



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA - ICEN
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

MARIA JOSÉ DE SOUZA GALVÃO

ESTADO FUNDAMENTAL DE GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES

ACARAPE

2021

MARIA JOSÉ DE SOUZA GALVÃO

ESTADO FUNDAMENTAL DE GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da Unilab
Catalogação de Publicação na Fonte

G172e

Galvão, Maria José de Souza.

Estado fundamental de gotículas quânticas dipolares / Maria José de Souza Galvão. - 2021.
50 f. : il., color.

Monografia (graduação) - Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima.

1. Condensado de Bose-Einstein. 2. Flutuações quânticas. 3. Gotículas quânticas.
4. Interação dipolo-dipolo. I. Título.

BA/UF/BSCM

CDD 530

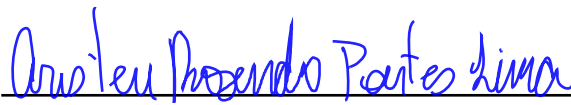
MARIA JOSÉ DE SOUZA GALVÃO

ESTADO FUNDAMENTAL DE GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES

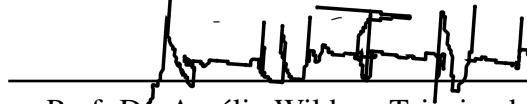
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Física.

Aprovada em:

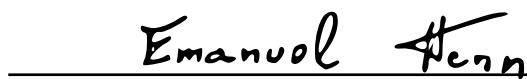
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Aurélio Wildson Teixeira de Noronha
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Emanuel Alves de Lima Henn
Universidade de São Paulo (USP)

À minha família, por sua capacidade de acreditar e investir em mim. Mãe e pai, a educação que me deram, seus cuidados, dedicação e apoio me forneceram força, determinação e esperança para seguir nessa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, pelo dom da vida, à minha família, especialmente meus pais, Neide e Luiz, por serem minha base, meus maiores exemplos de vida. Sou grata pelo apoio durante essa trajetória acadêmica, por comemorarem ao meu lado todas minhas conquistas e por serem meu suporte e minha força nos momentos difíceis. Por batalharem perante as dificuldades da vida para me concederem uma boa educação, por me ensinarem a lutar pelos meus sonhos. Estou finalizando mais uma etapa da minha vida, graças ao apoio, cuidado e amor de vocês. Agradeço também aos meus irmãos, Lucas, Sara e Luiz Carlos, por estarem sempre dispostos a me ajudar, por cuidarem de mim e pelo apoio durante todos esses anos.

Sou grata por todos os meus professores de graduação, Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima, Prof. Dr. Michel Lopes Granjeiro, Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga, Prof. Dr. Levi Rodrigues Leite, Prof. Dr. Aurélio Wildson Teixeira de Noronha, Prof. Dra. Cinthia Marques Magalhães Paschoal, Prof. Dra. Mylene Ribeiro Moura Miranda, Prof. Dra. Silvia Helena Roberto de Sena, por todo conhecimento adquirido, pela disponibilidade e por sempre ajudarem a todos os alunos da melhor forma possível.

Especialmente, agradeço ao Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima, pela orientação concedida durante este trabalho, pela confiança que teve em mim, pela oportunidade de fazer parte do grupo de gases quânticos dipolares, por me fazer acreditar que posso vencer desafios, sair da minha zona de conforto, pelo trabalho que foi bastante desafiador, mas principalmente muito gratificante, por todo aprendizado durante o decorrer da bolsa, aprendizado acadêmico e também aprendizado de vida, por toda experiência compartilhada e pelo incentivo para projetos futuros.

Ao Grupo de Ensino, Pesquisa e Popularização de Astronomia e Astrofísica (GEP-PAA), pelos momentos compartilhados, pela experiência adquirida. Agradeço imensamente pelo processo de evolução que passei durante o convívio com o grupo, por me ajudarem a superar as barreiras da timidez, da ansiedade e insegurança. Agradeço a todos os membros do grupo e principalmente ao líder, Prof. Dr. Michel Lopes Granjeiro, por sempre estar disposto a ajudar, por ser muitas vezes mais que um professor, um amigo, que ensina, que aconselha, que dá bons exemplos, por participar fielmente no meu processo de evolução acadêmica e pessoal.

Agradeço ao Eduardo, por estar sempre me incentivando a querer mais, por ter acreditado em mim até mesmo quando eu não acreditava, por me apoiar, por cuidar de mim nas horas de cansaço e estresse, por comemorar comigo minhas conquistas e por sempre estar presente nos momentos mais importantes.

E por fim, agradeço aos meus amigos, especialmente, Emília Uchôa, Veridiano Araújo e Lucas Santos, por terem me acolhido, me ajudado a crescer, a evoluir, por me incentivarem a estudar cada vez mais, por estarem comigo em todos os momentos, nos bons e nos ruins, por acreditarem e por me encorajarem a buscar o que almejo. Agradeço também a meus colegas de turma, Abmael, Cristiano, Midana, por todos os momentos compartilhados. Sou grata também ao matemático Luan Silva, por toda a ajuda nas disciplinas da matemática e por sempre estar disponível, por me incentivar e por acreditar em mim. Ao futuro engenheiro Érico Castro, por ser amigo, por me incentivar no inglês, por me ensinar e pelo apoio durante a jornada. A meus colegas do grupo de gases quânticos dipolares, especialmente ao Mateus Guimarães, por compartilhar sua experiência comigo, por estar sempre disponível quando precisei, por confiar em mim, enfim por fazer parte diretamente da minha evolução como bolsista, estudante e como pessoa.

À Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro às pesquisas presentes neste trabalho.

Obrigada a todos!

“Hoje eu sei que quem me deu a ideia de uma nova consciência e juventude está em casa guardado por Deus .”

(Belchior)

RESUMO

A condensação de Bose-Einstein foi comprovada experimentalmente em 1995. Desde então, o estudo de átomos ultrafrios vem sendo cada vez mais relevante para a física em diversas áreas, especialmente na física da matéria condensada e na teoria quântica de campos. Neste trabalho, inicialmente foi realizada uma abordagem variacional para o caso de um condensado de Bose-Einstein ideal, ou seja, sem a presença de interações entre os átomos. Deste modo, através de um ansatz gaussiano utilizando o funcional de energia de Gross-Pitaevskii, foi obtida a energia de um condensado ideal. Em seguida, foram realizados estudos de condensados dipolares e gotículas quânticas dipolares, um sistema autoligado, originado pela presença das flutuações quânticas e foi feita uma breve revisão teórica e experimental. Em seguida, foram calculadas as contribuições das energias de contato, de interação dipolo-dipolo e de correção quântica, através de uma abordagem variacional, em que foi utilizado o funcional de energia de Gross-Pitaevskii. Posteriormente, foi obtida a energia por partícula, em que foram introduzidas o conceito das variáveis adimensionais adequadas. Por fim, como resultado, foram obtidas as equações que regem as propriedades estáticas das gotículas quânticas dipolares, que caracterizam o mínimo de energia, conseqüentemente, as condições de equilíbrio do sistema.

Palavras-chave: Condensado de Bose-Einstein; flutuações quânticas; gotículas quânticas; interação dipolo-dipolo; equações estáticas.

ABSTRACT

Bose-Einstein condensation was realized experimentally in 1995. Since then, the study of ultra-cold atoms has been increasingly relevant to physics in several areas such as condensed matter physics and quantum field theory. In this work, a variational approach was initially carried out for the case of an ideal Bose-Einstein condensate, in other words, without the presence of interactions between atoms. Then, through a Gaussian ansatz and using the Gross-Pitaevskii energy functional, the energy of an ideal condensate was obtained. Then, studies of dipolar condensates and dipolar quantum droplets were carried out, a self-linked phenomenon, originated by the presence of quantum fluctuations, and a brief theoretical and experimental review was carried out. Then, the energy contributions from contact end dipole-dipole interaction as well as from the quantum correction were calculated, through a variational approach, in which the Gross-Pitaevskii energy functional was used. Subsequently, the energy per particle was obtained, in which appropriate dimensionless variables were introduced. Finally, as a result, the equations that govern the static properties of dipole quantum droplets were obtained, which describe the minimum of energy and, consequently, the equilibrium properties of the system.

Keywords: Bose-Einstein condensate; quantum fluctuations; quantum droplets; dipole-dipole interaction; static equations.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Ilustração da distribuição de velocidades. A partir de uma nuvem de rubídio ^{87}Rb. As cores artificiais indicam o número de átomos. A primeira imagem, a esquerda, ilustra a nuvem de átomos momentos antes da condensação. A imagem do meio representa o instante do aparecimento do condensado de Bose-Einstein, e a imagem da direita simboliza o momento posterior a evaporação.</p>	13
<p>Figura 2 – Esquemática do processo do CBE.</p>	16
<p>Figura 3 – Interação dipolo-dipolo. A figura a) representa a ilustração de dois dipolo alinhados através de um campo magnético \mathbf{B} na direção do eixo z. b) Nas cores escuras, temos um CBE repulsivo, enquanto nas cores mais claras, do branco ao amarelo, temos um condensado atrativo.</p>	22
<p>Figura 4 – Resultado experimental das gotículas quânticas. a) Esquemática da modulação do comprimento de espelhamento a_s. Mostrando uma instabilidade quando $a_s \approx a_{bg}$. b) Imagens de in situ dos padrões observados no experimento das gotículas quânticas quando o número de gotículas varia de dois a dez. c) Ligação entre o número de gotículas, N_d e o número médio de átomos do sistema, N. As marcações azuis indicam o erro, ou seja o desvio padrão agregado na medida e a linha tracejada aponta a relação linear entre N e N_d.</p>	24
<p>Figura 5 – Gráfico da função Q_5 (linha vermelha) e da aproximação da Eq.(3.8) (linha azul). A linha tracejada representa a parte real de $R_e(Q_5)$.</p>	26
<p>Figura 6 – Função de anisotropia. A função descrita pela Eq. (4.14) é restrita entre 1 para pequenos valores de x ou y e -2 para grandes valores de x e y.</p>	31
<p>Figura 7 – Gráfico de $f_s(x)$. Note que $f_s(x)$ passa de positiva a negativa quando x vai de valores menores que 1 a valores maiores que 1.</p>	32
<p>Figura 8 – Imagem computacional da configuração de uma gotícula quântica autoligada, mediante um condensado de ^{164}Dy. As linhas pretas representam a armadilha harmônica de confinamento. Em $t = 10\text{ms}$ a gotícula única autoligada é formada e em $t = 20\text{ms}$ a armadilha é desligada. poosterior a isso, é observado a estabilidade da gotícula, mesmo na ausência da armadilha.</p>	33

LISTA DE SÍMBOLOS

λ_{dB}	comprimento de onda térmico de de Broglie
K_b	Constante de Boltzmann
h	Constante de Planck
\hbar	Constante de Planck reduzida
a_i	Comprimento de oscilador
σ	Parâmetro variacional
W_i	Frequência de oscilação
a_s	Comprimento da onda s
a_{bg}	Comprimento de ressonância de Feshbach
ϵ_{dd}	Parâmetro relativo de interação
g	Constante de acoplamento
V_δ	Potencial de interação de contato
V_{dd}	Potencial de interação dipolo-dipolo
μ_0	Permeabilidade no vácuo
m	Momento magnético
d	Momento de dipolo elétrico
n	Densidade espacial
f	Função de anisotropia
f_s	Função de anisotropia cilíndrica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONDENSAÇÃO DE BOSE-EINSTEIN	16
2.1	O que é a condensação de Bose-Einstein	16
2.2	Teoria de Gross-Pitaevskii para um CBE ideal	17
3	GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES	21
3.1	Condensado dipolar	21
3.2	Discussão teórica e experimental	23
3.3	Correção quântica	25
4	ABORDAGEM VARIACIONAL	28
4.1	Armadilha triaxial	28
4.1.1	<i>Interação de contato</i>	28
4.1.2	<i>Energia de interação de dipolo-dipolo</i>	29
4.1.3	<i>Energia das flutuações quânticas</i>	32
4.2	Variáveis adimensionais	34
4.3	Armadilha cilíndrica	35
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.	39
	REFERÊNCIAS	40
	APÊNDICES	44
	APÊNDICE A – CONTRIBUIÇÃO DAS ENERGIAS, CINÉTICA, DE APRISIONAMENTO E DE CONTATO	44
	APÊNDICE B – TRANSFORMADA DE FOURIER DA INTERAÇÃO DIPLO-DIPLO	46
	APÊNDICE C – Energia de correção quântica	48

1 INTRODUÇÃO

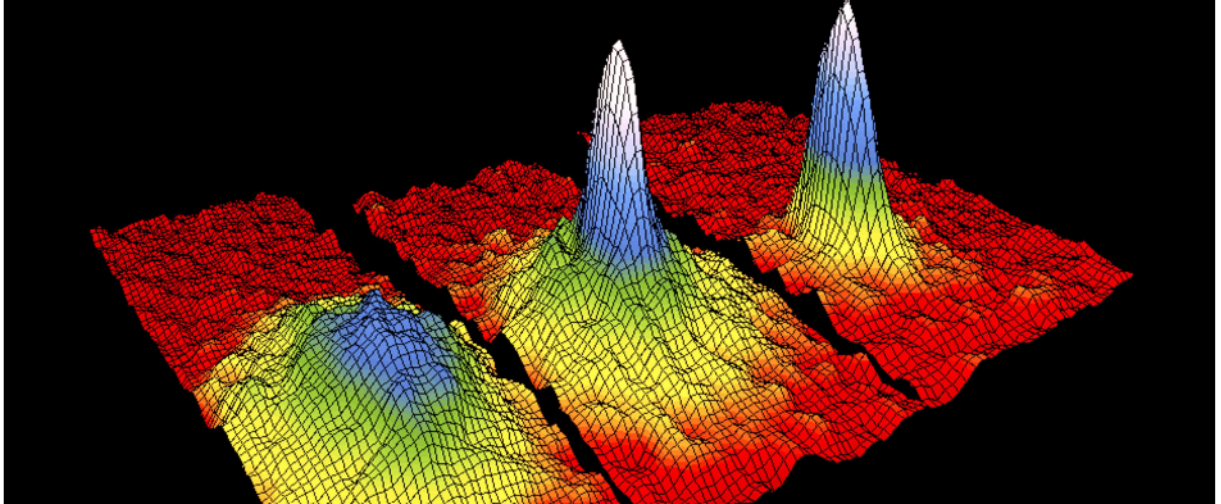
O estudo de gases quânticos ultra frios, vem recebido bastante ênfase na comunidade científica ao longo dos últimos anos, principalmente nas áreas da física da matéria condensada e teoria quântica de campos. A procura consiste por ser uma área bastante versátil, de variados temas de pesquisa e descobertas fundamentais, dentre elas a manifestação de novos estados da matéria.

Em 1995, ocorreram as primeiras observações de um estado novo da matéria, o condensado de Bose-Einstein (CBE), que foi previsto teoricamente em 1924 pelo físico Alemão Albert Einstein, como consequência do trabalho do físico indiano Satyendra Nath Bose [1, 2]. Bose encaminhou seu trabalho a Einstein, após ter sido recusado pela *Philosophical Magazine*, um artigo que tratam fótons como um gás de partículas, deduzindo assim a teoria da radiação do corpo negro, formulada pelo físico alemão Max Planck. Reconhecendo a grandeza do trabalho, Einstein partiu dele para desenvolver a teoria estatística de um gás ideal de átomos ou moléculas idênticas, nos quais os bósons são as partículas que se condensam e obedecem a teoria de de Broglie sobre as ondas de matéria, na formação do CBE [3].

De acordo com a teoria ondulatória de partículas, descrita por de Broglie, cada átomo pode ser considerado como um pacote de ondas [1]. Conforme a previsão de Einstein, na medida que a temperatura diminui e atinge uma certa temperatura crítica, denotada por T_c , o número de partículas no estado fundamental aumenta e quando a temperatura tende a zero, elas se condensam no estado mais baixo, formando uma única onda ocasionada pela sobreposição das pequenas ondas de matéria previstas pela teoria de de Broglie.

O CBE foi previsto por Einstein em 1924, porém só foi realizado experimentalmente em 1995, tendo os primeiros experimentos sido realizados em átomos de rubídio ^{87}Rb , pelos físicos norte-americanos, Eric Allin Cornell e Carl Wieman do grupo do Joint Institute for Laboratory Astrophysics (JILA), em que, primeiramente foi utilizado a técnica de resfriamento a laser, onde é formada uma nuvem gasosa causada pelo confinamento dos átomos, originado pela luz do laser, em seguida a nuvem é transferida para uma armadilha magnética e por fim a nuvem é resfriada até a degeneração quântica através do processo conhecido como resfriamento evaporativo a uma temperatura de 170 nano kelvins. [1].

Figura 1 – Ilustração da distribuição de velocidades. A partir de uma nuvem de rubídio ^{87}Rb . As cores artificiais indicam o número de átomos. A primeira imagem, a esquerda, ilustra a nuvem de átomos momentos antes da condensação. A imagem do meio representa o instante do aparecimento do condensado de Bose-Einstein, e a imagem da direita simboliza o momento posterior a evaporação.



Fonte – Adaptado de [4].

A Fig. 1 mostra que abaixo de uma temperatura crítica, T_c , os átomos se condensam no nível mais baixo de energia, neste caso um pico é formado. Já na imagem da direita nota-se um pico mais estreito, em que obtém-se um CBE quase puro [4, 5]. Em seguida, meses depois, foi observado experimentalmente a condensação de Bose-Einstein com átomos de sódio ^{23}Na , a uma temperatura da ordem de $2 \times 10^{-6}\text{K}$. O experimento foi coordenado pelo físico alemão Wolfgang Ketterle do grupo do Massachusetts Institute of Technology (MIT).

Entretanto, apesar da condensação de átomos alcalinos prevista por Einstein acontecer, existem discrepâncias entre a teoria e a parte experimental, pois quando as interações entre os átomos não são consideradas na teoria a parte experimental é prejudicada, causando distorções nas primeiras imagens do CBE e além disso, as interações são relevantes na determinação do tamanho do condensado [6]. Contudo, com o uso de uma teoria que aborda as partículas inseridas no estado fundamental, desconsiderando totalmente a parte das partículas não condensadas, o problema pode ser contornado. A chamada equação de Gross-Pitaevskii (eGP), resume a teoria utilizada e foi desenvolvida em 1962, fruto dos trabalhos de E. P. Gross [7] e L. Pitaevskii [8].

A eGP é fundamentada na aproximação de campo médio e é considerada de grande importância para a compreensão de Condensados de Bose-Einstein. Ela se assemelha à famosa equação de Schrödinger, porém com um termo não linear que ocorre devido às interações atômicas. Através do funcional de Gross-Pitaevskii podemos obter as energias e aprofundar os estudos nas propriedades estáticas do CBE. A eGP pode ser resolvida através de métodos analíticos [9], em alguns casos, e também por procedimentos numéricos [10, 11, 12, 13, 14], de forma mais geral.

É importante mencionar o caso em que as interações desempenham um papel fundamental e não podem ser negligenciadas, como as interações dipolares, que são de longo alcance e anisotrópica, que são observadas em condensados obtidos através do cromo ^{52}Cr [15], do érbio ^{168}Er [16] e do disprósio ^{164}Dy [17], ao contrário dos condensados de átomos Rubídio que são governados pela interação de contato, que é de curto alcance e isotrópica.

O primeiro condensado com átomos de momento dipolar magnético foi obtido com átomos de cromo ^{52}Cr , que possui um momento dipolar magnético de $6\mu_\beta$, onde μ_β representa o magnéton de Bohr. Nos experimentos feitos com érbio ^{168}Er , contendo cerca de 7×10^4 átomos, e momento magnético de $7\mu_\beta$ foram obtidos condensados puros através do uso de armadilhas ópticas. A utilização de armadilhas foi escolhida porque através delas é possível a obtenção de amostras com grande número de átomos a uma temperatura da ordem de microKelvin, o que possibilita uma transferência direta de átomos em armadilhas ópticas de dipolo sem a necessidade de estágios de resfriamento [16]. E o condensado de disprósio ^{164}Dy foi o primeiro a possuir um regime fortemente dipolar, caracterizado por $\epsilon_{dd} = \mu_0 m^2 / 12\pi\hbar^2 a_s > 1$, já que este átomo possui um momento dipolar superior aos do cromo e do érbio, com $m = 10\mu_\beta$ [18, 19].

Além das interações dipolares, outro fenômeno que chama bastante atenção são as chamadas flutuações quânticas, responsáveis pelo surgimento de mais um estado da matéria, um sistema autoligado, conhecido atualmente como gotículas quânticas dipolares [20, 21], que está além da teoria de campo médio. Tais flutuações mudam consideravelmente as propriedades físicas dos condensados e foram descobertas experimentalmente no ano de 2016. As gotículas quânticas exibem características surpreendentes como por exemplo elas se mostram estáveis mesmo na ausência da armadilha.

Este trabalho tem como finalidade apresentar um estudo sobre a física de gases ultrafrios, concentrada na física do Condensado de Bose-Einstein, mais precisamente na energia estado fundamental do CBE. No **Capítulo 2**, fazemos um estudo teórico sobre o significado da condensação de Bose-Einstein. Assim apresentamos os cálculos da energia de um condensado ideal, ou seja quando não existe interação entre os átomos, introduzindo assim o funcional de energia de Gross-Pitaevskii, para a realização do cálculo da contribuição das energias cinética e de aprisionamento.

No **Capítulo 3**, apresentamos uma discussão sobre a teoria e os experimentos relativos aos estados autoligados que são conhecidos como gotículas quânticas, observado experimentalmente em 2016, pelo grupo de Tilmann Pfau, em Stuttgart na Alemanha. Tais fenômenos formam um novo estado da matéria com propriedades que chamam bastante atenção da comunidade científica. Com tal estudo, é efetuado também o cálculo da energia de correção quântica que se origina através das flutuações quânticas, através de uma aproximação gaussiana.

No **Capítulo 4**, introduzimos uma abordagem variacional com ênfase no estudo da teoria de Gross-Pitaevskii, onde é utilizado o funcional de energia e função de onda do tipo gaussiana para a realização dos cálculos das energias do CBE, tais como, a energia de contato, que é de curto alcance e isotrópica, a energia de interação dipolo-dipolo que é anisotrópica e de longo alcance, por meio do aprisionamento de uma armadilha triaxial, com dipolos orientados no eixo z . Em seguida é efetuado o cálculo das propriedades estáticas das gotículas quânticas, enfatizando o caso de uma armadilha cilíndrica.

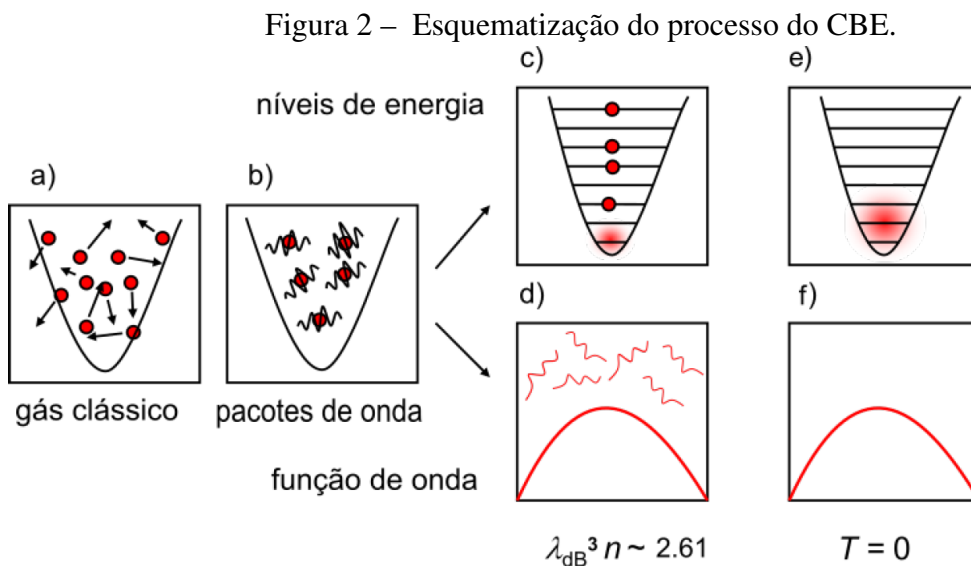
E por fim, no **Capítulo 5** apresentamos conclusões e os interesses em trabalhos futuros, tais como a resolução das soluções estáticas das gotículas quânticas com dipolos orientados arbitrariamente.

2 CONDENSAÇÃO DE BOSE-EINSTEIN

Este capítulo é destinado a uma breve descrição teórica do Condensado de Bose-Einstein, na qual será revisado o significado da condensação de Bose-Einstein e serão calculadas as contribuições para a energia de um CBE ideal da energia cinética e da energia de aprisionamento. Consideramos o caso mais realista de um condensado preso a uma armadilha harmônica trivial. Uma vez que os sistemas experimentais podem ser descritos aproximadamente por teorias para $T = 0$, vamos nos restringir a esse caso.

2.1 O que é a condensação de Bose-Einstein

Na mecânica quântica, as partículas são divididas em duas classes, segundo a estatística que obedecem: os bósons, que possuem spin inteiro e satisfazem a estatística de Bose-Einstein [22] e os férmions que possuem spin semi-inteiro e obedecem à estatística de Fermi-Dirac. Os férmions tendem a se repelir, pois obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, enquanto os bósons tendem a se acumular no mesmo estado quântico. O CBE acontece quando uma fração macroscópica das partículas bosônicas se acumulam em um único estado, o nível de energia mais baixo. A figura 2, representa esquematicamente o processo de transição para o novo estado da matéria.



Fonte – Retirado de [23].

Inicialmente, na figura 2a), temos os átomos de um gás sujeitos a altas temperaturas, nesse caso temos átomos se comportando como partículas clássicas, ou seja, como se fossem

bolinhas de bilhar e obedecem à estatística de Boltzmann. Conforme a temperatura vai diminuindo, figura 2b), nota-se um comportamento diferente nos átomos: eles passam a obedecer a teoria de de Broglie sobre as ondas de matéria e começam a se comportar como pacotes de ondas com comprimento de onda térmico de de Broglie $\lambda_{dB} = \sqrt{2\hbar m \kappa_B T}$, em que \hbar é a constante reduzida de Planck, m representa a massa atômica e κ_B denota a constante de Boltzmann. Na figura 2c), temos a representação dos níveis de energia e na figura 2d) temos uma única função de onda macroscópica descrevendo as partículas do estado fundamental, em que acontece uma sobreposição das ondas de de Broglie. Desse modo, quando a temperatura atinge uma certa temperatura crítica, $T = T_c$, em que a distância média entre os átomos se torna comparável ao comprimento de de Broglie, ocorre a superposição das ondas, gerando uma onda gigante. Nesse momento, a condensação de Bose-Einstein acontece. Em 2e) temos o caso em que todas as partículas se condensam no estado fundamental, ou seja, nota-se claramente um CBE ($T \ll T_0$) e em 2f), quando a temperatura se aproxima do zero absoluto, temos que os pacotes de ondas se condensam em uma única onda que descreve todas as partículas de sistema, formando o condensado puro.

Para um gás uniforme de partículas livres, as grandezas relevantes são a massa m da partícula, o número de partículas por unidade de volume n e a constante de Planck $h = 2\pi\hbar$. Nesse caso a temperatura crítica é dada por [24]:

$$T_c = C \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{m \kappa_B}, \quad (2.1)$$

em que C é um fator numérico da ordem de 1. Analisando a massa e a densidade adequadas para o Hélio ^4He na pressão de vapor saturado determina-se uma temperatura de transição de aproximadamente, $3,13\text{K}$, que é próxima à temperatura crítica a que os fenômenos da superfluidez são observados, o denominado ponto lambda, dado por $T_\lambda = 2,17\text{K}$ [24].

2.2 Teoria de Gross-Pitaevskii para um CBE ideal

A descrição teórica do condensado é feita com base na teoria de Gross-Pitaevskii, através do funcional de energia descrito como:

$$E(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\Psi(\mathbf{r})|^2 + U(r)|\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{g}{2} |\Psi(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (2.2)$$

onde M é a massa e ψ é a função de onda teste.

Aqui, g é a constante de acoplamento que é dada por

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{M}, \quad (2.3)$$

sendo a_s o comprimento de espalhamento da onda s .

Portanto, para o calculo das energias de um CBE ideal, o caso onde não há interação entre as partículas, consideramos a seguinte função de onda

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}}(a_x a_y a_z)^{\frac{1}{2}}} e^{-x^2/2a_x^2} e^{-y^2/2a_y^2} e^{-z^2/2a_z^2}, \quad (2.4)$$

que representa a solução para o oscilador harmônico e \mathbf{r} representa a posição relativa entre as partículas. Note que a função de onda Eq. (2.4) é normalizada através de $\int d\mathbf{r}|\phi(\mathbf{r})|^2 = 1$. Desse modo, levando em consideração que este é o estado mais baixo do oscilador harmônico, como não há interação, as partículas podem ser tratadas como se fossem independentes. Assim, temos que o comprimento característico de oscilação da armadilha \bar{a} é dado por $\bar{a} = \left(\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Porém, as interações entre as partículas são relevantes, pois causam mudança na função de onda do estado fundamental. Desse modo, tornamos como ponto de partida o fato da energia depender da função de onda $\Psi(\mathbf{r})$ e empregamos uma função teste (ansatz) do tipo gaussiana, que tem a seguinte forma

$$\Psi(r) = \eta_0 \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right) \right]. \quad (2.5)$$

A aproximação gaussiana para $\Psi(\mathbf{r})$ obedece à condição de normalização

$$\int d\mathbf{r}|\Psi(\mathbf{r})|^2 = N, \quad (2.6)$$

onde N é o número total de partículas e $\sigma_i (i = x, y, z)$ são os parâmetros variacionais. Neste caso

$n(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$ representa a densidade de partículas na posição \mathbf{r} .

Então, normalizando o ansatz gaussiano, utilizando a Eq.(2.6), obtemos

$$\eta_0 = \frac{N^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{3}{4}} (\sigma_x \sigma_y \sigma_z)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.7)$$

para constante de normalização.

Assim, substituímos a função de onda, Eq.(2.7) no funcional de energia, Eq.(2.4) e utilizando a propriedade das somas das integrais, calculamos cada termo separadamente. A energia cinética E_k é dada por

$$E_{cin} = \int \frac{\hbar^2}{2M} |\nabla \Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \frac{\hbar^2 N}{4M} \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_z^2} \right). \quad (2.8)$$

em que, a Eq.(2.8) representa a contribuição da energia cinética, a energia que está associada ao movimento das partículas dentro da armadilha harmônica.

Agora, estamos considerando o caso de um gás bosônico confinado em uma armadilha harmônica tridimensional, então calculamos o segundo termo da integral levando em conta o seguinte potencial de aprisionamento, que é ocasionado por um campo magnético externo,

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2} M (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (2.9)$$

onde $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ representa a frequência média de oscilação da armadilha, onde consideramos o caso de uma armadilha triaxial, ou seja, $\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z$.

Então, substituímos o potencial de aprisionamento, Eq.(2.9), no funcional de Gross-Pitaevskii. A energia de aprisionamento E_{tr} é dada por

$$E_{tr} = \int U(r) |\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \frac{NM}{4} (\omega_x^2 \sigma_x^2 + \omega_y^2 \sigma_y^2 + \omega_z^2 \sigma_z^2) \quad (2.10)$$

A Eq.(2.10) representa a energia devido a armadilha que aprisiona o gás. Desse modo, a energia de um condensado sem a presença de interações é denotada por:

$$E = \frac{1}{4}N\hbar\bar{\omega} \sum_i \left(\frac{\bar{a}^2}{\sigma_i^2} + \frac{\sigma_i^2 \omega_i^2}{\bar{a}^2 \bar{\omega}^2} \right). \quad (2.11)$$

Para $\sigma_i = a_i$, obtemos a expressão da energia para o oscilador harmônico.

Analisando o primeiro termo da Eq. (2.11), temos que a energia diminui na medida que sigma σ_i aumenta, ou seja a energia cinética, faz com que sigma cresça. Entretanto, com segundo termo, temos que a energia diminui com o decréscimo de σ_i , desse modo, a energia de aprisionamento faz com que o σ_i decresça.

3 GOTÍCULAS QUÂNTICAS DIPOLARES

Neste capítulo, estudaremos o condensado dipolar e as gotículas quânticas, um novo estado da matéria não previsto pela teoria de campo de médio. O fenômeno foi observado pela primeira vez em 2016, em diversos experimentos realizados em Stuttgart [25, 20]. Além da discussão teórica e experimental do condensado dipolar e das gotículas quânticas dipolares, realizamos também o cálculo da energia de correção quântica devido as flutuações quânticas.

3.1 Condensado dipolar

No capítulo 2, analisamos o caso de um condensado ideal, sem a presença de interações entre os átomos. Na presente seção, vamos trabalhar o caso da interação dipolar, que diferente da interação de contato, que é isotrópica e de curto alcance, é anisotrópicas e de longo alcance.

Diferentemente da interação de contato, a interação dipolo-dipolo (IDD) possui um caráter de anisotropia e é de longo alcance. Quando as interações dipolares desencadeiam um papel mensurável, chamamos o CBE de condensado dipolar. Ao longo dos anos o interesse em estudar essas interações foi se tornando ostensivo, especialmente em gases quânticos degenerados. Grande parte dos experimentos foram feitos com átomos com momento de dipolo magnético, como é o caso do Cromo ^{52}Cr , que apresentam um momento de dipolo magnético de seis magnétons de Bohr, que foi realizado experimentalmente pela primeira vez pelo grupo de Stuttgart em 2005 [15]. Outra alternativa é trabalhar com moléculas elétricas que possuem momento de dipolo elétrico μ_e , que tem como unidade (Debye).

Considerando que os dipolos estão orientados ao longo do eixo z , o potencial de interação dipolo-dipolo é dado pela seguinte expressão

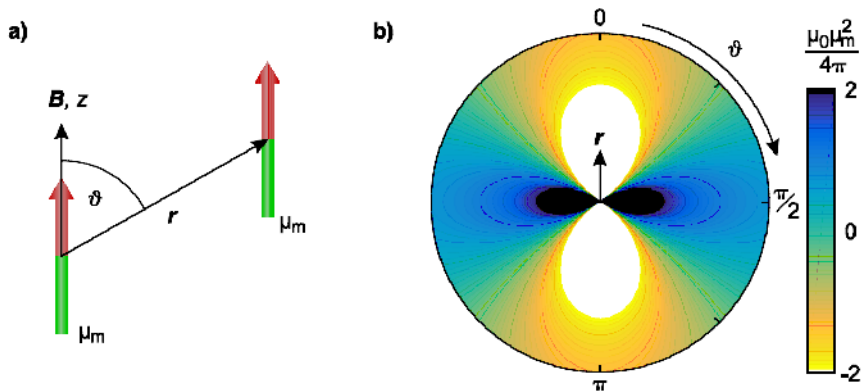
$$V_{dd}(\mathbf{r}) = \frac{C_{dd}}{4\pi|\mathbf{r}|^3}(1 - 3\cos^2\theta), \quad (3.1)$$

na qual, para átomos de momento magnético m , definimos a constante $C_{dd} = \mu_0 m^2$, em que μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. Já para as moléculas heteronucleares, que possuem

dipolos elétricos, a constante assume a forma $C_{dd} = 4\pi d^2$, onde d é o momento de dipolo elétrico sendo expresso na unidade de Debye.

Por conta de seu caráter anisotrópico, a IDD dependendo do valor do ângulo θ pode ser atrativa ou repulsiva, como mostra a Fig. 3.

Figura 3 – Interação dipolo-dipolo. A figura a) representa a ilustração de dois dipolo alinhados através de um campo magnético \mathbf{B} na direção do eixo z . b) Nas cores escuras, temos um CBE repulsivo, enquanto nas cores mais claras, do branco ao amarelo, temos um condensado atrativo.



Fonte – Retirada de [43].

A Fig. 3 mostra caráter anisotrópico da IDD, que pode ser atrativa para o ângulo $\theta = 0$ e repulsiva para $\theta = 90^\circ$. Além disso, diferente a interação de contato, a interação (3.1) se caracteriza de longo alcance devido a dependência de r^{-3} .

Para gases bosônicos é importante definir a força de interação relativa, que relaciona as interações (4.2) e (3.1) e é escrita como

$$\varepsilon_{dd} = \frac{C_{dd}}{3g}. \quad (3.2)$$

Portanto, levando em conta as duas interações, o potencial de interação total é dado por

$$V_{int} = g\delta(\mathbf{r}) + \frac{C_{dd}}{4\pi|\mathbf{r}|^3}(1 - 3\cos^2\theta). \quad (3.3)$$

3.2 Discussão teórica e experimental

Em 2015, em uma série de experimentos realizados em Stuttgart [25, 20], foi observado pela primeira, uma transição gás-líquido para um estado conhecido como gotículas quânticas. O fenômeno não pode ser explicado pela teoria de campo médio, pois segundo esta teoria, a fase líquida nunca deveria ser observada [26], visto que o comprimento de espalhamento a_s é muito maior que a distância que estabiliza o potencial de Van der Waals. A natureza desse fenômeno de fase líquida é crucial e define as propriedades da matéria, desde então a busca por fases exóticas da teoria de muitos corpos, como os supersólidos, despertou o interesse da comunidade científica.

Os primeiros resultados observados experimentalmente das gotículas quânticas foram obtidos a partir de um CBE de átomos de disprósio, ^{164}Dy , com um momento magnético de $9,93\mu B$, em uma armadilha harmônica em formato de panqueca (oblato), com aspect ratio

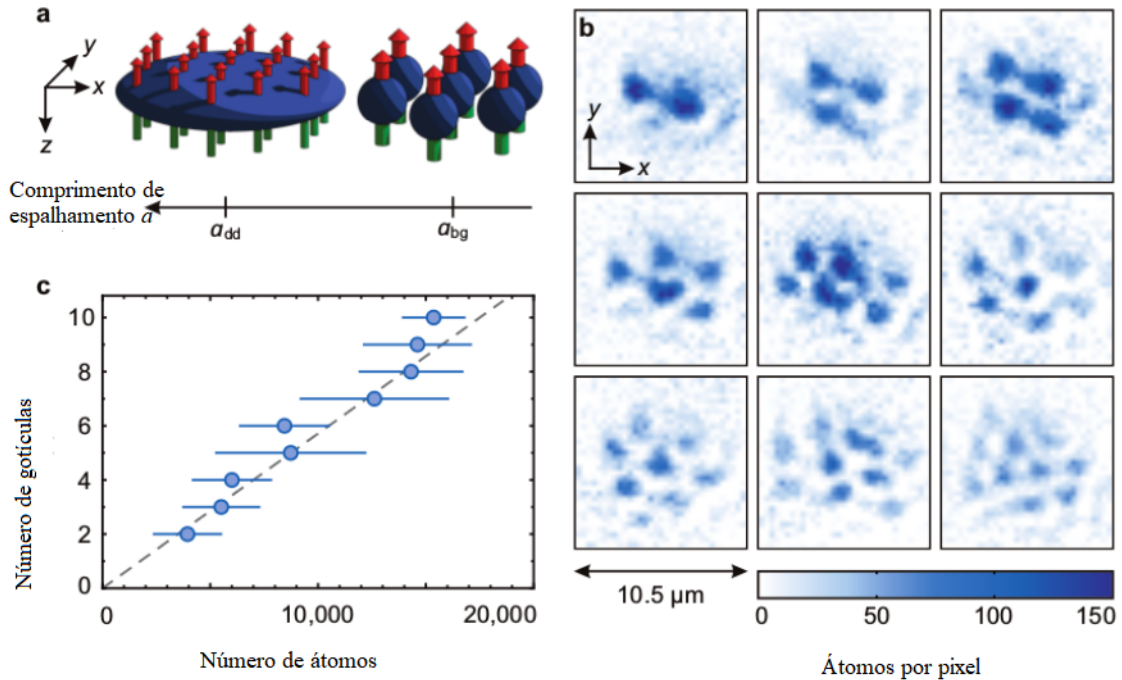
$$\frac{\omega_z}{\omega_\rho} \approx 3, \quad (3.4)$$

em que $\omega_x = \omega_y = \omega_\rho$, agindo sobre um campo magnético exteno, com orientação de polarização ao longo do eixo z da armadilha descrita.

Visto que a interação dipolar domina a interação de contato pode acontecer uma instabilidade de um gás dipolar, porém quando consideramos a presença das flutuações quânticas, ou seja a ocupação dos níveis excitados e consideramos a configuração da armadilha e a direção de polarização determinam a estabilidade de um condensado dipolar, com número de 15.000 átomos e uma temperatura de $70nK$. Nessa configuração de armadilha oblata, Eq. (3.1), os dipolos predominantes se repelirem devido a anisotropia, assim sendo, o CBE é estabilizado, [21].

De acordo com o previsto, para valores de a_s abaixo de a_{crit} [27], o condensado teria que ser instável, por consequência da perda de átomos por meio da recombinação de três corpos [28, 29]. Contudo, foi observado, Fig.4, o surgimento de um padrão triangular de pequenas estruturas ao contrário da instabilidade [30].

Figura 4 – Resultado experimental das gotículas quânticas. *a)* Esquematização da modulação do comprimento de espalhamento a_s . Mostrando uma instabilidade quando $a_s \approx a_{bg}$. *b)* Imagens de in situ dos padrões observados no experimento das gotículas quânticas quando o número de gotículas varia de dois a dez. *c)* Ligação entre o número de gotículas, N_d e o número médio de átomos do sistema, N . As marcações azuis indicam o erro, ou seja o desvio padrão agregado na medida e a linha tracejada aponta a relação linear entre N e N_d .



Fonte – Retirada de [30]

Da mesma forma que em ferrofluidos clássicos por intermédio da instabilidade de Rosensweig [31], foi observada que essa transição é resultado de uma perturbação periódica na densidade do condensado [32]. Conforme a figura 4, quando $a_s \approx a_{bg}$ essa perturbação ocorre, onde a_{bg} é o comprimento de espalhamento relacionado ao ^{164}Dy na situação distante de sua ressonância de Feshbach. Foi observado que o número de gotículas por arranjo N_d depende linearmente do número de átomos do sistema, em que a linha tracejada na figura 4.c) tem uma inclinação, ou seja, ponto de saturação de $N \approx 17500$, relacionado a um número de gotículas $N_d = 10$, em que pode-se notar que o aumento no número de átomos resulta na expansão do cristal microscópico das gotículas.

Até então, vimos um tipo de formação dessas gotículas que retrata o caso em que há o surgimento de um padrão triangular $\frac{\omega_z}{\omega_\rho} \approx 3$, mas além disso, temos o caso de uma gotícula autoligada em que $\frac{\omega_z}{\omega_\rho}$ pode ser tanto maior, quanto menor que 1. Constituindo a primeira manifestação de um fenômeno autoligado a partir de gases bosônicos tridimensionais que guarda estreita semelhança com as gotículas de ${}^4\text{He}$ [33, 34]. E para armadilhas $\frac{\omega_z}{\omega_\rho} \ll 1$, foram observadas em um experimento [35] uma nova transição de fase, que ocorre por meio da rotação do campo magnético, na transição de uma gotícula para muitas gotículas.

3.3 Correção quântica

No capítulo 2, introduzimos o funcional de energia descrito pela teoria de Gross-Pitaevskii que é relacionada a átomos que estão no mesmo estado quântico. Porém um caso não previsto foi a transição de fase para o então conhecido líquido quântico, chamado gotículas quânticas, envolvente das flutuações quânticas. Em uma série de experimentos realizados em armadilhas em formatos de panquecas e também na ausência de armadilhas, foram observadas essas gotículas em misturas bosônicas alcalinas.

Lee, Huang e Yang foram responsáveis pelas primeiras correções devido as flutuações quânticas para um gás uniforme não dipolar [36, 37], que causam a ocupação dos estados excitados, onde a equação de correção de LHY é dada por

$$E_{LHY} = \frac{64}{15} g n(\mathbf{r})^2 \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}) a_s^3}{\pi}}, \quad (3.5)$$

em que $n(\mathbf{r})$ e g representam a densidade por partícula e a constante de acoplamento, respectivamente.

Tais flutuações são responsáveis por interações repulsivas [38, 39]. Quando se tem $na_s^3 \ll 1$ o aparecimento das flutuações quânticas são irrelevantes para condensados típicos, no entanto as flutuações quânticas firmam um meio estabilizador para as gotículas quânticas, segundo os experimentos realizados.

Se tratando das gotículas dipolares, uma teoria além de campo médio foi estabelecida, uma vez que um valor de a_s inferior ao valor crítico leva ao colapso do condensado. Desse modo,

pretendendo uma solução para este formalismo, uma correção semelhante a correção de LHY foi elaborada em 2011 para a anergia do estado fundamental do CBE. Ela leva em consideração as flutuações quânticas e os efeitos da interação dipolar [38, 39], obtém-se

$$\Delta E = \frac{64}{15} g n(\mathbf{r})^2 \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}) a_s^3}{\pi}} Q_5(\varepsilon_{dd}). \quad (3.6)$$

A contribuição (3.6) se diferencia do termo de LHY apenas por um termo multiplicativo $Q_5(\varepsilon_{dd})$, que é dado por

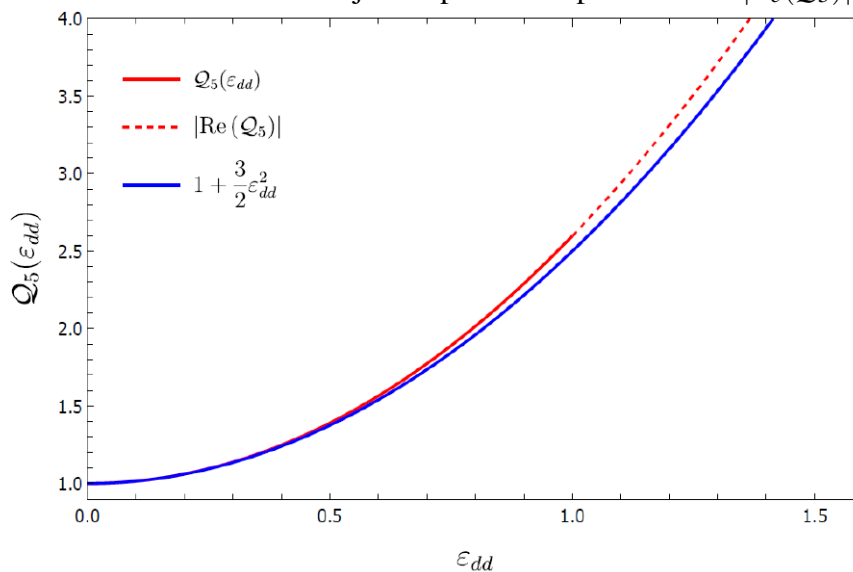
$$Q_5(\varepsilon_{dd}) = (1 - \varepsilon_{dd})^{5/2} {}_2F_1\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3\varepsilon_{dd}}{\varepsilon_{dd} - 1}\right), \quad (3.7)$$

no qual ${}_2F_1(a, b; c; d)$ é a função hipergeométrica de Gauss. Note adquire uma parte pequena imaginária para $\varepsilon_{dd} > 1$. No entanto, através de uma aproximação de Taylor de segunda ordem, calculada em [40], a função foi restrita apenas para a parte real, que é dada aproximadamente por

$$Q_5(\varepsilon_{dd}) \approx 1 + \frac{3}{2} \varepsilon_{dd}^2. \quad (3.8)$$

A Fig. 5 mostra uma comparação entre a Eq. (3.7) e a Eq. (3.8), onde temos que o erro percentual é inferior a seis por cento.

Figura 5 – Gráfico da função Q_5 (linha vermelha) e da aproximação da Eq.(3.8) (linha azul). A linha tracejada representa a parte real de $|R_e(Q_5)|$.



Fonte – Retirada de [23]

Mediante essa correção, a contribuição ao potencial químico é $\mu(\mathbf{r}) = g_{qf}|\psi(\mathbf{r})|^3$, em que ψ é a função de onda do condensado. Aqui, a constante

$$g_{qf} = \frac{32g}{3} \sqrt{\frac{a_s^3}{\pi}} Q_5(\epsilon_{dd}), \quad (3.9)$$

determina a magnitude da correção. Note que ϵ_{dd} entra apenas através da função $Q_5(\epsilon_{dd})$.

4 ABORDAGEM VARIACIONAL

Este capítulo é voltado a uma abordagem variacional, em que serão obtidas as energias de um Condensado de Bose-Einstein através do estudo da teoria de Gross-Pitaevskii. Inicialmente o capítulo apresenta caso de um condensado com interação de contato, que é de curto alcance e isotrópica e em seguida mostramos o caso da interação dipolar, que é anisotrópica e de longo alcance.

4.1 Armadilha triaxial

Para o estudo das propriedades estáticas das gotículas quânticas dipolares, demos início aos cálculos das energias do sistema, em que partimos do funcional de energia da teoria de Gross-Pitaevskii, vista no capítulo 2, reescrito a seguir,

$$E(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\Psi(\mathbf{r})|^2 + U(r)|\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{g}{2} |\Psi(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (4.1)$$

O primeiro termo da integral nos oferece a contribuição da energia cinética, o segundo termo a energia de aprisionamento devido a armadilha, enquanto o último termo representa a energia de contato de curto alcance e com a soma dos termos, a energia total do nível fundamental do sistema.

4.1.1 Interação de contato

No capítulo 2, seção 2.2, consideramos o caso de $g = 0$. Considere o caso em que $g \neq 0$, ou seja, na presença de interação entre os átomos e calcular a contribuição da energia de contato que é de curto alcance e isotrópica e é regida por um potencial efetivo dado por

$$V_\delta(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}), \quad (4.2)$$

em que \mathbf{r} representa a posição relativa das partículas [24] e a constante de acoplamento g é dada

pela equação (2.3). Assim, como fizemos no caso anterior, substituindo o ansatz gaussiano, Eq.(2.7), no funcional de energia de Gross-Pitaevskii obtemos

$$E_{\delta} = \frac{1}{2} \int g |\psi(r)|^4 d^3r = \frac{N^2 g}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z}. \quad (4.3)$$

O sinal da constante g fornece se o CBE é atrativo ou repulsivo, logo com o sinal da constante de acoplamento positivo, $g > 0$, observa-se um Condensado de Bose-Einstein atrativo, já para o caso de $g < 0$, negativo, nota-se um CBE repulsivo. Desse modo, a energia total do sistema é,

$$E(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \frac{1}{4} N \hbar \bar{\omega} \sum_{i=x,y,z} \left(\frac{a_i^2}{\sigma_i^2} + \frac{\sigma_i^2 \omega_i}{a_i^2 \bar{\omega}^2} \right) + \frac{N^2 g}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_z}. \quad (4.4)$$

Para $a_s > 0$ a interação de contato é repulsiva, levando à estabilidade do CBE e a expansão da nuvem. Em contraste, se a interação for atrativa ($a_s < 0$), o CBE é instável e a nuvem colapsa a partir de certo ponto mais precisamente para um número de átomos N maior que N_{crit} dado por $N_{crit} = k a_{osc} / a_s$, em que k é uma constante da ordem de 1/2.

4.1.2 Energia de interação de dipolo-dipolo

Na seção anterior, utilizamos a aproximação gaussiana no funcional de energia 4.1 e obtivemos a energia devido a interação de contato. Nesta seção, vamos utilizar o mesmo ansatz gaussiano, Eq.(2.7) para o cálculo da energia de interação dipolo-dipolo, E_{dd} , denotada por

$$E_{dd}[\psi] = \frac{1}{2} \int d^3r_1 d^3r_2 |\psi(\mathbf{r}_1)|^2 V_{dd}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) |\psi(\mathbf{r}_2)|^2. \quad (4.5)$$

Utilizando a aproximação gaussiana, a densidade de partículas

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{N}{\pi^{\frac{3}{2}} (\sigma_x \sigma_y \sigma_z)} \text{Exp} \left[- \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right) \right]. \quad (4.6)$$

Assim, utilizando a transformada de Fourier do potencial de interação dipolo-dipolo (ver apêndice A) e fazendo uso da relação de Fourier da densidade, Eq.(4.6),

$$n(\mathbf{k}) = \int d^3r n(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = Ne^{-\frac{1}{4}(k_x^2\sigma_x^2+k_y^2\sigma_y^2+k_z^2\sigma_z^2)}, \quad (4.7)$$

é possível calcular a energia dipolar, que é escrita como

$$E_{dd} = \frac{1}{2} \int d^3r_1 \int d^3r_2 n(\mathbf{r}_2)V_{dd}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)n(\mathbf{r}_1). \quad (4.8)$$

Usando a transformada de Fourier, a Eq.(4.8) se torna

$$E_{dd} = \frac{1}{2} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} n(\mathbf{k}_1)e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} V_{dd}(\mathbf{k}_2)e^{i\mathbf{k}_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3} n(\mathbf{k}_3)e^{i\mathbf{k}_3\mathbf{r}}, \quad (4.9)$$

onde a transformada de Fourier da interação dipolo-dipolo é dada por

$$V_{dd}(\mathbf{k}) = \frac{\mu_0}{3} \left(\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2} - m^2 \right). \quad (4.10)$$

De modo que, aplicando as propriedades da distribuição delta de Dirac, obtemos

$$E_{dd} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} n(\mathbf{k})V_{dd}(-\mathbf{k})n(-\mathbf{k}). \quad (4.11)$$

Podemos observar que $n(\mathbf{k})$ e $V_{dd}(\mathbf{k})$ são funções pares. Além disso, tendo em conta a anisotropia do sistema, isto é considerando que o momento magnético m adquire uma direção preferida, a direção z , a Eq. (4.11) se torna

$$E_{dd} = \frac{N^2 C_{dd}}{6(2\pi)^3} \int d^3k \left(\frac{3k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}(k_x^2\sigma_x^2+k_y^2\sigma_y^2+k_z^2\sigma_z^2)}. \quad (4.12)$$

Assim sendo, fazendo uso de coordenadas esféricas, resolvemos a integral radial e obtemos energia de interação dipolo-dipolo escrita como

$$E_{dd} = -\frac{N^2 C_{dd}}{6(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z} f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right), \quad (4.13)$$

em que, introduzimos a função de anisotropia dada por

$$f(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left(\frac{3 \cos^2 \theta x^2 y^2}{(\cos^2 \phi y^2 + \sin^2 \phi x^2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta x^2 y^2} - 1 \right) \sin \theta d\theta. \quad (4.14)$$

A função $f(x,y)$ representa a anisotropia do sistema e seu gráfico se encontra na Fig.6.

Para um sistema com simetria cilíndrica, isto é, quando se toma o limite de y tendo a x , a função de anisotropia, com eixo z tornando-se o eixo de simetria, obedece a seguinte equação:

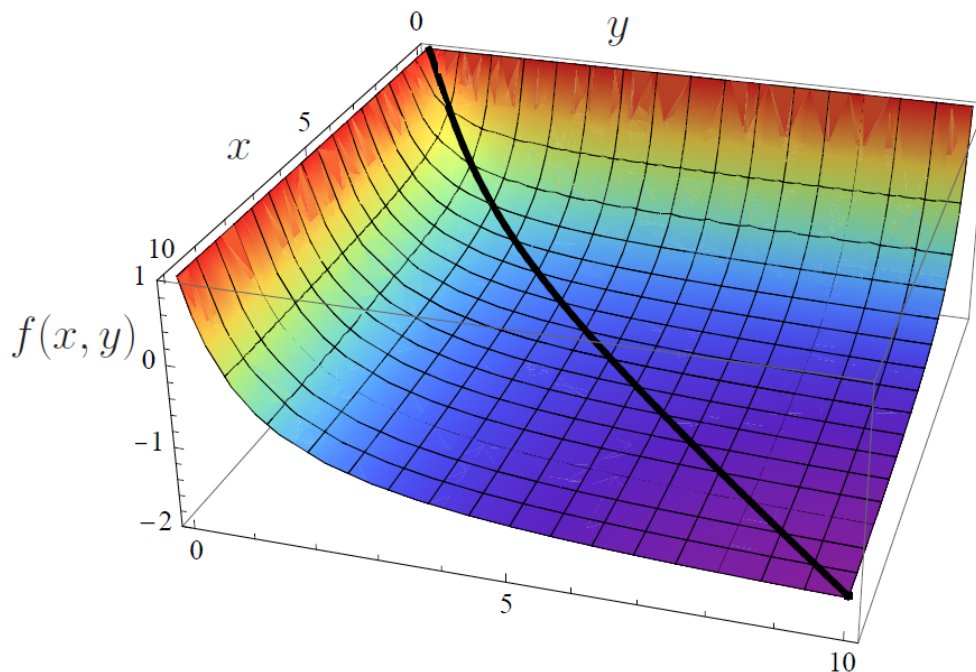
$$f(x,y) = f_s(x) \quad (4.15)$$

com

$$f_s(x) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left(\frac{3x^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + x^2 \cos^2 \theta} - 1 \right), \quad (4.16)$$

e é válida para qualquer valor de x .

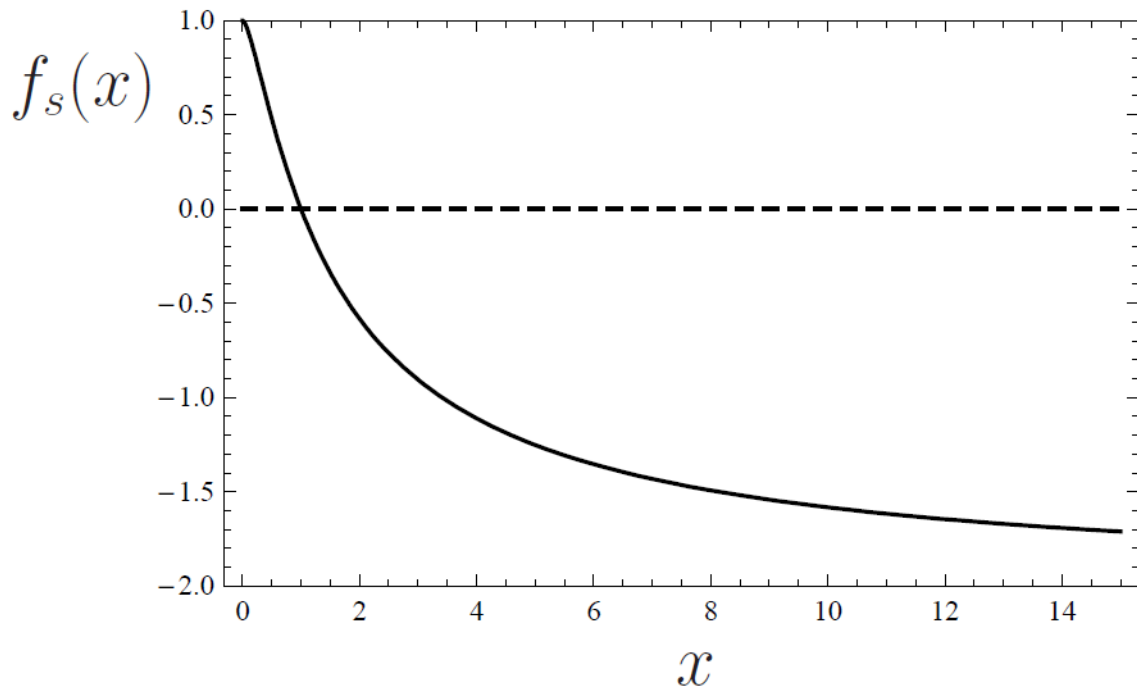
Figura 6 – Função de anisotropia. A função descrita pela Eq. (4.14) é restrita entre 1 para pequenos valores de x ou y e -2 para grandes valores de x e y .



Fonte – Retirada de [41]

A Fig.6, mostra que a função é restrita entre 1, para valores de x ou y muito menores que 1 e -2 , para x e y muito maiores que 1. Para um sistema de simetria cilíndrica, em que a polarização está ao longo do eixo de simetria, Fig.7, observa-se que a interação é predominantemente atrativa em sistemas com forma de charuto ($x = \sigma_x/\sigma_z < 1$), $f_s(x) > 0$ e repulsiva, $f_s(x) < 0$ para sistemas com forma de panqueca ($x = \sigma_x/\sigma_z > 1$).

Figura 7 – Gráfico de $f_s(x)$. Note que $f_s(x)$ passa de positiva a negativa quando x vai de valores menores que 1 a valores maiores que 1.



Fonte – Retirada de [41]. Em que para $x = 1$ a função $f_s(x)$ muda o sinal.

Onde, a função $f_s(x)$ é positiva para $x < 1$, passa por zero em $x = 1$ e é negativa para $x > 1$. Consequentemente o condensado de Bose-Einstein é esticado ao longo do eixo de polarização o que leva a uma energia menor.

4.1.3 Energia das flutuações quânticas

Considerando a presença das flutuações quânticas e os efeitos das interações dipolares o funcional de energia de Gross-Pitaevskii é dado por

$$E[\psi] = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\Psi(\mathbf{r})|^2 + U(r)|\Psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{g}{2} |\Psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{2} |\psi|^2 \Phi_{dd} + \frac{2}{5} g_{df} |\Psi|^3 \right], \quad (4.17)$$

em que o último termo representa a parcela da correção quântica devida às flutuações quânticas.

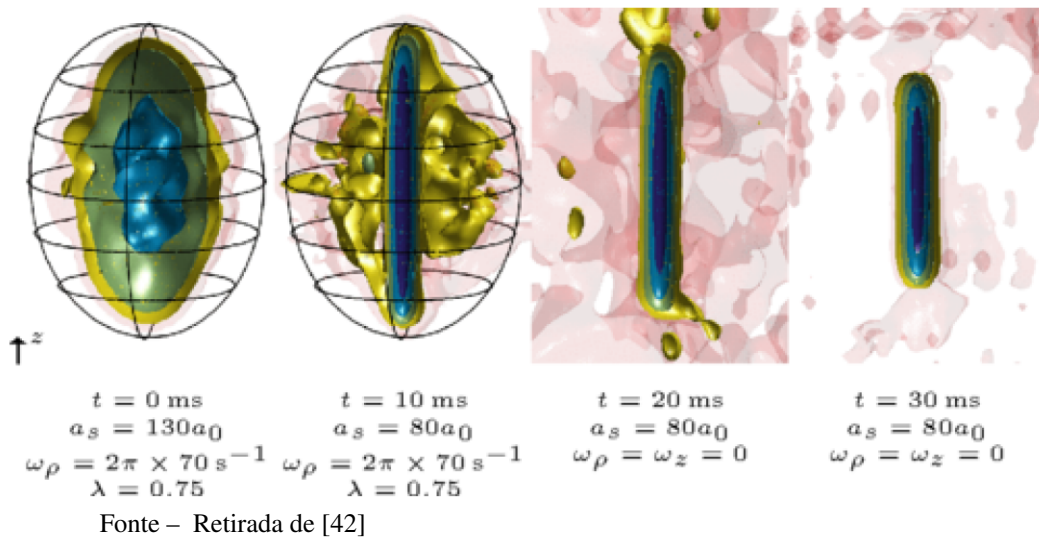
Assim sendo, acrescentando as correções originadas pelas flutuações quânticas, a equação de Gross-Pitaevskii estendida pode ser escrita como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2M} \Delta^2 + U(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \Phi_{dd}(\mathbf{r}, t) + g_{qf}|\Psi(\mathbf{r}, t)|^3 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (4.18)$$

Esta equação representa um condensado fortemente dipolar e uma de suas soluções corresponde a gotículas quânticas dipolares.

Baillie, Wilson e Bisset, realizaram uma simulação numérica ilustrada na figura 8, para o caso em que $\omega_z/\omega_p < 1$. Neste caso, a equação de Gross-Pitaevskii possui uma solução para a configuração de uma gotícula única, isto é, quando o sistema permanece estável mesmo após o desligamento da armadilha, representada pelas linhas pretas.

Figura 8 – Imagem computacional da configuração de uma gotícula quântica autoligada, mediante um condensado de ^{164}Dy . As linhas pretas representam a armadilha harmônica de confinamento. Em $t = 10\text{ms}$ a gotícula única autoligada é formada e em $t = 20\text{ms}$ a armadilha é desligada. posterior a isso, é observado a estabilidade da gotícula, mesmo na ausência da armadilha.



Dessa forma, empregando o ansatz gaussiano introduzido no capítulo 2, obtivemos a energia de correção quântica(ver apêndice B),

$$\Delta E_Q = \left[\frac{N^{\frac{5}{2}} g_{qf}}{\pi^{\frac{9}{4}}} \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sigma_x^3 \sigma_z^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (4.19)$$

No entanto, fazendo uma estimativa entre a energia de interação dipolo-dipolo (4.12) e a energia das flutuações quânticas, considerando que $f(x,y)$ e $Q_5(\epsilon_{dd})$ são da ordem de 1 obtivemos a seguinte expressão

$$\frac{|E_{dd}|}{\Delta E_Q} \approx C_1 N^{\frac{1}{2}} \frac{a_{dd} \sigma_x \sigma_z^{\frac{1}{2}}}{a_s^{\frac{5}{2}}}, \quad (4.20)$$

em que $C_1 \approx 0,6850$ e $a_{dd} = \frac{C_{dd} M}{12\pi\hbar^2}$ é a constante de acoplamento da interação dipolo-dipolo. Desse modo, para o Disprósio temos os seguintes valores, $a_{dd} = 131a_0$, $N = 1000$, $a_s = 92a_0$, $\sigma_x = 300nm$ e $\sigma_z = 450nm$, com $a_0 = 5,29 \times 10^{-11}m$ sendo o raio de Bohr [25]. Assim sendo, obtivemos o seguinte resultado

$$\frac{|E_{dd}|}{\Delta E_Q} \approx 18000. \quad (4.21)$$

Então, observa-se que a energia de interação dipolo-dipolo é 18000 vezes maior que a energia das flutuações quânticas, ou seja, a energia de flutuações quânticas, neste caso, seria desprezível. Porém, note que a energia de dipolo-dipolo é negativa e em contrapartida a energia de contato tem a mesma intensidade, mas é positiva, com isso ambas se cancelam e nesse momento a energia das flutuações quânticas se torna importante. Este é o mecanismo que leva à estabilidade das gotículas.

4.2 Variáveis adimensionais

Nesta seção, vamos introduzir as variáveis adimensionais, com ajuda das quais vamos calcular a energia por partícula. Neste caso precisamos definir as seguintes variáveis: $\tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\bar{a}}$ e $\tilde{E} = \frac{E}{N\hbar\omega}$. Em que, \tilde{E} é a energia adimensional e $\tilde{\sigma}_i$ representa o parâmetro variacional adimensional.

Com essas definições e tomando as variáveis adimensionais na energia de um con-

densado ideal, Eq.(2.11), chegamos ao seguinte resultado

$$\tilde{E} = \frac{1}{4} \sum_i \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2} + \frac{\omega_i^2}{\tilde{\omega}^2} \tilde{\sigma}_i^2 \right), \quad (4.22)$$

onde \tilde{E} é a energia adimensional de um CBE ideal. Desse modo, minimizando a energia, ou seja, calculando, $\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{\sigma}_i} = 0$ temos a seguinte solução física:

$$\sigma_i = a_i \quad (4.23)$$

em que o resultado de remete a solução do oscilador harmônico.

Definidas as variáveis adimensionais, repetimos o processo para as energias, de contato, de interação dipolo-dipolo e a energia de correção quântica. Dessa forma, chegamos aos seguintes resultados, respectivamente:

$$\tilde{E}_\delta = \frac{Na_s}{\sqrt{2\pi\bar{a}}} \frac{1}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y \tilde{\sigma}_z}, \quad (4.24)$$

$$\tilde{E}_{dd} = \frac{Na_s \epsilon_{dd}}{\sqrt{2\pi\bar{a}}} \frac{1}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y \tilde{\sigma}_z} f \left(\frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_z}, \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_z} \right), \quad (4.25)$$

$$\Delta \tilde{E}_Q = \frac{1}{\tilde{\sigma}_x^3 \tilde{\sigma}_z^{3/2}}, \quad (4.26)$$

onde,

$$\gamma = \frac{512\sqrt{2} N^{3/2} a_s^{5/2} Q_5(\epsilon_{dd})}{75\sqrt{5} \bar{a}^{5/2}}. \quad (4.27)$$

Desse modo, temos que a energia total por partícula do estado fundamental é dada por:

$$\tilde{E}_{gs} = \frac{1}{4} \sum_i \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2} + \frac{\omega_i^2}{\tilde{\omega}^2} \tilde{\sigma}_i^2 \right) + \frac{Na_s}{\sqrt{2\pi\bar{a}}} \frac{1}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y \tilde{\sigma}_z} \left[1 - \epsilon_{dd} f \left(\frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_z}, \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_z} \right) \right] + \gamma \frac{N^{3/2} a_s^{5/2} Q_5(\epsilon_{dd})}{\bar{a}^{5/2}} \frac{1}{\tilde{\sigma}_x^3 \tilde{\sigma}_z^{3/2}}. \quad (4.28)$$

4.3 Armadilha cilíndrica

Na seção 4.1 vimos o caso da armadilha triaxial, em que $\omega_x \neq \omega_y \neq \omega_z$. Nesta seção vamos introduzir o conceito de armadilha cilíndrica, em que duas das frequências são iguais, ($\omega_x = \omega_y$), e com isso calculamos as equações que regem as soluções estáticas das gotículas quânticas dipolares.

Nesta seção, trataremos como um problema de simetria cilíndrica o caso em que a armadilha tem frequência na direção x igual a frequência na direção y , no qual os dipolos estão todos orientados na direção do eixo z . Desse modo, para $\omega_x = \omega_y$, temos como consequência $\sigma_x = \sigma_y$, onde a partir de agora vamos trabalhar apenas com as energias adimensionais, dessa forma abandonamos o uso do til (\sim).

A energia total do estado fundamental das gotículas quânticas é dada por:

$$E_{gs} = E_{cin} + E_{tr} + E_{\delta} + E_{dd} + \Delta E_Q, \quad (4.29)$$

em que, E_{cin} representa a contribuição da energia cinética, E_{tr} a energia de aprisionamento, E_{δ} a energia de contato, E_{dd} que representa a energia de interação dipolo-dipolo, por fim, ΔE_Q a energia de correção quântica.

Desse modo, tomamos o limite da energia, 4.5, quando σ_y tende a σ_x ,

$$\lim_{\sigma_y \rightarrow \sigma_x} E_{gs} = \lim_{\sigma_y \rightarrow \sigma_x} (E_{cin} + E_{tr} + E_{\delta} + E_{dd} + \Delta E_Q), \quad (4.30)$$

e calculamos cada termo separadamente, iniciando pelo limite da energia cinética, que é dado por:

$$\lim_{\sigma_y \rightarrow \sigma_x} E_{cin} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_z^2} \right). \quad (4.31)$$

O mesmo foi feito para a energia de aprisionamento

$$\lim_{\sigma_y \rightarrow \sigma_x} E_{tr} = \frac{1}{4} (2\sigma_x^2 + \sigma_z^2). \quad (4.32)$$

e para a energia de contato

$$\lim_{\sigma_y \rightarrow \sigma_x} E_{\delta} = \frac{Na_s}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_z} \right). \quad (4.33)$$

Em seguida, calculamos o limite da energia de interação dipolo-dipolo,

$$\lim_{\sigma_y \rightarrow \sigma_x} E_{dd} = \lim_{\sigma_y \rightarrow \sigma_x} \left[\frac{-Na_s \epsilon_{dd}}{\sqrt{2\pi\bar{a}}} \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z} \right] \lim_{\sigma_y \rightarrow \sigma_x} f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}, \frac{\sigma_y}{\sigma_z}\right), \quad (4.34)$$

em que,

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left[\frac{3\cos^2 \theta x^2 y^2}{(\cos^2 \phi y^2 + \sin^2 \phi x^2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta x^2 y^2} - 1 \right] \sin \theta d\theta. \quad (4.35)$$

Então, calculando o limite da função $f(x, y)$ obtivemos o seguinte resultado:

$$\lim_{x \rightarrow y} f(x, y) = f_s(x) \quad (4.36)$$

em que a função $f_s(x)$ é definida como

$$f_s(x) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{3\cos^2 \theta x^2}{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta x^2)} - 1 \right] \sin \theta d\theta. \quad (4.37)$$

Portanto, o limite da energia de interação dipolo-dipolo é dado por

$$\lim_{\sigma_y \rightarrow \sigma_x} E_{dd} = \frac{Na_s \epsilon_{dd}}{\sqrt{2\pi\bar{a}}} \frac{1}{\sigma_x^2 \sigma_z} f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}\right) \quad (4.38)$$

Para finalizar, determinamos o limite da energia de correção quântica, cujo resultado foi:

$$\lim_{\sigma_y \rightarrow \sigma_x} \Delta E_Q = \gamma \frac{1}{\sigma_x^3 \sigma_z^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.39)$$

Assim sendo, para definirmos as equações que determinam as soluções estáticas das gotículas quânticas dipolares, derivamos as equações obtidas pelos cálculos dos limites. Assim a derivada foi calculada com respeito a σ_x e de forma análoga com relação a σ_z . Assim, temos a energia total do sistema e as equações que regem as soluções estáticas para σ_x ,

$$\frac{1}{\sigma_x^2} = \frac{\omega_i^2}{\bar{\omega}^2} \sigma_x^2 - \frac{Na_s}{\sqrt{2\pi\bar{a}}} \frac{2}{\sigma_x^2 \sigma_z} \left\{ 1 - \epsilon_{dd} \left[f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}\right) - \frac{\sigma_x}{2\sigma_z} f'\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}\right) \right] \right\} + \gamma \frac{3}{\sigma_x^3 \sigma_z^{3/2}} \quad (4.40)$$

e para σ_z ,

$$\frac{1}{\sigma_z^2} = \frac{\omega_i}{\bar{\omega}^2} \sigma_z^2 - \frac{Na_s}{\sqrt{2\pi\bar{a}}} \frac{2}{\sigma_x^2 \sigma_z} \left\{ 1 - \epsilon_{dd} \left[f\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}\right) + \frac{\sigma_x}{2\sigma_z} f'\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_z}\right) \right] \right\} + \gamma \frac{3}{\sigma_x^3 \sigma_z^{3/2}} \quad (4.41)$$

As Eqs. (4.40) e (4.41) descrevem as propriedades estáticas do sistema e permitem calcular o valor de σ_x e σ_z para cada valor dos parâmetros contidos e representam extremos. O valor máximo de $f(\sigma_x/\sigma_z)$ é 1 para $\sigma_x/\sigma_z = 0$, dessa forma a energia do campo médio é limitada sempre que $\epsilon_{dd} < 1$. Portanto, para esses valores da força de interação dipolar, a energia possui um mínimo e o equilíbrio é sempre estável.

5 CONCLUSÕES E PESPECTIVAS.

Por meio do funcional de Gross-Pitaevskii, realizamos o cálculo da energia de um condensado ideal, isto é CBE sem a presença de interações, onde calculamos a contribuição da energia cinética e a energia de aprisionamento devido a armadilha que confina o gás.

Analisando a presença das flutuações quânticas, elaboramos um estudo focado no novo estado da matéria conhecido como gotículas quânticas. Com base nesse estudo, fizemos uma breve descrição teórica e experimental das gotículas quânticas, um sistema autoligado, depois efetuamos os cálculos da energia de correção quântica que é procedente das flutuações quânticas.

E com respeito as interações que não podem ser negligenciadas, realizamos um estudo sobre a interação de contato que é de curto alcance e isotrópica e além disso, elaboramos um estudo sobre o condensado dipolar, onde calculamos a energia de interação dipolo-dipolo que é proveniente de uma interação de longo alcance e anisotrópica. Tais estudos foram feitos através de uma abordagem variacional com uso da função de onda teste do tipo gaussiana, por meio de uma armadilha triaxial.

Por fim, realizamos o cálculo das equações das propriedades estáticas, através do uso de uma armadilha cilíndrica, minimizando a energia e assim obtivemos a energia total do estado fundamental das gotículas quânticas dipolares, ou seja, através dos extremos da energia, encontramos as condições de equilíbrio do sistema.

E como objetivos futuros, pretendemos realizar uma investigação das propriedades estáticas das gotículas para o caso de dipolos orientados arbitrariamente, analisando assim a propriedade de auto-aprisionamento das gotículas quânticas e dinâmica de tempo de voo.

REFERÊNCIAS

- [1] ANDERSON, Mike H. et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor **science**, p. 198-201, 1995.
- [2] BRADLEY, Cl C. et al. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. **Physical review letters**, v. 75, n. 9, p. 1687, 1995.
- [3] GRIFFIN, Allan; SNOKE, David W.; STRINGARI, Sandro (Ed.). **Bose-einstein condensation**. Cambridge University Press, 1996.
- [4] ORNES, Stephen. Core Concept: How Bose–Einstein condensates keep revealing weird physics. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 114, n. 23, p. 5766-5768, 2017.
- [5] COHEN-TANNOUDJI, Claude et al. **Advances in atomic physics: an overview**. World Scientific, 2011.
- [6] CORNELL, Eric A.; ENSHER, Jason R.; WIEMAN, Carl E. Experiments in dilute atomic Bose-Einstein condensation. **arXiv preprint cond-mat/9903109**, 1999.
- [7] GROSS, Eugene P. Structure of a quantized vortex in boson systems. **II Nuovo Cimento (1955-1965)**, v. 20, n. 3, p. 454-477, 1961.
- [8] PITAEVSKII, L. P. Vortex lines in an imperfect Bose gas. **Sov. Phys. JETP**, v. 13, n. 2, p. 451-454, 1961.
- [9] BAYM, Gordon; PETHICK, C. J. Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas. **Physical review letters**, v. 76, n. 1, p. 6, 1996.
- [10] EDWARDS, Mark; BURNETT, K. Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms. **Physical Review A**, v. 51, n. 2, p. 1382, 1995.
- [11] RUPRECHT, IPA et al. Time-dependent solution of the nonlinear Schrödinger equation for Bose-condensed trapped neutral atoms. **Physical Review A**, v. 51, n. 6, p. 4704, 1995.
- [12] EDWARDS, Mark et al. Properties of a Bose-Einstein condensate in an anisotropic harmonic potential. **Physical Review A**, v. 53, n. 4, p. R1950, 1996.

- [13] DALFOVO, Franco; STRINGARI, Sandro. Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices. **Physical Review A**, v. 53, n. 4, p. 2477, 1996.
- [14] DODD, R. J. et al. Role of attractive interactions on Bose-Einstein condensation. **Physical Review A**, v. 54, n. 1, p. 661, 1996.
- [15] GRIESMAIER, Axel et al. Bose-Einstein condensation of chromium. **Physical Review Letters**, v. 94, n. 16, p. 160401, 2005.
- [16] AIKAWA, K. et al. Bose-Einstein condensation of erbium. **Physical review letters**, v. 108, n. 21, p. 210401, 2012.
- [17] LU, Mingwu et al. Strongly dipolar Bose-Einstein condensate of dysprosium. **Physical review letters**, v. 107, n. 19, p. 190401, 2011.
- [18] PHILLIPS, William D. Nobel Lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms. **Reviews of Modern Physics**, v. 70, n. 3, p. 721, 1998.
- [19] FOOT, Christopher J. et al. **Atomic physics**. Oxford University Press, 2005.
- [20] FERRIER-BARBUT, Igor et al. Liquid quantum droplets of ultracold magnetic atoms. **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, v. 49, n. 21, p. 214004, 2016.
- [21] KADAU, H.; SCHMITT, M.; WENZEL, M.; WINK, C.; MAIER, T.; FERRIER-BARBUT, I.; PFAU, T. Observing the rosenweig instability of a quantum ferrofluid. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 530, n. 7589, p. 194, 2016.
- [22] JOCHIM, S. **Bose-Einstein Condensation of Molecules**. 2004. 180 f. Tese (Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)) — Fakultät der Leopold-Franzens, Universität Innsbruck, Innsbruck, 2004.
- [23] NETO, José Fernandes de Oliveira. **Gotículas quânticas dipolares com orientação arbitrária**. Trabalho de conclusão de curso - Curso em Licenciatura em Física, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira. Acarape-CE. 2019.
- [24] PETHICK, C. J.; SMITH, H. **Bose-Einstein condensation in dilute gases**. [S.l.]: Cambridge university press, 2008.

- [25] SCHMITT, Matthias et al. Self-bound droplets of a dilute magnetic quantum liquid. **Nature**, v. 539, n. 7628, p. 259, 2016.
- [26] FERRIER-BARBUT, I.; PFAU, T. Quantum liquids get thin. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 359, n. 6373, p. 274–275, 2018.
- [27] KOCH, Tobias et al. Stabilization of a purely dipolar quantum gas against collapse. **Nature physics**, v. 4, n. 3, p. 218, 2008.
- [28] RONEN, Shai; BORTOLOTTI, Daniele CE; BOHN, John L. Radial and angular rotons in trapped dipolar gases. **Physical review letters**, v. 98, n. 3, p. 030406, 2007.
- [29] WILSON, Ryan M.; RONEN, Shai; BOHN, John L. Angular collapse of dipolar Bose-Einstein condensates. **Physical Review A**, v. 80, n. 2, p. 023614, 2009.
- [30] KADAU, Holger et al. Observing the Rosensweig instability of a quantum ferrofluid. **Nature**, v. 530, n. 7589, p. 194, 2016.
- [31] COWLEY, M. D.; ROSENSWEIG, Ronald E. The interfacial stability of a ferromagnetic fluid. **Journal of Fluid mechanics**, v. 30, n. 4, p. 671-688, 1967.
- [32] SAITO, Hiroki; KAWAGUCHI, Yuki; UEDA, Masahito. Ferrofluidity in a two-component dipolar Bose Einstein condensate. **Physical review letters**, v. 102, n. 23, p. 230403, 2009.
- [33] HARMS, J.; TOENNIES, J. P.; DALFOVO, F. Density of superfluid helium droplets. **Physical Review B**, APS, v. 58, n. 6, p. 3341, 1998.
- [34] DALFOVO, F.; LASTRI, A.; PRICAUPENKO, L.; STRINGARI, S.; TREINER, J. Structural and dynamical properties of superfluid helium: a density-functional approach. **Physical Review B**, APS, v. 52, n. 2, p. 1193, 1995.
- [35] WENZEL, M.; BÖTTCHER, F.; LANGEN, T.; FERRIER-BARBUT, I.; PFAU, T. Striped states in a many-body system of tilted dipoles. **Physical Review A**, APS, v. 96, n. 5, p. 053630, 2017.
- [36] LEE, Tsin D.; HUANG, Kerson; YANG, Chen N. Eigenvalues and eigenfunctions of a Bose system of hard spheres and its low-temperature properties. **Physical Review**, v. 106, n. 6, p. 1135, 1957.

- [37] LEE, T. D.; YANG, C. N. Many-body problem in quantum mechanics and quantum statistical mechanics. **Physical Review**, v. 105, n. 3, p. 1119, 1957.
- [38] LIMA, Aristeu R. P.; PELSTER, Axel. Quantum fluctuations in dipolar Bose gases. **Physical Review A**, v. 84, n. 4, p. 041604, 2011.
- [39] LIMA, Aristeu R. P.; PELSTER, Axel. Beyond mean-field low-lying excitations of dipolar Bose gases. **Physical Review A**, v. 86, n. 6, p. 063609, 2012.
- [40] SCHÜTZHOLD, R.; UHLMANN, M.; XU, Y.; FISCHER, U. R. Mean-field expansion in bose–einstein condensates with finite-range interactions. **International Journal of Modern Physics B, World Scientific**, v. 20, n. 24, p. 3555–3565, 2006.
- [41] LIMA, A. R. P. **Hydrodynamic Studies of Dipolar Quantum Gases**. 2010. 153 f. Tese (Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)) Fachbereich Physik, Freien Universität Berlin, Berlin, 2010.
- [42] BAILLIE, D. et al. Self-bound dipolar droplet: A localized matter wave in free space. **Physical Review A**, v. 94, n. 2, p. 021602, 2016.
- [43] SCHMITTO, Matthias. **A Self-bound Dilute Quantum Liquid of Dysprosium Atoms**. Verlag Dr. Hut, 2017.

**APÊNDICE A – CONTRIBUIÇÃO DAS ENERGIAS, CINÉTICA, DE
APRISIONAMENTO E DE CONTATO**

Para o cálculo da energia cinética, resolvemos uma integral gaussiana do tipo

$$\frac{\hbar^2}{2M} \int |\vec{\nabla}\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \eta_0 \frac{\hbar^2}{2M} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^4} e^{-x^2/\sigma_x^2} \frac{y^2}{\sigma_y^4} e^{-y^2/\sigma_y^2} \frac{z^2}{\sigma_z^4} e^{-z^2/\sigma_z^2} \right) dx dy dz, \quad (\text{A.1})$$

onde resolvemos cada termo da integral utilizando a seguinte propriedade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{x^2/\gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma^3}}. \quad (\text{A.2})$$

Desse modo, utilizando (A.2) obtivemos o seguinte resultado

$$\frac{\hbar^2}{2M} \int |\vec{\nabla}\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \eta_0 \frac{\hbar^2}{2M} \pi^{3/2} \left[\frac{\sigma_x^3 \sigma_y \sigma_z}{\sigma_x^4} + \frac{\sigma_y^3 \sigma_x \sigma_z}{\sigma_y^4} + \frac{\sigma_z^3 \sigma_x \sigma_y}{\sigma_z^4} \right], \quad (\text{A.3})$$

em que $\eta_0 = \frac{N}{\pi^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z}$ é a constante de normalização. Desse modo, substituindo η_0 na Eq. (A.3) obtivemos a contribuição da energia cinética E_{cin}

$$E_{cin} = \frac{\hbar^2}{4M} N \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_z^2} \right). \quad (\text{A.4})$$

Para o cálculo da energia de aprisionamento, fizemos um processo análogo ao da energia cinética, em que resolvemos a seguinte integral

$$\int U(\mathbf{r}) |\Psi(\mathbf{r})|^2 dx dy dz = \frac{\eta_0 M}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\omega_x^2 x^2 e^{-x^2/\sigma_x^2} e^{-y^2/\sigma_y^2} e^{-z^2/\sigma_z^2} \right) dx dy dz \quad (\text{A.5})$$

em que $U(\mathbf{r})$ é o potencial de aprisionamento dado por

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} M (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (\text{A.6})$$

Assim, substituindo o potencial (A.6) na integral e utilizando a propriedade (A.2), resolvemos a integral e obtivemos a energia de aprisionamento E_{tr} dada por

$$E_{tr} = \frac{NM}{4} (\omega_x^2 \sigma_x^2 + \omega_y^2 \sigma_y^2 + \omega_z^2 \sigma_z^2). \quad (\text{A.7})$$

Para o cálculo da energia de contato resolvemos a integral gaussiana dada por

$$\frac{1}{2} \int g |\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \frac{\eta_0 g}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ - \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right) \right\} dx dy dz, \quad (\text{A.8})$$

e resolvendo a integral obtivemos a seguinte equação

$$\frac{1}{2} \int g |\Psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = \frac{\eta_0^8 g^2}{8} (\pi^3 \sigma_x^2 \sigma_y^2 \sigma_z^2). \quad (\text{A.9})$$

Substituindo a constante η_0 obtivemos a energia de contato E_δ dada por

$$E_\delta = \frac{Ng}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z}. \quad (\text{A.10})$$

APÊNDICE B – TRANSFORMADA DE FOURIER DA INTERAÇÃO DIPOLO-DIPOLO

Para o cálculo da transformada de Fourier da interação dipolo-dipolo, fizemos a escolha de um sistema de coordenada adequado.

$$\mathbf{k} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = m \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \phi \\ \sin \theta & \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

O potencial de interação dipolo-dipolo é dado por:

$$V_{dd}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \mathbf{r}^2}{|\mathbf{r}|^5} \right). \quad (\text{B.2})$$

Onde a relação de Fourier e a relação inversa são escritas, respectivamente da seguinte forma:

$$V_{dd}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} V_{dd}(\mathbf{k}). \quad (\text{B.3})$$

$$V_{dd}(\mathbf{k}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} V_{dd}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.4})$$

Assim, substituindo a Eq. C.2 na Eq. B.4, podemos reescrever,

$$V_{dd}(\mathbf{k}) = \int d^3r \left(-\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \left(\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})^2 - \mathbf{m}^2 \cdot \mathbf{r}^2}{|\mathbf{r}|^5} \right) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (\text{B.5})$$

Portanto, utilizando o sistema de coordenadas descrito na Eq. C.1, ficamos com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} V_{dd}(\mathbf{k}) = & -\frac{\mu_0 m^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\phi \\ & \times \{ 3 \sin^2 \alpha \sin^2 \theta [\cos^2 \beta \cos^2 \phi + 2 \sin \beta \cos \beta \sin \phi \cos \phi + \sin^2 \beta \sin^2 \phi] \\ & + 3 \cos^2 \alpha \cos^2 \theta + 6 \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \cos \theta (\cos \beta \cos \phi + \sin \beta \sin \phi) - 1 \}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Dessa forma, resolvendo a integral em ϕ , ficamos com:

$$V_{dd}(\mathbf{k}) = \frac{\mu_0 m^2}{4} (1 - 3 \cos^2 \alpha) \int_a^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\pi e^{-ikr \cos \theta} \sin \theta (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta, \quad (\text{B.7})$$

no qual, o parâmetro a foi introduzido na integral radial por conta do termo $1/r$, ou seja, com o fim de regradar alguma singularidade. Agora, dando sequência, resolvemos a integral em θ ,

$$V_{dd}(\mathbf{k}) = \mu_0 m^2 (1 - 3 \cos^2 \alpha) \int_a^\infty \frac{dr}{r} \left[\frac{3 \cos kr}{(kr)^2} - \frac{3 \sin kr}{(kr)^3} + \frac{\sin kr}{kr} \right]. \quad (\text{B.8})$$

Por fim, resolvemos a integral radial, utilizando integração por partes,

$$V_{dd}(\mathbf{k}) = \mu_0 m^2 (1 - 3 \cos^2 \alpha) \left[\frac{\cos(ka)}{(ka)^2} - \frac{\sin(ka)}{(ka)^3} \right]. \quad (\text{B.9})$$

Tomando o limite quando $a \rightarrow 0$, ficamos com a seguinte equação:

$$V_{dd}(\mathbf{k}) = \frac{\mu_0}{3} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{k})^2}{\mathbf{k}^2} - m^2 \right). \quad (\text{B.10})$$

APÊNDICE C – ENERGIA DE CORREÇÃO QUÂNTICA

Para o cálculo da energia de correção quântica, calculamos a seguinte integral,

$$\Delta E_Q = \int d^3x \Delta E(\mathbf{x}), \quad (\text{C.1})$$

em que $\Delta E(\mathbf{x})$ é a equação de correção quântica dada por,

$$\Delta E(\mathbf{x}) = \frac{64}{15} g n(\mathbf{x})^2 \sqrt{\frac{n(\mathbf{x}) a_s^3}{\pi}} Q_5(\epsilon_{dd}), \quad (\text{C.2})$$

onde $n(\mathbf{x}) = |\psi(\mathbf{x})|^2$. Então, substituímos a Eq. (C.2) na Eq. (C.1) e obtivemos

$$\Delta E_Q = \frac{64}{15} g Q_5(\epsilon_{dd}) \sqrt{\frac{a_s^3}{\pi}} \int d^3x |\psi(\mathbf{x})|^5. \quad (\text{C.3})$$

Desse modo, utilizando a função de onda teste do tipo gaussiana e substituindo na Eq. (C.3), obtivemos

$$\Delta E_Q = \frac{64}{15} g Q_5(\epsilon_{dd}) \sqrt{\frac{a_s^3}{\pi}} \frac{N^{\frac{5}{2}}}{\pi^{\frac{9}{4}} (\sigma_x \sigma_y \sigma_z)^{\frac{3}{2}}} \frac{2^{\frac{3}{2}}}{5}, \quad (\text{C.4})$$

onde definimos a seguinte abreviação,

$$g_{qf} = \frac{32}{3} g \sqrt{\frac{a_s^3}{\pi}} Q_5(\epsilon_{dd}). \quad (\text{C.5})$$

Desse modo, a energia das flutuações quânticas é

$$\Delta E_Q = \left[\frac{N^{\frac{5}{2}} g_{qf}}{\pi^{\frac{9}{4}}} \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sigma_x^3 \sigma_z^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (\text{C.6})$$