rangle$,

$$\hat{\mathbf{1}} = |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|. \quad (2.46)$$

Pela Eq.(2.44), o operador \hat{S}_z fica

$$\hat{S}_z = (\hbar/2) [|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|], \quad (2.47)$$

e a relação autovalor-autovetor fica

$$\hat{S}_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle. \quad (2.48)$$

Por (2.48), os autovetores de \hat{S}_z na forma matricial, ficam

$$|\hat{S}_z : +\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$|\hat{S}_z : -\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

e o operador \hat{S}_z na forma matricial fica

$$\hat{S}_z \doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Do mesmo modo, os operadores \hat{S}_+ e \hat{S}_- são descritos por $\hat{S}_+ \equiv \hbar |+\rangle\langle-|$ e $\hat{S}_- \equiv \hbar |-\rangle\langle+|$, de sorte que \hat{S}_+ aumenta a componente de spin por uma unidade de \hbar , e \hat{S}_- diminui a componente de spin por uma unidade de \hbar [2]. Seus representantes matriciais ficam da forma,

$$\hat{S}_+ \doteq \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

$$\hat{S}_- \doteq \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

2.4 Medidas, observáveis físicos e relações de incerteza

A interpretação probabilística da mecânica quântica nos diz que, o ato de medir muda o estado quântico sendo medido, de sorte que obtemos apenas a probabilidade da mudança de estado. Esta visão é conhecida como a "interpretação de Copenhagem" [6]. Nas palavras de P. A. M. Dirac, "Uma medição sempre faz o sistema pular para um autoestado da variável dinâmica sendo medida" (Dirac, 1958, P.36)[2]. Logo, antes da medida, o estado arbitrário $|\alpha\rangle$ é escrito em combinação linear, da forma: $|\alpha\rangle = \sum_{a'} c_{a'} |a'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'|\alpha\rangle$.

Quando a medição do operador \hat{A} é realizada, o estado inicial $|\alpha\rangle$ "pula" para um autoestado $|a'\rangle$ do observável em questão, produzindo um autovalor a' ,

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{medida}} |a'\rangle. \quad (2.54)$$

Sendo $|\alpha\rangle$ normalizado, a probabilidade do estado em questão colapsar em um $|a'\rangle$ particular será

$$\text{Probabilidade de } a' (P_{a'}) = |\langle a'|\alpha\rangle|^2. \quad (2.55)$$

Sabendo que, a medida muda o estado do sistema, com exceção se o sistema já estiver em um autoestado do observável \hat{A} . Neste caso a probabilidade do valor da medida é determinada com precisão ($P_{a'} = 1$). Sendo a expressão (2.55) um postulado fundamental da mecânica quântica.

A partir da interpretação probabilística, fica definido o valor esperado ou valor médio do observável \hat{A} com relação a um ket arbitrário $|\alpha\rangle$, sendo

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle, \quad (2.56)$$

assim, podemos escrever

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{a'} \sum_{a''} \langle \alpha | a'' \rangle \langle a'' | \hat{A} | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle \quad (2.57)$$

$$= \sum_{a'} \sum_{a''} \langle \alpha | a'' \rangle a' \delta_{a'' a'} \langle a' | \alpha \rangle \quad (2.58)$$

$$= \sum_{a'} a' |\langle a' | \alpha \rangle|^2, \quad (2.59)$$

sendo a' o valor medido e $|\langle a' | \alpha \rangle|^2$ a probabilidade de se obter a' .

Considerando experimentos de Stern-Gerlach sequenciais, onde um feixe \hat{S}_x+ passa por um aparato SG_z , a probabilidade de dar os estados $|\pm\rangle$ é dado por

$$|\langle +|\hat{S}_x; +\rangle| = |\langle -|\hat{S}_x; -\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.60)$$

Agora, podemos construir os operadores \hat{S}_x e \hat{S}_y usando a relação (2.44), considerando

$$|\hat{S}_x : \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle, \quad (2.61)$$

$$|\hat{S}_y : \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_2}|-\rangle, \quad (2.62)$$

temos,

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}[e^{-i\delta_1}(|+\rangle\langle -|) + e^{i\delta_1}(|-\rangle\langle +|)], \quad (2.63)$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}[e^{-i\delta_2}(|+\rangle\langle -|) + e^{i\delta_2}(|-\rangle\langle +|)], \quad (2.64)$$

nos levando às seguintes expressões

$$|\hat{S}_x; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle, \quad (2.65)$$

$$|\hat{S}_y; \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle, \quad (2.66)$$

então os operadores \hat{S}_x e \hat{S}_y ficam

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}[(|+\rangle\langle -|) + (|-\rangle\langle +|)], \quad (2.67)$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}[-i(|+\rangle\langle -|) + i(|-\rangle\langle +|)]. \quad (2.68)$$

2.4.1 Observáveis compatíveis e incompatíveis

Agora veremos que, na mecânica Quântica medidas simultâneas de observáveis distintos ser compatíveis ou incompatíveis, sendo que, os resultados das medidas efetuadas

obedecem a uma relação de incerteza [9]. Fica definido então, o comutador e o anticomutador de dois observáveis físicos quaisquer \hat{A} e \hat{B} ,

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (2.69)$$

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \quad (2.70)$$

Diz-se que dois observáveis são compatíveis, se o comutador for zero

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0, \quad (2.71)$$

e incompatíveis se

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0. \quad (2.72)$$

De posse das definições acima, enunciaremos o seguinte teorema

Teorema 1.2: Se \hat{A} e \hat{B} são dois observáveis compatíveis, e que os autovalores de \hat{A} não sejam degenerados, então os elementos de matriz $\langle a'' | \hat{B} | a' \rangle$ são diagonais.

Prova: De acordo com a Eq.(2.71), temos que

$$\begin{aligned} \langle a'' | [\hat{A}, \hat{B}] | a' \rangle &= 0 \\ \langle a'' | (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) | a' \rangle &= 0 \\ a'' \langle a'' | \hat{B} | a' \rangle - a' \langle a'' | \hat{B} | a' \rangle &= 0 \\ (a'' - a') \langle a'' | \hat{B} | a' \rangle &= 0, \end{aligned}$$

então os elementos da matriz $\langle a'' | \hat{B} | a' \rangle$ não zera a menos que $a'' = a'$, então podemos escrever,

$$\langle a'' | \hat{B} | a' \rangle = \delta_{a''a'} \langle a' | \hat{B} | a' \rangle.$$

Portanto, pode-se representar \hat{A} e \hat{B} por matrizes usando o mesmo conjunto de kets de base

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle \langle a'' | \hat{B} | a' \rangle \langle a' |, \\ &= \sum_{a''} \sum_{a'} |a''\rangle \delta_{a''a'} \langle a' | \hat{B} | a' \rangle \langle a' |, \\ &= \sum_{a''} |a''\rangle \langle a'' | \hat{B} | a'' \rangle \langle a'' |, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\hat{B}|a'\rangle &= \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|\hat{B}|a''\rangle \langle a''|a'\rangle, \\ &= \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|\hat{B}|a''\rangle \delta_{a''a'} \langle a''|a'\rangle, \\ &= (\langle a'|\hat{B}|a'\rangle)|a'\rangle,\end{aligned}$$

sendo este resultado a equação de autovalores de \hat{B} , sendo o autovalores b' definidos por

$$b' \equiv \langle a'|\hat{B}|a'\rangle,$$

logo o ket $\{|a'\rangle\}$ é um autovetor simultâneo dos operadores \hat{A} e \hat{B} ou podemos usar $|a', b'\rangle$, onde esse autovetor tem como propriedade

$$\hat{A}|a', b'\rangle = a'|a', b'\rangle \quad (2.73)$$

$$\hat{B}|a', b'\rangle = b'|a', b'\rangle. \quad (2.74)$$

O operador identidade (ou relação de completeza) fica

$$\sum_{K'} |k'\rangle \langle k'| = \sum_{a', b', c'} |a', b', c' \dots\rangle \langle a', b', c', \dots|, \quad (2.75)$$

sendo K' o índice coletivo para n autovetores simultâneos.

Se os operadores \hat{A} e \hat{B} forem incompatíveis, seu comutador é diferente de zero, ou seja, não se pode medi-los simultaneamente, não temos a certeza quando medimos os dois operadores, o que temos é uma relação de incerteza de \hat{A} e \hat{B} e portanto

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0. \quad (2.76)$$

2.4.2 Relações de incerteza

Dado um observável A , definimos um operador satisfazendo a seguinte relação

$$\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle, \quad (2.77)$$

onde o valor esperado é em um estado físico a ser considerado. A dispersão de \hat{A} é dado por

$$\sigma_A^2 = \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 - 2\hat{A}\langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle \langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle^2 + \langle \hat{A} \rangle^2 \quad (2.78)$$

teremos

$$\sigma_A^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2, \quad (2.79)$$

mais conhecido como desvio quadrático médio ou variância². Para quaisquer operadores \hat{A} e \hat{B} representando observáveis físicos, vale a seguinte desigualdade

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2, \quad (2.80)$$

podemos provarmos essa relação usaremos a desigualdade de Schwarz. Para vetores fica

$$|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \geq |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2, \quad (2.81)$$

para kets

$$\langle f|f \rangle \langle g|g \rangle \geq |\langle f|g \rangle|^2. \quad (2.82)$$

Demonstração

Considerando o produto interno abaixo

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0 \quad (2.83)$$

fazendo $|\psi\rangle = |f\rangle + \lambda |g\rangle$ e $\langle \psi| = \langle f| + \lambda^* \langle g|$, o produto fica

$$\langle \psi | \psi \rangle = (\langle f| + \lambda^* \langle g|)(|f\rangle + \lambda |g\rangle) = \langle f|f \rangle + \lambda (\langle f|g \rangle + \lambda^* \langle g|f \rangle), \quad (2.84)$$

escolhemos λ como sendo

$$\lambda = -\frac{\langle g|f \rangle}{\langle g|g \rangle}, \quad (2.85)$$

e agora, substituindo na Eq.(2.83)

$$\langle f|f \rangle \geq \frac{\langle g|f \rangle \langle f|g \rangle}{\langle g|g \rangle} \quad (2.86)$$

$$\langle f|f \rangle \langle g|g \rangle \geq |\langle f|g \rangle|^2. \quad (2.87)$$

■

² Avalia o grau de variabilidade ou dispersão dos valores da série em torno da média. A expressão $\sigma_A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$ é conhecida também como desvio padrão.

O princípio da incerteza generalizado, ou seja, para quais quer operadores genéricos \hat{A} e \hat{B} vale a expressão

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2. \quad (2.88)$$

Demonstração

A Eq.(2.69) nos diz que

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (2.89)$$

Pela Eq.(2.79), temos

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle \\ \sigma_A^2 &= \langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 | \psi \rangle \\ \sigma_A^2 &= \langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.90)$$

fazendo $(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) | \psi \rangle = |f\rangle$

$$\sigma_A^2 = \langle f | f \rangle, \quad (2.91)$$

do mesmo modo, para o operador \hat{B} teremos

$$\sigma_B^2 = \langle g | g \rangle, \quad (2.92)$$

fazendo o produto das Eqs.(2.91) e (2.92)

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \langle f | f \rangle \langle g | g \rangle = |\langle f | g \rangle|^2 \geq I_m^2(\langle f | g \rangle). \quad (2.93)$$

Para qualquer número complexo z ,

$$|z|^2 = |R_e(z)|^2 + |I_m(z)|^2, \quad (2.94)$$

sendo $z = a + bi$ e seu complexo conjugado $z^* = a - bi$, subtraindo teremos

$$b = \frac{1}{2i}(z - z^*), \quad (2.95)$$

portanto

$$I_m(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*). \quad (2.96)$$

Seja $z = \langle f|g \rangle$

$$I_m(\langle f|g \rangle) = \frac{1}{2i}(\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle), \quad (2.97)$$

na Eq.(2.93)

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left[\frac{1}{2i}(\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle) \right]^2. \quad (2.98)$$

Pela Eq.(2.90), $\langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle$ fica

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle &= \langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) | \psi \rangle - \langle \psi | (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) | \psi \rangle \\ \langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle &= \langle \psi | \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} | \psi \rangle \\ \langle f|g \rangle - \langle g|f \rangle &= \langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle = \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Substituindo a Eq.(2.99) na Eq.(2.98)

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left[\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right]^2. \quad (2.100)$$

■

Este é o princípio da incerteza para quaisquer dois operadores \hat{A} e \hat{B} , onde nos mostra uma incerteza na medida simultânea de quaisquer duas grandezas conjugadas. Posteriormente faremos a relação de incerteza posição-momento quando acharmos o comutador desses operadores.

2.5 Espectro contínuo de observáveis

2.5.1 Caso unidimensional

O formalismo desenvolvido até então, foi em relação a observáveis com espectros discretos. Podemos então expandir este formalismo para grandezas físicas que possuem espectros contínuo, como posição e momento, no espaço de Hilbert com dimensão infinita. A relação autovalor-autovetor análoga a relação (2.18) para espectro contínuo, fica

$$\hat{\xi}' |\xi'\rangle = \xi' |\xi'\rangle, \quad (2.101)$$

sendo $|\xi'\rangle$ autovetor do operador $\hat{\xi}$.

Agora veremos as relações análogas as relações até então desenvolvidas para observáveis com espectro discreto:

$$\langle a' | a'' \rangle = \delta_{a'a''} \rightarrow \langle \xi' | \xi'' \rangle = \delta(\xi' - \xi'') \quad (2.102)$$

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = \hat{\mathbf{1}} \rightarrow \int d\xi' |\xi'\rangle \langle \xi'| = \hat{\mathbf{1}} \quad (2.103)$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \alpha \rangle \rightarrow |\alpha\rangle = \int d\xi' |\xi'\rangle \langle \xi' | \alpha \rangle \quad (2.104)$$

$$\sum_{a'} |\langle a' | \alpha \rangle|^2 = \hat{\mathbf{1}} \rightarrow \int d\xi' |\langle \xi' | \alpha \rangle|^2 = \hat{\mathbf{1}} \quad (2.105)$$

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \sum_{a'} \langle \beta | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle \rightarrow \langle \beta | \alpha \rangle = \int d\xi' \langle \beta | \xi' \rangle \langle \xi' | \alpha \rangle \quad (2.106)$$

$$\langle a'' | \hat{A} | a' \rangle = a' \delta_{a''a'} \rightarrow \langle \xi'' | \hat{\xi} | \xi' \rangle = \xi' \delta(\xi'' - \xi'). \quad (2.107)$$

2.5.2 Autovetores, e autovalores de posição

Como exemplo de observáveis com espectro contínuo, consideramos o operador posição \hat{X} . No caso unidimensional, a relação autovalor-autovetor fica

$$\hat{X} |x'\rangle = x' |x'\rangle, \quad (2.108)$$

sendo $\{|x'\rangle\}$ completo e x' um número. Podemos então expandir um ket arbitrário $|\alpha\rangle$ em termos dos $\{|x'\rangle\}$,

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |x'\rangle \langle x' | \alpha \rangle. \quad (2.109)$$

Agora, supomos uma medida idealizada do operador posição \hat{X} mediante a um detector, que sinaliza quando uma partícula está precisamente na posição x' , no estado $|x'\rangle$. Na prática, um aparelho nesses aspectos a posição da partícula em um intervalo $[x' - \Delta/2, x' + \Delta/2]$, ou seja, quando se realiza a medição, o estado $|\alpha\rangle$ pula abruptamente para um autoestado de posição

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |x'\rangle \langle x' | \alpha \rangle \rightarrow \int_{x' - \Delta/2}^{x' + \Delta/2} dx' |x'\rangle \langle x' | \alpha \rangle, \quad (2.110)$$

supondo que $\langle x' | \alpha \rangle$ não mude apreciavelmente no intervalo de Δ , a probabilidade para localização da partícula será

$$P_{\Delta} = |\langle x' | \alpha \rangle|^2 dx', \quad (2.111)$$

sendo Δ representado por dx' . A probabilidade de se detectar a partícula entre $-\infty$ a $+\infty$ fica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' |\langle x'|\alpha\rangle|^2, \quad (2.112)$$

se $|\alpha\rangle$ for normalizado, logo

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \langle\alpha|x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' |\langle x'|\alpha\rangle|^2 = 1, \quad (2.113)$$

sendo $\langle x'|\alpha\rangle$ uma função de onda para o estado $|\alpha\rangle$,

$$\langle x'|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x'). \quad (2.114)$$

Portanto $\psi_\alpha(x')$ é uma função de onda para $|\alpha\rangle$, pertencendo a uma representação no espaço das posições.

Em relação ao espaço tridimensional, o autovetor $|x'\rangle = |x', y', z'\rangle$ obedece as seguintes relações

$$\hat{X} |x', y', z'\rangle = x' |x', y', z'\rangle \quad (2.115)$$

$$\hat{Y} |x', y', z'\rangle = y' |x', y', z'\rangle \quad (2.116)$$

$$\hat{Z} |x', y', z'\rangle = z' |x', y', z'\rangle, \quad (2.117)$$

logo $\{|x'\rangle\}$ é completo, e $|x'\rangle$ autovetor simultâneo dos operadores \hat{X} , \hat{Y} e \hat{Z} . A expansão do estado $|\alpha\rangle$ fica

$$|\alpha\rangle = \int d^3x' |x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle, \quad (2.118)$$

então, como $|x'\rangle$ é um autovetor simultâneo, é válida a seguinte relação de comutação

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0. \quad (2.119)$$

2.5.3 Operador translação

Agora, para encontrarmos um operador que corresponde ao observável momento linear, definiremos o operador translação infinitesimal, que muda um estado bem localizado x' para $x' + dx'$, da forma

$$\hat{\mathcal{S}}(dx') |x'\rangle = |x' + dx'\rangle, \quad (2.120)$$

e a expressão de um ket arbitrário $|\alpha\rangle$ fica

$$\hat{\mathcal{S}}(dx')|\alpha\rangle = \hat{\mathcal{S}}(dx') \int d^3x' |x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle \quad (2.121)$$

$$= \int d^3x' |x' + dx'\rangle \langle x'|\alpha\rangle \quad (2.122)$$

$$= \int d^3x' |x'\rangle \langle x' - dx'|\alpha\rangle, \quad (2.123)$$

tratando x' como uma variável de integração. O operador translação apresenta as seguintes propriedades

1. Se um ket $|\alpha\rangle$ é normalizado, então $\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')|\alpha\rangle$ também é

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{\mathcal{S}}^\dagger(d\mathbf{x}')\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')|\alpha\rangle. \quad (2.124)$$

2. Uma translação $d\mathbf{x}'$ e depois $d\mathbf{x}''$, tem que resultar em $d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}''$

$$\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}'') = \hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}''). \quad (2.125)$$

3. Translação na direção oposta é o mesmo que uma translação inversa

$$\hat{\mathcal{S}}(-d\mathbf{x}') = \hat{\mathcal{S}}^{-1}(d\mathbf{x}'). \quad (2.126)$$

4. Quando $d\mathbf{x}' \rightarrow 0$ o operador translação se reduz ao operador identidade, sendo a diferença de primeira ordem em $d\mathbf{x}'$

$$\lim_{d\mathbf{x}' \rightarrow 0} \hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}') = \hat{1} \quad (2.127)$$

Agora, adotamos o operador translação como sendo $\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}') = 1 - i\hat{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{x}'$, sendo as componentes de \hat{K} operadores hermitianos, satisfazendo as propriedades anteriores:

1. $\hat{\mathcal{S}}^\dagger(d\mathbf{x}')\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}') = 1$

$$(1 + i\hat{\mathbf{K}}^\dagger \cdot d\mathbf{x}')(1 - i\hat{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{x}') = 1 + i(\hat{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{K}}) \cdot d\mathbf{x}' + \hat{\mathbf{K}}^\dagger \hat{\mathbf{K}} d\mathbf{x}'^2$$

$$(1 + i\hat{\mathbf{K}}^\dagger \cdot d\mathbf{x}')(1 - i\hat{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{x}') \simeq 1.$$

2. $\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}'') = \hat{\mathcal{S}}^\dagger(d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'')$

$$(1 - i\hat{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{x}')(1 - i\hat{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{x}'') = (1 - i\hat{\mathbf{K}} \cdot (d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'')) - (\hat{\mathbf{K}})^2 \cdot d\mathbf{x}' d\mathbf{x}''$$

$$(1 - i\hat{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{x}')(1 - i\hat{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{x}'') \simeq (1 - i\hat{\mathbf{K}} \cdot (d\mathbf{x}' + d\mathbf{x}''))$$

3. $\hat{\mathcal{S}}(-d\mathbf{x}') = \hat{\mathcal{S}}^{-1}(d\mathbf{x}')$

$$(1 - i\hat{\mathbf{K}} \cdot (-d\mathbf{x}')) = (1 + i\hat{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{x}') = (1 + i\hat{\mathbf{K}} \cdot d\mathbf{x}')^\dagger = \hat{\mathcal{S}}^{-1}(d\mathbf{x}'),$$

Por (2.120), podemos obter as seguintes expressões

$$\hat{X}\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')|\mathbf{x}'\rangle = \hat{X}|\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle \quad (2.128)$$

$$= (\mathbf{x}' + d\mathbf{x}')|\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle, \quad (2.129)$$

$$\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')\hat{X}|\mathbf{x}'\rangle = \mathbf{x}'\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')|\mathbf{x}'\rangle \quad (2.130)$$

$$= \mathbf{x}'|\mathbf{x}' + d\mathbf{x}'\rangle, \quad (2.131)$$

portanto, a relação de comutação entre \hat{X} e $\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')$ com uma aproximação em primeira ordem é dado pela subtração das equações acima,

$$[\hat{X}, \hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')]|\mathbf{x}'\rangle \simeq d\mathbf{x}'|\mathbf{x}'\rangle, \quad (2.132)$$

logo,

$$[\hat{X}, \hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')] = d\mathbf{x}', \quad (2.133)$$

o lado esquerdo fica,

$$-i\hat{X}\hat{K} \cdot d\mathbf{x}' + i \cdot \hat{K} \cdot d\mathbf{x}'\hat{X} = d\mathbf{x}', \quad (2.134)$$

entendendo que $d\mathbf{x}'$ como um número multiplicando pelo operador identidade [2], é válida a seguinte relação de comutação

$$[\hat{x}_i, \hat{K}_j] = i\delta_{ij}. \quad (2.135)$$

Até agora escrevemos \hat{K} em termos do operador $\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')$, mas contudo, ainda não podemos defini-lo como sendo o operador momento, pois sua dimensão é $[1/\text{comprimento}]$. Mas podemos definir como sendo

$$\hat{K} = \frac{\hat{P}}{(\text{constante universal com dimensão de ação})}, \quad (2.136)$$

trazendo da mecânica clássica o sentido de que o momento é gerador de translação. Sendo assim, uma translação infinitesimal pode ser vista como uma transformação canônica do tipo

$$\mathbf{X}_{novo} \equiv \mathbf{X} = \mathbf{x} + d\mathbf{x} \text{ e } \mathbf{P}_{novo} \equiv \mathbf{P} = \mathbf{p},$$

relação que pode ser obtida pela função geratriz

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{P} + d\mathbf{x} \cdot \mathbf{P} \begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{P} \\ \mathbf{X} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{x} + d\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.137)$$

A função geratriz $F(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{P}$ é uma função geratriz de transformação que nos leva a $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{P} = \mathbf{p}$.

A constante mencionada acima aparece na relação de de Broglie, dada por

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{P}{\hbar} \quad (2.138)$$

contanto que o operador \hat{K} correspondente ao "número de onda" k na mecânica clássica [9]. Então o operador translação fica

$$\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}') = 1 - \frac{i\hat{P} \cdot d\mathbf{x}'}{\hbar}, \quad (2.139)$$

e a relação de comutação (2.135) fica

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (2.140)$$

2.5.4 Princípio de incerteza de Heisenberg

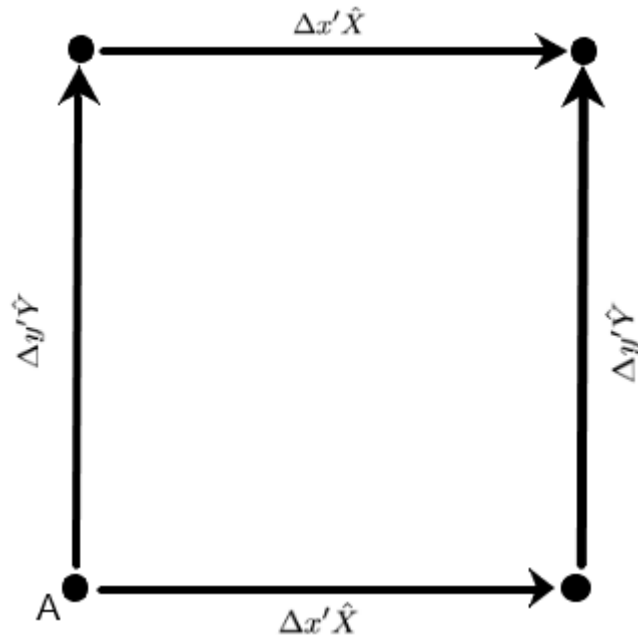
O problema da dualidade onda-partícula serviu como pano de fundo das relações de W. Heisenberg em 1927, onde na versão estatística Heisenberg passou a escrever as incertezas em termos dos desvios-padrões das distribuições de probabilidades dadas pelo quadrado do módulo das funções de onda [10], sendo a probabilidade de se encontrar uma partícula entre as posições x e $x + dx$ é dado por $|\varphi(x)|^2 dx$ [10]. Assim, essa interpretação não diz respeito apenas a um ente quântico, mas um ensemble, onde os valores aleatórios de cada componente se distribuem segundo uma curva dada pela função de onda que descreve o sistema [10].

Na mecânica Quântica não se consegue determinar indiscutivelmente a posição de uma partícula, apenas uma função chamada densidade de probabilidade que define a probabilidade de encontrar a partícula em um intervalo. Se quisermos determinar a posição de uma partícula realizamos uma medição fazendo a função de onda colapsar e um ponto, mas o comprimento de onda fica amplo para determinar, ou seja, não determinamos o momento, do mesmo modo a medição para se obter o momento faz a função de onda colapsar em uma contínua onda sinusoidal com comprimento de onda bem definido mas a partícula não está mais na posição anterior [6]. De posse da relação de comutação (2.140), podemos chegar na relação de incerteza posição-momento proposto por Heisenberg substituindo a Eq.(2.140) na Eq.(2.100)

$$\sigma_x^2 \sigma_p^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{X}, \hat{P}] \rangle \right)^2 = \left(\frac{1}{2I} i\hbar \right)^2 \quad (2.141)$$

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.142)$$

Figura 1 – Translações sucessivas em diferentes direções



Fonte: Elaborada pelo autor [2]

2.5.5 Translação sucessiva

Na subsecção 2.5.3 trabalhamos com translações infinitesimais, enunciemos agora o conceito de translação finita, ou seja, um deslocamento espacial $\Delta X'$ obtida fazendo sucessivas translações infinitesimais, logo uma translação finita na direção X' é dado por

$$\hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}}) |\mathbf{x}'\rangle = |\mathbf{x}' + \Delta x' \hat{\mathbf{x}}\rangle, \quad (2.143)$$

se forem realizadas N translações, e fazendo o limite de $N \rightarrow \infty$

$$\hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i \hat{P}_x \Delta x'}{N \hbar} \right)^N = \exp \left(-\frac{i \hat{P}_x \Delta x'}{\hbar} \right) \quad (2.144)$$

sendo a exponencial uma função do operador \hat{P}_x , e para qualquer operador \hat{X} , fica

$$\exp(\hat{X}) = 1 + x + \frac{X^2}{2!} + \dots \quad (2.145)$$

e aplicando o operador translação sucessivas vezes nas direções x e y como na Figura 1, temos

$$\hat{\mathcal{S}}(\Delta y' \hat{\mathbf{y}}) \hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}} + \Delta y' \hat{\mathbf{y}})^3 \quad (2.146)$$

$$\hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathcal{S}}(\Delta y' \hat{\mathbf{y}}) = \hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}} + \Delta y' \hat{\mathbf{y}}), \quad (2.147)$$

agora considerando a Eq.(2.144) até segunda ordem, faremos o comutador das translações acima

$$[\hat{\mathcal{S}}(\Delta y' \hat{\mathbf{y}}), \hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}})] = \left[\left(1 - \frac{i\hat{p}_y \Delta y'}{\hbar} - \frac{\hat{p}_y^2 (\Delta y')^2}{2\hbar^2} + \dots \right), \left(1 - \frac{i\hat{p}_x \Delta x'}{\hbar} - \frac{\hat{p}_x^2 (\Delta x')^2}{2\hbar^2} + \dots \right) \right]$$

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{S}}(\Delta y' \hat{\mathbf{y}}), \hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}})] &= 1 - \frac{i\hat{p}_x \Delta x'}{\hbar} - \frac{\hat{p}_x^2 (\Delta x')^2}{2\hbar^2} - \frac{i\hat{p}_y \Delta y'}{\hbar} - \frac{\hat{p}_y \hat{p}_x \Delta y' \Delta x'}{\hbar^2} + \frac{\hat{p}_y \Delta y' \hat{p}_x^2 (\Delta x')^2}{2\hbar^3} \\ &\quad - \frac{\hat{p}_y^2 (\Delta y')^2}{2\hbar^2} + \frac{i\hat{p}_y^2 p_x (\Delta y')^2 \Delta x'}{2\hbar^3} + \frac{\hat{p}_y^2 \hat{p}_x^2 (\Delta y')^2 (\Delta x')^2}{4\hbar^4} - 1 + \frac{i\hat{p}_y \Delta y'}{\hbar} \\ &\quad + \frac{\hat{p}_y^2 (\Delta y')^2}{2\hbar^2} + \frac{i\hat{p}_x \Delta x'}{\hbar} + \frac{\hat{p}_x \Delta x' \hat{p}_y \Delta y'}{\hbar^2} - \frac{i\hat{p}_x \Delta x' \hat{p}_y^2 (\Delta y')^2}{2\hbar^3} \\ &\quad + \frac{\hat{p}_x^2 (\Delta x')^2}{2\hbar^2} - \frac{i\hat{p}_x^2 (\Delta x')^2 \hat{p}_y \Delta y'}{2\hbar^3} - \frac{\hat{p}_x^2 \hat{p}_y^2 (\Delta x')^2 (\Delta y')^2}{4\hbar^4}, \end{aligned}$$

sendo os termos quadráticos muito pequenos, temos

$$[\hat{\mathcal{S}}(\Delta y' \hat{\mathbf{y}}), \hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}})] \simeq \left(-\frac{\hat{p}_y \hat{p}_x \Delta y' \Delta x'}{\hbar^2} + \frac{\hat{p}_x \hat{p}_y \Delta x' \Delta y'}{\hbar^2} \right), \quad (2.148)$$

$$[\hat{\mathcal{S}}(\Delta y' \hat{\mathbf{y}}), \hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}})] \simeq \frac{(\Delta x')(\Delta y')[\hat{p}_y, \hat{p}_x]}{\hbar^2}. \quad (2.149)$$

Pelas Eqs. (2.146) e (2.147) a solução da Eq. (2.149) deve ser zero, logo $[\hat{\mathcal{S}}(\Delta y' \hat{\mathbf{y}}), \hat{\mathcal{S}}(\Delta x' \hat{\mathbf{x}})] = 0$ que nos remete que

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = 0, \quad (2.150)$$

ou

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (2.151)$$

ou seja, translações em diferentes direções comutam. A Eq. (2.150) nos leva a entender que os operadores \hat{p}_x , \hat{p}_y e \hat{p}_z são mutuamente compatíveis, logo tem-se um autovetor simultâneo

$$|\mathbf{p}\rangle = |p_x, p_y, p_z\rangle. \quad (2.152)$$

Veremos o efeito do operador translação sobre um autovetor de momento

$$\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}') |\mathbf{p}'\rangle = \left(1 - \frac{i\hat{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{x}'}{\hbar} \right) |\mathbf{p}'\rangle = \left(1 - \frac{i\mathbf{p}' \cdot d\mathbf{x}'}{\hbar} \right) |\mathbf{p}'\rangle, \quad (2.153)$$

³ sendo aqui $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ os vetores unitários nas direções de x e y .

pelo lado direito da Eq. (2.153), percebemos que os autovalores do operador translação não são reais, logo $\hat{\mathcal{S}}(d\mathbf{x}')$ não é hermitiano. As relações (2.119), (2.150) e (2.140), as relações fundamentais de comutação da Mecânica Quântica [2].

2.5.6 Funções de onda no espaço de posição

Retornando ao caso unidimensional onde os autovetores de base são os kets de posição, a relação autovetor-autovalor fica

$$\hat{X}|x'\rangle = x'|x'\rangle, \quad (2.154)$$

a condição de ortogonalidade levando em consideração que os kets são normalizados, temos

$$\langle x''|x'\rangle = \langle x'|x'\rangle \delta(x'' - x') = \delta(x'' - x'), \quad (2.155)$$

podemos expandir um ket de estado arbitrário em termos dos autokets de posição

$$|\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle. \quad (2.156)$$

Sendo o termo $\langle x'|\alpha\rangle$ o coeficiente de expansão ou a função de onda $\psi_\alpha(x')$ para o estado $|\alpha\rangle$, portanto

$$\langle x'|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x'), \quad (2.157)$$

podemos interpretar o coeficiente de expansão como sendo

$$|\langle x'|\alpha\rangle|^2 dx' \quad (2.158)$$

a probabilidade de se encontrar uma partícula em um pequeno intervalo dx' em torno de x' .

Consideraremos o produto $\langle \beta|\alpha\rangle$ de tal forma que

$$\langle \beta|\alpha\rangle = \int dx' \langle \beta|x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle \quad (2.159)$$

$$= \int dx' \psi_\beta^*(x') \psi_\alpha(x'), \quad (2.160)$$

onde o produto $\langle \beta|\alpha\rangle$ a integral da sobreposição, ou seja, o quanto as ondas se sobrepõem em relação a um ponto do espaço, ou até mesmo é entendida como a amplitude de probabilidade do estado $|\alpha\rangle$ ser encontrado no estado $|\beta\rangle$. Da mesma forma, $\langle \beta|\hat{A}|\alpha\rangle$

$$\langle \beta|\hat{A}|\alpha\rangle = \int dx' \int dx'' \langle \beta|x'\rangle \langle x'|\hat{A}|x''\rangle \langle x''|\alpha\rangle \quad (2.161)$$

$$\langle \beta|\hat{A}|\alpha\rangle = \int dx' \int dx'' \psi_\beta^*(x') \langle x'|\hat{A}|x''\rangle \psi_\alpha(x''), \quad (2.162)$$

para resolvermos temos que conhecer o elemento de matriz $\langle x' | \hat{A} | x'' \rangle$, para o caso em que $\hat{A} = x^2$

$$\langle x' | x^2 | x'' \rangle = \langle x' | \cdot (x''^2 | x'' \rangle) = x''^2 \langle x' | x'' \rangle = x''^2 \delta(x' - x'') = x'^2 \delta(x' - x''). \quad (2.163)$$

Substituímos na Eq.(2.162)

$$\langle \beta | x^2 | \alpha \rangle = \int dx' \int dx'' \psi_{\beta}^*(x') x'^2 \delta(x' - x'') \psi_{\alpha}(x'') \quad (2.164)$$

$$\langle \beta | x^2 | \alpha \rangle = \int dx' \psi_{\beta}^*(x') x'^2 \psi_{\alpha}(x'), \quad (2.165)$$

de forma geral

$$\langle \beta | f(x) | \alpha \rangle = \int dx' \psi_{\beta}^*(x') f(x') \psi_{\alpha}(x'). \quad (2.166)$$

2.5.7 Operador momento na base de autovetores de posição

Continuaremos agora vendo a representação do operador translação infinitesimal, onde os autovetores de posição são usados como kets de base. Aplicamos o operador em um ket $|\alpha\rangle$ e expandimos em termos dos autokets $|x\rangle$

$$\left(1 - \frac{\hat{P}\Delta x'}{\hbar}\right) |\alpha\rangle = \int dx' \hat{\mathcal{S}}(\Delta x') |x'\rangle \langle x' | \alpha \rangle \quad (2.167)$$

$$= \int dx' |x' + \Delta x'\rangle \langle x' | \alpha \rangle \quad (2.168)$$

$$= \int dx' |x'\rangle \langle x' - \Delta x' | \alpha \rangle. \quad (2.169)$$

levando em consideração que $\langle x' | \alpha \rangle = \psi_{\alpha}(x')$, usamos derivada por definição em relação a x' ,

$$\frac{d\psi_{\alpha}(x')}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{\psi_{\alpha}(x' + \Delta x') - \psi_{\alpha}(x')}{\Delta x'} \quad (2.170)$$

$$= \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{\psi_{\alpha}(x') - \psi_{\alpha}(x' - \Delta x')}{\Delta x'}, \quad (2.171)$$

e uma aproximação da derivada (2.171), seria

$$\frac{d\psi_{\alpha}(x')}{dx'} = \frac{\psi_{\alpha}(x') - \psi_{\alpha}(x' - \Delta x')}{\Delta x'}$$

$$\Delta x' \frac{d\psi_{\alpha}(x')}{dx'} = \psi_{\alpha}(x') - \psi_{\alpha}(x' - \Delta x')$$

$$\psi_{\alpha}(x' - \Delta x') = \psi_{\alpha}(x') - \Delta x' \frac{\partial \psi_{\alpha}(x')}{\partial x'},$$

na notação de braketts fica

$$\langle x' - \Delta x' | \alpha \rangle = \langle x' | \alpha \rangle - \Delta x' \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha \rangle. \quad (2.172)$$

Substituindo a Eq. (2.172) na Eq. (2.169), temos

$$\left(1 - \frac{i\hat{P}\Delta x'}{\hbar}\right) |\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle \left(\langle x' | \alpha \rangle - \Delta x' \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha \rangle\right), \quad (2.173)$$

aplicando o $\langle x'' |$ em ambos os lados de (2.173)

$$\langle x'' | \left(1 - \frac{i\hat{P}\Delta x'}{\hbar}\right) |\alpha\rangle = \int dx' \langle x'' | x' \rangle \left(\langle x' | \alpha \rangle - \Delta x' \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha \rangle\right) \quad (2.174)$$

$$\langle x'' | \left(1 - \frac{i\hat{P}\Delta x'}{\hbar}\right) |\alpha\rangle = \int dx' \delta(x'' - x') \left(\langle x' | \alpha \rangle - \Delta x' \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha \rangle\right), \quad (2.175)$$

usando a propriedade de filtração, fica

$$\langle x'' | \left(1 - \frac{i\hat{P}\Delta x'}{\hbar}\right) |\alpha\rangle = \langle x'' | \alpha \rangle - \Delta x' \frac{\partial}{\partial x'} \langle x'' | \alpha \rangle \quad (2.176)$$

$$\langle x'' | \alpha \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle x'' | \hat{P} | \alpha \rangle \Delta x' = \langle x'' | \alpha \rangle - \Delta x' \frac{\partial}{\partial x'} \langle x'' | \alpha \rangle, \quad (2.177)$$

logo

$$\langle x'' | \hat{P} | \alpha \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x'' | \alpha \rangle \quad (2.178)$$

e

$$\hat{P} | \alpha \rangle = \int dx' |x'\rangle \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | \alpha \rangle\right) \quad (2.179)$$

trocando x'' por x' teremos a expressão dada por J.J. Sakuray [2]. Quando o operador \hat{P} atuando em um ket de posição, os elementos de matriz fica,

$$\langle x' | \hat{P} | x'' \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x' | x'' \rangle \quad (2.180)$$

pela propriedade de ortogonalidade, obtemos

$$\langle x' | \hat{P} | x'' \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x' - x''), \quad (2.181)$$

de modo que, aplicando (2.178) repetidas vezes, obtemos

$$\langle x' | \hat{P}^n | \alpha \rangle = (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x'^n} \langle x' | \alpha \rangle, \quad (2.182)$$

e também

$$\langle \beta | \hat{P}^n | \alpha \rangle = \int dx' \psi_\beta^*(x') (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x'^n} \psi_\alpha(x'). \quad (2.183)$$

2.5.8 Funções de onda no espaço de momento

Agora trabalharemos no espaço dos momentos, ou seja, no espaço gerado pelos autovetores de \hat{P} , $\{|p'\rangle\}$, considerando que há uma simetria entre os espaços de momento e de posição. Consideramos as seguintes relações para o caso unidimensional:

$$\hat{P}|p'\rangle = p'|p'\rangle; \quad (2.184)$$

$$\langle p'|p''\rangle = \delta(p' - p''); \quad (2.185)$$

$$|\alpha\rangle = \int dp'|p'\rangle \langle p'|\alpha\rangle; \quad (2.186)$$

$$\langle p'|\alpha\rangle = \phi_\alpha(p'); \quad (2.187)$$

onde $\phi_\alpha(p')$ é a função de onda no espaço de momento, e sua interpretação probabilística é que; $|\langle p'|\alpha\rangle|^2 dp'$ é a probabilidade de se obter p' em um intervalo dp' quando se realiza a medida de \hat{P} . Portanto, para $|\alpha\rangle$ normalizado

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = \int dp' \langle \alpha|p'\rangle \langle p'|\alpha\rangle = \int dp' |\phi_\alpha(p')|^2 = 1. \quad (2.188)$$

Fica definido a função de transformação entre o espaço de posição e o espaço de momento: $\langle x'|p'\rangle$. Por (2.180), podemos escrever

$$\langle x'|\hat{P}|p'\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x'|p'\rangle \quad (2.189)$$

$$P' \langle x'|p'\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x'|p'\rangle, \quad (2.190)$$

sendo $\phi_{p'}(x') = \langle x'|p'\rangle$, temos

$$P' \phi_{p'}(x') = -i\hbar \frac{d}{dx'} \phi_{p'}(x') \quad (2.191)$$

$$-\frac{P'}{i\hbar} \int dx' = \int \frac{d\phi_{p'}}{\phi_{p'}} \quad (2.192)$$

$$\frac{iP'}{\hbar} x' = \ln \phi_{p'} + c \quad (2.193)$$

$$\phi_{p'}(x') = N \exp\left(\frac{iP'}{\hbar} x'\right), \quad (2.194)$$

ou seja, obtemos a amplitude de probabilidade de se obter no autovetores de posição um autovetor de momento, ou chamar de a função de onda para autovetor p' . Se olharmos para o fato de que $p' = \hbar k$, vemos que a função de onda de um autoestado de momento é uma onda plana. O que

nos chama a atenção é termos chegado na solução do tipo onda plana, sem se quer ter resolvido a equação de Schrödinger [2].

Consideramos agora o produto

$$\langle x'|x''\rangle = \int dp' \langle x'|p'\rangle \langle p'|x''\rangle, \quad (2.195)$$

substituindo a Eq.(2.194), temos

$$\delta(x' - x'') = |N|^2 \int dp' \exp \left[\frac{ip'}{\hbar}(x' - x'') \right] \quad (2.196)$$

pela relação de De Broglie, fazemos $\frac{p'}{\hbar} = k$, logo

$$dk = \frac{1}{\hbar} dp'$$

$$dp' = \hbar dk$$

então,

$$\delta(x' - x'') = |N|^2 \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(x' - x'')k] dk, \quad (2.197)$$

por definição da transformada de Fourier da delta de Dirac, fazemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(x' - x'')k] dk = 2\pi \delta(x' - x'')$$

logo

$$\delta(x' - x'') = |N|^2 \hbar 2\pi \delta(x' - x'') \quad (2.198)$$

$$|N|^2 = \frac{1}{\hbar 2\pi} \quad (2.199)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{\hbar 2\pi}} \quad (2.200)$$

logo, convencionando N como sendo real puro e positivo [2], teremos

$$\langle x'|p'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\hbar 2\pi}} \cdot \exp \left(\frac{ip'x'}{\hbar} \right), \quad (2.201)$$

com a função de transformação (2.201) em mãos, podemos escrever

$$\langle x'|\alpha\rangle = \int dp' \langle x'|p'\rangle \langle p'|\alpha\rangle \quad (2.202)$$

e

$$\langle p'|\alpha\rangle = \int dx' \langle p'|x'\rangle \langle x'|\alpha\rangle \quad (2.203)$$

logo

$$\psi_{\alpha}(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp' \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \phi_{\alpha}(p') \quad (2.204)$$

$$\phi_{\alpha}(p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx' \psi_{\alpha}(x') \exp\left(\frac{-ip'x'}{\hbar}\right). \quad (2.205)$$

As Eqs. (2.204) e (2.205) nos mostram como as funções de onda no espaço de posição se relaciona com função de onda no espaço dos momentos, para um determinado $|\alpha\rangle$. Essas equações nos mostram relações análogas as transformadas e anti-transformadas de Fourier.

3 FORMALISMO UNIDIMENSIONAL DA MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-ADITIVA

Neste capítulo, vamos rever o formalismo unidimensional da MQNA, desenvolvido a partir de primeiros princípios [4]. Tentaremos entender os efeitos quânticos quando levamos em consideração a métrica do espaço.

De acordo com Riemann, a geometria se fundamenta nos dois seguintes fatos

1. Espaço é um contínuo tridimensional, logo, o produto formado pelo seus pontos é descrito, de forma contínua pelo sistema de valores de três coordenadas q_1, q_2 e q_3 .
2. O quadrado da distância entre dois pontos infinitamente vizinhos $P = (q_1, q_2, q_3)$ e $P' = (q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$ é dado pelo forma quadrática das coordenadas relativas dq_i

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dq_i dq_j, \quad (3.1)$$

sendo g_{ij} o tensor métrico, e simétrico de tal forma que $g_{ij} = g_{ji}$, logo o espaço é um contínuo métrico.

No caso do espaço euclidiano, o tensor métrico é dado por

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

de sorte que a Eq.(3.1) para dois pontos infinitamente vizinhos $p = (x, y, z)$ e $p' = (x + dx, y + dy, z + dz)$ para uma métrica diagonal, fica

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (3.3)$$

3.1 Caso unidimensional

Agora, postulamos que o espaço das posições é o espaço de Riemann unidimensional, sendo descrito de forma contínua pelo sistema de valores da coordenada x [4]. Portanto, o quadrado da distância entre dois pontos $p = (x)$ e $p' = (x + dx)$, será

$$ds^2 = g(x)dx^2. \quad (3.4)$$

Destarte, o espaço das funções de x é o espaço de Hilbert com um peso, com x em um certo intervalo $a \leq x \leq b$,

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 \sqrt{g(x)} dx < \infty, \quad (3.5)$$

assim, o produto de duas funções de onda é dado por

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_a^b \phi^*(x) \psi(x) \sqrt{g(x)} dx. \quad (3.6)$$

Consequentemente seguem as propriedades

$$\begin{aligned} \langle \phi | \psi \rangle &= \langle \psi | \phi \rangle^* \\ \langle \phi | \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \rangle &= \lambda_1 \langle \phi | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \phi | \psi_2 \rangle \\ \langle \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 | \psi \rangle &= \lambda_1^* \langle \phi_1 | \psi \rangle + \lambda_2^* \langle \phi_2 | \psi \rangle \end{aligned}$$

Pela equações acima, definiremos norma e ortogonalidade de funções. De sorte que, duas funções quaisquer $\psi(x)$ e $\phi(x)$, são ortogonais quando o seu produto for zero: $\langle \phi | \psi \rangle = 0$. A norma de uma função $\psi(x)$ será

$$\|\phi(x)\| = \sqrt{\langle \phi | \phi \rangle} \quad (3.7)$$

associando a um número não-negativo.

Partindo desse pressuposto, uma partícula com uma posição bem definida, é descrita pelo ket $|x\rangle$, de modo que a relação autovetor-autovalor fica,

$$\hat{X} |x\rangle = x |x\rangle \quad (3.8)$$

Sendo o conjunto dos kets de posição completo $|x\rangle$, a relação de completeza fica

$$\hat{1} = \int \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x|, \quad (3.9)$$

o lado esquerdo da equação é chamado de operador identidade.

Demonstração :

Sabe-se que $\phi^*(x) = \langle \phi | x \rangle$ e $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$. portanto, da Eq.(3.8) temos,

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \sqrt{g(x)} dx \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle \quad (3.10)$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \left[\int \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x| \right] | \psi \rangle \quad (3.11)$$

então,

$$\hat{1} = \int \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x| \quad (3.12)$$

■

O produto escalar entre kets de posição para a métrica em uma dimensão é dado por

$$\langle x|x' \rangle = g(x)^{-1/2} \delta(x-x') \quad (3.13)$$

Demonstração :

Pela Eq.(3.9)

$$\begin{aligned} \phi(x') = \langle x'|\phi \rangle &= \langle x'| \left[\int \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x| \right] |\phi \rangle \\ \phi(x') &= \int \left(\sqrt{g(x)} dx \langle x'|x \rangle \right) \langle x|\phi \rangle dx \\ \phi(x') &= \int \sqrt{g(x)} dx \langle x'|x \rangle \phi(x), \end{aligned}$$

usando a propriedade de filtração, se $a < x' < b$, temos

$$\int_a^b f(x) \delta(x-x') dx = f(x'), \quad (3.14)$$

faremos agora o processo inverso,

$$\int \phi(x) \delta(x-x') dx = \int \sqrt{g(x)} \langle x'|x \rangle \phi(x) dx \quad (3.15)$$

portanto, para que a igualdade seja verdadeira, teremos

$$\delta(x-x') = \sqrt{g(x)} \langle x'|x \rangle \quad (3.16)$$

então

$$\langle x'|x \rangle = g(x)^{-1/2} \delta(x-x').$$

■

Portanto, podemos expandir um ket arbitrário $|\psi\rangle$ em termos dos autokets de posição,

$$|\psi\rangle = \int \sqrt{g(x)} dx |x\rangle \langle x|\psi\rangle, \quad (3.17)$$

sendo $\langle x|\psi\rangle$ o coeficiente de expansão.

Agora, postulamos o operador translação infinitesimal \hat{T}_g [4], generalizando a ideia de R. N. Filho [11], da forma

$$\hat{T}_g(dx) |x\rangle = |x + g(x)^{-1/2} dx\rangle, \quad (3.18)$$

de sorte que, se fizermos $g(x) = 1$ caímos na mecânica Quântica tradicional desenvolvida no capítulo 2, ou se fizermos $g(x)^{-1/2} = 1 + \gamma x$, recuperaremos os resultados encontrados por R. N. Filho et al[11].

Então, para uma translação ds , levando de x para $x + dx$, fica

$$\hat{T}_g(ds) |x\rangle = |x + dx\rangle. \quad (3.19)$$

Portanto, em um espaço curvo, o operador translação é não-aditivo, da forma

$$\hat{T}_g(dx')\hat{T}_g(dx'') \neq \hat{T}_g(dx' + dx'') \quad (3.20)$$

Demonstração :

Pela Eq.(3.18) podemos fazer

$$\hat{T}_g(dx')\hat{T}_g(dx'') |x\rangle = \hat{T}_g(dx') |x + g(x)^{-1/2} dx''\rangle \quad (3.21)$$

$$= |x + g(x)^{-1/2} dx'' + g(x + g(x)^{-1/2} dx'')^{-1/2} dx'\rangle, \quad (3.22)$$

no entanto, a soma das translações nos dá

$$\hat{T}_g(dx' + dx'') |x\rangle = |x + g(x)^{-1/2} (dx' + dx'')\rangle \quad (3.23)$$

$$= |x + g(x)^{-1/2} dx' + g(x)^{-1/2} dx''\rangle \quad (3.24)$$

como $g(x)$ não é igual a $g(x + g(x)^{-1/2} dx'')$, vemos que $\hat{T}_g(dx)$ é em geral, não-aditivo [4].

Da definição do operador translação $\hat{T}_g(dx)$, temos a seguinte propriedade

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \hat{T}_g(dx) = \hat{1}. \quad (3.25)$$

Das Eqs.(3.8) e (3.18) obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{T}_g(dx)] |x\rangle &= x + g(x)^{-1/2} dx |x + g(x)^{-1/2} dx\rangle - x |x + g(x)^{-1/2} dx\rangle \\ &= g(x)^{-1/2} dx |x + g(x)^{-1/2} dx\rangle, \end{aligned} \quad (3.26)$$

e uma aproximação com um erro de segunda ordem em dx , fica

$$[\hat{X}, \hat{T}_g(dx)] |x\rangle \approx g(X)^{-1/2} dX |x\rangle, \quad (3.27)$$

portanto,

$$[\hat{X}, \hat{T}_g(dx)] \approx g(X)^{-1/2} dX. \quad (3.28)$$

Do mesmo modo que no capítulo anterior, consideramos que o operador momento generalizado é gerador de translação, logo, podemos escrever

$$\hat{T}_g(dx) \equiv \hat{1} - \frac{i\hat{P}_g dX}{\hbar}. \quad (3.29)$$

Pelas Eqs.(3.28) e (3.29) obtemos uma relação de comutação deformada entre os operadores posição e momento generalizado

$$\left[\hat{X}, 1 - \frac{i\hat{P}_g dX}{\hbar} \right] = \frac{-i}{\hbar} [\hat{X}, \hat{P}_g dX], \quad (3.30)$$

portanto

$$[\hat{X}, \hat{P}_g] = i\hbar g(X)^{-1/2}. \quad (3.31)$$

3.2 Operador *momentum* no espaço das posições

Agora, veremos a aparência do operador *momentum* generalizado na base dos auto-
vetores de posição

$$\langle x | \hat{P}_g | \psi \rangle = -i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx} \langle x | \psi \rangle. \quad (3.32)$$

Demonstração:

Considerando $\delta s = \sqrt{g(x)} \delta x$, o operador translação atuando em um ket, fica

$$\hat{T}_g(\delta s) | \psi \rangle = | \psi \rangle - \frac{i\hat{P}_g \delta s}{\hbar} | \psi \rangle, \quad (3.33)$$

usando o operador identidade com $ds' = \sqrt{g(x')} dx'$ no lado esquerdo, temos

$$\int ds' \hat{T}_g(\delta s) | x' \rangle \langle x' | \psi \rangle = | \psi \rangle - \frac{i\hat{P}_g \delta s}{\hbar} | \psi \rangle. \quad (3.34)$$

Pela Eq.(3.19)

$$\int ds' | x' + \delta x \rangle \langle x' | \psi \rangle = | \psi \rangle - \frac{i\hat{P}_g \delta s}{\hbar} | \psi \rangle$$

$$\int ds' | x' \rangle \langle x' - \delta x | \psi \rangle = | \psi \rangle - \frac{i\hat{P}_g \delta s}{\hbar} | \psi \rangle. \quad (3.35)$$

sendo $\langle x' | \psi \rangle = \phi_\psi(x')$, derivamos

$$\frac{d\phi_\psi(x')}{ds} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\phi_\psi(x' + \delta x) - \phi_\psi(x')}{\delta s},$$

a relação aproximada da equação acima fica,

$$\delta s \frac{\partial \phi_\psi(x')}{\partial s} \approx \phi_\psi(x') - \phi_\psi(x' - \delta x),$$

e portanto

$$\langle x' - \delta x | \psi \rangle \approx \langle x' | \psi \rangle - \delta s \frac{\partial}{\partial s} \langle x' | \psi \rangle, \quad (3.36)$$

substituindo esta relação na Eq.(3.35), obtemos

$$\int ds' |x'\rangle \left(\langle x' | \psi \rangle - \delta s \frac{\partial}{\partial s} \langle x' | \psi \rangle \right) = |\psi\rangle - \frac{i\hat{P}_g \delta s}{\hbar} |\psi\rangle. \quad (3.37)$$

Aplicamos $\langle x |$ nos dois lados da Eq.(3.37), obtemos

$$\begin{aligned} \int ds' \langle x | x' \rangle \left(\langle x' | \psi \rangle - \delta s \frac{\partial}{\partial s} \langle x' | \psi \rangle \right) &= \langle x | \psi \rangle - \frac{i\delta s}{\hbar} \langle x | \hat{P}_g | \psi \rangle \\ \langle x | \left[\int ds' |x'\rangle \langle x' | \right] | \psi \rangle - \int ds' \langle x | x' \rangle \delta s \frac{\partial}{\partial s} \langle x' | \psi \rangle &= \langle x | \psi \rangle - \frac{i\delta s}{\hbar} \langle x | \hat{P}_g | \psi \rangle \\ \int dx' \sqrt{g(x)} g(x)^{-1/2} \delta(x' - x) \frac{\partial}{\partial s} \langle x' | \psi \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle x | \hat{P}_g | \psi \rangle \\ \frac{\partial}{\partial s} \langle x | \psi \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle x | \hat{P}_g | \psi \rangle \end{aligned}$$

e portanto

$$\langle x | \hat{P}_g | \psi \rangle = -i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx} \langle x | \psi \rangle.$$

■

Consequentemente, o operador *momentum* generalizado no espaço das posições é dado por $\hat{P}_g = -i\hbar D_g$, onde

$$D_g = g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx}, \quad (3.38)$$

como resultado, o operador \hat{P}_g é Hermitiano com um peso

$$\langle \phi | \hat{P}_g | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_g | \phi \rangle^*. \quad (3.39)$$

Demonstração :

$$\begin{aligned}
 \langle \phi | \hat{P}_g | \psi \rangle &= \langle \phi | \int \sqrt{g(x)} dx | x \rangle \langle x | \hat{P}_g | \psi \rangle \\
 &= \int \sqrt{g(x)} dx \phi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \psi(x) \\
 &= \frac{\hbar}{i} \int dx \phi^*(x) \frac{d}{dx} \psi(x).
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

por conseguinte, \hat{P}_g atua no espaço de Hilbert do mesmo modo que $\hat{P} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ [4].

Fazendo $u = \phi^*(x)$ e $dv = \frac{d}{dx} \psi(x)$, realizamos integração por partes na Eq.(3.40) e supondo que $\phi(x)^* \psi(x)$ seja zero nos limites de integração, temos

$$\langle \phi | \hat{P}_g | \psi \rangle = -\frac{\hbar}{i} \int \psi(x) \frac{d}{dx} \phi^*(x) dx \tag{3.41}$$

$$\tag{3.42}$$

multiplicamos e dividimos por $\sqrt{g(x)}$

$$\begin{aligned}
 \langle \phi | \hat{P}_g | \psi \rangle &= \int \sqrt{g(x)} dx i\hbar \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \phi^*(x) \\
 &= \left[\int \sqrt{g(x)} dx \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \phi(x) \right) \right]^* \\
 &= \langle \psi | \hat{P}_g | \phi \rangle^*.
 \end{aligned}$$

■

Assim, podemos escrever a equação de Schrödinger dependente do tempo da seguinte forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle x | \psi(t) \rangle = \langle x | H_g | \psi(t) \rangle, \tag{3.43}$$

de modo que o hamiltoniano generalizado fica

$$H_g = \frac{\hat{P}_g^2}{2m} + V(X, t), \tag{3.44}$$

por conseguinte a Eq.(3.43) fica

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) D_g^2 \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t). \tag{3.45}$$

Se o potencial for independente do tempo, ou seja, $V = V(x)$, usamos o método de separação de variáveis, logo

$$\Psi(x, t) = \psi(x) T(t). \tag{3.46}$$

De sorte que a Eq.(3.45) fica

$$i\hbar\psi(x)\frac{d}{dt}T(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}T(t)D_g^2\psi(x) + V(x)T(t)\psi(x)$$

$$\frac{i\hbar}{T(t)}\frac{d}{dt}T(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}D_g^2\psi(x) + V(x). \quad (3.47)$$

Para que a igualdade seja verdadeira, ambos os lados devem ser constante, chamamos de E a constante de separação, logo

$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{E}{i\hbar}T(t)$$

$$\frac{1}{T(t)}dT(t) = \frac{E}{i\hbar}dt \Rightarrow T(t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

Já a equação de Schrödinger independente do tempo tem a seguinte forma,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}D_g^2\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (3.48)$$

pela Eq.(3.38), fica

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{g(x)}}\frac{d}{dx}\psi(x)\right] + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (3.49)$$

sendo a constante de separação a energia da partícula.

Os resultados discutidos anteriormente, obtidos por Braga J.P. M. [4], formam o que chamamos de Mecânica Quântica Não-Aditiva (MQNA), que tem como caso particular a mecânica Quântica tradicional, quando fazemos $g(x) = 1$. Nos capítulos posteriores, veremos as consequências físicas quando consideramos a métrica do espaço.

4 APLICAÇÃO DA MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-ADITIVA

De posse do formalismo unidimensional da Mecânica Quântica Não-aditiva, e considerando uma equação tipo Schrödinger no espaço das posições, revisitaremos os resultados obtidos por S. F. S. Oliveira e R. N. Costa filho [12].

4.1 Partícula livre

Consideramos agora uma partícula que se move sem influência de qualquer força, ou seja, sob potencial nulo. Para $V(x, t) = 0$, a equação tipo Schrödinger, Eq.(3.49), independente do tempo, supondo que $g(x)^{-1/2}$ possua uma série de Taylor, então

$$g(x)^{-1/2} = a_0 + \sum_{n=i}^{\infty} a_n x^n \quad (4.1)$$

considerando a série de $g(x)^{-1/2}$ até segunda ordem, sendo $a_0 = 1$, $a_1 = \gamma$, $a_2 = \beta^2$ e $a_n \geq 3 = 0$

$$g(x)^{-1/2} = 1 + \gamma x + \beta^2 x^2, \quad (4.2)$$

teremos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (1 + \gamma x + \beta^2 x^2) \frac{d}{dx} (1 + \gamma x + \beta^2 x^2) \frac{d}{dx} \phi_n(x) = E_n \phi_n(x) \quad (4.3)$$

sendo a solução a geral da equação acima, do tipo

$$\psi_n(x, t) = \phi_n(x) e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}}, \quad (4.4)$$

aqui, E_n são as energias de cada $\psi_n(x)$.

4.1.1 Mudança de variável

Para continuarmos, precisamos fazer uma mudança de variável. Agora, continuando o raciocínio do capítulo anterior, supomos que $g(x)^{-1/2}$ possua uma série de Taylor, então $g(x)^{-1/2} = 1 + \gamma x + \beta^2 x^2$.

Logo, a escolha da métrica

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + \gamma x + \beta^2 x^2)^2} dx^2 \quad (4.5)$$

onde $\gamma^2 < 4\beta^2$ para a métrica seja finita [4], ou seja, quando a condição $\gamma^2 < 4\beta^2$ não é assegurada a expressão (4.4) admite raízes reais levando ds^2 ao infinito. Integrando ds^2 da Eq.(4.5), obtemos

$$\eta(x) = \int dx \frac{1}{1 + \gamma x + \beta^2 x^2} \quad (4.6)$$

completando quadrado

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int dx \frac{1}{\left(\beta^2 x^2 + \gamma x - \frac{\gamma^2}{4\beta^2} + \frac{\gamma^2}{4\beta^2} + 1\right)} \\ &= \int dx \frac{1}{\left(\beta x + \frac{\gamma}{2\beta}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{4\beta^2} + 1} \end{aligned}$$

fazendo os termos constantes $-\frac{\gamma^2}{4\beta^2} + 1 = a$, chamando $u = \beta x + \frac{\gamma}{2\beta}$, $du = \beta dx$, logo

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \frac{1}{\beta} \int du \frac{1}{u^2 + (\sqrt{a})^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \tan^{-1} \left[\frac{2\beta^2 x + \gamma}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

integrando $\eta(x)$ de $-\infty$ a $+\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \frac{2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Agora, podemos então reescrever a Eq.(3.49), da formar

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{d\eta^2} \psi_n(\eta) &= E_n \psi_n(\eta) \\ \frac{d^2}{d\eta^2} \psi_n(\eta) &= -\frac{2m_0 E_n}{\hbar^2} \phi_n(\eta), \end{aligned}$$

sendo $k^2 = \frac{2m_0 E_n}{\hbar^2}$, teremos

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \psi_n(\eta) + k^2 \phi_n(\eta) = 0.$$

A solução é do tipo $\phi_n(\eta) = e^{p\eta}$, logo a solução geral fica

$$\phi_n(\eta) = A e^{ik\eta} + B e^{-ik\eta}. \quad (4.9)$$

Agora, retornando a variável x , a solução geral para a equação tipo Schrödinger fica,

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= A \exp \left[ik_n \frac{2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right] \\ &\quad + B \exp \left[-ik_n \frac{2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right] \\ \phi_n(x) &= A \cos \left[k_n \frac{2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right] \\ &\quad - iA \sin \left[k_n \frac{2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right] \\ &\quad + B \cos \left[k_n \frac{2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right] \\ &\quad + iB \sin \left[k_n \frac{2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right]\end{aligned}$$

Notamos que as soluções para a equação de Schrödinger independente do tempo leva em consideração a métrica e não apenas ondas planas em x , quando fizermos γ e β tenderem a zero na Eq.(4.1), recaímos nas soluções já conhecidas na mecânica Quântica tradicional.

Para determinarmos as constantes A e B , usaremos condições de contorno para $x \pm \infty$, usando $A = B$ temos

$$\cos \left(\frac{2k_n}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad (4.10)$$

logo para que a igualdade seja verdadeira

$$\frac{k_n \pi}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} = n \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.11)$$

nos levando a seguinte condição

$$K_n = \frac{n\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}}{2} \quad (4.12)$$

Portanto a solução fica

$$\phi_n(x) = A \cos \left[n \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right], \quad (4.13)$$

com $n = 1, 3, 5, \dots$. Como segunda condição de contorno faremos $A = -B$, logo

$$\sin \left(\frac{2k_n}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\frac{2k_n}{\sqrt{4^2 - \gamma^2}} \frac{\pi}{2} = \frac{n\pi}{2} \Rightarrow k_n = \frac{n\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}}{2},$$

logo a solução será

$$\phi_n(x) = A \sin \left[n \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right], \quad (4.14)$$

com $n = 2, 4, 6, \dots$. A constante A pode ser determinada pela normalização da função de onda $\phi_n(x)$.

$$|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 \left[n \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right] dx = 1, \quad (4.15)$$

pela Eq.(4.7), temos

$$\tan^{-1} \left[\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right] = \frac{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}}{2} \eta.$$

Portanto

$$|A|^2 \int_{\eta_{min}}^{\eta_{max}} \cos^2 \left[\frac{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}}{2} n \eta \right] = 1 \quad (4.16)$$

escolhendo $u = \frac{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}}{2} \eta$, $du = \frac{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}}{2} d\eta$, temos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2|A|^2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} [1 + \cos(2u)] du \\ &= |A|^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{4\beta^2 - \gamma^2}}, \end{aligned}$$

portanto

$$A = \left(\frac{4\beta^2 - \gamma^2}{\pi^2} \right)^{1/4}. \quad (4.17)$$

Da mesma forma, normalizando a função de onda da Eq.(4.14), temos

$$\begin{aligned} 1 &= |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \left[n \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right] dx \\ &= |A|^2 \int_{\eta_{min}}^{\eta_{max}} \sin^2 \left[n \frac{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}}{2} \eta \right] d\eta, \end{aligned}$$

o que nos dá

$$A = \left(\frac{4\beta^2 - \gamma^2}{\pi^2} \right)^{1/4}. \quad (4.18)$$

Usando as Eqs.(4.14) e (4.13), obtemos as funções de onda para uma partícula livre em um espaço deformado [12]:

$$\psi_n(x) = [(4\beta^2 - \gamma^2) / \pi^2]^{1/4} \begin{cases} \sin \left[n \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta^2 x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right], & n = 2, 4, 6, \dots \\ \cos \left[n \tan^{-1} \left(\frac{\gamma + 2\beta^2 x}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right) \right], & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (4.19)$$

pela Eq.(4.12) e o valor de k_n^2 , temos

$$K_n = \frac{\sqrt{2E_n m_0}}{\hbar}, \quad k_n = n \frac{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}}{2},$$

obtemos as energias E_n da partícula, dadas por

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 (4\beta^2 - \gamma^2)}{8m_0}, \quad (4.20)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$

Consequentemente, a energia mesmo para a partícula livre é quantizada, e só ocorre quando consideramos o termo quadrático da expansão de $g(x)^{-1/2}$.

5 PRINCÍPIO DA INCERTEZA ESTENDIDO

No presente capítulo, abordaremos as consequências físicas da MQNA. Veremos que, quando consideramos o termo quadrático da expansão em série de Taylor da métrica $g(x)$, obtemos uma incerteza mínima diferente de zero no *momentum*. Veremos também que quando consideremos apenas o termo linear na expansão de $g(x)^{-1/2}$ recairemos em relações físicas já conhecidas na mecânica Quântica tradicional.

5.1 Incerteza Mínima no *momentum*

Consideramos agora dois observáveis \hat{A} e \hat{B} quaisquer, que para um estado arbitrário $|\psi\rangle$ é válida a relação física a seguir [4]

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|, \quad (5.1)$$

de sorte que $\Delta \hat{A}$ e $\Delta \hat{B}$ são os desvio padrão dos observáveis físicos \hat{A} e \hat{B} [2], logo, pela premissa podemos escrever

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (5.2)$$

Com a escolha da métrica na Eq.(4.5)

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + \gamma x + \beta^2 x^2)^2} dx^2 \quad (5.3)$$

onde $\gamma^2 < 4\beta^2$, o operador translação infinitesimal generalizado fica com a seguinte aparência

$$\hat{T}_g(dx) |x\rangle = |x + (1 + \gamma x + \beta^2 x^2) dx\rangle \quad (5.4)$$

Portanto, a relação de comutação entre os operadores \hat{X} e \hat{P}_g agora fica

$$[\hat{X}, \hat{P}_g] = i\hbar(1 + \gamma \hat{X} + \beta^2 \hat{X}^2). \quad (5.5)$$

Considerando a Eq.(5.5) e a relação de incerteza Eq.(5.1), obtemos

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P}_g \geq \frac{1}{2} \langle \hbar(1 + \gamma \hat{X} + \beta^2 \hat{X}^2) \rangle \quad (5.6)$$

$$\geq \frac{\hbar}{2} (1 + \gamma \langle \hat{X} \rangle + \beta^2 \langle \hat{X}^2 \rangle), \quad (5.7)$$

usando a dispersão de \hat{X} , $\Delta \hat{X}^2 = \langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2$, temos

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P}_g \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \gamma \langle \hat{X} \rangle + \beta^2 \langle \hat{X} \rangle^2 + \beta^2 (\Delta \hat{X})^2], \quad (5.8)$$

considerando a igualdade na Eq.(5.8) podemos escrever

$$\Delta\hat{P}_g = \frac{\hbar}{2}[1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2]\frac{1}{\Delta\hat{X}} + \frac{\hbar}{2}\beta^2(\Delta\hat{X}). \quad (5.9)$$

Agora, vamos encontrar o valor de $\Delta\hat{X}$ que minimiza $\Delta\hat{P}_g$, logo derivamos em relação a $\Delta\hat{X}$ e depois igualamos a zero

$$\frac{d\Delta\hat{P}_g}{d\Delta\hat{X}} = \frac{d}{d\Delta\hat{X}} \left[(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)\frac{1}{\Delta\hat{X}} + \frac{\hbar}{2}\beta^2(\Delta\hat{X}) \right] \quad (5.10)$$

$$= -\frac{\hbar}{2}(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)\frac{1}{(\Delta\hat{X})^2} + \frac{\hbar}{2}\beta^2 \quad (5.11)$$

fazendo $\frac{d\Delta\hat{P}_g}{d\Delta\hat{X}} = 0$

$$-\frac{\hbar}{2}(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)\frac{1}{(\Delta\hat{X})^2} + \frac{\hbar}{2}\beta^2 = 0$$

$$\frac{\hbar}{2}\beta^2 = \frac{\hbar}{2}(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)\frac{1}{(\Delta\hat{X})^2}$$

$$(\Delta\hat{X})^2 = \frac{1}{\beta^2}(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)$$

$$\Delta\hat{X}_0 = \frac{1}{\beta}\sqrt{(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)}. \quad (5.12)$$

Sendo

$$\Delta\hat{P}_g, \min = \Delta\hat{P}_g(\Delta\hat{X}_0)$$

Logo a Eq.(5.9) fica

$$\begin{aligned}\Delta\hat{P}_{g,min} &= \frac{\hbar}{2}(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2) \frac{1}{\frac{1}{\beta}\sqrt{(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)}} \\ &+ \frac{\hbar}{2}\beta^2 \frac{1}{\beta^2} \sqrt{(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)}\end{aligned}\quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\hbar\beta}{2} \frac{(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)}{\sqrt{(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)}} + \frac{\hbar\beta}{2} \sqrt{(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)} \\ &= \frac{\hbar\beta}{2} \left[\frac{(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2) + (1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)}{\sqrt{(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)}} \right] \\ &= \frac{\hbar\beta[(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2)]}{\sqrt{1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2}}{\sqrt{1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2}} \\ &= \hbar\beta\sqrt{1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle + \beta^2\langle\hat{X}\rangle^2}.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Sendo $\gamma^2 \leq 4\beta^2$, a Eq(5.14) nos leva a concluir que, para $\beta \neq 0$, a incerteza mínima no *momentum* é real e maior que zero [4]. O caso particular $\langle\hat{X}\rangle = 0$, obtemos um $\Delta\hat{P}_{g,min}$ mostrado na Figura 2, sendo a região hachurada concebe os estados que são permitidos no espaço euclidiano quando fazemos $g(x) = 1$, mas que não são permitidos no espaço curvo.

Considerando que $\hat{P}_g = -i\hbar(1 + \gamma x + \beta^2 x^2) \frac{d}{dx}$ e a Eq.(4.7), realizando o comutador entre $\eta(x)$ e \hat{P}_g , vamos obter a seguinte relação

$$\begin{aligned}[\eta, \hat{P}_g]|\psi\rangle &= \frac{2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \tan^{-1} \left[\frac{2\beta^2 x + \gamma}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right] \frac{\hbar}{i} (1 + \gamma x + \beta^2 x^2) \frac{d}{dx} |\psi\rangle \\ &- \frac{\hbar}{i} (1 + \gamma x + \beta^2 x^2) \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \tan^{-1} \left[\frac{2\beta^2 x + \gamma}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \right] \right) |\psi\rangle \\ &= i\hbar 2 \frac{(1 + \gamma x + \beta^2 x^2)}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} \frac{(4\beta^2 - \gamma^2)}{(2\beta^2 x + \gamma) + (4\beta^2 - \gamma^2)} \frac{2\beta^2}{\sqrt{4\beta^2 - \gamma^2}} |\psi\rangle,\end{aligned}$$

logo

$$[\eta, \hat{P}_g] = i\hbar. \quad (5.15)$$

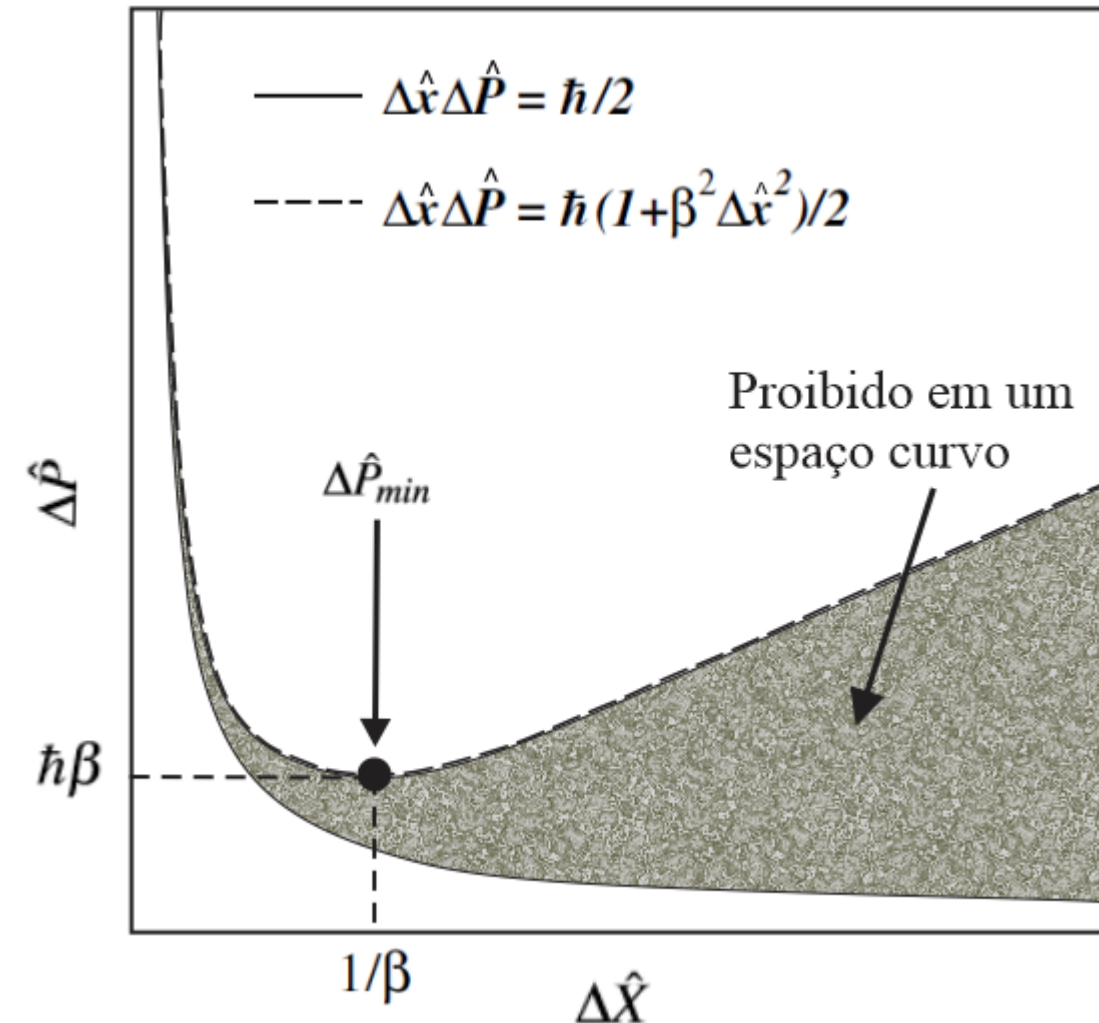
Assim como no capítulo anterior, a escolha da métrica agora é

$$ds^2 = dx^2 \frac{1}{(1 + \gamma x)} \quad (5.16)$$

no limite em que $\beta \rightarrow 0$, temos então

$$\eta'(x) = \int dx \frac{1}{(1 + \gamma x)} \quad (5.17)$$

Figura 2 – Incerteza Mínima no *momentum* quando levamos em consideração o segundo termo da série de $g(x)^{1/2}$. A região sombreada representa os estados proibidos para a métrica considerada aqui (Braga, 2015).



Fonte: Elaborada pelo autor [4].

$$\eta'(x) = \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma x) \quad (5.18)$$

recuperando o resultado obtido R.N. Costa Filho *and* S.F. Oliveira [12]. Considerando o operador agora como sendo $\hat{P}'_g = -i\hbar(1 + \gamma x) \frac{d}{dx}$. O comutador entre \hat{P}'_g e $\eta'(x)$ fica,

$$\begin{aligned} [\eta', \hat{P}'_g] |\psi\rangle &= \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma x) \frac{\hbar}{i} (1 + \gamma x) \frac{d}{dx} |\psi\rangle - \frac{\hbar}{i} (1 + \gamma x) \frac{d}{dx} \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma x) |\psi\rangle \\ &= \frac{\hbar}{i\gamma} \ln(1 + \gamma x) (1 + \gamma x) \frac{d}{dx} |\psi\rangle - \frac{\hbar}{i\gamma} (1 + \gamma x) \left(\frac{1}{(1 + \gamma x)} \gamma \frac{d}{dx} |\psi\rangle + \ln(1 + \gamma x) \frac{d}{dx} |\psi\rangle \right) \\ &= -\frac{\hbar}{i\gamma} (1 + \gamma x) \left(\frac{1}{(1 + \gamma x)} \gamma |\psi\rangle \right), \end{aligned}$$

logo

$$[\eta', \hat{P}'_g] \approx i\hbar. \quad (5.19)$$

Percebemos que quando consideramos apenas o termo linear da expansão em série de Taylor de $g(x)$, recaímos em relações de comutação fundamentais entre os operadores posição e momento na mecânica Quântica tradicional.

5.2 Considerando apenas o termo linear

Consideramos agora apenas o termo linear expansão em série de Taylor de $g(x)^{-1/2}$

$$g(x)^{-1/2} = 1 + \gamma x, \quad (5.20)$$

para dois observáveis \hat{A} e \hat{B} , e uma função de onda $|\psi\rangle$, é válida a relação de incerteza

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|. \quad (5.21)$$

Pela Eq.(5.20), redefiniremos o operador translação,

$$\hat{T}'_g(dx)|x\rangle = |x + (1 + \gamma x)dx\rangle, \quad (5.22)$$

portanto, a relação de comutação posição-*momentum* fica

$$[\hat{X}, \hat{P}'_g] = i\hbar(1 + \gamma\hat{X}). \quad (5.23)$$

Pelas Eqs. (5.21) e (5.23), obtemos a relação de incerteza posição-*momentum*,

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P}'_g \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle). \quad (5.24)$$

Considerando a igualdade na Eq.(5.24), podemos escrever

$$\Delta\hat{P}'_g = \frac{\hbar}{2}(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle)\frac{1}{\Delta\hat{X}}, \quad (5.25)$$

agora, derivando em relação a $\Delta\hat{X}$ e igualando a zero, temos

$$\frac{d\Delta\hat{P}'_g}{d\Delta\hat{x}} = \frac{\hbar}{2}(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle)\left(-\frac{1}{\Delta\hat{X}^2}\right)$$

$$\frac{\hbar}{2}(1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle)\left(-\frac{1}{\Delta\hat{X}^2}\right) = 0$$

$$1 + \gamma\langle\hat{X}\rangle = 0,$$

o que nos dá

$$\gamma = -\frac{1}{\langle\hat{X}\rangle}.$$

substituindo γ na Eq.(5.25), temos

$$\Delta\hat{P}'_g = \frac{\hbar}{2} \left(1 - \frac{1}{\langle\hat{X}\rangle} \langle\hat{X}\rangle \right), \quad (5.26)$$

logo

$$\Delta\hat{P}'_{g,min} = 0. \quad (5.27)$$

Portanto, se considerarmos apenas o termo linear da expansão da função $g(x)^{-1/2}$, a incerteza mínima no *momentum* é zero, o que equivale a fazer $g(x) = 1$, logo, o resultado é mesmo da mecânica quântica tradicional originalmente proposto por Heisenberg.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

No presente trabalho, estudamos a mecânica Quântica tradicional, demonstrando a matemática básica de espaços vetoriais usando o formalismo de Dirac de *bras* e *kets*. Além disso, estudamos o formalismo unidimensional da mecânica Quântica não-aditiva (MQNA) unidimensional, uma teoria desenvolvida a partir de primeiros princípios, onde se tenta entender as consequências na teoria Quântica quando se leva em consideração a métrica do espaço [4].

Inicialmente no capítulo 2, definimos os espaços de bras e kets e como os operadores atuam em estados de uma partícula. Discutimos espaços de funções de onda, comutadores e medidas simultâneas, relação de incerteza posição-momento e por fim, definimos o operador translação espacial e como atua no espaço das posições e de momento. No capítulo 3 desenvolvemos a partir de primeiros princípios toda a teoria da mecânica Quântica não-aditiva. Inicialmente definimos que o espaço das posições seria o espaço de Riemann unidimensional, entretanto o espaço das funções de onda seria o espaço de Hilbert com um peso.

Nos capítulos 4 e 5, considerando a expansão em série de Taylor da métrica até o termo quadrático, usamos a equação tipo Schrödinger para o caso da partícula livre, resultando em energia quantizada, e também calculamos uma incerteza mínima no momento diferente de zero. Ainda no capítulo 5, mostramos que quando consideramos apenas o termo linear na expansão de $g(x)^{-1/2}$, obtemos a incerteza mínima no momento igual a zero, resultado já esperado na mecânica Quântica tradicional.

Para trabalhos futuros, pretendemos estudar os formalismos bidimensional e tridimensional da Mecânica Quântica Não-aditiva, expandido também em coordenadas esféricas e polares. Pretende-se também introduzir campo elétrico e campo magnético no formalismo da MQNA, e também entender as conexões desse formalismo com a massa efetiva dependente da posição.

REFERÊNCIAS

- [1] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Franck Laloë. *Quantum mechanics*. Wiley, New York, NY, 1977. Trans. of : *Mécanique quantique*. Paris : Hermann, 1973.
- [2] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Mecânica quântica moderna*. 2. ed. *Tradução técnica: Sílvio Renato Dahmen*. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- [3] Richard P Feynman, Robert B Leighton, and Matthew Sands. *Lições de física–vol. 1*. *Tradução de Adriana VR da Silva e Kaline R. Coutinho*. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- [4] J. P. M. Braga. *Mecânica quântica não-aditiva*. 2015. 64 f. tese (doutorado em física). *Universidade Federal do Ceará, Ceará*, 2015.
- [5] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. 1947. 3rd ed. (Clarendon, Oxford).
- [6] D. J. Griffiths. *Mecânica quântica*. 2. ed., São Paulo:Pearson, 2015.
- [7] Raimundo N Costa Filho, João PM Braga, Jorge HS Lira, and José S Andrade Jr. Extended uncertainty from first principles. *Physics Letters B*, 755:367–370, 2016.
- [8] JR Mureika. Extended uncertainty principle black holes. *Physics Letters B*, 789:88–92, 2019.
- [9] A. c. Lisboa. *Controle quântico ótico: Fundamentos, aplicações e extensões da teoria*. 2015. 263 f. tese (doutorado em engenharia elétrica). *Universidade de são Paulo*, 2015.
- [10] Silvio Seno Chibeni. Certezas e incertezas sobre as relações de heisenberg. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27(2):181–192, 2005.
- [11] RN Costa Filho, MP Almeida, GA Farias, and JS Andrade Jr. Displacement operator for quantum systems with position-dependent mass. *Physical Review A*, 84(5):050102, 2011.
- [12] R. N. Costa Filho and S. F. S. Oliveira. Extended uncertainty from first principles. 2019. 6 f. Notas de estudo.