



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA - ICEN
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA**

VERIDIANO ARAÚJO DA SILVA

OS CAMPOS DE UMA CARGA PONTUAL EM MOVIMENTO

ACARAPE

2021

VERIDIANO ARAÚJO DA SILVA

OS CAMPOS DE UMA CARGA PONTUAL EM MOVIMENTO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciatura em Física.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga

ACARAPE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Silva, Veridiano Araújo da.

S578c

Os campos de uma carga pontual em movimento / Veridiano Araújo da Silva. - Redenção, 2021.
63f: il.

Monografia - Curso de Física, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga.

1. Eletromagnetismo - Cargas em movimento. 2. Equações de Jefimenko. 3. Potenciais de Liénard-Wiechert. I. Título

CE/UF/Dsibiuni

CDD 537.62138

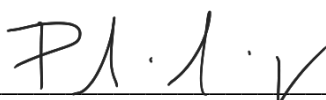
VERIDIANO ARAÚJO DA SILVA

OS CAMPOS DE UMA CARGA PONTUAL EM MOVIMENTO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovada em: 13 de abril de 2021.

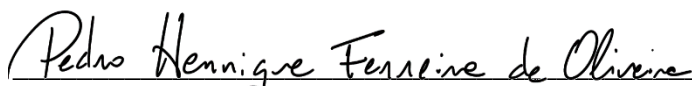
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Igor Rochaid Oliveira Ramos
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)



Prof. Ms. Pedro Henrique Ferreira de Oliveira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, por sempre acreditar em mim
nessa jornada da graduação. Mãe, que nunca
deixou de investir e apoiar-me. Pai, esse é o
seu sonho de ver um filho formado. Irmão que
sempre esteve do meu lado.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois graças ele todo esse trabalho foi possível.

A minha família, que foi meu apoio até o fim.

Ao Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga por ser meu orientador nesse trabalho de TCC.

Aos professores Igor Rochaid Oliveira Ramos e Pedro Henrique Ferreira de Oliveira por aceitarem fazer parte da banca avaliadora.

A todos os professores do curso de licenciatura em Física da UNILAB por estarem sempre a disposição e também por serem excelentes profissionais, sou muito grato, pois aprendi bastante.

A minha turma e amigos principalmente ao Lucas Santos, Masé Galvão, Emília Uchoa e Cristiano Batista por estarem juntos comigo durante toda jornada da graduação.

“A ciência é aquilo que aprendemos sobre como
não deixar enganar a nós mesmos.”

(Richard Feynman)

RESUMO

O objetivo principal desse trabalho consiste em de maneira didática calcular os campos elétrico e magnético de uma carga pontual em movimento. O problema fundamental do eletromagnetismo consiste em como calcular campos elétrico e magnético gerados por uma distribuição qualquer de cargas e de correntes. Através das equações de Maxwell podemos provar que a luz é uma onda eletromagnética, portanto, ao se variar os campos de uma partícula carregada no tempo, as informações sobre essa variação dos campos elétrico e magnético não são instantâneas. O fato desse comportamento ocorrer está em que a luz demora um certo tempo para viajar de um ponto a outro, de modo que a informação eletromagnética viaja à velocidade da luz. Dessa forma, saber as informações de uma fonte de cargas não nos interessa no momento que a notícia chega, mas sim, seu estado em algum tempo anterior quando a mensagem partiu, esse é chamado de tempo retardado. Para se trabalhar com esses campos de forma mais simples, usa-se o conceito de potenciais, porém, esses potenciais foram reformulados para distribuições de cargas e de correntes dependente do tempo retardado. Com isso, chegamos nas equações para os campos elétrico e magnético conhecidos como equações de Jefimenko. Para o cálculo dos campos de uma carga pontual em movimento, trabalhamos com os potenciais de Liénard-Wiechert, pois, esses são os potenciais para uma carga em movimento. Mesmo com o uso de potenciais, os cálculos ainda são complicados, no entanto, todo esse trabalho segue uma metodologia bem didática para melhor compreensão, com exemplos e alguns apêndices com demonstrações e conceitos importantes para o estudo.

Palavras-chave: Cargas em movimento. Equações de Jefimenko. Potenciais de Liénard-Wiechert.

ABSTRACT

The main objective of this work consists in didactically calculating the electric and magnetic fields of a moving point charge. The fundamental problem of electromagnetism is how to calculate electric and magnetic fields generated by any distribution of charges and currents. Through Maxwell's equations we can prove that light is an electromagnetic wave, therefore, when varying the fields of a charged particle over time, the information about this variation of the electric and magnetic fields is not instantaneous. The fact that this behavior occurs is that the light takes a certain time to travel from one point to another, so that the electromagnetic news travels at the speed of light. Thus, knowing the information from a charge source does not interest us the moment the news arrives, but rather, its state at some time before the message left, this is called delayed time. To work with these fields in a simpler way, the concept of potentials is used, however, these potentials have been reformulated for charge and current distributions depending on the delayed time. With that, we arrive at the equations for the electric and magnetic fields known as Jefimenko's equations. For the calculation of the fields of a moving point charge, we work with the Liénard-Wiechert potentials, because these are the potentials for a moving charge. Even with the use of potentials, the calculations are still complicated, however, all this work follows a very didactic methodology for better understanding, with examples and some appendices with demonstrations and important concepts for the study.

Keywords: Moving charges. Jefimenko's equations. Liénard-Wiechert potentials.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração da força de Coulomb.	16
Figura 2 – Linhas de campo \vec{E} passando pela superfície S	17
Figura 3 – Linhas de campo \vec{B} em superfície aberta.	19
Figura 4 – Lâmpada ligada a uma bateria.	20
Figura 5 – Campo \vec{E} não radial.	20
Figura 6 – Linhas de campo \vec{B} em superfície arbitrária.	22
Figura 7 – Corpo uniformemente carregado	31
Figura 8 – Fio reto infinito transportando a corrente	33
Figura 9 – Gráfico do módulo do campo $\vec{E}(t)$	34
Figura 10 – Gráfico do módulo do campo $\vec{B}(t)$	35
Figura 11 – Trajetória da partícula	38
Figura 12 – Ângulo entre \vec{R}^* e \vec{v}	45
Figura 13 – Campo $E(\theta)$ para algumas razões de v^2/c^2	46
Figura 14 – Comportamento de \vec{E} com velocidade \vec{v}	47
Figura 15 – Gráfico das componentes x e y do campo $E(\theta)$	47
Figura 16 – Linhas de campo \vec{B}	47
Figura 17 – Exemplo clássico do trem	55
Figura 18 – Ângulo entre velocidade do trem e a linha de visão	56

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO TEÓRICA DO ELETROMAGNETISMO	14
2.1	Ondas eletromagnéticas no vácuo	15
2.2	Lei de Gauss	16
2.2.1	<i>O Campo Elétrico</i>	16
2.3	Lei de Faraday	19
2.4	Lei Ampère-Maxwell	21
3	A FORMULAÇÃO DO POTENCIAL	24
3.1	Potenciais Escalar e Vetorial	24
3.2	Transformações de Gauge	26
3.3	Calibre de Coulomb e Calibre de Lorentz	27
3.4	Distribuições Contínuas	30
4	OS CAMPOS DE UMA CARGA PONTUAL EM MOVIMENTO	36
4.1	Equações de Jefimenko	36
4.2	Cargas Pontuais	38
4.2.1	<i>Potenciais de Liénard-Wiechert</i>	38
4.2.2	<i>Os Campos de uma Carga pontual em Movimento</i>	40
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	48
	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICES	51
	APÊNDICE A – Prova do calibre de Lorentz para potenciais retardados	51
	APÊNDICE B – Solução da integral para o exemplo 3.1.	54
	APÊNDICE C – Prova dos potenciais de Liénard-Wiechert	55
	APÊNDICE D – Cálculo da derivada temporal do potencial vetor	57
	APÊNDICE E – Valor de $(\vec{R} \cdot \vec{v})$ para uma carga pontual com velocidade constante	60

1 INTRODUÇÃO

O Eletromagnetismo é, atualmente, uma área bastante ampla de conceitos experimentais e teóricos da Física clássica. No entanto, fenômenos relacionados ao Eletromagnetismo já eram estudados desde os gregos antigos. Tales, de Mileto, foi um dos primeiros a conhecer sobre repulsão e atração de objetos como, por exemplo, a atração entre uma pedra de óxido de ferro chamada de magnetita e objetos de ferro[1]. Tales, de Mileto, também tinha conhecimento de um material com o nome de âmbar¹, que ao friccionar com a pele, o mesmo era capaz de atrair pequenos pedaços de palha[1].

Não apenas os gregos desfrutavam deste conhecimento, pois há registros de que a civilização chinesa já utilizava a bússola desde o século III A.C[1]. O uso do Eletromagnetismo era totalmente empírico, pois, não havia nenhuma teoria concreta que pudesse explicar tais fenômenos na época. Porém, já na Idade Média, Petrus Peregrinus produziu um trabalho, considerado o primeiro a tentar explicar experiências com o eletromagnetismo, intitulado por *Epístola de Magnete*[2].

Os experimentos relacionados ao Eletromagnetismo permaneceram parados até dois mil anos depois, e apenas em 1600, William Gilbert (1544-1603) iniciou o estudo sistemático sobre essa Ciência, Gilbert foi o primeiro a distinguir fenômenos entre Eletricidade e Magnetismo e, além disso, criou a palavra elétrico, derivada do grego *Elektron*, que significa âmbar[2], [3].

Em 1663, o cientista Otto von Gureicke (1602-1681) inventou o primeiro gerador de eletricidade estática, construído com uma esfera de enxofre, manipulada com uma manivela[3]. Esse gerador funcionava ao girar a manivela e em seguida sua rotação era freada com a mão, A eletrização nesse caso acontecia devido ao atrito entre a mão e a esfera. Anos depois em 1882 James Wimshurst, criara um outro tipo de gerador, porém, a eletrização agora gerada por indução em vez de atrito. Robert J. van de Graaff, em 1931, construiu um gerador de eletrostática hoje conhecido como “gerador de Van de Graaff”[3].

Todos esses experimentos eram realizados sem o conhecimentos de cargas distintas, esta teoria sobre cargas positivas e negativas foi desenvolvida por Benjamin Franklin (1706-1790). Franklin também postulou que cargas de mesmo sinal se repelem e cargas com sinais diferentes se atraem[2].

Eletromagnetismo é um ramo da Física que por muito anos só se tinham demonstrações experimentais. Um dos primeiros cientistas a tentar conciliar o Eletromagnetismo com a

¹ O âmbar é uma resina fóssil muito usada para a manufatura de objetos ornamentais.

Matemática foi Johann Albrecht Euler (1734-1800), utilizando artifícios matemáticos que antes era utilizado na Hidrodinâmica, porém, levando em consideração o éter[4]. Charles Augustin de Coulomb (1735-1806), foi quem formulou a famosa lei de Coulomb, no seu experimento com uma balança de torção, conseguindo quantificar a força elétrica baseando-se principalmente na hipótese de que a força entre dois objetos carregados é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, hipótese que é consequência da analogia feita com a força gravitacional que conhecemos até hoje[3], [4].

A Eletricidade e o Magnetismo nem sempre andaram juntas com relação aos conhecimentos que se tinha até o século XVIII. O fenômeno que relaciona ambas foi observado em 1820 pelo físico dinamarquês Hans Christian Oersted (1777-1825), que percebeu que ao passar uma corrente pelo fio com uma agulha magnética bem próxima do fio sofria uma interação[6]-[8]. Ampère corretamente postulou que todos os fenômenos magnéticos são decorrentes do movimento de cargas elétricas[9],[10].

Após Oersted ter descoberto as interações de eletricidade com o magnetismo, Michael Faraday (1791-1867) percebeu, em 1820, que variações de campo magnético ao redor de um fio gera corrente elétrica neste fio[5], [10]. Faraday não foi o único a fazer esta descoberta. Quase concomitantemente, Joseph Henry (1797-1878), professor americano, descobriu a força eletro-motriz de auto-indução. Como Henry anunciou formalmente antes, foi ele o homenageado por esta descoberta[2].

Faraday havia especulado que a luz também possui natureza elétrica. A teoria de James Clerk Maxwell (1831-1879), forneceu uma justificativa para essa hipótese, e logo a Ótica foi incorporada ao Eletromagnetismo[10],[11].

Não há como falar de Eletromagnetismo sem citar as contribuições de Maxwell, pois toda a teoria eletromagnética está contida nas suas famosas quatro equações, estabelecidas definitivamente no ano 1873[11]. O edifício teórico do Eletromagnetismo, base de todos os desenvolvimentos da eletrotécnica, foi definitivamente estabelecido em 1873. O estudo e conhecimento da Eletricidade e do Magnetismo beneficiou significativamente o mundo contemporâneo, pois essas áreas da Física estão presentes em todos os setores econômicos, desde as áreas de transporte e comunicação, passando pelas de produção, até as de lazer, como o rádio, televisão, cinema, dentre outros. Imaginar o mundo atual sem o uso do Eletromagnetismo seria quase impossível, pois estamos tão dependentes das tecnologias que uma falta de energia elétrica pode causar um caos em hospitais, escolas, faculdades, redes de comunicações dentre vários outros

locais e ocasiões.

Este capítulo seguiu uma breve síntese da história do Eletromagnetismo, mesmo assim, foram citados poucos dentre muitos autores responsáveis pelos estudos, aplicações e evolução dessa área. De fato, as primeiras apresentações com eletricidade fascinavam as pessoas que acreditavam ser mágica, no entanto, era apenas Ciência. Mesmo com toda teoria Eletromagnética bem estabelecida, existem assuntos que não são vistos nos cursos de graduação, mestrado e até mesmo doutorado. Do ponto de vista didático, geralmente inicia-se o estudo do Eletromagnetismo pelo seu problema fundamental, que consiste em calcular os campos elétrico e magnético gerados por distribuições de cargas e de correntes. No entanto, por questões didáticas os estudos seguem uma ordem, inicialmente pela Eletrostática, onde lidamos com cargas fontes paradas, depois Magnetostática, onde as correntes são estacionárias e, por fim, a teoria eletromagnética, onde une os conceitos de Magnetismo e Eletricidade, provando que ambos são de mesma natureza física. Nesse trabalho, discutiremos de maneira didática como são os campos gerados por cargas pontuais em movimento, chegando em potenciais elétrico e magnético com distribuições de cargas e correntes dependentes de um tempo retardado, com esses potenciais conseguimos calcular os campos elétrico e magnético através das equações de Jefimenko. Em particular para uma carga pontual em movimento trabalhamos com os potenciais de Liénard-Wiechert, onde encontramos os campos generalizados para uma partícula carregada.

Vamos seguir o trabalho com quatro capítulos, em que o primeiro segue um pouco da história, não especificamente sobre o assunto estudado, mas sim, sobre a evolução do Eletromagnetismo desde a descoberta de gregos antigos ao desenvolvimento dessa Ciência.

No segundo capítulo segue uma breve revisão e demonstrações das quatro equações de Maxwell, pois precisamos dessas equações para seguir com o capítulo 3, onde o mesmo traz uma formulação dos potenciais para cargas em movimento. Com essa formulação, escrevemos as fontes de cargas e de correntes em termos de seus potenciais.

O último capítulo concretiza o estudo e aplicações do potenciais para que possamos calcular os campos elétrico e magnético de uma carga pontual em movimento. Também seguem alguns apêndices com demonstrações de uma forma bem didática para melhor compreensão do leitor.

2 REVISÃO TEÓRICA DO ELETROMAGNETISMO

A teoria eletromagnética é toda baseada nas quatro equações de Maxwell apresentadas abaixo. As unidades para essas equações seguirão o Sistema Internacional de Unidades (SI).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}, \quad (2.1)$$

onde $\rho(\vec{r}, t)$ é a distribuição de cargas elétricas.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

essa Equação 2.2 é uma analogia da lei de Gauss para o magnetismo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

essa Equação 2.3 mostra que campo \vec{E} pode ser gerado por variação de campo \vec{B} no tempo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

onde \vec{J} é a distribuição de correntes estacionárias. Essa equação 2.4, também mostra que campo \vec{B} pode ser gerado por variação de campo \vec{E} no tempo.

Cada uma dessas leis possui um nome em particular. A Equação 2.1 é chamada de lei de Gauss na sua forma diferencial, a Equação 2.2 é a lei de Gauss para o magnetismo. A Equação 2.3 é a lei de Faraday na sua forma diferencial, por fim, a Equação 2.4 é a lei de Ampère-Maxwell. Para o caso particular em que essas equações não dependem do tempo vamos obter seguintes equações.

Para eletrostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (2.5)$$

Para magnetostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}). \quad (2.6)$$

Ao longo do Capítulo 2 vamos demonstrar essas quatro equações 2.1-2.4 de Maxwell. Já na próxima seção vamos seguir com as demonstrações das equações de onda para os campos \vec{E} e \vec{B} .

2.1 Ondas eletromagnéticas no vácuo

Sabemos que no vácuo não há distribuições de cargas e correntes, dessa forma as equações de Maxwell ficam simplesmente

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Essas quatro equações constituem um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas, de primeira ordem para os campo \vec{E} e \vec{B} . Para desacoplá-las, vamos aplicar o rotacional nas expressões com o rotacional de \vec{E} e de \vec{B} . Portanto,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (2.8)$$

onde $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$, substituindo na Equação 2.8, obtemos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

pela identidade vetorial $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$, com isso a Equação 2.9 fica

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.10)$$

mas como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, vamos obter

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.11)$$

A Equação 2.11 é a equação de onda para o campo elétrico, onde a velocidade v é dado por:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c, \quad (2.12)$$

onde $c = 299792458 \text{ m/s}$.

Analogamente para o campo \vec{B} , temos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad (2.13)$$

onde $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, logo teremos

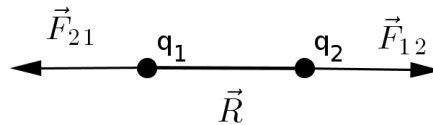
$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

A Equação 2.14 é equação de onda para o campo magnético, onde a velocidade é a mesma da Equação 2.12, que é exatamente a velocidade da luz, provando assim que, a luz é uma onda eletromagnética e que também, a ótica é um ramo do eletromagnetismo.

2.2 Lei de Gauss

Para falarmos desta lei devemos citar antes a lei de Coulomb, pois a mesma é a lei mais fundamental de toda teoria Eletromagnética. Está também é chamada de lei do inverso do quadrado da distância e está correta quando as cargas fontes estão em repouso.

Figura 1 – Ilustração da força de Coulomb.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As cargas ilustrada na Figura 1 vão se atrair ou se repelir de acordo com sinal dessas cargas, supondo que as cagas possuem as mesmas intensidades e sinais iguais, pela lei de ação e reação, ambas irão se afastar uma da outra, onde o módulo da força é dado por:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{R^2}, \quad (2.15)$$

onde a constante ϵ_0 é chamado de **permissividade do espaço livre**: seu valor no SI é

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}.$$

A força F aponta sempre na mesma direção da distância \vec{R} , portanto, escrevendo vetorialmente

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \hat{R}. \quad (2.16)$$

2.2.1 O Campo Elétrico

O campo elétrico surge a partir da lei de Coulomb, por exemplo, Se tivermos várias cargas pontuais q_1, q_2, \dots, q_n , com distâncias R_1, R_2, \dots, R_n de ponto com carga Q , a força total sobre esse ponto será a soma de todas as forças ocasionada por cada carga, Assim

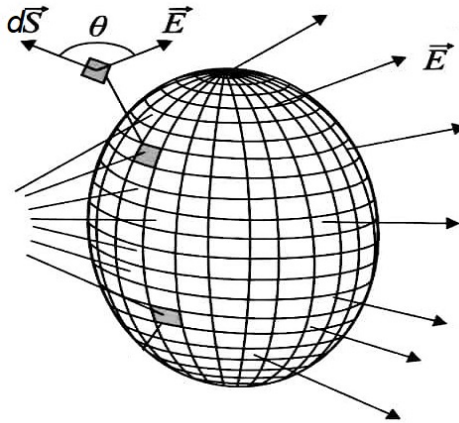
$$\vec{F} = Q\vec{E}, \quad (2.17)$$

onde

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \hat{R}_i. \quad (2.18)$$

Vamos imaginar linhas de campo¹ \vec{E} geradas por cargas pontuais, onde essas linhas passam por um volume cujo o contorno é uma dada superfície S da Figura 2.

Figura 2 – Linhas de campo \vec{E} passando pela superfície S .



Fonte: PNGWing.com

Observe que as linhas de campo estão atravessando a superfície, dessa forma podemos definir um fluxo de campo dado por:

$$\Phi_{\vec{E}} \equiv \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad (2.19)$$

o símbolo da integral significa que a superfície deve ser necessariamente uma superfície fechada. O que essa equação está representando é que, em cada ponto do volume temos um elemento de superfície $d\vec{s}$ de tal forma que sua direção é externa a superfície e, ao mesmo tempo, as linhas de campo definem o campo \vec{E} no ponto de elemento $d\vec{s}$. Assim, devemos calcular o produto escalar em cada região da superfície e depois somar tudo.

A lei de Gauss diz que, o fluxo do campo elétrico é proporcional a quantidade de cargas envolvida pela superfície S . Se a carga total envolvida for nula, o resultado da integração será zero por mais difícil que seja essa integração. Sendo assim

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}. \quad (2.20)$$

Esta é a lei de Gauss na sua forma integral. Para chegarmos a primeira equação de Maxwell vamos imaginar que o volume da Figura 2 seja distribuído uniformemente por densidade de cargas $\rho(\vec{r})$, ou seja, $\rho(\vec{r})$ nos fornece o quanto de carga vamos ter em cada elemento de

¹ Linhas de campo é uma representação geométrica onde é definido por um campo vetorial e ponto de começo dentro do campo.

volume $d\tau$. Para sabermos a quantidade de carga total, basta multiplicar densidade de carga por cada elemento de volume e somar sobre todo volume:

$$Q_{int} = \int_v \rho(\vec{r}) d\tau, \quad (2.21)$$

substituindo na Equação 2.20, vem

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho d\tau, \quad (2.22)$$

pelo teorema de Gauss²

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau, \quad (2.23)$$

substituindo a Equação 2.23 em 2.22, obtemos

$$\int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho d\tau, \quad (2.24)$$

como ambos os lados estão sendo integrados no mesmo volume v , isso implica que os integrandos são iguais:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad (2.25)$$

esta Equação 2.25 é a primeira equação de Maxwell (Equação 2.1).

Agora vamos fazer uma analogia da lei Gauss para o campo magnético \vec{B} . Vimos que o fluxo $\Phi_{\vec{E}}$ em uma da superfície S é proporcional a carga interna da superfície, mas dada linhas de campo \vec{B} passando numa superfície, pela lei de Gauss o $\Phi_{\vec{B}}$ deveria ser também proporcional a carga magnética envolvida, no entanto, sabemos que não existem cargas magnéticas (ou não se provaram ainda sua existência), com isso temos

$$\Phi_{\vec{B}} = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (2.26)$$

Aplicando novamente o teorema de Gauss, temos

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) d\tau = 0, \quad (2.27)$$

então

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.28)$$

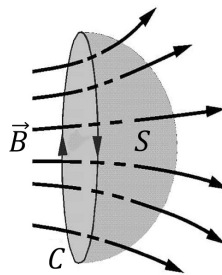
² Este teorema diz que a integral de uma derivada (o divergente) sobre uma região (volume) é igual ao valor da função no contorno (superfície que limita o volume). Veja no livro do Griffiths, David J. Eletrodinâmica-3. ed. 2011. subseção 1.3.4.

logo esta Equação 2.28 é a segunda equação de Maxwell (Equação 2.2), esse resultado está contido o fato de que não existe cargas magnéticas.

2.3 Lei de Faraday

Para discutirmos essa lei, primeiramente vamos imaginar novamente linhas de campos magnético passando por uma superfície, mas que agora essa é uma superfície aberta como ilustra a Figura 3.

Figura 3 – Linhas de campo \vec{B} em superfície aberta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vamos definir um fluxo $\Phi_{\vec{B}}$ como

$$\Phi_{\vec{B}} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}, \quad (2.29)$$

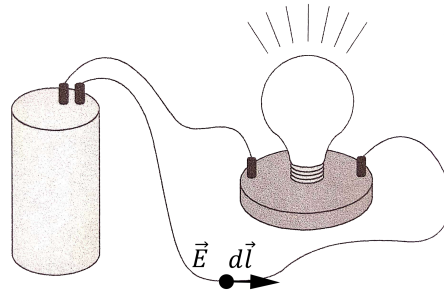
perceba que há apenas duas maneiras de variar o fluxo, primeiro, variando a área da superfície e segundo, variando a intensidade do campo \vec{B} . Sabendo disso, a lei de Faraday diz que: a variação no tempo do fluxo $\Phi_{\vec{B}}$ será igual a força eletromotriz induzida no caminho C que contorna a superfície[12], ou seja,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}. \quad (2.30)$$

Não devemos confundir esse ε da força eletromotriz com o ε_0 da permissividade do espaço livre. O sinal de menos surge devido a um aparecimento de corrente induzida no caminho C criando assim, um campo magnético induzido que é sempre contrário ao movimento. Exemplo, ao aproximar um ímã a uma espira, o campo gerado na espira tende a afastar o ímã, mas se afastarmos o ímã, o campo induzido agora tende a aproximá-lo.

Para entendermos melhor o que é força eletromotriz ε , vamos citar o exemplo de uma lâmpada ligada a uma bateria, (Figura 4). O movimento dos elétrons estabelecido no fio é devido a um campo elétrico que acompanha esse fio, dessa forma

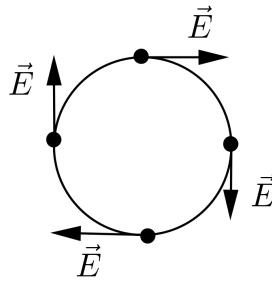
Figura 4 – Lâmpada ligada a uma bateria.



Fonte: Retirada e adaptada da referência [10]

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (2.31)$$

Para o campo \vec{E} gerado por cargas pontuais a integral da Equação 2.31 é nula, pois o campo é conservativo pelo simples fato dele depender apenas da distância a origem. No entanto, há outra maneira de gerar campo elétrico, variando o campo magnético. O campo \vec{E} , nesse caso, acompanha o contorno da superfície, como ilustra a Figura 5, ou seja, o campo elétrico não é mais radial.

Figura 5 – Campo \vec{E} não radial.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Temos que

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}, \quad (2.32)$$

em geral, a superfície S não varia no tempo, dessa forma a derivada comute com a integral atuando apenas no campo \vec{B} ,

$$\varepsilon = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}, \quad (2.33)$$

substituindo esse resultado da Equação 2.31, temos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}. \quad (2.34)$$

Vamos usar agora o teorema de Stokes para que possamos ter as mesmas regiões de integrações de ambos os lados, o teorema diz que a integral de superfície do rotacional do campo \vec{E} no contorno ilustrado na Figura 5 é dado por:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (2.35)$$

com isso, a Equação 2.34 fica

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}, \quad (2.36)$$

portanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.37)$$

Esta Equação 2.37 é a lei de Faraday na sua forma diferencial que é a terceira equação de Maxwell (Equação 2.3).

2.4 Lei Ampère-Maxwell

Para entendermos melhor essa lei vamos separá-la em duas partes, pois existem duas formas de se gerar campo magnético, a primeira delas é através de correntes elétricas e a outra é através de variação de campo elétrico, no entanto, essa segunda forma surgiu após Ampère como uma forma de correção na sua lei, chamada de correção de Maxwell.

Sua primeira parte é dado por:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i, \quad (2.38)$$

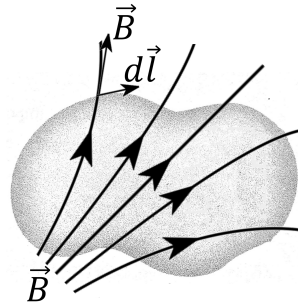
a constante μ_0 é chamada de **permeabilidade do espaço livre** e seu valor é

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2.$$

Imaginemos um caminho de uma superfície qualquer onde linhas de campos estão passando por essa superfície, como ilustra a Figura 6.

O resultado da integral Equação 2.38 é proporcional a intensidade de correntes que passa por dentro da superfície. Porém, esse resultado só é válido para correntes estacionárias

Figura 6 – Linhas de campo \vec{B} em superfície arbitrária.



Fonte: Avaliado pelo autor.

(correntes que não variam no tempo), dessa forma Maxwell à completou acrescentando um termo que inclui a corrente de deslocamento:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i + \mu_0 i_{des}, \quad (2.39)$$

A corrente de deslocamento está intimamente relacionada com a variação do campo elétrico \vec{E} da seguinte forma

$$i_{des} = \int_S \vec{J}_{des} d\vec{s}, \quad (2.40)$$

onde \vec{J}_{des} é a densidade de corrente de deslocamento na superfície da Figura 6. essa densidade é dada por:

$$\vec{J}_{des} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.41)$$

podemos recriar a corrente estacionária i , também em função da densidade \vec{J} , com isso a Equação 2.39 fica

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} d\vec{s} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s} = \int_S \left[\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] d\vec{s}. \quad (2.42)$$

Agora, podemos utilizar novamente o Teorema de Stokes, ou seja,

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{s} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}, \quad (2.43)$$

substituindo na Equação 2.42, temos

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\vec{s} = \int_S \left[\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] d\vec{s}, \quad (2.44)$$

portanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.45)$$

Esta Equação 2.45 é a última equação de Maxwell (Equação 2.4) e nela está contida as duas formas de se gerar campo magnético.

3 A FORMULAÇÃO DO POTENCIAL

3.1 Potenciais Escalar e Vetorial

O estudo neste capítulo consiste em analisar o comportamento das leis do Eletromagnetismo com as distribuições de carga e de corrente dependentes do tempo. Com isso, buscaremos como essas fontes ρ e \vec{J} geram campos elétrico e magnético. Trabalhar com potenciais torna a solução geral das equações de Maxwell mais simples devido ao fato de escrevermos as fontes de cargas de correntes em termos de seus potenciais, reduzindo problemas de seis componentes para problemas de quatro componentes. Assim, os potenciais escalar e vetorial serão reformulados para as novas distribuições $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{J}(\vec{r}, t)$.

Em Eletrostática o $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$, pois pela definição de que todo rotacional de um gradiente é nulo, podemos escrever o campo \vec{E} como o gradiente de uma função potencial $V(\vec{r})$, com isso, $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Para o campo magnético \vec{B} , temos o potencial vetor \vec{A} ,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (3.1)$$

substituindo a Equação 3.1 na Equação 2.3 de Maxwell, obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Observe que na Equação 3.4, temos um rotacional nulo, com isso, podemos escrever o termo entre parênteses como um gradiente de uma função escalar V :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V,$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Agora, temos uma nova expressão para o campo \vec{E} que depende da posição e do tempo. Substituindo a Equação 3.5 na Equação 2.1 de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3.6)$$

assim, obtemos,

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3.7)$$

no caso em que \vec{A} é constante, voltaremos para a equação de Poisson da Eletrostática.

Dada a Equação 2.4 de Maxwell, podemos colocar as equações 3.1 e 3.5, assim, obtemos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \quad (3.8)$$

portanto,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (3.9)$$

Dada a identidade vetorial, $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, podemos reescrever a Equação 3.9 da seguinte forma:

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}. \quad (3.10)$$

As equações 3.7 e 3.10 são muito importantes, pois, ambas possuem todas as informações das equações de Maxwell e, em tese, nos permite calcular V e \vec{A} a partir de ρ e \vec{J} . A princípio, essas equações são complicadas, porém, podemos reescrevê-las de uma forma mais simples.

Para uma forma mais simétrica vamos definir $\square^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ e $L \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$. A partir dessas definições podemos reescrever a Equação 3.7 como:

$$\square^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} = \nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right), \quad (3.11)$$

$$\square^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} = \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}), \quad (3.12)$$

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3.13)$$

$$\left(\square^2 + \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) V + \frac{\partial}{\partial t} \left(L - \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3.14)$$

dessa forma, obtemos

$$\square^2 V + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3.15)$$

portanto,

$$\square^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (3.16)$$

Realizando o mesmo processo para Equação 3.10, obtemos

$$\square^2 \vec{A} - \vec{\nabla} L = \nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}, \quad (3.17)$$

com isso, temos

$$\square^2 \vec{A} - \vec{\nabla} L = -\mu_0 \vec{J}. \quad (3.18)$$

Realmente as equações 3.16 e 3.18 são muito mais simples devido sua simetria, mas podemos simplificá-las ainda mais devido as transformações de gauge que serão abordadas na próxima sessão.

3.2 Transformações de Gauge

Transformações de Gauge, também conhecidas como liberdade de calibre, são importantes no Eletromagnetismo, pois, podem facilitar o cálculo dos campos \vec{E} e \vec{B} através de seus potenciais. O que aumenta a relevância dos potenciais é o fato de que não são únicos, pois, existem infinitos potenciais cujo os campos são sempre os mesmos. Tudo isso só é possível porque a Física está nos campos \vec{E} e \vec{B} , os potenciais, por sua vez, são uma descrição puramente matemática[13]. Dessa forma, podemos calibrar os potenciais de tal maneira a simplificar as soluções para os campos elétrico e magnético. Seja,

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\alpha} \text{ e } V' = V + \beta. \quad (3.19)$$

Para que o $\vec{\nabla} \times \vec{A}'$ seja igual a $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, implicando no mesmo campo \vec{B} , é necessário que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\alpha} = \vec{0}, \quad (3.20)$$

podemos então escrever $\vec{\alpha}$ como o gradiente de uma função escalar λ , devido seu rotacional nulo,

$$\vec{\alpha} = \vec{\nabla}\lambda. \quad (3.21)$$

Os potenciais V' e V também resultam no mesmo campo \vec{E} , então

$$\vec{\nabla}\beta + \frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0, \quad (3.22)$$

substituindo a Equação 3.21 em 3.22 temos

$$\vec{\nabla}\beta + \frac{\partial\vec{\nabla}\lambda}{\partial t} = 0, \quad (3.23)$$

portanto

$$\vec{\nabla}\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0. \quad (3.24)$$

Podemos chamar o termo entre parênteses de uma função que depende apenas do tempo, com isso, temos

$$\beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t} + k(t). \quad (3.25)$$

O termo $k(t)$ não muda em nada para encontrarmos o campo \vec{E} , ou seja, essa função apenas se torna uma parcela a mais somada a $\partial\lambda/\partial t$. Assim podemos escolher $k(t) = 0$, logo obtemos

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda, \\ V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}. \end{cases} \quad (3.26)$$

O conjunto de equações 3.26 nos diz que, para qualquer função λ , podemos somar $\vec{\nabla}\lambda$ ao potencial vetor \vec{A} , desde que subtraímos simultaneamente $\partial\lambda/\partial t$ do pontencial escalar V . Portanto, essa conclusão não irá afetar na Física envolvida nos campos \vec{E} e \vec{B} .

3.3 Calibre de Coulomb e Calibre de Lorentz

Um dos calibres que nos permite simplificar ainda mais a Equação 3.7 se chama o **calibre de Coulomb**. Em Magnetostática podemos calibrar o potencial vetor \vec{A} de tal forma que o seu divergente seja zero:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (3.27)$$

com este calibre de Coulomb a Equação 3.7 se torna

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (3.28)$$

Esta é a equação de Poisson em que a solução se dar com o potencial V indo para zero no infinito,

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'. \quad (3.29)$$

Na Eletrostática não temos a dependência temporal para V , por isso, essa solução é diferente, pois provamos na Equação 3.5 que o campo depende do tempo e posição, ou seja, para um potencial V sozinho não nos fornece todas as informações para o campo \vec{E} , dessa forma, temos que conhecer \vec{A} para que esse problema seja resolvido.

Há algo bastante interessante no potencial escalar que resulta do calibre de Colomb, pois, se determina pela distribuição de cargas no mesmo instante. Por exemplo: imaginemos um elétron que se move em algum lugar na Terra, o potencial V em Marte registrará imediatamente essa mudança. Na Relatividade Especial isso soa bastante estranho. No entanto, V sozinho não é uma grandeza fisicamente mensurável, assim, a única grandeza que possamos medir é o campo \vec{E} , que por sua vez envolve \vec{A} também. Como o potencial vetor está inserido no calibre de Colomb, mesmo que V perceba instantaneamente todas as mudanças em ρ , para o campo \vec{E} isso não ocorre da mesma forma, ou seja, \vec{E} apenas mudará depois que tenha passado tempo suficiente até que as informações cheguem [14].

Usando o calibre de Coulomb na Equação 3.10 vamos obter

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right). \quad (3.30)$$

Observe que o calibre de Coulomb para o potencial escalar torna a solução simples, porém, para \vec{A} ainda se torna difícil de ser calculado, mesmo com esse calibre.

Dada a definição citada anteriormente:

$$L \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (3.31)$$

o calibre de Lorentz consiste simplesmente em escolher $L = 0$, então obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (3.32)$$

Com esse calibre podemos reescrever as equações 3.16 e 3.18 sob o mesmo operador diferencial \square^2 , chamado de **d'alembertiano**:

$$\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square^2, \quad (3.33)$$

portanto, as equações 3.16 e 3.18 tornam-se:

$$\begin{cases} \square^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Esse novo tratamento para V e \vec{A} é particularmente agradável no contexto da relatividade especial, pois o d'alembertiano é a generalização natural do laplaciano, e esse conjunto de equações 3.34 podem ser consideradas versões quadridimensionais da equação de Poisson. No calibre de Lorentz V e \vec{A} satisfazem a equação de onda não homogênea, com um termo 'fonte'. Portanto, usaremos o Calibre de Lorentz e daqui por diante a Eletrodinâmica se reduz à tentar resolver as equações de onda não homogênea, equações 3.34, para essas fontes especificadas.

Agora, vamos assumir que saibamos resolver equações 3.34, dessa forma vamos mostrar que é sempre possível escolher o calibre de Lorentz. Supondo que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq -\mu_0 \epsilon_0 (\partial V / \partial t)$, teremos uma função que chamaremos de ϕ que satisfaça a igualdade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \phi, \quad (3.35)$$

vamos escolher λ de tal forma que V' e \vec{A}' obedeça o calibre de Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V'}{\partial t}, \quad (3.36)$$

onde mostramos $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda$ e $V' = V - (\partial \lambda / \partial t)$, reescrevendo a Equação 3.36, obtemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V'}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \lambda + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}. \quad (3.37)$$

Reajustando do lado direito podemos verificar a seguinte igualdade com a função ϕ e o d'alembertiano aplicado em λ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V'}{\partial t} + \nabla^2 \lambda - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = \phi + \square^2 \lambda. \quad (3.38)$$

Neste resultado teremos o calibre de Lorentz se escolhermos λ que satisfaz

$$\square^2 \lambda = -\phi, \quad (3.39)$$

onde assumimos que sabemos resolver essa Equação 3.39.

Outro teste interessante é verificar se é sempre possível $V = 0$ ou $\vec{A} = 0$. Primeiro veremos com o potencial escalar, pela equação $V' = V - (\partial \lambda / \partial t)$ é sempre possível sim, ter o potencial $V = 0$ desde que λ se obtenha a partir:

$$\lambda(t) = - \int_0^t V' dt'. \quad (3.40)$$

Agora para o potencial vetor \vec{A} . Pela equação $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$, se \vec{A}' for zero, então $\vec{B} = 0$. Porém, temos

$$\vec{A} = -\vec{\nabla}\lambda, \quad (3.41)$$

\vec{A}' não pode ser zero, pois geralmente, funções vetoriais não podem ser sempre escrita como gradiente de uma outra função.

3.4 Distribuições Contínuas

Nesta seção iremos tratar de distribuições contínuas de cargas e encontrar as soluções gerais para as equações 3.34. Para o caso estático as equações 3.34 reduzem-se às equações de Poisson, $\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$, $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$, nas quais sabemos suas soluções[10].

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau', \quad (3.42)$$

sabemos que $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ e $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$, com isso vamos obter

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau', \quad (3.43)$$

essa Equação 3.43 é chamada de lei de Coulomb para uma distribuição contínua de cargas. Para o potencial $\vec{A}(\vec{r})$, teremos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau', \quad (3.44)$$

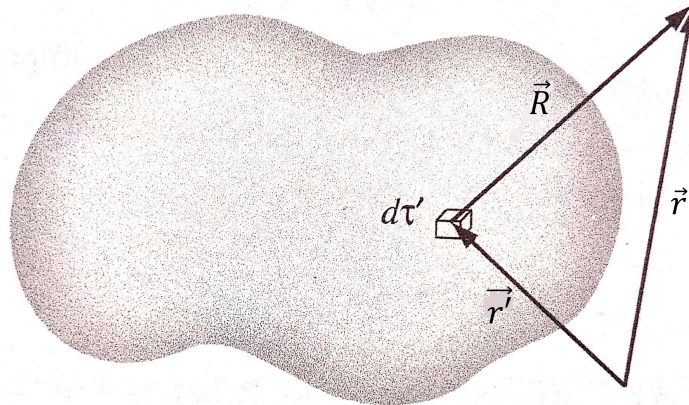
essa Equação 3.44 é a lei de Biot-Savart para correntes volumétricas, onde $|\vec{r} - \vec{r}'|$, é a distância relativa entre o elemento de carga e ponto de prova como mostra a (Figura 7) em que chamaremos de R para simplificar. Agora, a informação ou notícia eletromagnética gerada pela a carga viaja à velocidade da luz. O fato é, não interessa mais saber o *status* da fonte no mesmo instante, mas sim, sua condição à um tempo passado t_r (significa **tempo retardado**) desde quando a informação partiu. Dessa forma, a notícia percorre uma distância R , o retardo é dado por R/c :

$$t_r \equiv t - \frac{R}{c} \quad (3.45)$$

As equações 3.42 podem ser generalizadas com suas distribuições de corrente e carga dependentes de t_r [15], ou seja, essas fontes já não são mais estáticas, portanto,

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{R} d\tau', \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{R} d\tau'. \quad (3.46)$$

Figura 7 – Corpo uniformemente carregado



Fonte: Retirada e adaptada da referência [10]

Esses potenciais são chamados de *potenciais retardados*, para os campos internos desses potenciais devemos avaliá-los nos *tempos retardados* dado pela Equação 3.45. Afirmaremos que as fontes prescritas ρ e \vec{J} existem em espaços vazios, isto é, que nenhum meio material está presente.

Porém, apenas dizer que esses potenciais são escritos dessa forma parece bastante fácil, no entanto, não temos certeza se estão corretas. Tivemos uma ideia plausível de que os novos potenciais teriam a mesma forma dos potencial independentes do tempo. Tudo isso não basta, devemos prová-las demonstrando que elas satisfazem a Equação de onda não homogênea 3.34 e se obedecem o calibre de Lorentz Equação 3.31. Não podemos usar essa mesma ideia para os campos \vec{E} e \vec{B} , pois, estaremos obtendo respostas erradas:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{R^2} \hat{R} d\tau', \quad \vec{B}(\vec{r}, t) \neq \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}, t) \times \hat{R}}{R^2} d\tau'.$$

Vamos então, verificar se o potencial escalar retardado satisfaz a Equação 3.34. Para o cálculo do laplaciano de $V(\vec{r}, t)$ devemos observar que o integrando depende de \vec{r} em dois lugares: explicitamente, no denominador ($R = |\vec{r} - \vec{r}'|$), e implicitamente, através de $t_r = t - R/c$, no numerador. Com isso, obtemos

$$\vec{\nabla} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[(\vec{\nabla}\rho) \frac{1}{R} + \rho \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\tau', \quad (3.47)$$

temos que

$$\vec{\nabla}\rho(\vec{r}, t_r) = \dot{\rho} \vec{\nabla} t_r, \quad \vec{\nabla} t_r = \vec{\nabla}(t - R/c) = -\frac{\hat{R}}{c}, \quad (3.48)$$

com esses resultados, vem

$$\vec{\nabla}\rho = -\dot{\rho} \frac{\hat{R}}{c}. \quad (3.49)$$

Também, sabemos que

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{R}}{R^2}, \quad (3.50)$$

substituindo as equações 3.49 e 3.50 em 3.47, obtemos

$$\vec{\nabla} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{R}}{R} - \rho \frac{\hat{R}}{R^2} \right] d\tau', \quad (3.51)$$

tomando o divergente,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{1}{c} \frac{\hat{R}}{R} \vec{\nabla} \dot{\rho} - \frac{1}{c} \dot{\rho} \vec{\nabla} \left(\frac{\hat{R}}{R} \right) - \frac{\hat{R}}{R^2} \vec{\nabla} \rho - \rho \vec{\nabla} \left(\frac{\hat{R}}{R} \right) \right] d\tau', \quad (3.52)$$

resolvendo cada termo dessa Equação, vamos obter

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \dot{\rho} &= -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \vec{\nabla} R = -\frac{1}{c} \ddot{\rho} \hat{R}, \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{R}}{R} \right) &= \frac{1}{R^2}, \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{R}}{R^2} \right) &= 4\pi \delta^3(\vec{R}). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Portanto, substituindo esse conjunto de equações 3.53 em 3.52, temos o seguinte resultado

$$\nabla^2 V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{\ddot{\rho}}{c^2 R} d\tau' - \int 4\pi \rho(\vec{r}', t) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d\tau' \right], \quad (3.54)$$

onde $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{R}$ e pela propriedade de filtragem da Delta de Dirac $\delta^3(\vec{r}' - \vec{r})$, a segunda integral só é diferente de zero em $\vec{r} = \vec{r}'$, logo

$$\nabla^2 V = \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{\rho}}{R} d\tau' - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t). \quad (3.55)$$

Mas

$$\int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{\rho}}{R} d\tau' = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

dessa forma a Equação 3.55, torna

$$\nabla^2 V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t). \quad (3.56)$$

Portanto, essa equação pode ser escrita em termos do d'alembertiano dado pela Equação 3.34. Esse é o resultado que queríamos encontrar, provando que o potencial escalar $V(\vec{r}, t)$ é uma solução da equação de onda não homogênea. Esse mesmo argumento serve também

para o potencial vetor. A prova para que esses potenciais retardados obedecem o calibre de Lorentz está no Apêndice A.

Agora, vamos seguir com um exemplo:

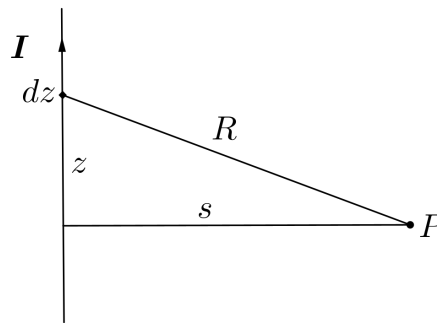
Exemplo 3.1

Dado um fio reto infinito que transporta a corrente

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \leq 0, \\ I_0, & \text{para } t > 0. \end{cases}$$

Ou seja, uma corrente estática I_0 é ligada abruptamente em $t = 0$. A partir dessas condições vamos encontrar os campos elétrico e magnético resultante.

Figura 8 – Fio reto infinito transportando a corrente



Fonte: Elaborado pelo autor.

Presumidamente o fio é eletricamente neutro, de forma que o potencial escalar é zero. Considerando que o fio está ao longo do eixo z , como mostra a Figura 8; o potencial vetorial no ponto P é

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(t_r)}{R} dz.$$

Para $t < s/c$, a notícia ainda não chegou a P , e o potencial é nulo. Para $t > s/c$ temos o seguinte

$$|z| = \sqrt{(ct)^2 - s^2}, \quad (3.57)$$

fora desse seguimento t_r é negativo, de forma que $I(t_r) = 0$; assim

$$\vec{A}(s,t) = \left(\frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \hat{z} \right) 2 \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 - z^2}},$$

aqui vamos ser um pouco direto, mas a solução detalhada dessa integral está no Apêndice B.

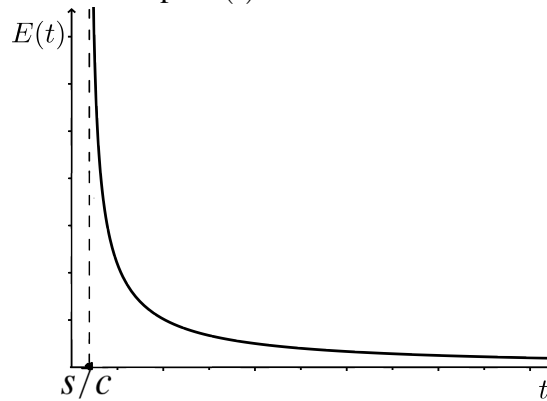
$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \hat{z} \ln(\sqrt{s^2 + z^2} + z) \Big|_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - s^2}}{s} \right) \hat{z}.$$

Logo o campo elétrico é

$$\vec{E}(s,t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi \sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{z}.$$

Observe na Figura 9 que quando o tempo tende a s/c o módulo de $\vec{E}(t)$ cresce para o infinito, já quanto o tempo t cresce, o campo $|\vec{E}(t)|$ tende a zero.

Figura 9 – Gráfico do módulo do campo $\vec{E}(t)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

O campo magnético é

$$\vec{B}(s,t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \hat{\phi}.$$

Na Figura 10 percebemos que $|\vec{B}(t)|$ explode para o infinito em $t = s/c$. O resultado esperado é que o $|\vec{B}(t)|$ seja constante quando o tempo t cresce.

Podemos avaliar o que acontece quando $t \rightarrow \infty$, observe que

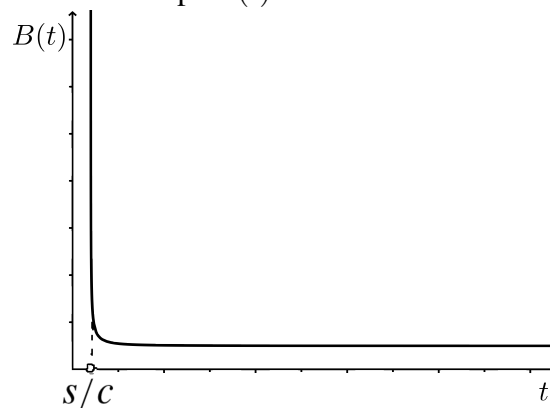
$$\vec{E}(s, t \rightarrow \infty) = 0,$$

reescrevendo

$$\vec{B}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \frac{tc}{t \sqrt{c^2 - (s/t)^2}} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s} \frac{c}{\sqrt{c^2 - (s/t)^2}} \hat{\phi},$$

fazendo $t \rightarrow \infty$, obtemos

$$\vec{B}(s, t \rightarrow \infty) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi s},$$

Figura 10 – Gráfico do módulo do campo $\vec{B}(t)$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

ou seja, esses são os casos estáticos para \vec{E} e \vec{B} .

Vamos trabalhar Capítulo 4 usando todos esses conceitos que foram estudados e de alguma forma, abordar o assunto de uma maneira mais didática.

4 OS CAMPOS DE UMA CARGA PONTUAL EM MOVIMENTO

Neste capítulo iremos aplicar os conceitos abordados no capítulo anterior e dessa forma calcular os campos de uma carga pontual em movimento que é o objetivo principal desse trabalho.

4.1 Equações de Jefimenko

Os campos elétrico e magnético que vamos calcular são as generalizações das leis de Coulomb e Biot-Savart; portanto, vamos partir dos potenciais retardados

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{R} d\tau, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{R} d\tau', \quad (4.1)$$

onde os campos são dados por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.2)$$

O gradiente de V foi calculado (obtido) na Equação 3.51; por outro lado a derivada temporal de \vec{A} é:

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\dot{\vec{J}}}{R} d\tau'. \quad (4.3)$$

Substituindo as equações 3.51 e 4.3 na expressão para o campo \vec{E} , (Equação 4.2), vamos obter

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[-\frac{\dot{\rho}}{c} \frac{\hat{R}}{R} - \rho \frac{\hat{R}}{R^2} \right] d\tau' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\dot{\vec{J}}}{R} d\tau', \quad (4.4)$$

e fazendo $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$, podemos reescrever \vec{E} da seguinte forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{R} \hat{R} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', t_r)}{cR} \hat{R} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c^2 R} \right] d\tau'. \quad (4.5)$$

A equação 4.5 é a generalização da lei de Coulomb para o caso dependente do tempo, em que se reduz para o estático que já conhecemos, (Equação 3.43), removendo a dependência temporal.

Para o campo \vec{B} , o rotacional de \vec{A} possui dois termos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{1}{R} (\vec{\nabla} \times \vec{J}) - \vec{J} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\tau', \quad (4.6)$$

e podemos calcular o rotacional de \vec{J} primeiramente na direção de x , depois generalizar para todo o espaço no sistema cartesiano. Assim,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{J})_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}, \quad (4.7)$$

e pela regra da cadeia

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{dJ_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y}, \quad \frac{dJ_z}{dt_r} = j_z.$$

Além disso,

$$\frac{\partial t_r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(t - \frac{R}{c} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial y},$$

logo

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = -\frac{1}{c} j_z \frac{\partial R}{\partial y},$$

analogamente,

$$\frac{\partial J_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} j_y \frac{\partial R}{\partial z},$$

então

$$(\vec{\nabla} \times \vec{J})_x = -\frac{1}{c} \left(j_z \frac{\partial R}{\partial y} - j_y \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \frac{1}{c} [\dot{\vec{J}} \times (\vec{\nabla} R)]_x, \quad (4.8)$$

mas $\vec{\nabla} R = \hat{R}$, portanto

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} = \frac{1}{c} \dot{\vec{J}} \times \hat{R}. \quad (4.9)$$

Sabendo que $\vec{\nabla}(1/R) = -\hat{R}/R^2$, logo

$$-\vec{J} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{J} \times \frac{\hat{R}}{R^2}, \quad (4.10)$$

e portanto, a Equação 4.6 fica

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{1}{R} \left(\frac{1}{c} \dot{\vec{J}} \times \hat{R} \right) + \vec{J} \times \frac{\hat{R}}{R} \right] d\tau', \quad (4.11)$$

onde colocando \hat{R} em evidência, vem

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{R^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{cR} \right] \times \hat{R} d\tau'. \quad (4.12)$$

A equação 4.12 é a generalização da lei de Biot-Savart para o caso dependente do tempo, no qual também se reduz no caso estático que conhecemos (Equação 3.44).

As equações 4.5 e 4.12 são as equações de Jefimenko, que são as soluções (causais) para as equações de Maxwell. Por alguma razão, elas aparentemente não foram publicadas até recentemente, sendo a primeira declaração explícita realizada por Oleg Jefimenko, em 1966[16].

4.2 Cargas Pontuais

4.2.1 Potenciais de Liénard-Wiechert

O objetivo agora é calcular os potenciais (retardados), $V(\vec{r}, t)$ e $\vec{A}(\vec{r}, t)$, de uma carga pontual q que está se movendo dada uma trajetória específica

$$\vec{w}(t) \equiv \text{posição de } q \text{ no tempo } t. \quad (4.13)$$

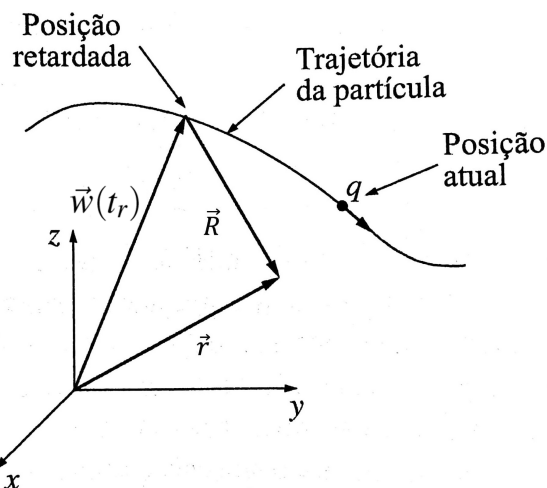
O tempo retardado é determinado implicitamente pela equação

$$|\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r), \quad (4.14)$$

onde o lado esquerdo da equação é a distância que a notícia tem de viajar, e $(t - t_r)$ é o tempo que leva para a notícia fazer a viagem, veja a (Figura 11). Podemos também, chamar $\vec{w}(t_r)$ de **posição retardada** da carga e definir um vetor \vec{R} como o vetor entre a posição retardada e o ponto \vec{r} do campo:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{w}(t_r). \quad (4.15)$$

Figura 11 – Trajetória da partícula



Fonte: Retirada e adaptada da referência [10]

Não podemos deixar de observar que existe apenas um ponto da trajetória que está em comunicação com \vec{r} em qualquer tempo determinado t . Vamos imaginar dois pontos com tempos retardados t_1 e t_2 :

$$R_1 = c(t - t_1) \quad \text{e} \quad R_2 = c(t - t_2).$$

Então $R_1 - R_2 = c(t_1 - t_2)$, implicando que a velocidade média da partícula em direção ao ponto \vec{r} seja c . Porém, nenhuma partícula carregada pode viajar na velocidade da luz, assim apenas um ponto retardado contribui para os potenciais retardados, em qualquer momento dado.

Pela equação

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{R} d\tau' \quad (4.16)$$

seria um erro pensarmos que a solução para essa integral será o mesmo para o caso estático

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

e simplesmente dizer que R é a distância da posição retardada da carga. No entanto, R pode sair da integral, pois existe uma mudança implícita em sua dependência funcional, ou seja, antes da integração, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ é função de \vec{r} e \vec{r}' , depois, $\vec{r}' = \vec{w}(t_r)$ com isso $R = |\vec{r} - \vec{w}(t_r)|$ e t_r é função de \vec{r} e t , assim nos resta,

$$I = \int \rho(\vec{r}', t_r) d\tau'. \quad (4.17)$$

Essa integral não é a carga total de uma configuração, pois temos de integrar ρ sobre toda a distribuição em um instante de tempo, porém o retardo, $t_r = t - R/c$, nos obriga a calcular ρ em tempos diferentes para partes diferentes da configuração. Se a fonte estiver em movimento, isso nos dará uma imagem distorcida da carga total. Um fato interessante é que esse problema não desaparece para cargas pontuais. Na Eletrodinâmica de Maxwell como é formulada em termos de densidade de carga e de correntes, uma carga pontual tem de ser considerada como o contorno de uma carga ampliada, quando o tamanho diminui a zero. Para uma partícula ampliada, por menor que seja, o retardo na Equação 4.17 acrescenta um fator $(1 - \hat{R} \cdot \vec{v}/c)^{-1}$, onde \vec{v} é a velocidade da carga no tempo retardado:

$$\int \rho(\vec{r}', t_r) d\tau' = \frac{q}{1 - \hat{R} \cdot \vec{v}/c}. \quad (4.18)$$

A prova para esse resultado está no Apêndice C. Substituindo na Equação 4.16, vem

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})}. \quad (4.19)$$

Para o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$, temos que a densidade de corrente de objeto rígido é dado por $\rho\vec{v}$, também temos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_r) \vec{v}(t_r)}{R} d\tau' = \frac{\mu_0 \vec{v}}{4\pi R} \int \rho(\vec{r}', t_r) d\tau', \quad (4.20)$$

reescrevendo,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\vec{v}}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})} = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, t). \quad (4.21)$$

As equações 4.19 e 4.21 são os famosos **potenciais de Liénard-Wiechert** para uma carga em movimento.

4.2.2 Os Campos de uma Carga pontual em Movimento

Agora estamos preparados para calcular os campos elétrico e magnético de uma carga pontual em movimento arbitrário, usando os potenciais de Liénard-Wiechert:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c^2} V(\vec{r}, t), \quad (4.22)$$

sabemos que as equações para \vec{E} e \vec{B} , são:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

A diferenciação será mais complicada, pois

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{w}(t_r) \quad \text{e} \quad \vec{v} = \dot{\vec{w}}(t_r) \quad (4.23)$$

são ambos calculados no tempo retardado e t_r é definido implicitamente pela equação

$$|\vec{r} - \vec{w}(t_r)| = c(t - t_r). \quad (4.24)$$

Vamos trabalhar para encontrar o campo \vec{E} primeiro, assim, vamos iniciar com o gradiente de V :

$$\vec{\nabla}V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})^2} \vec{\nabla}(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}), \quad (4.25)$$

esse cálculo provém da regra da cadeia de derivação. Como $R = c(t - t_r)$,

$$\vec{\nabla}R = -c\vec{\nabla}t_r. \quad (4.26)$$

Esse primeiro termo em $\vec{\nabla} R c$ foi bastante simples, mas o segundo termo em $\vec{\nabla}(\vec{R} \cdot \vec{v})$ não é tão fácil assim, pois a regra do produto resulta em mais 4 termos:

$$\vec{\nabla}(\vec{R} \cdot \vec{v}) = (\vec{R} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{R} + \vec{R} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{R}). \quad (4.27)$$

Vamos calcular todos os termos um de cada vez:

$$\begin{aligned} (\vec{R} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} &= \left(R_x \frac{\partial}{\partial x} + R_y \frac{\partial}{\partial y} + R_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v}(t_r), \\ (\vec{R} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} &= R_x \frac{d\vec{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + R_y \frac{d\vec{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + R_z \frac{d\vec{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} = \frac{d\vec{v}}{dt_r} \left(R_x \frac{\partial t_r}{\partial x} + R_y \frac{\partial t_r}{\partial y} + R_z \frac{\partial t_r}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

logo

$$(\vec{R} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{a}(\vec{R} \cdot \vec{\nabla} t_r), \quad (4.28)$$

onde $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$ é a aceleração da partícula no tempo retardado. Agora vamos para o segundo termo

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{R} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{w}, \quad (4.29)$$

portanto

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}} = \vec{v}, \quad (4.30)$$

para $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w}$ o processo segue o mesmo raciocínio da Equação 4.28:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{w}(t_r) = v_x \frac{d\vec{w}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + v_y \frac{d\vec{w}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + v_z \frac{d\vec{w}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z},$$

dessa forma

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} = \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} t_r). \quad (4.31)$$

Substituindo as equações 4.30 e 4.31 em 4.29, vem

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{R} = \vec{v} - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} t_r), \quad (4.32)$$

vamos para o terceiro termo da Equação 4.27, o rotacional de \vec{v} é dado por

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{dv_z}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} - \frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{dv_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial z} - \frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{dv_y}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} - \frac{dv_x}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} \right) \hat{z},$$

logo

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\vec{a} \times \vec{\nabla} t_r. \quad (4.33)$$

Por fim, o termo restante,

$$\vec{\nabla} \times \vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{r} - \vec{\nabla} \times \vec{w}, \quad (4.34)$$

porém $\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$, seguindo os mesmos passos da Equação 4.33, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{w} &= -\vec{v} \times \vec{\nabla} t_r, \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{R} &= \vec{v} \times \vec{\nabla} t_r. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Colocando todos os resultados na Equação 4.27, obtemos

$$\vec{\nabla}(\vec{R} \cdot \vec{v}) = \vec{a}(\vec{R} \cdot \vec{\nabla} t_r) + \vec{v} - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} t_r) - \vec{R} \times (\vec{a} \times \vec{\nabla} t_r) + \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\nabla} t_r), \quad (4.36)$$

podemos simplificar essa equação usando a regra do BAC-CAB¹ para reduzir os triplos produtos vetoriais

$$\begin{aligned} -\vec{R} \times (\vec{a} \times \vec{\nabla} t_r) &= -\vec{a}(\vec{R} \cdot \vec{\nabla} t_r) + \vec{\nabla} t_r(\vec{R} \cdot \vec{a}), \\ \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{\nabla} t_r) &= \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} t_r) - \vec{\nabla} t_r v^2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo na Equação 4.36, resulta em

$$\vec{\nabla}(\vec{R} \cdot \vec{v}) = \vec{v} + (\vec{R} \cdot \vec{a} - v^2) \vec{\nabla} t_r. \quad (4.38)$$

Agora, juntando as equações 4.26 e 4.38 em 4.25, temos

$$\vec{\nabla} V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})^2} [\vec{v} + (c^2 - v^2 + \vec{R} \cdot \vec{a}) \vec{\nabla} t_r]. \quad (4.39)$$

¹ O produto vetorial triplo pode ser escrito da seguinte forma: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$. Veja no livro do Griffiths, David J. Eletrodinâmica-3. ed. 2011. subseção 1.1.3.

Essa equação ainda está incompleta, pois precisamos conhecer $\vec{\nabla}t_r$. Podemos partir da Equação 4.26

$$\begin{aligned} -c\vec{\nabla}t_r &= \vec{\nabla}R = \vec{\nabla}\sqrt{\vec{R}\cdot\vec{R}} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{R}\cdot\vec{R}}}\vec{\nabla}(\vec{R}\cdot\vec{R}), \\ &= \frac{1}{R}[(\vec{R}\cdot\vec{\nabla})\vec{R} + \vec{R}\times(\vec{\nabla}\times\vec{R})]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Usando o mesmo método de solução da Equação 4.32, obtemos

$$(\vec{R}\cdot\vec{\nabla})\vec{R} = \vec{R} - \vec{v}(\vec{R}\cdot\vec{\nabla}t_r), \quad (4.41)$$

a solução para $\vec{\nabla}\times\vec{R}$ está na equação 4.35, com isso

$$-c\vec{\nabla}t_r = \frac{1}{R}[\vec{R} - \vec{v}(\vec{R}\cdot\vec{\nabla}t_r) + \vec{R}\times(\vec{v}\times\vec{\nabla}t_r)] = \frac{1}{R}[\vec{R} - (\vec{R}\cdot\vec{v})\vec{\nabla}t_r], \quad (4.42)$$

explicitando $\vec{\nabla}t_r$, vem

$$\vec{\nabla}t_r = \frac{-\vec{R}}{Rc - \vec{R}\cdot\vec{v}}, \quad (4.43)$$

substituindo na Equação 4.39, conclui-se que

$$\vec{\nabla}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(Rc - \vec{R}\cdot\vec{v})^3} [(Rc - \vec{R}\cdot\vec{v})\vec{v} - (c^2 - v^2 + \vec{R}\cdot\vec{a})\vec{R}]. \quad (4.44)$$

O cálculo para $\partial\vec{A}/\partial t$ também é muito trabalhoso, aqui está apresentado o resultado desta conta, no entanto, todo o processo está detalhado no Apêndice D,

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(Rc - \vec{R}\cdot\vec{v})^3} \left[(Rc - \vec{R}\cdot\vec{v})(-\vec{v} + R\vec{a}/c) + \frac{R}{c}(c^2 - v^2 + \vec{R}\cdot\vec{a})\vec{v} \right]. \quad (4.45)$$

Podemos reescrever de uma forma mais simples introduzindo um vetor

$$\vec{u} \equiv c\hat{R} - \vec{v}, \quad (4.46)$$

logo temos que

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3} \left[(\vec{R}\cdot\vec{u})(-\vec{v} + R\vec{a}/c) + \frac{R}{c}(c^2 - v^2 + \vec{R}\cdot\vec{a})\vec{v} \right] \quad (4.47)$$

e

$$\vec{\nabla}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3} [(\vec{R}\cdot\vec{u})\vec{v} - (c^2 - v^2 + \vec{R}\cdot\vec{a})\vec{R}]. \quad (4.48)$$

Colocado essas equações 4.47 e 4.48 na definição para o campo \vec{E} , finalmente vamos obter

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} [(c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a})]. \quad (4.49)$$

Para calcular o campo \vec{B} , temos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times (V\vec{V}) = \frac{1}{c^2} [V(\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{\nabla}V)], \quad (4.50)$$

onde já calculamos $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ (Equação 4.33) e $\vec{\nabla}V$ (Equação 4.44). Agora basta juntar essas duas equações, obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{qc(\vec{a} \times \vec{R})}{4\pi\epsilon_0(\vec{R} \cdot \vec{u})^2} - \vec{v} \times \frac{qc}{4\pi\epsilon_0(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} [(\vec{R} \cdot \vec{u})\vec{v} - (c^2 - v^2 + \vec{R} \cdot \vec{a})\vec{R}] \right], \quad (4.51)$$

temos que $\vec{v} \times \vec{v} = 0$, logo

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{q}{c4\pi\epsilon_0(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \left[(\vec{R} \cdot \vec{u})(\vec{a} \times \vec{R}) + (c^2 - v^2 + \vec{R} \cdot \vec{a})\vec{v} \times \vec{R} \right], \quad (4.52)$$

colocando \vec{R} em evidência ganhamos um sinal de menos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{-q}{c4\pi\epsilon_0(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \vec{R} \times [(\vec{R} \cdot \vec{u})\vec{a} + (c^2 - v^2)\vec{v} + (\vec{R} \cdot \vec{a})\vec{v}]. \quad (4.53)$$

Perceba que a grandeza que está entre colchetes se torna semelhante ao do campo \vec{E} (Equação 4.49) quando a reescrevemos usando a regra do BAC-CAB, ou seja,

$$[V(\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{\nabla}V)] = [(c^2 - v^2)\vec{u} + (\vec{R} \cdot \vec{a})\vec{u} - (\vec{R} \cdot \vec{u})\vec{a}];$$

no entanto, temos \vec{v} em vez de \vec{u} , podemos contornar essa diferença fazendo uma substituição:

$$\vec{v} = c\hat{R} - \vec{u},$$

podemos observar que, como se trata de um produto vetorial, todos os termo que acompanha \hat{R} serão anulados, pois \vec{R} é proporcional a \hat{R} , desta forma teremos

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{R} \times \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (4.54)$$

Concluimos que, o campo magnético de uma carga pontual é sempre perpendicular ao campo elétrico e ao vetor a partir do ponto retardado. Também podemos verificar que o termo de \vec{E} (referente a $(c^2 - v^2)\vec{u}$) cai com o inverso do quadrado da distância da partícula. Se a velocidade e a aceleração são nulas, chegaremos no resultado que já conhecemos da Eletrostática.

Vamos agora para um exemplo:

Exemplo 4.1

Calcule os campos elétrico e magnético de uma carga pontual que move a uma velocidade constante: como $\vec{v} = cte$ logo, $\vec{a} = \vec{0}$, assim a Equação 4.49 fica

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(c^2 - v^2)R}{(\vec{R} \cdot \vec{u})} \vec{u},$$

neste caso, usando $\vec{w} = \vec{v}t$,

$$R\vec{u} = c\vec{R} - R\vec{v} = c(\vec{r} - \vec{v}t_r) - c(t - t_r)\vec{v} = c(\vec{r} - \vec{v}t),$$

no Apêndice E, está demonstrado que

$$Rc - \vec{R} \cdot \vec{v} = \vec{R} \cdot \vec{u} = \sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)},$$

também, reescrita como

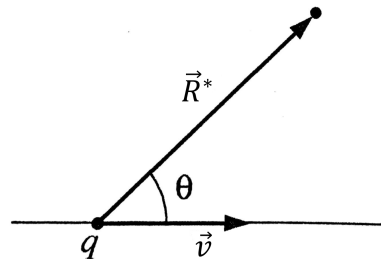
$$\vec{R} \cdot \vec{u} = R^*c\sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2},$$

onde

$$\vec{R}^* \equiv \vec{r} - \vec{v}t$$

é o vetor da posição presente da partícula até \vec{r} , e θ é o ângulo entre \vec{R}^* e \vec{v} como ilustra a (Figura 12). Portanto,

Figura 12 – Ângulo entre \vec{R}^* e \vec{v}



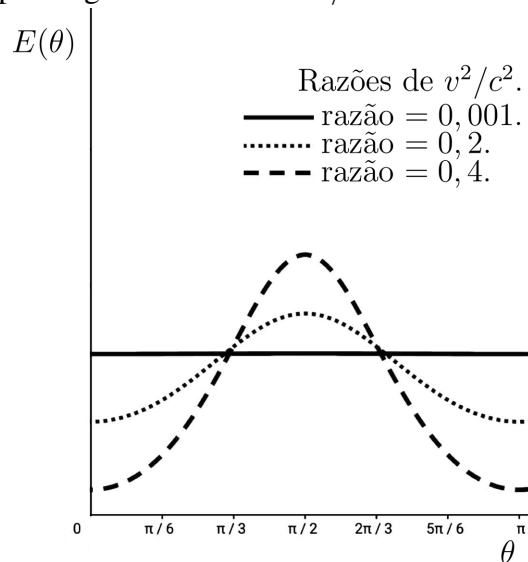
Fonte: Retirada e adaptada da referência [10]

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2)^{3/2}} \frac{\hat{R}^*}{R^{*2}}. \quad (4.55)$$

Podemos observar que \vec{E} aponta ao longo da linha a partir da posição presente da partícula. Isso se torna uma grande coincidência, uma vez que a mensagem veio da posição retardada. Devido ao $\sin^2 \theta$ no denominador, o campo de uma carga se move em alta velocidade fica achatado na direção perpendicular ao movimento, veja a (Figura 14). Nas direções para a frente e para trás, \vec{E} é reduzido por um fator $(1 - v^2/c^2)$ em relação ao campo de uma carga em repouso; na direção perpendicular o campo é aumentado por um fator $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, veja a Figura 15.

Na Figura 13 podemos perceber que o campo $E(\theta)$ se comprime na direção perpendicular do movimento quanto maior for a velocidade, por outro lado, o campo tende a ser isotrópico² para valores muito pequenos de velocidades.

Figura 13 – Campo $E(\theta)$ para algumas razões de v^2/c^2 .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o campo \vec{B} , temos

$$\hat{R} = \frac{\vec{r} - \vec{v}t_r}{R} = \frac{(\vec{r} - \vec{v}t) + (t - t_r)\vec{v}}{R} = \frac{\hat{R}^*}{R} + \frac{\vec{v}}{c},$$

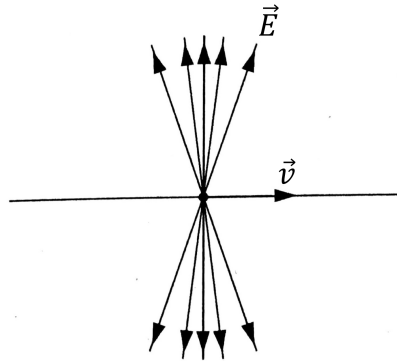
logo

$$\vec{B} = \frac{1}{c}(\hat{R} \times \vec{E}) = \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}). \quad (4.56)$$

O termo em \hat{R}^* desaparece, pois está na direção de \vec{E} , assim se anulando no produto vetorial. Esse resultado mostra que as linhas de campo \vec{B} circunda a carga, veja a Figura 16.

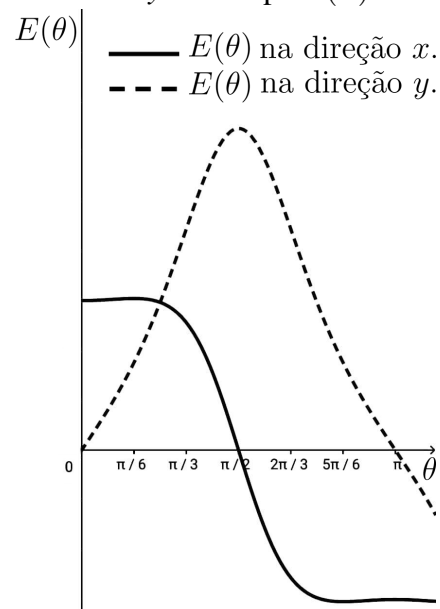
² Possui propriedades físicas que são independentes da direção.

Figura 14 – Comportamento de \vec{E} com velocidade \vec{v}



Fonte: Retirada e adaptada da referência [10]

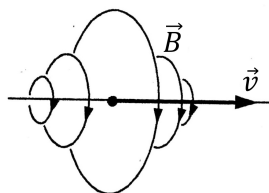
Figura 15 – Gráfico das componentes x e y do campo $E(\theta)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que na Figura 15 a componente x do campo $E(\theta)$ é menor que a componente y , dessa forma, cargas com velocidades muito altas fazem com que suas linhas de campo elétricas se agrupem na direção perpendicular do movimento.

Figura 16 – Linhas de campo \vec{B}



Fonte: Retirada e adaptada da referência [10].

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Com o uso das quatro equações de Maxwell trabalhamos toda teoria abordada no estudo desse trabalho e vimos que ao se variar a posição de uma carga ao longo do tempo por mais que seja pequena essa variação, todas as informações geradas neste caso viajam a velocidade da luz, e dessa forma os cálculos para os campos elétrico e magnético são reformulados de tal forma a conhecermos toda informação em tempo atrasado. Para isso, usamos os conceitos de potencial elétrico e potencial vetor com uma definição intuitiva que já conhecemos, mas que as distribuições de cargas e de correntes são dependentes tanto da posição como do tempo retardado. Para provarmos que esses potenciais elétrico e vetor possam ser soluções válidas, tivemos que analisar se satisfaziam as equações de onda não homogênea e os resultados provaram que realmente podemos usá-los.

Com a reformulação dos potenciais conseguimos calcular os campos elétrico e magnético dado pelas equações de Jefimenko na qual possuem uma utilidade limitada, pois é mais fácil calcular os potenciais retardados e diferenciá-los ao invés de ir diretamente para os campos. Devido a esse resultado, trabalhamos com os potenciais Liénard-Wiecher para conseguirmos calcular os campos de uma carga pontual em movimento.

Os resultados mostraram que esses campos são generalizados devido a dependência no tempo e por obter toda informação de uma partícula carregada em movimento, em particular ao analisá-los para o caso da velocidade igual a zero, voltamos para as equações conhecidas da eletrostática e magnetostática, e também mostraram que os campos sempre são perpendiculares entre si.

Para os trabalhos futuros queremos mostrar como são os campos elétrico e magnético não apenas para uma carga pontual, mas sim, para uma determinada distribuição de cargas como, por exemplo, uma barra uniformemente carregada em movimento. Uma simplificação para esse problema seria considerar que a barra deve seguir uma trajetória retilínea.

REFERÊNCIAS

- [1] TONIDANDEL, Danny Augusto Vieira; ARAÚJO, Antônio Emílio Angueth; BOAVENTURA, Wallace do Couto. **História da Eletricidade e do Magnetismo: da Antiguidade à Idade Média**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, nº 4, e4602 (2018).
- [2] GARDELI, Daniel. **Antecedentes históricos ao surgimento do Eletromagnetismo**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 35, n. 1, p. 118-137, abr. 2018.
- [3] ROCHA, José Fernando Moura, **Origens e evolução das idéias da física**. Salvador: EDUFBA, capítulo III, p. 186-219, 2002.
- [4] NARDI, Lucas Marcelo Cavalari; SILVA, Cibelle Celestino. **A matematização dos estudos elétricos antes de Coulomb: as contribuições de Johann Euler no século XVIII, acompanhada de uma tradução comentada de seu *Recherches sur la Cause Physique de l'Electricité***. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 43, e20200396 (2021).
- [5] DIAS, Valéria Silva; MARTINS, Roberto de Andrade. **Michael Faraday: o caminho da livraria à descoberta da indução eletromagnética**. Ciência & Educação (Bauru), v. 10, n. 3, p. 517-530, 2004.
- [6] MORAES, Andreia Guerra; REIS, José Claudio; BRAGA, Marco Antonio Barbosa. **Uma abordagem histórico-filosófica para o eletromagnetismo no ensino médio**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 21, n. 2, p. 224-248, 2004.
- [7] ORSTED, HANS CHRISTIAN. **Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética**. Cadernos de História e Filosofia da Ciência, Campinas, v. 10, p. 115-122, 1986.
- [8] MARTINS, Roberto de Andrade. **ORSTED E A DESCOBERTA DO ELETROMAGNETISMO**. Cadernos de História e Filosofia da Ciência, Campinas, v. 10, p. 89-114, 1986.
- [9] BASSALO, José Maria Filardo. **Nascimentos da Física**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 18, nº . 2, junho, 1996.
- [10] GRIFFITHS, David J. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011.

- [11] LIMA, Marcelo Costa. **Sobre o surgimento das equações de Maxwell.** Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 41, nº 4, e20190079 (2019)
- [12] HESSEL, Roberto. **Laboratório caseiro a lei de Faraday e a de Lenz.** Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 16, n. 3, p. 340-343, 1999.
- [13] RESEND, M. F. Araujo. **Teorias clássicas de calibre como sistemas com vínculos: um ponto de vista geométrico.** Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, no 1, e1312 (2018)
- [14] BRILL, O. L.; GOODMAN, B. **Causality in the Coulomb gauge.** American Journal of Physics, v. 35, n. 9, p. 832-837, 1967.
- [15] LEMOS, Nivaldo A. **Intuição física e generalização das leis de Coulomb e de Biot-Savart para o caso dependente do tempo.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, n. 3, p. 385 - 388, (2005).
- [16] JEFIMENKO, Oleg D. **Electricity and Magnetism: An Introduction to the Theory de Electric and Magnetic Fields.** Appleton-Century-Crofts, 1966.

**APÊNDICE A – PROVA DO CALIBRE DE LORENTZ PARA POTENCIAIS
RETARDADOS**

Para confirmarmos que os potenciais retardados satisfazem a condição do calibre de Lorentz, temos que demonstrar a seguinte equação:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) + \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}) - \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right), \quad (\text{A.1})$$

onde $\vec{\nabla}$ denota derivadas com respeito a \vec{r} , e $\vec{\nabla}'$ denota derivadas com respeito a \vec{r}' .

Primeiro, vamos derivar com respeito a \vec{r} :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) + \vec{J} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{R} \right), \quad (\text{A.2})$$

resultado da regra do produto de derivação. Analogamente obtemos a seguinte equação para derivada em \vec{r}' :

$$\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}) + \vec{J} \cdot \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right), \quad (\text{A.3})$$

temos que $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, isso implica que

$$\vec{\nabla} \frac{1}{R} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{R}. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo esse resultado na Equação A.2, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) - \vec{J} \cdot \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right), \quad (\text{A.5})$$

mas

$$\vec{J} \cdot \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right) = \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) - \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}), \quad (\text{A.6})$$

por fim, substituindo a Equação A.6 em A.5 chegaremos onde queríamos demonstrar:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) + \frac{1}{R} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}) - \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right).$$

Agora podemos seguir com a prova, para isso sabemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z},$$

mas

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}', t_r),$$

onde $t_r = t - R/c$. Dessa forma, pela regra da cadeia, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial z},$$

para

$$\frac{\partial t_r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(t - R/c) = -\frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial x},$$

de uma forma mais geral, podemos escrever

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial R_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} R,$$

logo

$$\frac{\partial t_r}{\partial x_i} = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} R.$$

Portanto, podemos escrever $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ da seguinte maneira:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial J_i}{\partial t_r} \cdot \frac{\partial R_i}{\partial x_i},$$

podemos notar que esse resultado é o produto escalar

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t_r} \cdot \vec{\nabla} R. \quad (\text{A.7})$$

Analogamente para o cálculo de \vec{r}' , teremos

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t_r} \cdot \vec{\nabla}' R, \quad (\text{A.8})$$

o primeiro vem quando diferenciamos explicitamente com respeito a \vec{r}' , e usamos a equação da continuidade¹. Substituindo A.7 e A.8 em A.2, temos

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = \frac{1}{R} \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t_r} \cdot \vec{\nabla} R \right] + \frac{1}{R} \left[-\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t_r} \cdot \vec{\nabla}' R \right] - \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right), \quad (\text{A.9})$$

temos que $\vec{\nabla} R = -\vec{\nabla}' R$, logo esses termos se cancelam:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right), \quad (\text{A.10})$$

integrando em ambos os lados em todo espaço, temos

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho}{R} d\tau - \int \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) d\tau, \quad (\text{A.11})$$

¹ Veja no livro do Griffiths, David J. Eletrodinâmica-3. ed. 2011. sessão 8.1

portanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho}{R} d\tau - \int \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) d\tau \right], \quad (\text{A.12})$$

pelo teorema da divergência

$$\int \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R} \right) d\tau = \oint \frac{\vec{J}}{R} \cdot d\vec{a},$$

reescrevendo, vamos obter

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho}{R} d\tau \right] - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{J}}{R} \cdot d\vec{a}, \quad (\text{A.13})$$

observe que o termo entre colchetes é o potencial escalar V , para o caso em que $\vec{J} = 0$ teremos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (\text{A.14})$$

Esse é o calibre de Lorentz, resultado que queríamos demonstrar.

APÊNDICE B – SOLUÇÃO DA INTEGRAL PARA O EXEMPLO 3.1.

Dada a integral:

$$I = \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \frac{dz}{\sqrt{s^2 + z^2}}. \quad (\text{B.1})$$

O método de integração segue com o trigonométrico, seja

$$z = s \tan \theta,$$

isso implica que

$$dz = s \sec^2 \theta d\theta = \frac{s}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

Dessa forma I fica

$$I = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{s}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{s^2 + s^2 \tan^2 \theta}} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sec \theta d\theta, \quad (\text{B.2})$$

observe que não estamos considerando os limites de integração por enquanto, pois voltaremos para a variável original. O resultado dessa integral é tabelada, logo

$$I = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sec \theta d\theta = \ln |\tan \theta + \sec \theta| \Big|_{\theta_i}^{\theta_f} \quad (\text{B.3})$$

para voltarmos para variável anterior temos que

$$\tan \theta = \frac{z}{s} \quad \text{e} \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{z^2 + s^2}}{s},$$

com isso

$$I = \ln \left| \frac{z}{s} + \frac{\sqrt{z^2 + s^2}}{s} \right| \Big|_0^{\sqrt{(ct)^2 - s^2}}, \quad (\text{B.4})$$

substituindo os limites de integração, temos

$$I = \ln \left(\frac{\sqrt{(ct)^2 - s^2} + ct}{s} \right). \quad (\text{B.5})$$

Então, esse é o resultado que queríamos mostrar.

APÊNDICE C – PROVA DOS POTENCIAIS DE LIÉNARD-WIECHERT

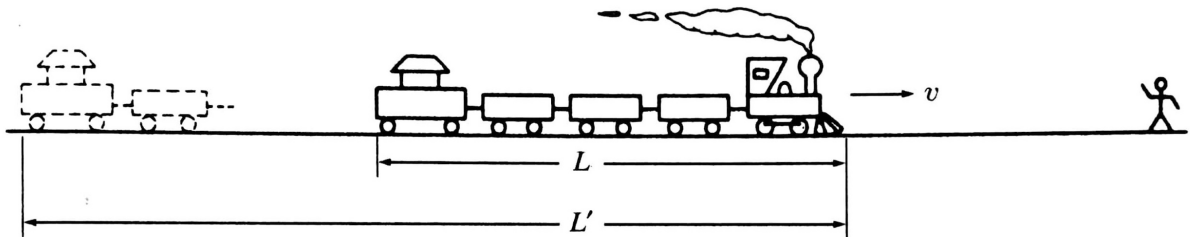
A prova para o potencial escalar $V(\vec{r}, t)$ já é suficiente para encontrarmos o potencial vetor \vec{A} , pois basicamente o que vamos demonstrar é a seguinte equação:

$$\int \rho(\vec{r}', t_r) d\tau' = \frac{q}{1 - \hat{R} \cdot \vec{v}/c}. \quad (\text{C.1})$$

Essa equação nos dará a distribuição de cargas de um corpo arbitrário, para encontrarmos a equação para o potencial vetor, sabemos que a densidade de corrente de um objeto rígido é dado pela distribuição ρ de cargas multiplicada pela velocidade das cargas, no nosso caso, pela velocidade dada no tempo retardado t_r , ou seja, $\vec{v}(t_r)$.

O efeito da Equação C.1 é puramente geométrico, assim, vamos pegar um exemplo clássico de um trem em movimento. Pois bem, o fato é que o trem que vem na nossa direção parece um pouco mais longo do que realmente é, já que a luz que recebemos do último vagão partiu antes da luz que nós a recebe simultaneamente da locomotiva e naquele primeiro momento o trem estava mais longe, como ilustra a (Figura 17). No intervalo que a luz do último vagão leva para percorrer a distância extra L' , o próprio trem movimenta-se uma distância $L' - L$:

Figura 17 – Exemplo clássico do trem



Fonte: Retirada e adaptada da referência [10]

Temos que

$$\frac{L'}{c} = \frac{L' - L}{v} \Rightarrow L' = \frac{L}{1 - v/c}. \quad (\text{C.2})$$

Dessa forma os trens que se aproximam parecem mais longos, por um fator $(1 - v/c)^{-1}$. Por outro lado um trem que se afasta parece mais curto, por um fator $(1 + v/c)^{-1}$. É importante destacar que esses resultados não são argumentos da relatividade restrita e da contração de Lorentz, pois, L é o comprimento do trem em movimento e seu comprimento em repouso não entra em questão. Em geral, se a velocidade do trem forma um ângulo θ com a nossa linha

de visão, a distância a mais que a luz do último vagão tem de percorrer é $L' \cos \theta$, ilustrado na (Figura 18). No entanto, no tempo $L' \cos \theta / c$, o trem movimenta-se uma distância $(L' - L)$:

$$\frac{L' \cos \theta}{c} = \frac{L' - L}{v} \Rightarrow L' = \frac{L}{1 - v \cos \theta / c}. \quad (\text{C.3})$$

Podemos observar que esse efeito não distorce as dimensões perpendiculares ao movimento do trem, ou seja, altura e largura. O volume aparente τ' do trem, então, está relacionado ao volume de fato τ por

$$\tau' = \frac{\tau}{1 - \hat{R} \cdot \vec{v} / c}, \quad (\text{C.4})$$

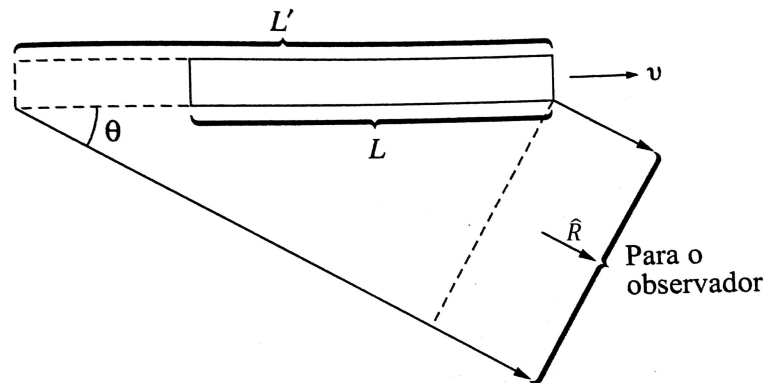
onde \hat{R} é um vetor unitário do trem para o observador.

A relação entre o trem e os potenciais retardados é que quando resolvemos uma integral da forma da Equação C.1, na qual o integrando é calculado no tempo retardado, o volume de fato é modificado pelo fator da Equação C.4, justamente como o volume aparente do trem o foi. Como esse fator de correção não faz referência ao tamanho da partícula, isso é tão significativo para uma carga pontual quanto para uma carga ampliada. dessa forma

$$\int \rho d\tau' = \int \frac{\rho}{1 - \hat{R} \cdot \vec{v} / c} d\tau = \frac{q}{1 - \hat{R} \cdot \vec{v} / c}. \quad (\text{C.5})$$

Então, está é a equação que queríamos demonstrar.

Figura 18 – Ângulo entre velocidade do trem e a linha de visão



Fonte: Retirada e adaptada da referência [10]

APÊNDICE D – CÁLCULO DA DERIVADA TEMPORAL DO POTENCIAL VETOR

A equação que vamos demonstrar:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})^3} \left[(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})(-\vec{v} + R\vec{a}/c) + \frac{R}{c}(c^2 - v^2 + \vec{R} \cdot \vec{a})\vec{a} \right]. \quad (\text{D.1})$$

Reescrevendo de forma mais simples

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \left[(\vec{R} \cdot \vec{u})(-\vec{v} + R\vec{a}/c) + \frac{R}{c}(c^2 - v^2 + \vec{R} \cdot \vec{a})\vec{v} \right], \quad (\text{D.2})$$

onde

$$\vec{u} \equiv c\hat{R} - \vec{v}. \quad (\text{D.3})$$

Vamos partir da definição de \vec{A} dado por:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{v}{c^2} V(\vec{r}, t), \quad (\text{D.4})$$

logo

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\vec{v}V)}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} V + \vec{v} \frac{\partial V}{\partial t} \right], \quad (\text{D.5})$$

derivando o primeiro termo, vem

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{d\vec{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial t} = \vec{a} \frac{\partial t_r}{\partial t}, \quad (\text{D.6})$$

onde \vec{a} é a aceleração da partícula no tempo retardado.

Vamos guardar essa equação por enquanto, voltaremos para ela quando descobrirmos o valor de $\partial t_r / \partial t$. Agora queremos descobrir a derivada do segundo termo. Perceba que o potencial escalar V depende de \vec{r} e t , porém, \vec{r} não depende de t , com isso a derivada atuará apenas na temporal de $V(\vec{r}, t)$. Dessa forma,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}} \right], \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})^2} \frac{\partial}{\partial t} (Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}), \quad (\text{D.8})$$

resolvendo para o primeiro termo:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = c \frac{\partial(t-t_r)}{\partial t} = c \left[1 - \frac{\partial t_r}{\partial t} \right]. \quad (\text{D.9})$$

Agora o segundo termo:

$$\frac{\partial(\vec{R} \cdot \vec{v})}{\partial t} = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \quad (\text{D.10})$$

temos que

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{w},$$

com isso

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = -\frac{d\vec{w}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial t} = -\vec{v} \frac{\partial t_r}{\partial t} \quad (\text{D.11})$$

e

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{d\vec{v}}{dt_r} \frac{\partial t_r}{\partial t} = \vec{a} \frac{\partial t_r}{\partial t}. \quad (\text{D.12})$$

Substituindo as equações D.11 e D.12 em D.10, fica

$$\frac{\partial(\vec{R} \cdot \vec{v})}{\partial t} = (\vec{R} \cdot \vec{a} - v^2) \frac{\partial t_r}{\partial t}, \quad (\text{D.13})$$

agora devemos encontrar $\partial t_r / \partial t$. Vamos partir da Equação D.11:

$$\frac{\partial(R\hat{R})}{\partial t} = -\vec{v} \frac{\partial t_r}{\partial t}, \quad (\text{D.14})$$

perceba que \hat{R} é um vetor unitário que não varia no tempo, ou seja, ele pode sair para fora da derivada resultando em

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\vec{v}}{\hat{R}} \frac{\partial t_r}{\partial t}, \quad (\text{D.15})$$

comparando a Equação D.15 com a D.9 e explicitando $\partial t_r / \partial t$, resulta em

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{c\hat{R}}{c\hat{R} - \vec{v}}, \quad (\text{D.16})$$

podemos multiplicar por \vec{R}/\hat{R} e chegaremos na expressão

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{Rc}{\vec{R} \cdot \vec{u}}. \quad (\text{D.17})$$

Substituindo esse resultado da Equação D.17 em D.6, D.9 e D.13, teremos

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{a} \frac{Rc}{\vec{R} \cdot \vec{u}}, \quad (\text{D.18})$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{c}{(\vec{R} \cdot \vec{u})} (\vec{R} \cdot \vec{u} - Rc) \quad (\text{D.19})$$

e

$$\frac{\partial (\vec{R} \cdot \vec{v})}{\partial t} = \frac{cR}{(\vec{R} \cdot \vec{u})} (\vec{R} \cdot \vec{a} - v^2). \quad (\text{D.20})$$

Dados esses valores das equações D.19 e D.20, basta substituir na Equação D.18,

vem

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^2} \left[\frac{cR}{(\vec{R} \cdot \vec{u})} (\vec{R} \cdot \vec{a} - v^2) - \frac{c^2}{(\vec{R} \cdot \vec{u})} (\vec{R} \cdot \vec{u} - Rc) \right] \quad (\text{D.21})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} [cR(\vec{R} \cdot \vec{a} - v^2) - c^2(\vec{R} \cdot \vec{u} - Rc)], \quad (\text{D.22})$$

por fim, vamos substituir as equações D.18 e D.22 na Equação D.5, assim obtendo

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{\vec{a}Rqc^2}{4\pi\epsilon_0(\vec{R} \cdot \vec{u})^2} + \vec{v} \frac{qc}{4\pi\epsilon_0(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} [cR(\vec{R} \cdot \vec{a} - v^2) - c^2(\vec{R} \cdot \vec{u} - Rc)] \right], \quad (\text{D.23})$$

ainda não está com a aparência da Equação D.3, no entanto, podemos manipular para chegar onde queremos.

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \left[\frac{R\vec{a}(\vec{R} \cdot \vec{u})}{c} + \vec{v} \frac{R}{c} (\vec{R} \cdot \vec{a} - v^2) - \vec{v} (\vec{R} \cdot \vec{u} - Rc) \right], \quad (\text{D.24})$$

colocando $\vec{R} \cdot \vec{u}$ em evidência, obtemos

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\vec{R} \cdot \vec{u})^3} \left[(\vec{R} \cdot \vec{u})(-\vec{v} + R\vec{a}/c) + \frac{R}{c}(c^2 - v^2 + \vec{R} \cdot \vec{a})\vec{v} \right]. \quad (\text{D.25})$$

Então, este é o resultado que queríamos demonstrar.

APÊNDICE E – VALOR DE $(\vec{R} \cdot \vec{v})$ PARA UMA CARGA PONTUAL COM VELOCIDADE CONSTANTE

A equação que queremos demonstrar é

$$Rc - \vec{R} \cdot \vec{v} = \vec{R} \cdot \vec{u} = \sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}. \quad (\text{E.1})$$

Reescrita como

$$\vec{R} \cdot \vec{u} = R^* c \sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2}, \quad (\text{E.2})$$

onde

$$\vec{R}^* \equiv \vec{r} - \vec{v}t \quad (\text{E.3})$$

é o vetor da posição presente da partícula até \vec{r} , e θ é o ângulo entre \vec{R}^* e \vec{v} como ilustra a (figura 12).

Primeiramente, digamos que a partícula passe pela origem no tempo $t = 0$, de forma que

$$\vec{w}(t) = \vec{v}t. \quad (\text{E.4})$$

Vamos calcular no tempo retardado usando a seguinte equação:

$$|\vec{r} - \vec{w}t_r| = c(t - t_r), \quad (\text{E.5})$$

elevando ao quadrado:

$$r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t^2 - 2tt_r + t_r^2). \quad (\text{E.6})$$

Resolvendo para t_r pela fórmula quadrática, vem

$$t_r = \frac{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v}) \pm \sqrt{(c^2t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2)}}{c^2 - v^2}. \quad (\text{E.7})$$

Para sabermos qual sinal escolhemos, vamos considerar o limte de $v = 0$:

$$t_r = t \pm \frac{r}{c}, \quad (\text{E.8})$$

nesse caso, a carga está em repouso na origem, logo o tempo retardado dever ser $(t - r/c)$, sabendo o sinal temos que

$$R = c(t - t_r) \quad \text{e} \quad \hat{R} = \frac{\vec{r} - \vec{v}t_r}{c(t - t_r)}, \quad (\text{E.9})$$

reescrevendo $(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v})$ como

$$(Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}) = R(c - \hat{R} \cdot \vec{v}),$$

substituindo as equações E.9, temos

$$R(c - \hat{R} \cdot \vec{v}) = c(t - t_r) \left[c - \vec{v} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{v}t_r)}{c(t - t_r)} \right] = c^2(t - t_r) - \vec{v} \cdot \vec{r} + v^2 t_r \quad (\text{E.10})$$

$$R(c - \hat{R} \cdot \vec{v}) = c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v} - (c^2 - v^2)t_r, \quad (\text{E.11})$$

a partir da Equação E.7, escolhendo o sinal negativo, temos que

$$(c^2 - v^2)t_r = (c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}) - \sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}. \quad (\text{E.12})$$

Substituindo E.12 em E.11, obtemos

$$R(c - \hat{R} \cdot \vec{v}) = \vec{R} \cdot \vec{u} = \sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}. \quad (\text{E.13})$$

Para demonstrar a segunda equação, vamos manipular o termo dentro da raiz da Equação E.13 seja

$$I = (c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2) \quad (\text{E.14})$$

$$I = c^4 t^2 - 2c^2 t(\vec{r} \cdot \vec{v}) + (\vec{r} \cdot \vec{v})^2 + c^2 r^2 - c^4 t^2 - v^2 r^2 + v^2 c^2 t^2 \quad (\text{E.15})$$

$$I = (\vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)r^2 + c^2(vt)^2 - 2c^2(\vec{r} \cdot \vec{v}t). \quad (\text{E.16})$$

Mas $\vec{v}t = \vec{r} - \vec{R}^*$, logo

$$I = (\vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 - v^2)r^2 + c^2(r^2 + R^{*2} - 2\vec{r} \cdot \vec{R}^*) - 2c^2(r^2 - \vec{r} \cdot \vec{R}^*). \quad (\text{E.17})$$

Reajustando

$$I = (\vec{r} \cdot \vec{v})^2 - r^2 v^2 + c^2 R^{*2}, \quad (\text{E.18})$$

temos que

$$(\vec{r} \cdot \vec{v})^2 - r^2 v^2 = ((\vec{R}^* + \vec{v}t) \cdot \vec{v})^2 - (\vec{R}^* + \vec{v}t)^2 v^2 \quad (\text{E.19})$$

$$(\vec{r} \cdot \vec{v})^2 - r^2 v^2 = (\vec{R}^* \cdot \vec{v})^2 + v^4 t^2 + 2(\vec{R}^* \cdot \vec{v})v^2 t - R^{*2} v^2 - 2(\vec{R}^* \cdot \vec{v})t v^2 - v^2 t^2 v^2, \quad (\text{E.20})$$

portanto

$$(\vec{r} \cdot \vec{v})^2 - r^2 v^2 = (\vec{R}^* \cdot \vec{v})^2 - R^{*2} v^2 = R^{*2} v^2 \cos^2 \theta - R^{*2} v^2, \quad (\text{E.21})$$

logo

$$(\vec{r} \cdot \vec{v})^2 - r^2 v^2 = -R^{*2} v^2 (1 - \cos^2 \theta), \quad (\text{E.22})$$

pela identidade trigonométrica $(1 - \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta$, dessa forma a Equação E.18, fica

$$I = -R^{*2} v^2 \sin^2 \theta + c^2 R^{*2} = c^2 R^{*2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta \right). \quad (\text{E.23})$$

Agora, substituindo I dentro da raiz da Equação E.13, vamos obter

$$\vec{R} \cdot \vec{u} = R^* c \sqrt{1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2}. \quad (\text{E.24})$$

Então, esse é o resultado que queríamos demonstrar.