



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SALUSTRIANO HÉLDER DOS SANTOS CAVALCANTE

REVISITANDO O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO
PARA TRIÂNGULOS

REDENÇÃO - CE

2021

SALUSTRIANO HÉLDER DOS SANTOS CAVALCANTE

REVISITANDO O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO
PARA TRIÂNGULOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

REDENÇÃO - CE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Cavalcante, Salustriano Helder dos Santos.

C364r

Revisitando o problema isoperimétrico para triângulos /
Salustriano Helder dos Santos Cavalcante. - Redenção, 2022.
46f: il.

Dissertação - Curso de Matemática em Rede Nacional, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da
Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção,
2022.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. Triângulo. 2. Geometria. 3. Perímetro. I. Título

CE/UF/BSP

CDD 516

SALUSTRIANO HÉLDER DOS SANTOS CAVALCANTE

**REVISITANDO O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO
PARA TRIÂNGULOS**

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 17/12/2021

BANCA EXAMINADORA

João Francisco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Otávio Paulino Lavor

Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor

Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA

Dedico este trabalho a todas as pessoas que
contribuíram direta ou indiretamente com a
sua realização.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, inicialmente a DEUS, por tudo. Obrigado meu PAI!

Quero agradecer a minha família, pela compreensão e apoio, em todos os momentos da minha passagem, por esta vida. Aqui, faço um agradecimento especial à minha esposa Lídia e às minhas filhas, Karla e Nycole.

Quero agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes, pelas bolsas de estudos, e à Prefeitura Municipal de Capistrano, pelo afastamento remunerado, estes benefícios me foram concedidos durante todo o curso de pós-graduação. Aproveito para dizer-lhes: estes investimentos, não serão em vão!

Quero agradecer aos colegas de curso, Renato, Wirlan, Denis, Felipe, Fábio, Paulo, Sílvio, Ananias, Naiara, Rodrigo Malan, Rodrigo Montenegro e Mário, e aos professores do curso, Joserlan, João Francisco, Robério, Wesley, Marcelo Dário, Rafael, Alisson e Rodrigo, por todas as contribuições.

Quero agradecer, ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva e ao Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor, por aceitarem o convite para fazerem parte da banca examinadora.

Por último, mas não menos importante, quero agradecer, ao Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho, por ter aceitado, prontamente, a missão de ser meu orientador. Muitíssimo obrigado, Dr. João Francisco!

“Até onde as leis da matemática se referem à realidade, não há certeza; E, até onde há certeza, elas não se referem à realidade.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Nesta dissertação, revisitamos a desigualdade isoperimétrica para triângulos, que fornece uma relação de desigualdade envolvendo área e perímetro de um triângulo, bem como o problema isoperimétrico para triângulos, cuja solução garante que o triângulo equilátero é o triângulo de maior área, dentre todos os triângulos com um mesmo perímetro fixado. Inspirado na desigualdade isoperimétrica, estudamos em que condições dois números reais positivos correspondem exatamente a área e perímetro de um triângulo. Para além disso, mostramos como obter triângulos a partir da sua área e do seu perímetro, concluindo que a partir de qualquer triângulo não equilátero, podemos encontrar infinitos triângulos não congruentes a este, que possuem mesma área e perímetro do triângulo inicial.

Palavras-chave: Triângulo. Geometria. Perímetro.

ABSTRACT

In this dissertation, we revisit the isoperimetric inequality for triangles, which gives an inequality relation involving area and perimeter of a triangle, as well as the isoperimetric problem for triangles, whose solution guarantees that the equilateral triangle is the triangle with the largest area, among all triangles with the same fixed perimeter. Inspired by isoperimetric inequality, we study in which conditions two positive real numbers correspond to area and perimeter of a triangle. Furthermore, we show you how to obtain triangles from its area and perimeter, concluding that from any triangle non-equilateral, we can find infinite triangles not congruent to this one, which have the same area and perimeter as the initial triangle.

Key words: Triangle. Geometry. Perimeter.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	11
2.1	ELEMENTOS DO TRIÂNGULO	11
2.2	TEOREMA DE PITÁGORAS	18
3	POLINÔMIOS	23
3.1	NÚMEROS COMPLEXOS	23
3.2	POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS	27
4	RESULTADOS	32
4.1	RESULTADOS CHAVE	32
4.2	RESULTADOS PRINCIPAIS	34
5	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana, particularmente, é um dos ramos da Matemática mais fascinantes. Sendo o triângulo, uma das formas geométricas mais básicas da Geometria Euclidiana, procuramos responder, nesta dissertação, a seguinte questão: Existem condições, necessárias e suficientes, que dois números reais positivos, devem satisfazer para que correspondam à área e ao perímetro de um triângulo? Pra este fim, abordamos diversos temas da matemática básica, ligados à geometria e à álgebra, relevantes para as demonstrações dos principais resultados que serão apresentados.

No segundo capítulo, intitulado por *Preliminares*, apresentamos os principais conceitos e alguns resultados sobre triângulos, destacando as relações de congruência e semelhança, concluindo o capítulo com o Teorema de Pitágoras e a fórmula de Heron, usada para determinar a área de triângulos. Sempre que possível, buscamos detalhar, com demonstrações ou indicações de referências, os resultados apresentados no decorrer do referido capítulo.

Já no terceiro capítulo, que tem o título *Polinômios*, buscamos apresentar uma abordagem sobre os números complexos, com suas representações (algébrica e polar) e suas operações fundamentais. Tratamos também, em linha gerais, sobre os polinômios com uma variável, dando destaque aos polinômios e equações do segundo e terceiro graus. Finalizamos este capítulo, apresentando as fórmulas resolutivas das referidas equações, sempre na perspectiva de subsidiarmos o leitor para uma melhor compreensão do capítulo principal.

No quarto capítulo, denominado *Resultados*, obtemos uma demonstração alternativa para a desigualdade isoperimétrica e uma nova maneira de chegar à solução do problema isoperimétrico para triângulos. Na sequência, obtemos condições sobre dois números reais positivos que, uma vez satisfeitas, garantem a existência de triângulos, cuja área e o perímetro coincidem com os números reais dados. Para finalizar, mostramos também como determinar triângulos, conhecendo previamente a área e o perímetro.

2 PRELIMINARES

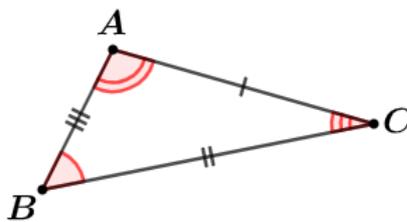
No presente capítulo, apresentamos conceitos relevantes a este trabalho, envolvendo os triângulos e seus elementos, bem como as suas principais propriedades. Este conteúdo será tratado aqui de forma parcialmente resumida, deixando o estudo mais detalhado a cargo de leitor e indicando as seguintes referências: Barbosa (2006), Dolce e Pompeo (2000) ou Muniz Neto (2013b).

2.1 ELEMENTOS DO TRIÂNGULO

A princípio, recordamos a definição de triângulo, bem como alguns elementos relacionados.

Definição 2.1 Dados três pontos distintos, coplanares e não colineares, chama-se triângulo, ou trilátero, a figura formada pelos três segmentos que unem os referidos pontos.

Figura 1 - Triângulo $\triangle ABC$.



Fonte: Autor (2021).

Na Figura 1, os pontos A , B e C são denominados *vértices*, os segmentos AB , AC e BC são os *lados* e \widehat{ABC} , \widehat{BCA} e \widehat{CAB} são os *ângulos internos* do triângulo, indicado por $\triangle ABC$.

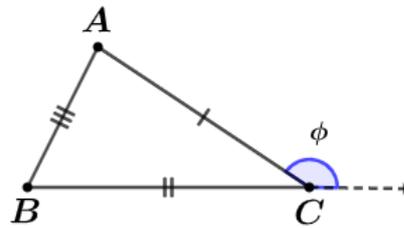
Definição 2.2 Chama-se de *perímetro* a soma das medidas dos lados de um triângulo, que indicaremos por \mathcal{P} . Mais precisamente, tem-se que

$$\mathcal{P} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC},$$

onde \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} denotam as medidas dos lados AB , AC e BC , respectivamente.

Observação 2.1 No triângulo $\triangle ABC$, dizemos que o lado BC é oposto ao vértice A (ou vice-versa) e adjacente, aos vértices B e C . De modo análogo, aplica-se essa mesma terminologia aos demais lados e vértices. Num triângulo, um ângulo é oposto a um lado, se seu vértice for oposto a esse lado, e o ângulo é adjacente ao lado, se seu vértice for adjacente a esse lado.

Podemos destacar nos triângulos, dois tipos de ângulos, chamados *internos* e *externos*. Os ângulos internos, ou simplesmente ângulos, são aqueles situados no interior do triângulo. Já os ângulos externos, são aqueles formados por um lado e o prolongamento do outro, no exterior do triângulo.

Figura 2 - Triângulo com ângulo externo.

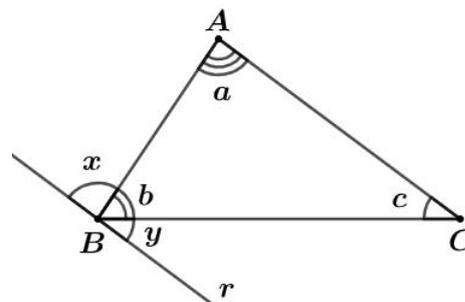
Fonte: Autor (2021).

Um resultado básico, mas bastante importante, quando trata-se de ângulos em um triângulo, é o seguinte:

Proposição 2.1 Se, num triângulo, os ângulos internos medem a, b e c , então

$$a + b + c = 180^\circ.$$

Demonstração: De fato, consideremos o triângulo da Figura 3, no qual traçamos um segmento de reta r , paralelo ao lado AC e passando pelo vértice B .

Figura 3 - Triângulo $\triangle ABC$.

Fonte: Autor (2021).

Agora note que

$$x + b + y = 180^\circ,$$

implicando que

$$a + b + c = 180^\circ,$$

já que os ângulos com medidas x e a são alternos internos (cf. DOLCE e POMPEO, 2000) e o mesmo ocorre com os ângulos de medidas y e c . \square

Observação 2.2 Denotaremos, a partir de agora, a medida de um ângulo \widehat{ABC} por $m(\widehat{ABC})$.

Os triângulos podem ser classificados de acordo com a medida de seus *lados* e de acordo com a medida de seus *ângulos*. Dessa forma, temos as Definições 2.3 e 2.4 a seguir:

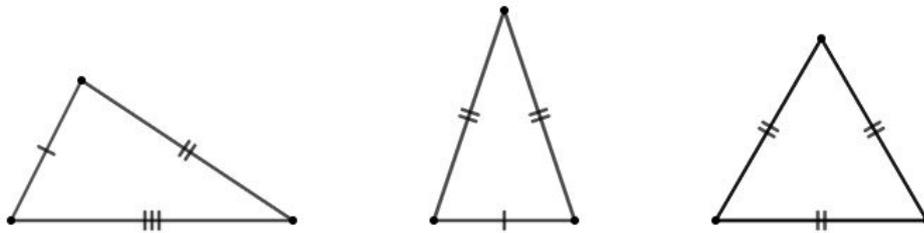
Definição 2.3 Dizemos que:

- O triângulo é *escaleno* quando as medidas de seus lados, dois a dois, são diferentes;
- O triângulo é *isósceles* quando pelo menos dois lados têm a mesma medida;
- O triângulo é *equilátero* quando os três lados têm a mesma medida.

Definição 2.4 Dizemos que:

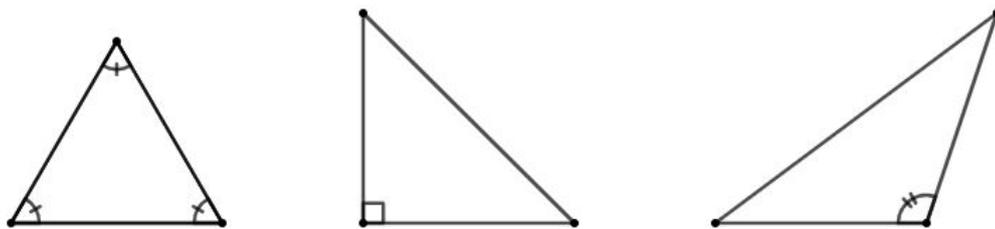
- (a) O triângulo é *acutângulo* quando todos os seus ângulos são agudos, ou seja, todos os seus ângulos medem menos de 90° ;
- (b) O triângulo é *obtusângulo* quando tem um ângulo obtuso, ou seja, um de seus ângulos mede mais de 90° ;
- (c) O triângulo é *retângulo* quando tem um ângulo reto, ou seja, um de seus ângulos mede 90° .

Figura 4 - Triângulo escaleno, isósceles e equilátero.



Fonte: Autor (2021).

Figura 5 - Triângulo acutângulo, retângulo e obtusângulo.

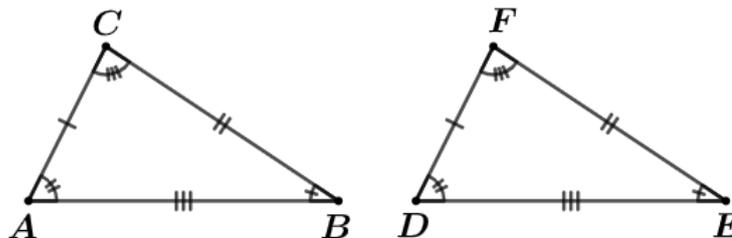


Fonte: Autor (2021).

Observação 2.3 Num triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos e o outro lado, oposto ao ângulo reto, chamado de hipotenusa.

Definição 2.5 Dois triângulos são congruentes (cf. Figura 6) quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca, entre os vértices de um e do outro, de tal sorte que lados correspondentes e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Figura 6 - Triângulos congruentes.



Fonte: Autor (2021).

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB \cong DE, \\ BC \cong EF, \\ AC \cong DF \end{array} \right\} \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}, \\ \widehat{BCA} \cong \widehat{FDE}, \\ \widehat{CAB} \cong \widehat{FDE} \end{array} \right\}$$

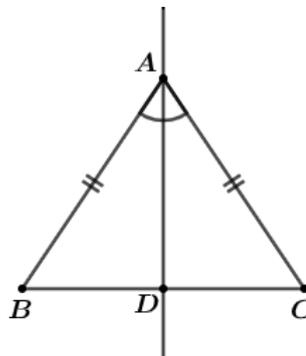
As relações anteriores são condições, necessárias e suficientes, que os triângulos devem satisfazer para serem congruentes, três para lados e três para ângulos internos, no entanto existem condições mínimas para que se estabeleça a congruência entre dois triângulos, que chamamos de casos de congruência.

Vamos, inicialmente, postular o primeiro caso de congruência, posteriormente enunciaremos e demonstraremos outros casos de congruência.

Postulado 2.1 (Lado, Ângulo, Lado - L.A.L.) Se, num triângulo, dois lados e o ângulo compreendido entre eles, forem congruentes aos dois lados correspondentes e o ângulo compreendido entre eles, do outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Proposição 2.2 Num triângulo, ângulos opostos a lados congruentes são congruentes.

Figura 7 - Triângulo $\triangle ABC$ isósceles.



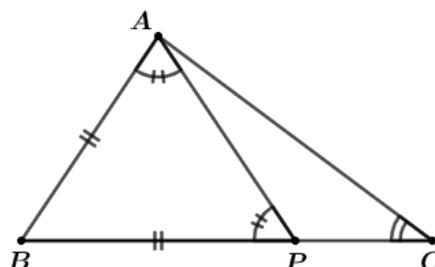
Fonte: Autor (2021).

Demonstração: Considere um triângulo $\triangle ABC$, tal que $AB \cong AC$ (cf. Figura 7), vamos mostrar que $\widehat{ABC} \cong \widehat{ACB}$. Nestas condições, a reta que divide o ângulo \widehat{BAC} em dois ângulos congruentes, intersecta o lado \overline{BC} no ponto D . Pelo Postulado 2.1, podemos inferir que $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, logo $\widehat{ABD} \cong \widehat{ACD}$ e, conseqüentemente, $\widehat{ABC} \cong \widehat{ACB}$, pois $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ABC})$ e $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ACB})$. \square

Uma consequência da Proposição 2.2 é que, num triângulo isósceles, existem, pelo menos, dois ângulos que são congruentes. Uma outra consequência dessa proposição é que todo triângulo equilátero é equiângulo, ou seja, seus três ângulos são congruentes.

Proposição 2.3 Num triângulo $\triangle ABC$ arbitrário, tem-se $\overline{AB} < \overline{BC}$ se, e somente se, $m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{BAC})$.

Figura 8 - Triângulo $\triangle ABC$.



Fonte: Autor (2021).

Demonstração: Por ser uma dupla implicação, dividimos a prova em duas partes:

1ª Parte: $\overline{AB} < \overline{BC} \Rightarrow m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{BAC})$

Sendo $\overline{AB} < \overline{BC}$, então consideremos um ponto $P \in BC$, tal que $PB \cong AB$. Agora, no triângulo $\triangle ABP$, observe que, pela Proposição 2.2, segue que $\widehat{BAP} \cong \widehat{BPA}$, pois $PB \cong AB$. No entanto, \widehat{BPA} é ângulo externo do triângulo $\triangle APC$, logo

$$\begin{aligned} m(\widehat{BPA}) &> m(\widehat{PCA}) = m(\widehat{ACB}) \Rightarrow m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{BAP}) < m(\widehat{CAB}) \\ \Rightarrow m(\widehat{ACB}) &< m(\widehat{BAC}). \end{aligned}$$

2ª Parte: $m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{BAC}) \Rightarrow \overline{AB} < \overline{BC}$

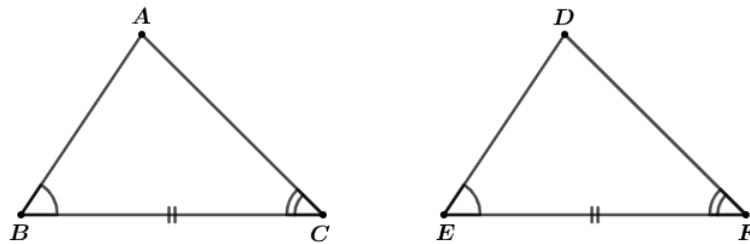
Vamos supor, por absurdo, que $\overline{AB} \geq \overline{BC}$, logo $AB \cong BC$ ou $\overline{AB} > \overline{BC}$. Sendo $AB \cong BC$ temos, pela Proposição 2.2, que $\widehat{ACB} \cong \widehat{BAC}$ contrariando a hipótese de que $m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{BAC})$. Por outro lado, sendo $\overline{AB} > \overline{BC}$, segue da demonstração da 1ª Parte que $m(\widehat{BAC}) < m(\widehat{ACB})$ contrariando, novamente, a hipótese de que $m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{BAC})$. Portanto concluímos que $\overline{AB} < \overline{BC}$.

Nestas condições, juntando os resultados das 1ª e 2ª Partes, finalmente concluímos que $\overline{AB} < \overline{BC}$ se, e somente se, $m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{BAC})$. \square

Vejamos a seguir os outros casos de congruência entre triângulos:

Proposição 2.4 Se, em um triângulo, dois ângulos e o lado comum a eles forem congruentes aos dois ângulos correspondentes e o lado comum a eles, do outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Figura 9 - Triângulos Congruentes (A.L.A.).



Fonte: Autor (2021).

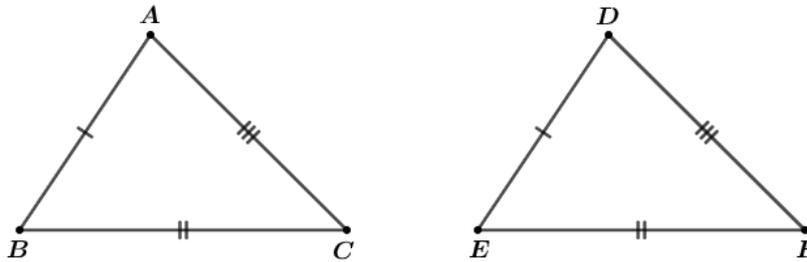
Demonstração: Consideremos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, tais que, por hipótese, $BC \cong EF$, $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ e $\widehat{ACB} \cong \widehat{DFE}$ (cf. Figura 9). Logo, para mostrarmos que esses triângulos são congruentes, basta concluirmos que $AB \cong DE$, para recairmos no Postulado 2.1. Suponhamos, por contradição, que ocorre $AB \not\cong DE$, então $\overline{AB} > \overline{DE}$ ou $\overline{AB} < \overline{DE}$. Sem perda de generalidade, vamos considerar $\overline{AB} > \overline{DE}$, pois o outro caso pode ser deduzido de modo análogo. Sendo $\overline{AB} > \overline{DE}$, existe um ponto $P \in AB$ com $BP \cong DE$. Pelo Postulado 2.1, temos que

$$\triangle PBC \cong \triangle DEF \Rightarrow \widehat{PCB} \cong \widehat{DFE} \cong \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{PCB} \cong \widehat{ACB},$$

chegando a uma contradição, pois $\overline{PB} < \overline{AB}$. Portanto, concluímos que $AB \cong DE$ e, consequentemente, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. \square

Proposição 2.5 Se, em um triângulo, os três lados são congruentes aos três lados correspondentes, do outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Figura 10 - Triângulos Congruentes ($L.L.L$).



Fonte: Autor (2021).

Demonstração: Considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, de modo que $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ e $AC \cong DF$ (cf. Figura 10). Vamos mostrar que $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}$, para recair no Postulado 2.1. Para isso, em um dos semi-planos determinados pela reta \overleftrightarrow{EF} , ao qual D não pertence, marcamos o ponto P de sorte que $PE \cong AB$ e $\widehat{PEF} \cong \widehat{ABC}$.

Nestas condições, sabendo por hipótese que $BC \cong EF$, deduzimos que

$$\triangle PEF \cong \triangle ABC \Rightarrow PF \cong AC \cong DF \Rightarrow PF \cong DF$$

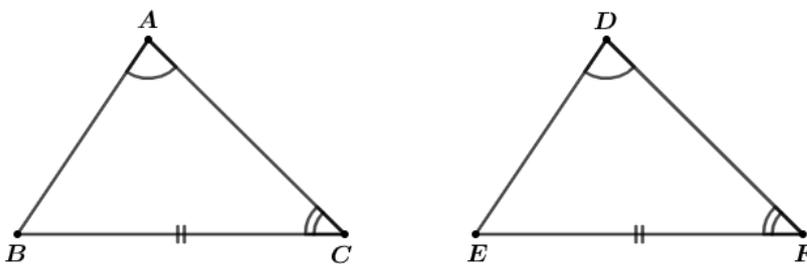
e, de modo análogo, podemos deduzir que $PE \cong DE$. Agora, observe que, no triângulo $\triangle DFP$, tem-se $DF \cong PF$, logo, pela Proposição 2.2, obtemos $\widehat{PDF} \cong \widehat{DPF}$. Outrossim, no triângulo $\triangle DEP$, tem-se $DE \cong PE$, logo, pela mesma proposição, constata-se que $\widehat{PDE} \cong \widehat{DPE}$. Consequentemente, vamos ter

$$m(\widehat{PDF}) + m(\widehat{PDE}) = m(\widehat{DPF}) + m(\widehat{DPE}) \Rightarrow \widehat{EDF} \cong \widehat{EPF} \cong \widehat{BAC}.$$

Portanto, pelo Postulado 2.1, concluímos que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. \square

Proposição 2.6 Se, num triângulo, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto forem congruentes ao lado correspondente, um ângulo adjacente e o ângulo oposto, do outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

Figura 11 - Triângulos Congruentes ($L.A.A_o$).



Fonte: Autor (2021).

Demonstração: Por hipótese, temos as congruências $\widehat{CAB} \cong \widehat{FDE}$ e $\widehat{BCA} \cong \widehat{EFD}$ (cf. Figura 11), logo $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$, pois sendo a soma dos ângulos igual a 180° , tem-se

$$\begin{aligned} m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCA}) &= m(\widehat{EFD}) + m(\widehat{FDE}) + m(\widehat{DEF}) \\ \Rightarrow m(\widehat{ABC}) &= m(\widehat{DEF}). \end{aligned}$$

Nestas condições, podemos aplicar diretamente a Proposição 2.4, visto que $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\widehat{BCA} \cong \widehat{EFD}$ e $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$. Portanto, concluímos a relação de congruência $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. \square

A congruência de triângulos pode ser interpretada como um caso particular de semelhança de triângulos, que definimos a seguir:

Definição 2.6 Dois triângulos são semelhantes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca, entre os vértices de um e outro, de tal sorte que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais.

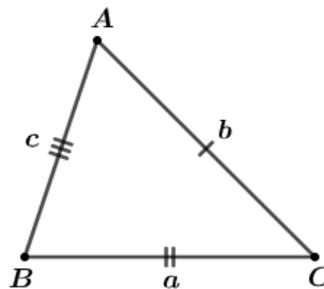
Observação 2.4 A semelhança de triângulos, assim como a congruência, também possui condições mínimas, similares aos casos de congruência (cf. BARBOSA, 2006).

Na sequência, apresentamos uma condição que três segmentos devem satisfazer para formarem um triângulo.

Proposição 2.7 (Desigualdade Triangular) Num triângulo, a medida de um dos lados é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Demonstração: Considere um triângulo $\triangle ABC$, conforme a figura a seguir:

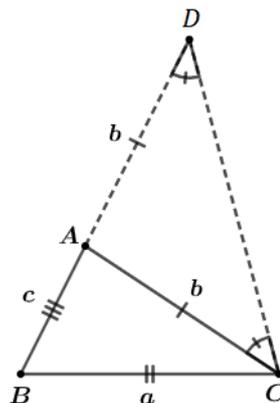
Figura 12 - Triângulo $\triangle ABC$.



Fonte: Autor (2021).

Vamos demonstrar apenas que $a < b + c$, visto que as outras duas desigualdades, $b < a + c$ e $c < a + b$, podem ser demonstradas de modo análogo. De fato, no triângulo $\triangle ABC$ (cf. Figura 12), podemos prolongar o lado AB , no sentido oposto à semi-reta \overrightarrow{AB} , até um ponto D , tal que $AD \cong AC$. Nestas condições, o triângulo $\triangle DAC$ (cf. Figura 13) é isósceles e, conseqüentemente pela Proposição 2.2, vamos ter $\widehat{CDA} \cong \widehat{ACD}$.

Figura 13 - Triângulo auxiliar isósceles $\triangle DAC$.



Fonte: Autor (2021).

Agora vamos supor, por contradição, que $a \geq b+c$. Logo, $a > b+c$ ou $a = b+c$, daí passamos a examinar os seguintes casos:

1º Caso: $a = b + c$.

Sendo essa igualdade verdadeira, pela Proposição 2.2, tem-se que

$$m(\widehat{C\hat{D}A}) = m(\widehat{B\hat{C}D}) = m(\widehat{B\hat{C}A}) + m(\widehat{A\hat{C}D}),$$

mas, $\widehat{C\hat{D}A} \cong \widehat{A\hat{C}D}$, logo temos

$$m(\widehat{C\hat{D}A}) = m(\widehat{B\hat{C}A}) + m(\widehat{C\hat{D}A}),$$

onde essa ultima igualdade é um absurdo.

2º Caso: $a > b + c$.

Sendo essa desigualdade verdadeira, pela Proposição 2.3, tem-se que

$$m(\widehat{C\hat{D}A}) > m(\widehat{B\hat{C}D}) = m(\widehat{B\hat{C}A}) + m(\widehat{A\hat{C}D}),$$

no entanto, $\widehat{C\hat{D}A} \cong \widehat{A\hat{C}D}$, logo temos

$$m(\widehat{C\hat{D}A}) > m(\widehat{B\hat{C}A}) + m(\widehat{C\hat{D}A}),$$

onde essa ultima desigualdade é um absurdo.

Finalmente, concluímos pelos casos apresentados que, como $a \geq b + c$ não ocorre, só pode ocorrer $a < b + c$. \square

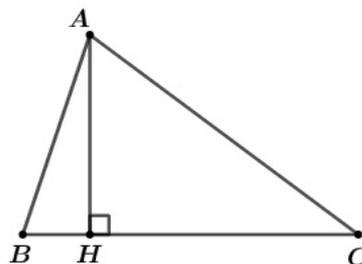
2.2 TEOREMA DE PITÁGORAS

Nessa seção, apresentamos mais alguns conceitos importantes sobre triângulo para chegar ao Teorema de Pitágoras e concluir com a fórmula de Heron, aplicada ao cálculo de área de triângulos.

Recordando que uma ceviana é um segmento que liga um vértice do triângulo à reta que contém o lado oposto a esse vértice, vamos definir as principais cevianas.

Definição 2.7 A altura é a ceviana que liga um vértice à reta suporte do lado oposto a ele, formando com a mesma um ângulo reto.

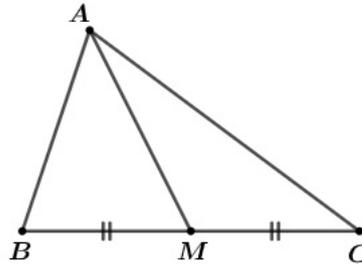
Figura 14 - Triângulo com altura \overline{AH} .



Fonte: Autor (2021).

Definição 2.8 A mediana é a ceviana que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele.

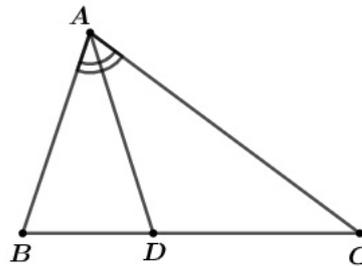
Figura 15 - Triângulo com mediana \overline{AM} .



Fonte: Autor (2021).

Definição 2.9 A bissetriz é a ceviana que divide o ângulo, naquele vértice do triângulo, em dois ângulos congruentes.

Figura 16 - Triângulo com bissetriz \overline{AD} .



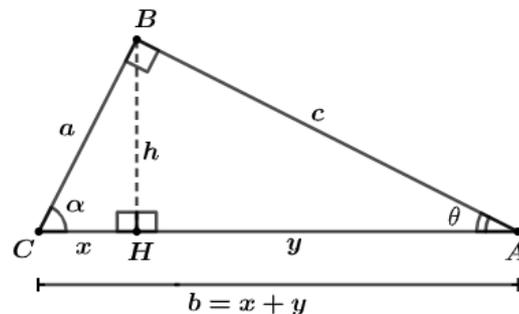
Fonte: Autor (2021).

Dando continuidade, enunciamos e demonstramos, o Teorema de Pitágoras.

Proposição 2.8 (Teorema de Pitágoras) Num triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração: No triângulo retângulo, traçamos a altura \overline{BH} relativa à hipotenusa, obtendo dois novos triângulos retângulos, $\triangle BHC$ e $\triangle AHB$ (cf. Figura 17).

Figura 17 - Triângulo retângulo com altura \overline{BH} .



Fonte: Autor (2021).

Da semelhança dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AHB$, tem-se que

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{c} \Rightarrow c^2 = b \cdot y, \quad (1)$$

enquanto a semelhança dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle BHC$ nos fornece a relação

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{a} \Rightarrow a^2 = b \cdot x. \quad (2)$$

Para finalizarmos, somamos, membro a membro, as equações (1) e (2), obtendo

$$a^2 + c^2 = b(x + y) \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 + c^2,$$

concluindo a demonstração. \square

Na sequência, recordamos o conceito de área, principalmente no contexto de triângulos, visando chegar à fórmula de Heron.

Definição 2.10 A área da superfície de um triângulo é um número real positivo associado à superfície do mesmo.

Observação 2.5 Segundo Muniz Neto (2013b), a área de uma superfície plana deve satisfazer as seguintes condições:

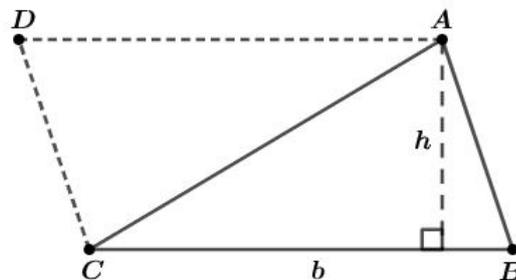
- (a) Figuras congruentes têm a mesma área;
- (b) A uma soma de superfície está associada uma área que é a soma das áreas das superfícies parcelas;
- (c) Se uma superfície está contida em outra, então sua área é menor que a área da outra que a contém;
- (d) Um quadrado cujo lado mede 1 u.c. (denominado *unitário*) tem área igual a 1 u.a.

Dessa forma, medir a área de um triângulo consiste, precisamente, em saber quantas vezes ele contém um quadrado unitário. Esta quantidade de vezes corresponde à área do triângulo. Nesse sentido, apresentamos um conhecido resultado sobre a área do triângulo.

Lema 2.1 Num triângulo, a área é igual a metade do produto da medida de um lado pela medida da altura, relativa ao vértice oposto a esse lado.

Demonstração: Considere um triângulo $\triangle ABC$ de base medindo b e altura medindo h , então existe um ponto D tal que AB é paralelo a DC e AD é paralelo a BC .

Figura 18 - Triângulo de base b e altura h .



Fonte: Autor (2021).

Observe que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo com base medindo b e altura medindo h (cf. Figura 18), cuja área é igual à soma das áreas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DCA$. Mais precisamente, escrevemos

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{\triangle ABC} + \mathcal{A}_{\triangle DCA}.$$

Por outro lado, pelo caso de congruência de triângulos (*L.L.L*), temos que $\triangle ABC \cong \triangle DCA$, acarretando em

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABCD},$$

mas segundo Dolce e Pompeo (2000, p. 316), vale a relação $\mathcal{A}_{ABCD} = b \cdot h$ e assim

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABCD} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} b \cdot h,$$

concluindo a demonstração. \square

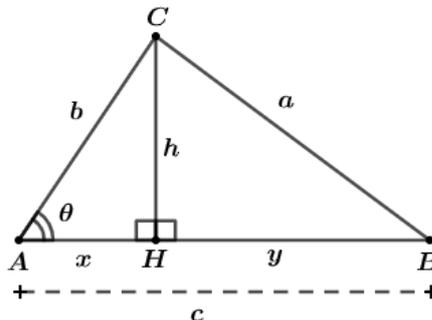
Para concluir, enunciamos e demonstramos uma versão da fórmula de Heron, que expressa a área de um triângulo em termos do perímetro e das medidas dos seus lados.

Proposição 2.9 (Fórmula de Heron) Se as medidas dos lados de um triângulo são denotadas por a , b e c , então sua área é dada por

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c)}.$$

Demonstração: Considerando um triângulo ABC arbitrário, traçamos a altura \overline{CH} relativa ao lado \overline{AB} , conforme a Figura 19 a seguir:

Figura 19 - Triângulo com altura \overline{CH} .



Fonte: Autor (2021).

Decorre do Teorema de Pitágoras que

$$h^2 = b^2 - x^2 \quad \text{e} \quad h^2 = a^2 - y^2 = a^2 - (c - x)^2, \quad (3)$$

então comparando-as, obtemos

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2,$$

consequentemente,

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Substituindo em (3), vamos ter

$$h^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \frac{[2bc + (b^2 + c^2 - a^2)][2bc - (b^2 + c^2 - a^2)]}{4c^2},$$

implicando que

$$h^2 = \frac{[(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]}{4c^2} = \frac{(a + b + c)(b + c - a)(b - c + a)(a + c - b)}{4c^2}.$$

Sabendo que $\mathcal{P} = a + b + c$, obtemos da última igualdade que

$$h = \frac{\sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c)}}{2c},$$

então conclui-se pelo Lema 2.1 que

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c)}}{4},$$

conforme queríamos demonstrar. □

3 POLINÔMIOS

Neste capítulo, abordamos os números complexos na forma algébrica e polar, bem como os polinômios e equações polinomiais, enfatizando os polinômios e as equações dos segundo e terceiro grau, incluindo as fórmulas de Bháskara e de Cardano-Tartália, usadas na resolução de equações polinomiais do segundo e terceiro graus, respectivamente. Aproveitamos para indicar, no caso de uma leitura mais detalhada, as referências: Iezzi (1999), Lima (2006) ou Muniz Neto (2013a).

3.1 NÚMEROS COMPLEXOS

Segundo Boyer (1994), historicamente, os números complexos, foram vistos com um certo ar de mistério, pois sua existência foi duvidosa até o século XIX. Podemos dizer que o conceito de número complexo é uma ampliação evolutiva da ideia de número real, pois, com os números complexos, obtemos diversos avanços que não são possíveis com os números reais.

Definição 3.1 Chama-se número complexo todo aquele que pode ser escrito na forma $a + bi$, onde a e b são números reais e $i = \sqrt{-1}$ (unidade imaginária).

Observação 3.1 Indicando o conjunto dos números complexos por \mathbb{C} , temos que

$$\mathbb{C} = \{a + bi; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}\},$$

onde \mathbb{R} é identificado com o subconjunto de \mathbb{C} formado por elementos $a + bi$ com $b = 0$.

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ arbitrário, dizemos que a é a parte real de z e b é a parte imaginária de z , denotados por $Re(z)$ e $Im(z)$, respectivamente. Essa representação do número complexo é conhecida como *forma algébrica*.

Definição 3.2 Dois números complexos são iguais quando possuem a mesma parte real e a mesma parte imaginária.

Definição 3.3 A soma de dois números complexos é um número complexo cuja parte real é a soma das partes reais das parcelas e a parte imaginária é a soma das partes imaginárias das parcelas.

No que se refere à multiplicação de números complexos, tem-se a seguinte definição:

Definição 3.4 Dados números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se que

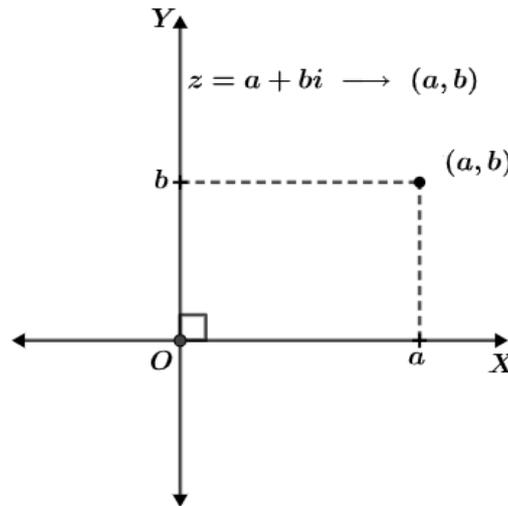
$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Observação 3.2 As operações aritméticas de adição e multiplicação, em \mathbb{C} , gozam das mesmas propriedades válidas em \mathbb{R} , ou seja, propriedades comutativa, associativa, existência do elemento neutro, do simétrico e do inverso, bem como distributividades.

Definição 3.5 Chama-se conjugado de z , indicado por \bar{z} , o número complexo obtido de z trocando-se o sinal da parte imaginária de z . Mais precisamente, o conjugado de $z = a + bi$ é dado por $\bar{z} = a - bi$.

Dado um número complexo, representado em sua forma algébrica $z = a + bi$, podemos representá-lo no plano cartesiano, pois é possível a identificação entre \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 , associando $z = a + bi$ a um par ordenado (a, b) .

Figura 20 - Plano de Argand-Gauss.



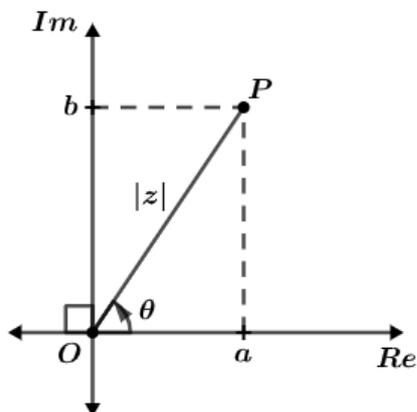
Fonte: Autor (2021).

Considerando a Figura 21, temos que a medida do segmento OP corresponde ao *módulo* do número complexo z , indicado por $|z|$. Mais precisamente, passamos à próxima definição.

Definição 3.6 Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$ arbitrário, dizemos que o seu módulo é o número real definido por

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Figura 21 - Plano com o módulo de z .



Fonte: Autor (2021).

Proposição 3.1 Dados os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, temos que:

- (a) $z + \bar{z} = 2Re(z)$;
- (b) $z - \bar{z} = 2Im(z)$;
- (c) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
- (d) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- (e) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

Demonstração: Por um cálculo direto, segue que:

- (a) $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (bi - bi) \Rightarrow z + \bar{z} = 2a \Rightarrow z + \bar{z} = 2Re(z)$.
- (b) $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = (a - a) + (bi + bi) \Rightarrow z - \bar{z} = 2bi \Rightarrow z - \bar{z} = 2Im(z)$.
- (c) $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = |z|^2$.
- (d) $\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$.
- (e) $\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \bar{z} \cdot \bar{w}$. □

Na sequência, vamos definir o simétrico e o inverso multiplicativo de números complexos.

Definição 3.7 Dado um número complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ arbitrário, definimos:

- (a) $-z = (-a) + (-b)i$ (simétrico);
- (b) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ para $z \neq 0$ (inverso).

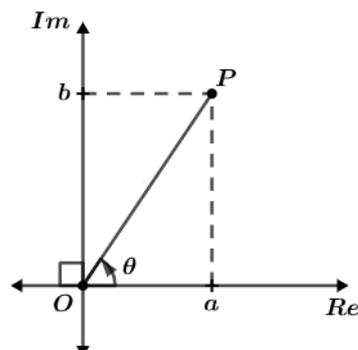
De posse das definições de simétrico e inverso, podemos definir a subtração e quociente de números complexos.

Definição 3.8 Dados $z, w \in \mathbb{C}$, definimos subtração e quociente de números complexos, respectivamente, por:

- (a) $z - w = z + (-w)$;
- (b) $z \div w = z \cdot w^{-1}$ para $w \neq 0$.

Definição 3.9 Se $z \in \mathbb{C}$ é não-nulo, dizemos que o ângulo central θ , de primeira volta, formado por \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{OX} , marcado a partir de \overrightarrow{OX} no sentido anti-horário, é o *argumento principal* de z .

Figura 22 -Argumento de z .



Fonte: Autor (2021).

Observação 3.3 Importante frisar que um número complexo z não-nulo tem infinitos argumentos, congruentes dois a dois. Dessa maneira, um argumento de z é da forma $\theta_k = \theta + 2\pi k$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e θ denota o argumento principal.

Da Figura 22, seguem as relações

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \Rightarrow \quad a = |z| \cos(\theta), \quad (4)$$

bem como,

$$\text{sen}(\theta) = \frac{b}{|z|} \quad \Rightarrow \quad b = |z| \text{sen}(\theta), \quad (5)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ não-nulo.

Agora, considerando $z = a + bi$ não-nulo, de tal sorte que seu argumento seja θ e substituindo as relações (4) e (5), tem-se

$$z = |z| [\cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)],$$

que é chamada de *forma trigonométrica* (ou polar) do número complexo z .

Para tratarmos de potenciação em \mathbb{C} , vamos primeiro apresentar o resultado da multiplicação de dois números complexos, representados na forma trigonométrica.

Proposição 3.2 Considerando números complexos não-nulos na forma polar, dados por:

$$z_1 = |z_1| [\cos(\theta_1) + i \text{sen}(\theta_1)] \quad \text{e} \quad z_2 = |z_2| [\cos(\theta_2) + i \text{sen}(\theta_2)],$$

então o produto satisfaz $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$.

Demonstração: Por um cálculo direto, obtemos

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1) + i \text{sen}(\theta_1)] [\cos(\theta_2) + i \text{sen}(\theta_2)],$$

logo, segue que

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \{ \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\theta_2) + i [\text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_1) + \text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2)] \},$$

daí usamos as fórmulas do seno e do cosseno da soma (cf. IEZZI, 1999b), implicando que

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \quad \square$$

Definição 3.10 Dado $z \in \mathbb{C}$ arbitrário e $n \in \mathbb{Z}$, definimos

$$z^n = \begin{cases} 1, & \text{se } z \neq 0 \text{ e } n = 0 \\ z, & \text{se } n = 1 \\ z \cdot z^{n-1}, & \text{se } n > 1 \\ (z^{-1})^{-n}, & \text{se } z \neq 0 \text{ e } n < 0 \end{cases}.$$

Agora podemos enunciar a proposição seguinte, conhecida como 1ª Fórmula de Moivre.

Proposição 3.3 Sendo $z = |z| [\cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)]$ com $z \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, então

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i \text{sen}(n\theta)].$$

Demonstração: Vamos dividir a nossa demonstração em dois casos, sendo o primeiro para $n \geq 0$ e o segundo para $n < 0$.

1º Caso: $n \geq 0$.

Usando indução, temos para $n = 0$ que

$$|z|^0[\cos(0 \cdot \theta) + i \operatorname{sen}(0 \cdot \theta)] = \cos(0) + i \operatorname{sen}(0) = 1 = z^0,$$

daí supomos que o resultado vale para $n = k$ e mostraremos que vale para $n = k + 1$. Nestas condições, tem-se

$$z^k = |z|^k[\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)] \Rightarrow z \cdot z^k = z \cdot |z|^k(\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)),$$

implicando pela Proposição 3.2 que

$$z^{k+1} = z \cdot z^k = |z|^{k+1}\{\cos[(k+1)\theta] + i \operatorname{sen}[(k+1)\theta]\}.$$

2º Caso: $n < 0$.

Sendo $n \in \mathbb{Z}$ com $n < 0$, temos $n = -k$ com $k \in \mathbb{N}$ e das Definições 3.7 e 3.10, segue-se que

$$z^n = z^{-k} = (z^{-1})^k = \left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)^k = |z|^{2n}\bar{z}^k, \quad (6)$$

no entanto,

$$\bar{z} = |z|[\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)] = |z|[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)],$$

então decorre do 1º Caso que

$$\bar{z}^k = |z|^k[\cos(-k\theta) + i \operatorname{sen}(-k\theta)] = |z|^{-n}[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

Substituindo a última igualdade em (6), conclui-se que

$$z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]. \quad \square$$

Enunciamos o último resultado desta seção, conhecido como 2ª Fórmula de Moivre.

Corolário 3.1 Sendo $z = |z|[\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)]$ com $z \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, então z admite n raízes n -ésimas, dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right],$$

onde $k = 0, 1, \dots, n-1$ e θ denota o argumento de z .

Demonstração: Decorre da Primeira Fórmula de De Moivre (cf. Proposição 3.3).

3.2 POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Nesta seção, estamos interessados em polinômios e nas equações polinômiais, em especial polinômios e equações polinômiais de segundo e terceiro graus, ou seja, polinômios e equações quadráticos(as) e cúbicos(as).

Definição 3.11 Chama-se polinômio sobre os reais, em uma variável, a toda expressão que pode ser escrita na forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde x é a variável, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes.

Definição 3.12 Chama-se polinômio identicamente nulo, ou simplesmente nulo, quando todos os seus coeficientes são iguais a zero.

Definição 3.13 Chama-se de grau de um polinômio $P(x)$ não-nulo, denotado por $\partial P(x)$, o maior expoente da variável de termos não-nulos.

Definição 3.14 Dois polinômios são iguais, quando os coeficientes dos termos correspondentes coincidem.

Diante da definição de polinômio e grau de polinômio, podemos definir equação polinomial.

Definição 3.15 Chama-se de equação polinomial de grau n (ou equação do n -ésimo grau) sobre os reais, em uma variável, a toda equação que pode ser escrita na forma $P(x) = 0$, onde $P(x)$ denota um polinômio de grau n sobre os reais.

Definimos a seguir raiz (ou zero) de polinômio e equação polinomial em uma variável sobre os reais.

Definição 3.16 Dados um polinômio $P(x)$ e um número complexo $\alpha \in \mathbb{C}$, dizemos que α é uma raiz do polinômio $P(x)$ ou uma raiz (ou zero) da equação polinomial $P(x) = 0$, quando $P(\alpha)$ é nulo.

Na sequência, definimos soma e produto de polinômios sobre os reais em uma mesma variável.

Definição 3.17 A soma de dois polinômios sobre os reais na mesma variável, expressos por

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{e} \quad Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0,$$

é definida como a seguir

$$(P + Q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Definição 3.18 O produto de dois polinômios sobre os reais na mesma variável, expressos por

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{e} \quad Q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,$$

é definido como a seguir

$$(PQ)(x) = c_{m+n} x^{m+n} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

onde $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, m+n\}$.

Nesse momento, ficaremos restritos a polinômios e equações do segundo e terceiro graus.

Definição 3.19 Chama-se equação do segundo grau, ou equação quadrática, toda aquela que pode ser escrita na forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com a não-nulo.

Na sequência, vamos demonstrar um resultado que nos dá as raízes de uma equação quadrática a partir dos seus coeficientes.

Proposição 3.4 (Fórmula de Bháskara) Se $ax^2 + bx + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a não-nulo, então suas raízes reais ou complexas são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Demonstração: Sendo a não-nulo, temos que

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

organizando-se, o quadrado obtido na última igualdade, tem-se

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

donde segue que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. □

Um resultado importante, na busca das soluções de uma equação quadrática, é o que relaciona soma e produto, das raízes, com os coeficientes da equação.

Proposição 3.5 Se as raízes complexas da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são r_1 e r_2 , então:

$$(a) \ r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}; \qquad (b) \ r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}.$$

Demonstração: Usando o algoritmo da divisão de polinômios (cf. GONÇALVES, 2013), obtemos

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2) \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - r_1)(x - r_2),$$

consequentemente,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2,$$

então comparando-se os polinômios obtidos nos dois membros, chegamos às relações dos itens (a) e (b) □

Definição 3.20 Chama-se equação do terceiro grau ou equação cúbica, aquela que pode ser escrita na forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e a não-nulo.

Na sequência, apresentamos a fórmula de Cardano-Tartaglia, aplicada à resolução de equações do terceiro grau. Uma fórmula mais recente, obtida por Pereira e Silva Filho (2019), permite calcular as raízes de equações do terceiro grau, conhecendo previamente uma delas.

Proposição 3.6 (Fórmula de Cardano-Tartaglia) Se $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e a não-nulo, então suas raízes complexas são dadas por

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{D}}$$

onde $m = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$, $n = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}$ e $D = \frac{m^3}{3^3} + \frac{n^2}{2^2}$.

Demonstração: Com efeito, observe que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0,$$

daí completando o cubo, temos que

$$\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + m\left(x + \frac{b}{3a}\right) + n = 0, \quad (7)$$

onde $m = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$ e $n = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}$.

Observe que em (7), podemos fazer $y = x + \frac{b}{3a}$ obtendo a equação seguinte

$$y^3 + my + n = 0.$$

então escrevendo $y = y_1 + y_2$, temos que

$$y_1^3 + y_2^3 + (3y_1y_2 + m)(y_1 + y_2) + n = 0.$$

Para ocorrer a última igualdade, basta obter as condições

$$y_1^3 + y_2^3 = -n \quad \text{e} \quad 3y_1y_2 = -m, \quad (8)$$

ou ainda,

$$y_1^3 + y_2^3 = -n \quad \text{e} \quad y_1^3y_2^3 = -\frac{m^3}{3^3}.$$

Na sequência, consideremos a equação quadrática cujas raízes são y_1^3 e y_2^3 , expressa por

$$z^2 - (y_1^3 + y_2^3)z + y_1^3y_2^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + nz - \frac{m^3}{27} = 0,$$

logo, aplicando a fórmula de Bháskara, temos que

$$z = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 + \frac{4m^3}{27}}}{2} \Leftrightarrow z = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}.$$

Desta última igualdade, segue que

$$y_1^3 = -\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}} \Leftrightarrow y_1 = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}$$

e

$$y_2^3 = -\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}} \Leftrightarrow y_2 = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}},$$

implicando que

$$x = -\frac{b}{3a} + y = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{D}}. \quad \square$$

No próximo resultado, mencionamos a relação que existe entre a quantidade de raízes reais e o sinal do discriminante da equação do terceiro grau.

Corolário 3.2 Se $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e a não-nulo, então valem as afirmações:

- (a) Se $D < 0$, então a equação possui três raízes reais distintas.
- (b) Se $D = 0$, então a equação possui um raiz real não-simples.
- (c) Se $D > 0$, então a equação possui uma raiz real e duas complexas não-reais.

Demonstração: Pode ser encontrada em Lima (1987).

Proposição 3.7 Se as raízes de uma equação do terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ são denotadas por r_1, r_2 e r_3 , então:

- (a) $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$;
- (b) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a}$;
- (c) $r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}$.

Demonstração:

Decorre do algoritmo da divisão de polinômios (cf. GONÇALVES, 2013) que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3),$$

então desenvolvendo e simplificando, o lado direito desta última igualdade, segue que

$$a \left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \right) = a[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3],$$

portanto basta comparar os coeficientes para concluir a demonstração. \square

4 RESULTADOS

Nesse capítulo, apresentamos os resultados chave que fornecem importantes relações entre perímetro e área de um triângulo, chegando à desigualdade isoperimétrica para triângulos. Ademais, apresentamos os resultados principais que buscam caracterizar triângulos com mesmo perímetro e mesma área, bem como mostrar como determinar triângulos conhecendo apenas seu perímetro e sua área.

4.1 RESULTADOS CHAVE

Aqui vamos apresentar alguns resultados que contêm informações adicionais sobre perímetro e área de triângulos, que serão usados numa prova alternativa da desigualdade isoperimétrica para triângulos e aplicados na demonstração dos resultados principais. O primeiro resultado nos traz uma desigualdade que deve ser satisfeita pelas medidas dos lados de um triângulo.

Proposição 4.1 Seja $\triangle ABC$ um triângulo de área \mathcal{A} , perímetro \mathcal{P} e $a \in \mathbb{R}$ a medida de qualquer um dos seus lados, então vale a desigualdade

$$\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)a^2 \geq 16\mathcal{A}^2.$$

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que

$$16\mathcal{A}^2 > \mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)a^2,$$

então

$$\mathcal{A} > \frac{1}{4}a\sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)},$$

implicando pela fórmula de Heron que

$$\frac{1}{4}\sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c)} > \frac{1}{4}a\sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)},$$

onde b e c representam as medidas dos outros dois lados de $\triangle ABC$.

Nestas condições, segue-se que

$$\sqrt{(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c)} > a,$$

ou equivalentemente,

$$(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c) > a^2,$$

que pode ser reescrito na forma

$$(a + c - b)(a + b - c) > a^2 \quad \text{ou} \quad (b - c)^2 < 0,$$

mas esta última desigualdade é uma absurdo. □

Na proposição a seguir, mostramos como obter as medidas dos lados de um triângulo conhecendo o perímetro, a área e a medida de um dos lados.

Proposição 4.2 Dado um triângulo $\triangle ABC$ com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} com um dos lados medindo $a \in \mathbb{R}$, então as medidas dos demais lados são dadas por

$$b = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a} \right] \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a} \right],$$

onde $\Delta_a = a^2 - \frac{16\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)}$.

Demonstração: Pela fórmula de Heron, temos que

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c)},$$

ou equivalentemente,

$$(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c) = \frac{16\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)},$$

onde b e c são as medidas dos outros dois lados do triângulo $\triangle ABC$.

Na última igualdade, podemos fazer $c = \mathcal{P} - (a + b)$ e obter

$$(\mathcal{P} - 2b)[(\mathcal{P} - 2a) - 2b] = -\frac{16\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)}$$

nos fornecendo a igualdade

$$4b^2 - 4b(\mathcal{P} - a) + \mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a) + \frac{16\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)} = 0.$$

que corresponde a uma equação quadrática em b .

Na sequência, decorre da fórmula de Bháskara e da relação $c = \mathcal{P} - (a + b)$ que

$$b = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) \pm \sqrt{\Delta_a} \right] \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) \mp \sqrt{\Delta_a} \right],$$

portanto, sem perda de generalidade, conclui-se que

$$b = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a} \right] \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a} \right]$$

são as medidas dos demais lados de $\triangle ABC$. □

Como uma consequência da Proposição 4.1 (ou Proposição 4.2), obtemos a *desigualdade isoperimétrica* para triângulos.

Corolário 4.1 Dado um triângulo $\triangle ABC$ arbitrário, vale a desigualdade

$$\mathcal{A} \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \mathcal{P}^2,$$

onde \mathcal{A} e \mathcal{P} denotam a área e o perímetro de $\triangle ABC$, respectivamente.

Demonstração: Decorre diretamente da Proposição 4.1 (ou Proposição 4.2) que

$$\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)a^2 \geq 16\mathcal{A}^2,$$

ou equivalentemente,

$$2\mathcal{P}a^3 - \mathcal{P}^2a^2 + 16\mathcal{A}^2 \leq 0.$$

Aplicando a regra do sinal de Descartes (cf. LOPES e RUGGIERO, 1997), podemos afirmar que o polinômio do terceiro grau, dado por

$$P(x) = 2\mathcal{P}x^3 - \mathcal{P}^2x^2 + 16\mathcal{A}^2$$

possui uma raiz negativa. Como $a > 0$ e $P(a) \leq 0$, então $P(x)$ possui uma raiz positiva, implicando que seu discriminante satisfaz

$$D = -\frac{\mathcal{P}^4 - 432\mathcal{A}^2}{27\mathcal{P}^2}\mathcal{A}^2 \leq 0.$$

Da última desigualdade, deduzimos que

$$\mathcal{P}^4 - 432\mathcal{A}^2 \geq 0,$$

consequentemente,

$$\mathcal{A} \leq \frac{\sqrt{3}}{36}\mathcal{P}^2,$$

concluindo a prova. □

4.2 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nessa última seção, apresentamos os resultados principais do trabalho que, essencialmente, nos fornecem uma interessante condição de existência para triângulos, inspirada na *desigualdade isoperimétrica*, bem como um novo critério de congruência entre triângulos e uma forma de determinar triângulos partindo do perímetro e da área.

Diante do exposto, enunciamos e demonstramos o primeiro teorema deste capítulo.

Teorema 4.1 Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{P} \in \mathbb{R}$ positivos, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Os números $\mathcal{A}, \mathcal{P} \in \mathbb{R}$ satisfazem a desigualdade

$$\mathcal{A} \leq \frac{\sqrt{3}}{36}\mathcal{P}^2.$$

(b) Existe um número $a \in \mathbb{R}$ positivo, tal que

$$\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)a^2 \geq 16\mathcal{A}^2.$$

(c) Existe um triângulo ABC com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} , cujos lados medem

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{AC} = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a} \right] \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a} \right],$$

$$\text{onde } \Delta_a = a^2 - \frac{16\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)}.$$

Demonstração: Dividiremos a demonstração em três partes.

1ª Parte: (a) \Rightarrow (b).

Suponhamos, por contradição, que não existe $a \in \mathbb{R}$ positivo, tal que

$$\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)a^2 \geq 16\mathcal{A}^2,$$

ou seja,

$$\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2x)x^2 < 16\mathcal{A}^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ positivo.

Usando a hipótese, temos que

$$16\mathcal{A}^2 \leq \mathcal{P} \left(\frac{\mathcal{P}}{3} \right)^3,$$

logo

$$\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2x)x^2 < 16\mathcal{A}^2 \leq \mathcal{P} \left(\frac{\mathcal{P}}{3} \right)^3,$$

implicando que

$$(\mathcal{P} - 2x)x^2 < \left(\frac{\mathcal{P}}{3} \right)^3.$$

Por inspeção, verifica-se que $a = \frac{\mathcal{P}}{3}$ é um número real positivo que satisfaz

$$(\mathcal{P} - 2a)a^2 = \left(\frac{\mathcal{P}}{3} \right)^3,$$

gerando um contradição.

2ª Parte: (b) \Rightarrow (c).

Decorre diretamente da desigualdade do item (b) que $\mathcal{P} > 2a$, logo

$$\mathcal{P} - a = \sqrt{(\mathcal{P} - a)^2} = \sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a) + a^2} > \sqrt{a^2 - \frac{16\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)}},$$

implicando que

$$a, \quad b = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a} \right] \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a} \right],$$

são números reais positivos.

Suponhamos, por contradição, que esses números reais positivos não satisfazem a desigualdade triangular, então passamos a analisar os seguintes casos:

1º Caso: $a + b \leq c$.

Nestas condições, temos que

$$a + \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a} \right] \leq \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a} \right],$$

consequentemente,

$$a + \sqrt{\Delta_a} \leq 0,$$

chegando a um absurdo.

2º Caso: $b + c \leq a$.

Neste caso, obtemos

$$\frac{1}{2} [(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a}] + \frac{1}{2} [(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a}] \leq a,$$

logo

$$\mathcal{P} - 2a \leq 0,$$

contrariando a desigualdade do item (b).

3º Caso: $a + c \leq b$.

Finalmente, vamos ter

$$a + \frac{1}{2} [(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a}] \leq \frac{1}{2} [(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a}],$$

implicando na desigualdade

$$\sqrt{a^2} = a \leq \sqrt{\Delta_a} = \sqrt{a^2 - \frac{16\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)}},$$

novamente chegando a um absurdo.

Diante dos casos analisados, concluímos da Proposição 5.12 de Barbosa (2006) que existe um triângulo ABC , cujos lados têm medidas, dadas por

$$a, \quad b = \frac{1}{2} [(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a}] \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{2} [(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a}],$$

concluindo a demonstração.

3ª Parte: (c) \Rightarrow (a).

Por hipótese, existe um triângulo de área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} . Nestas condições, pelo Corolário 4.1, conclui-se que

$$\mathcal{A} \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \mathcal{P}^2$$

finalizando a demonstração. □

Dando continuidade, trazemos um resultado que junto com o Corolário 4.1 correspondem a uma solução do *problema isoperimétrico* para triângulos.

Corolário 4.2 Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{P} \in \mathbb{R}$ números positivos, então

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{36} \mathcal{P}^2$$

se, e somente se, existe um triângulo equilátero com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} .

Demonstração: Por tratar-se de uma dupla implicação, divimos a prova em duas partes:

1ª Parte: Supondo que

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{36} \mathcal{P}^2,$$

então pelo Teorema 4.1, existe um triângulo de área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} . Observe que, indicando as medidas dos lados por a, b e c , temos pela fórmula de Heron que

$$\frac{1}{4} \sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c)} = \frac{\sqrt{3}}{36} \mathcal{P}^2$$

Da última igualdade, obtemos

$$(\mathcal{P} - 2a)(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c) = \left(\frac{\mathcal{P}}{3}\right)^3$$

que equivale à igualdade

$$\sqrt[3]{(\mathcal{P} - 2a)(\mathcal{P} - 2b)(\mathcal{P} - 2c)} = \frac{\mathcal{P}}{3} = \frac{(\mathcal{P} - 2a) + (\mathcal{P} - 2b) + (\mathcal{P} - 2c)}{3}, \quad (9)$$

então a igualdade anterior nos mostra que a média geométrica de três valores é igual à média aritmética destes mesmos valores, logo

$$\mathcal{P} - 2a = \mathcal{P} - 2b = \mathcal{P} - 2c,$$

portanto concluímos que $a = b = c$ e o triângulo é equilátero.

2ª Parte: Vamos assumir que exista um triângulo equilátero com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} . Indicando-se a medida dos lados deste triângulo por a , tem-se que

$$\mathcal{P} = 3a$$

mas por outro lado, segue da fórmula de Heron que

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2,$$

implicando pelas duas últimas igualdades que $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{36} \mathcal{P}^2$.

Finalmente, pelas duas partes apresentadas, concluímos a demonstração do referido corolário, garantindo que de todos os triângulos com mesmo perímetro, aquele que possui maior área é o triângulo equilátero. \square

No próximo resultado, mostramos a existência de infinitos triângulos escalenos com mesma área e mesmo perímetro.

Corolário 4.3 Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{P} \in \mathbb{R}$ números positivos, tais que

$$\mathcal{A} < \frac{\sqrt{3}}{36} \mathcal{P}^2,$$

então existem infinitos triângulos escalenos com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} .

Demonstração: Observe que o discriminante do polinômio do terceiro grau, dado por

$$P(x) = 2\mathcal{P}x^3 - \mathcal{P}^2x^2 + 16\mathcal{A}^2$$

assume a expressão

$$D = -\frac{\mathcal{P}^4 - 432\mathcal{A}^2}{27\mathcal{P}^2}\mathcal{A}^2,$$

no entanto, a hipótese nos fornece a desigualdade

$$\mathcal{P}^4 \geq 432\mathcal{A}^2,$$

portanto $D < 0$ e o polinômio em questão possui três raízes reais.

Decorre da regra do sinal de Descartes que $P(x)$ possui raiz negativa $r_1 \in \mathbb{R}$, então pelo algoritmo da divisão de polinômios, podemos escrever

$$P(x) = 2\mathcal{P}(x - r_1)Q(x),$$

onde $Q(x)$ é um polinômio quadrático mônico. Usando o Teorema 4.1 e o Corolário 4.2, existe $a \in \mathbb{R}$ positivo, tal que $P(a) < 0$ e assim

$$P(a) = 2\mathcal{P}(a - r_1)Q(a) < 0,$$

implicando que $Q(x)$ e $P(x)$ possuem duas raízes $r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ positivas com $r_2 < r_3$.

Diante do exposto, podemos reescrever a expressão de $P(x)$ na forma

$$P(x) = 2\mathcal{P}(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3),$$

portanto para todo $a \in [r_2, r_3]$, obtemos $P(a) < 0$ e assim

$$2\mathcal{P}a^3 - \mathcal{P}^2a^2 + 16\mathcal{A}^2 \leq 0,$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)a^2 \geq 16\mathcal{A}^2,$$

então o Teorema 4.1 garante que existem infinitos triângulos com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} .

Supondo que um triângulo ABC com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} não é escaleno, temos três casos a considerar:

1º Caso: $\overline{BC} = \overline{AC} = a$ ou $\overline{BC} = \overline{AB} = a$

Aplicando diretamente o Teorema 4.1, obtemos

$$a = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) \pm \sqrt{\Delta_a} \right]$$

donde segue que

$$(3a - \mathcal{P})^2 = a^2 - \frac{16\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)}$$

ou ainda,

$$\mathcal{P}(4a - \mathcal{P})(2a - \mathcal{P})^2 - 16\mathcal{A}^2 = 0,$$

portanto a igualdade $\overline{BC} = \overline{AC} = a$ ocorre no máximo para três números reais, visto que a é raiz de uma equação do terceiro grau.

2º Caso: $\overline{AC} = \overline{AB}$

Nesse caso, vamos ter

$$\frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a} \right] = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a} \right],$$

donde segue que $\Delta_a = 0$ e assim

$$2\mathcal{P}a^3 - \mathcal{P}^2a^2 + 16\mathcal{A}^2 = 0,$$

implicando que $a = r_2$ ou $a = r_3$, conseqüentemente

$$\overline{BC} = r_2 \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \overline{AB} = \frac{\mathcal{P} - r_2}{2} \quad \text{ou} \quad \overline{BC} = r_3 \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \overline{AB} = \frac{\mathcal{P} - r_3}{2},$$

garantindo a existência de dois triângulos com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} que não são escalenos.

Por fim, segue dos casos analisados que o número de triângulos não escalenos com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} é finito e como existem infinitos triângulos com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} , concluímos que também é infinito o número de triângulos escalenos com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} . \square

Apresentamos agora o último teorema que fornece condições para determinar triângulos, conhecendo apenas o perímetro e a área.

Teorema 4.2 Os números reais positivos $\mathcal{A}, \mathcal{P}, a \in \mathbb{R}$ satisfazem

$$\mathcal{A} \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \mathcal{P}^2 \quad \text{e} \quad \frac{1 + 2 \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right)}{6} \mathcal{P} \leq a \leq \frac{1 + 2 \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)}{6} \mathcal{P},$$

se, e somente se, existe um triângulo com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} , cujos lados medem

$$\overline{AB} = a, \quad \overline{BC} = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a} \right] \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a} \right],$$

onde $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathcal{P}^4 - 864\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}^4} \right)$ e $\Delta_a = a^2 - \frac{16\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2a)}$.

Demonstração: Inicialmente, vamos revisitar a inequação do terceiro grau, dada por

$$\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2x)x^2 \geq 16\mathcal{A}^2, \quad (10)$$

equivalente à inequação

$$2\mathcal{P}x^3 - \mathcal{P}^2x^2 + 16\mathcal{A}^2 \leq 0,$$

onde \mathcal{A} e \mathcal{P} são números reais positivos.

Usando a fórmula de Cardano-Tartaglia, tem-se que as raízes da equação

$$2\mathcal{P}x^3 - \mathcal{P}^2x^2 + 16\mathcal{A}^2 = 0 \quad (11)$$

são dadas por

$$r_k = \frac{\mathcal{P}}{6} + \sqrt[3]{\frac{\mathcal{P}^4 - 864\mathcal{A}^2}{216\mathcal{P}} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{\mathcal{P}^4 - 864\mathcal{A}^2}{216\mathcal{P}} - \sqrt{D}} \quad (k = 1, 2 \text{ e } 3), \quad (12)$$

onde o discriminante será expresso por

$$D = \left(-\frac{\mathcal{P}^2}{36} \right)^3 + \left(-\frac{\mathcal{P}^4 - 864\mathcal{A}^2}{216\mathcal{P}} \right)^2 = -\frac{\mathcal{P}^4 - 432\mathcal{A}^2}{27\mathcal{P}^2} \mathcal{A}^2.$$

Supondo $\mathcal{A} \leq \frac{\sqrt{3}}{36}\mathcal{P}^2$, podemos escrever o primeiro radicando de (12) na forma

$$z = \frac{\mathcal{P}^4 - 864\mathcal{A}^2}{216\mathcal{P}} + \sqrt{-D}i,$$

em particular,

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{P}^4 - 864\mathcal{A}^2}{216\mathcal{P}}\right)^2 + \left(\sqrt{-D}\right)^2} = \frac{\mathcal{P}^3}{216},$$

visto que nestas circunstâncias, verifica-se que o discriminante é não-positivo.

Nessas condições, obtemos a expressão

$$z = \frac{\mathcal{P}^3}{216} \left(\frac{\mathcal{P}^4 - 864\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}^4} + \frac{216\sqrt{-D}}{\mathcal{P}^3} \cdot i \right),$$

então escrevendo z na sua forma trigonométrica, vamos ter

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

onde o argumento é dado por $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathcal{P}^4 - 864\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}^4} \right)$.

Usando a 2ª Fórmula de De Moivre, temos

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{3} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{3} \right) \right],$$

daí fazendo a substituição de $\sqrt[3]{z}$ e de $\sqrt[3]{\bar{z}}$ em (12), segue-se que

$$r_k = \frac{\mathcal{P}}{6} + \frac{2\mathcal{P}}{6} \cos \left[\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{3} \right],$$

ou ainda,

$$r_k = \frac{1 + 2 \cos \left[\frac{\theta + 2(k-1)\pi}{3} \right]}{6} \mathcal{P} \quad (k = 1, 2 \text{ e } 3).$$

Sabendo que $0 < \theta \leq \pi$, obtém-se a desigualdade

$$0 < \frac{\theta}{3} \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \leq 1 \Rightarrow \frac{\mathcal{P}}{3} < r_1 \leq \frac{\mathcal{P}}{2},$$

bem como,

$$\frac{2\pi}{3} < \frac{\theta + 2\pi}{3} \leq \pi \Rightarrow -1 \leq \cos \left(\frac{\theta + 2\pi}{3} \right) < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\mathcal{P}}{6} \leq r_2 < 0$$

e ainda

$$\frac{4\pi}{3} < \frac{\theta + 4\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos \left(\frac{\theta + 4\pi}{3} \right) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < r_3 \leq \frac{\mathcal{P}}{3},$$

portanto r_1 e r_3 são raízes positivas e r_2 raiz negativa da equação (12).

Diante do exposto, podemos então afirmar que $a \in \mathbb{R}$ satisfaz a inequação (10) se, e somente se,

$$r_3 \leq a \leq r_1,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1 + 2 \cos \left(\frac{\theta + 4\pi}{3} \right)}{6} \mathcal{P} \leq a \leq \frac{1 + 2 \cos \left(\frac{\theta}{3} \right)}{6} \mathcal{P}.$$

Neste momento, combinamos a equivalência obtida acima com o Teorema 4.1 para deduzir a primeira implicação. De maneira recíproca, admitimos a existência de um triângulo conforme enunciado e usamos o Teorema 4.1 para garantir a desigualdade

$$\mathcal{A} \leq \frac{\sqrt{3}}{36} \mathcal{P}^2$$

e por fim, novamente combinamos a mesma equivalência com o Teorema 4.1 para concluir a segunda implicação e a demonstração do resultado. \square

Para encerrar, apresentamos um corolário que determina os triângulos isósceles que possuem perímetro e área, previamente conhecidos.

Corolário 4.4 Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{P} \in \mathbb{R}$ números positivos, tais que

$$\mathcal{A} < \frac{\sqrt{3}}{36} \mathcal{P}^2,$$

então defina $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathcal{P}^4 - 864\mathcal{A}^2}{\mathcal{P}^4} \right)$. Nestas condições, tem-se que os triângulos isósceles $\triangle ABC$ com área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} possuem lados com medidas, dadas por:

$$(a) \quad \overline{BC} = \frac{1 + 2 \cos(\frac{\theta+4\pi}{3})}{6} \mathcal{P} \quad e \quad \overline{AC} = \overline{AB} = \frac{5 - 2 \cos(\frac{\theta+4\pi}{3})}{12} \mathcal{P}.$$

$$(b) \quad \overline{BC} = \frac{1 + 2 \cos(\frac{\theta}{3})}{6} \mathcal{P} \quad e \quad \overline{AC} = \overline{AB} = \frac{5 - 2 \cos(\frac{\theta}{3})}{12} \mathcal{P}.$$

Demonstração: Considere um triângulo $\triangle ABC$ que possui área \mathcal{A} e perímetro \mathcal{P} , cujos lados satisfazem $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{BC} = a$. Nestas condições, segue do Teorema 4.1 que

$$\frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) + \sqrt{\Delta_a} \right] = \frac{1}{2} \left[(\mathcal{P} - a) - \sqrt{\Delta_a} \right],$$

portanto $\Delta_a = 0$ e assim

$$2\mathcal{P}a^3 - \mathcal{P}^2a^2 + 16\mathcal{A}^2 = 0.$$

Usando o Teorema 4.2, podemos concluir que

$$\overline{BC} = \frac{1 + 2 \cos(\frac{\theta+4\pi}{3})}{6} \mathcal{P} \quad e \quad \overline{AC} = \overline{AB} = \frac{5 - 2 \cos(\frac{\theta+4\pi}{3})}{12} \mathcal{P},$$

ou

$$\overline{BC} = \frac{1 + 2 \cos(\frac{\theta}{3})}{6} \mathcal{P} \quad e \quad \overline{AC} = \overline{AB} = \frac{5 - 2 \cos(\frac{\theta}{3})}{12} \mathcal{P},$$

que correspondem aos itens (a) e (b), respectivamente. \square

Para finalizar a seção, apresentamos quatro exemplos nos quais aplicamos os Teoremas 4.1 e 4.2. Começamos com dois exemplos referentes ao Teorema 4.1.

Exemplo 4.1 Determinar dois triângulos que possuem área $\mathcal{A} = 6$ e perímetro $\mathcal{P} = 12$, usando o Teorema 4.1.

Solução: Primeiro, precisamos encontrar soluções da equação

$$12(12 - 2a)a^2 \geq 16 \cdot 6^2 \quad \iff \quad (12 - 2a)a^2 \geq 48,$$

então note que $a = 3$ e $a = \frac{9}{2}$ são soluções. Decorre do Teorema 4.1 que os triângulos com medidas

$$\overline{BC} = 3, \quad \overline{AB} = 5 \quad \text{e} \quad \overline{AC} = 4$$

e

$$\overline{BC} = \frac{9}{2}, \quad \overline{AB} = \frac{15 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \frac{15 - \sqrt{17}}{4}$$

possuem área $\mathcal{A} = 6$ e perímetro $\mathcal{P} = 12$.

Exemplo 4.2 Obter dois triângulos que possuem área $\mathcal{A} = 3$ e perímetro $\mathcal{P} = 9$, usando o Teorema 4.1.

Solução: Inicialmente, resolvemos a seguinte equação

$$9(9 - 2a)a^2 \geq 16 \cdot 3^2 \quad \iff \quad (9 - 2a)a^2 \geq 16,$$

observe que $a = 4$ e $a = \frac{7}{2}$ são soluções. Do Teorema 4.1, acarreta que os triângulos com medidas

$$\overline{BC} = 4 \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \overline{AC} = \frac{5}{2}$$

e

$$\overline{BC} = \frac{7}{2}, \quad \overline{AB} = \frac{11 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \frac{11 - \sqrt{17}}{4}$$

têm área $\mathcal{A} = 3$ e perímetro $\mathcal{P} = 9$.

Finalmente, passamos aos dois últimos exemplos do trabalho, nos quais aplica-se o Teorema 4.2.

Exemplo 4.3 Determine dois triângulos que possuem área $\mathcal{A} = 6$ e perímetro $\mathcal{P} = 12$, usando o Teorema 4.2.

Solução: Primeiro, precisamos escolher um $a \in \mathbb{R}$, tal que

$$2 \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\theta + 4\pi}{3} \right) \right] \leq a \leq 2 \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \right],$$

onde $\theta = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$. Essa última desigualdade equivale a termos

$$2,69459269... \leq a \leq 5,06417777...,$$

daí podemos escolher $a = \frac{10}{3}$ ou $a = \frac{9}{2}$.

Decorre do Teorema 4.2 que os triângulos com medidas

$$\overline{BC} = \frac{10}{3}, \quad \overline{AB} = \frac{26 + \sqrt{19}}{6} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \frac{26 - \sqrt{19}}{6}$$

e

$$\overline{BC} = \frac{9}{2}, \quad \overline{AB} = \frac{15 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \frac{15 - \sqrt{17}}{4}$$

possuem área $\mathcal{A} = 6$ e perímetro $\mathcal{P} = 12$.

Exemplo 4.4 Obter dois triângulos que possuem área $\mathcal{A} = 10$ e perímetro $\mathcal{P} = 18$, usando o Teorema 4.2.

Solução: Primeiramente, vamos escolher um número real a de tal sorte que

$$3 \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\theta + 4\pi}{3} \right) \right] \leq a \leq 3 \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \right],$$

onde $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{43}{243} \right) = 1,39290483\dots$. Esta última desigualdade é equivalente a

$$2,64442545\dots \leq a \leq 8,36480712\dots,$$

logo, podemos tomar $a = 7$ ou $a = 8$. Portanto concluímos, pelo Teorema 4.2, que os triângulos com medidas

$$\overline{BC} = 7, \quad \overline{AB} = \frac{33 + \sqrt{241}}{6} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = \frac{33 - \sqrt{241}}{6}$$

e

$$\overline{BC} = 8, \quad \overline{AB} = 5 + \frac{2}{3}\sqrt{11} \quad \text{e} \quad \overline{AC} = 5 - \frac{2}{3}\sqrt{11}$$

têm área $\mathcal{A} = 10$ e perímetro $\mathcal{P} = 18$.

5 CONCLUSÃO

Conforme os resultados obtidos nesta dissertação, chegamos à conclusão que os Teoremas 4.1 e 4.2 fornecem condições, necessárias e suficientes, para que dois números reais positivos representem a área e o perímetro de um triângulo, bem como maneiras de determinar os triângulos cuja área e o perímetro coincidem com os referidos números. Essas informações podem ainda ser interpretadas como condições de existência de um triângulo e garantem que dois triângulos com mesmo perímetro e mesma área não necessariamente são congruentes.

Por fim, devemos ressaltar que os Teoremas 4.1 e 4.2, as Proposições 4.1 e 4.2, bem como os Corolários 4.3 e 4.4 não foram encontrados na literatura, motivando assim a continuação e aprofundamento dos estudos que foram realizados durante a elaboração do presente trabalho, podendo vir a resultar na elaboração de um artigo científico para ser submetido para publicação.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- BOYER, C. B. **História Da Matemática**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1994.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Geometria Plana - Volume 9**. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2000 (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar).
- GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- IEZZI, G. **Complexos, Polinômios, Equações - Volume 6**. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1999a (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar)
- IEZZI, G. **Trigonometria - Volume 3**. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 1999b (Coleção Fundamentos de Matemática Elementar).
- LIMA, E. L. Equação do Terceiro Grau. **Matemática Universitária**. v. 5, p. 10-23, 1987.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 3**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- LOPES, V. L. R.; RUGGIERO, M. A. G. **Cálculo Numérico: Aspectos Numéricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1997.
- MUNIZ Neto, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar - Volume 1**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013a.
- MUNIZ Neto, A. C. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013b (Coleção Profmat).
- PEREIRA, O. E. S.; SILVA FILHO, J. F. Revisitando as Equações do Terceiro Grau. **Revista Professor de Matemática Online - PMO**, v. 7, n.2, p.205-214, 2019. Disponível em: <https://pmo.sbm.org.br>. Acesso em: 16.Fev.2021.