



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO- BRASILEIRA – UNILAB
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – ICEN
CURSO DE LICENCIATURA EM CIÊNCIAS DA NATUREZA E
MATEMÁTICA – CneM**

GILMAR CANÓS FROSÉ

**GAMIFICAÇÃO COMO UMA FERRAMENTA PARA ENSINO E
APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA
EQUAÇÃO DE 2º GRAU**

ACARAPE-CE

2019

GILMAR CANÓS FROSÉ

GAMIFICAÇÃO COMO UMA FERRAMENTA PARA ENSINO E
APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA
EQUAÇÃO DE 2º GRAU.

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)
do Curso de Licenciatura em Ciências da
Natureza e Matemática com Habilitação em
Matemática, do Instituto de Ciências Exatas e
da Natureza (ICEN) da Universidade da
Integração Internacional da Lusofonia Afro-
Brasileira – UNILAB, sob orientação do
professor João Philipe Macedo Braga e Co-
orientador Maria Socorro Lucena Lima.

ACARAPE - CE
2019

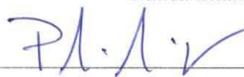
GILMAR CANÓS FROSÉ

GAMIFICAÇÃO COMO UMA FERRAMENTA PARA ENSINO E APRENDIZAGEM
DA MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA EQUAÇÃO DO 2º
GRAU

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do
Curso de Licenciatura em Ciências da
Natureza e Matemática com Habilitação em
Matemática, do Instituto de Ciências Exatas
e da Natureza (ICEN) da Universidade da
Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira – UNILAB.

Aprovado em: 05/04/2019

Banca Examinadora



Prof.: Dr. João Philipe Macedo Braga (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB



Prof. Dra. Maria Socorro Lucena [examinadora]

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB



Prof. Dr. Elcimar Simão Martins [examinador]

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

AGRADECIMENTO

Começo em primeiro lugar, acima de tudo agradecer a Deus o nosso pai que está no céu, por ter me trazido a este mundo, e depois por ter me resgatado do mundo da perdição no qual eu me encontrava e abriu os meus olhos e me deu forças e iluminação para eu chegar até aqui hoje, agradeço ainda por ter me protegido das doenças esse tempo todo e me livrar dos possíveis mal que podiam ter me acontecido. Agradeço os meus pais na pessoa de Canós Frosé e Rosa Indami, por terem cuidado de mim, da minha educação em geral e da minha sobrevivência, por terem me apoiado economicamente, moralmente, e por confiar em me deixar ficar longe deles por esse tempo todo, de um modo geral, agradeço a minha família toda, meus irmãos e minhas irmãs por terem me apoiado também quanto mais eu precisava.

Agradeço a minha igreja e todos os seu membro, por me incentivar a buscar mais o conhecimento e sabedoria, que é justamente o motivo pelo qual eu estou aqui, também, agradeço o casal assí na pessoa do Rodrigo Assí que foi o meu pastor e quem realmente estimulou em mim a ideia de vir estudar aqui no Brasil e foi também quem me ajudou com uma parte do dinheiro para fazer os meus documentos e pagar minha passagem para cá e a sua esposa Gabriela Assí que também cooperou bastante com ele na tomada dessa decisão. Agradeço os amigos Ociano Na Ritche, Nelson Cabi, Nhinna Nambera, Afonso Guimarães Enquemé e Felismina Djedjó, que são pessoas que trilharam o mesmo caminho comigo durante o processo da seleção e poderem assim compartilhar esse momento comigo.

Agradeço a Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), pela oportunidade que me deu, por me formar e me tornar mais capacitado e preparado para enfrentar a nossa sociedade, agradeço os professores que compartilharam as suas ideias e seus tempos para me orientar nesse processo, também, agradeço os amigos e colega que tem me ajudado bastante durante esse processo, agradeço Raimundo António dos Santos, Domingos Malu Quadé, Carla Pereira e Emilio dos Santos Junior, que são os amigos da mesma entrada que eu, são os amigos que eu vim compartilhado as ideias com eles ao longo do curso e graças apoio deles consegui superar muitas barreiras enfrentas.

Agradeço o Edson Xavier Batista da Silva, foi sempre o meu parceiro durante o curso, temos feitos vários atividades juntos, por isso, posso afirmar que aprende muita coisa com ele, e em certas disciplina consegui passar graça a ele, não vou esquecer também de agradecer o Nayuca Alberto Bampoque que também foi um parceiro com quem eu pude aprender com ele bastante, inclusive, compartilhei muita ideia sobre o meu trabalho de conclusão de curso o qual

eu pude aproveitar bastantes ideias para assim desenvolver o meu trabalho, ele também disponibilizou o seu tempo para me ajudar a procurar os materiais para confeccionar o jogo.

Agradeço o meu orientador na pessoa do João Filipe Macedo Braga quem eu admiro muito, agradeço por aceitar me orientar nessa jornada, por ajuda que ele me deu na escolha do tema do meu trabalho, por ter tirado o seu tempo para ler e corrigir o meu trabalho, por me aturar com as minhas diferenças e por coragem e motivação que me deu durante esse trabalho, os livros, artigos e ideias sugeridos, significaram muito para mim, espero não ter dado muito trabalho.

Agradeço o meu caro colega do curso e amigo que atualmente é o professor no colégio onde a parte pratica do nosso trabalho foi aplicado, e aproveito também aqui dizer que foi ele quem me deu a oportunidade de poder aplicar o meu trabalho e graças a sua ajuda o nosso trabalho foi feito com êxito, o Anderson Assis Ribeiro.

Agradeço a minha noiva Dote Biaguê, pela sua compreensão e colaboração, e por ter paciência comigo durante o processo de produção de TCC, sei que não tivemos muito tempo para ficarmos juntos, mas mesmo assim ela conseguiu me entender e me apoiar mesmo assim, agradeço meus amigos, Rugana Imbana e Medna Indami, que são pessoas que se tornaram minha família por muito tempo que moramos juntos, agradeço o Emanuel Alessam Tchentchelam que também é um amigo que tornou minha família e graças ao apoio de todos eles consegui chegar até aqui com muito orgulho.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a banca na pessoa de Dra. Maria Socorro Lucena Lima e de Dr. Elcimar Simão Martins por disponibilizar o seu tempo para dar as suas contribuições no meu trabalho.

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido com objetivo de propor as atividades que torne o processo de ensino e aprendizagem da matemática mais dinâmico e atraente, incentivando assim, o engajamento de todo nesse processo através do uso do jogo ou os seus elementos (gamificação). O trabalho apresenta as técnicas que possam ser seguidas para ter sucesso no uso do seu objeto que é a gamificação, onde também apresentou o passo a passo seguidos para criar o jogo chamado Baskhara, que foi o instrumento utilizado numa sala de aula para colher os resultados. Para chegar no resultado final, foram desenvolvidas quatro etapas durante trabalho, revisão bibliográfica, montagem do jogo, aplicação do jogo e coletas dos dados. Foram abordados os conteúdos como função quadrática e equação do 2º durante aplicação do jogo, onde teve muita interação, diversão e aprendizado. Os resultados levantados comprovam que o que as literaturas estudadas dizem são realmente verdades, pois foram observados tudo que está previsto nelas.

Palavras-chave: Gamificação. Ensino. Matemática. Engajamento. Equação de 2º.

ABSTRACT

This work was developed with the purpose of proposing the activities that make the teaching and learning process of mathematics more dynamic and attractive, which motivating the engagement of everyone in this process through the use of the game or its elements (gamification). The work presents the techniques that can be followed to succeed in the use of its object which is the gamification, where it also presented the step by step followed to create the game called Baskhara, which was the instrument used in a classroom to reap the results . In order to arrive at the final result, four stages were developed during work, bibliographical revision, assembly of the game, application of the game and data collection. The content was approached as a quadratic function and equation of the second degree during game application, where it had a lot of interaction, fun and learning. The results show that what the literatures studied say are really true, because everything that is predicted in them has been observed.

Key-words: Gamification, Teaching, Mathematics, Engagement, Equation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	CONTEXTO E PROBLEMA.....	11
1.2	OBJETIVOS	12
1.2.1	Objetivo Geral	12
1.2.2	Objetivos Específicos	12
1.3	JUSTIFICATIVA	12
2	REVISÃO TEÓRICO.....	15
2.1	GAMIFICAÇÃO	15
2.2	COMO FUNCIONA A GAMIFICAÇÃO.....	16
2.3	DESAFIOS PARA OS PROFESSORES NO USA DA GAMIFICAÇÃO....	19
2.4	GAMIFICAÇÃO E AS DINÂMICAS DO ENSINO DA MATEMÁTICA (EQUAÇÃO DE 2º GRAU)	20
3	FUNÇÃO QUADRÁTICA OU DE 2º GRAU.....	22
3.1	FUNÇÃO	22
3.2	FUNÇÃO QUADRÁTICA OU FUNÇÃO DE 2º GRAU	24
3.3	PARÁBOLA.....	24
3.4	FOCO E DIRETRIZ	25
3.5	CONCAVIDADE	26
3.6	EIXO DE SIMETRIA.....	26
3.7	VÉRTICE.....	27
3.8	PARÂMETROS (A, B, C)	27
3.9	FORMA CANÔNICA	27
3.10	SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA	30
4	MONTAGEM DO JOGO E OS MATERIAIS UTILIZADOS.	33
4.1	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	33
4.2	ETAPAS PERCORRIDAS	33

4.3	IMAGENS DAS PEÇAS.....	34
4.4	COMO SE DEU A MONTAGEM DO JOGO.	37
4.5	O JOGO	38
4.6	REGRA DO JOGO	40
5	APLICAÇÃO DO JOGO, SEUS RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	44
5.1	APLICAÇÃO.....	44
5.2	DADOS COLETADOS E RESULTADOS	45
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	52
	ANEXOS 1 – QUESTIONÁRIOS USADOS NAS CARTAS DO JOGO.....	55
	ANEXO 2 -PERGUNTAS PARA COLETAR DADOS.....	59
	ANEXO 3 - PLANOS DE AULA 1	60

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO E PROBLEMA

No nosso sistema educacional, em geral, enfrentamos grandes problemas que afetam até os nossos sistemas de ensino e aprendizagem. Estes problemas variam de níveis, classes, cursos, disciplinas e principalmente dos conteúdos ensinados.

Quanto aos conteúdos ensinados, verifica-se que, existem vários problemas e uma delas é a grande distância entre professores e alunos, ainda que estejam na mesma sala ou no mesmo espaço (o que para disciplinas práticas não é nada bom) parece que, um não consegue entender o outro. Isso é uma das coisas que vem sendo questionado por magistério. Afirmamos ainda que essa distância não limita só entre alunos e professores, também se verifica entre os conteúdos ensinados nas nossas grades curriculares e as realidades em que eles se aplicam, principalmente quando se trata dos conteúdos ensinados nas disciplinas práticas, tais como, matemática, física entre outros, o que provavelmente as torna mais difíceis.

Perceba-se que essa distância ainda está aumentando à medida que passa o tempo e a sua causa é devido a descontinuidade da formação dos professores, o que provoca a desconexão entre gerações.

Dessa forma podemos compreender que a forma de trabalho do professor imigrante difere e muito da forma como seus alunos percebem o conhecimento e sua produção. Muitos docentes reclamam que seus alunos leem pouco, que são desmotivados para as atividades em sala de aula e possuem dificuldade de trabalhar em grupo. No entanto observa-se o mesmo grupo de alunos interagindo com seus colegas no Orkut, MSN e desfrutando dos recursos da internet de forma criativa e imersiva. (SANTOS et all, 2011, p. 15842)

A ideia do autor nos mostra que existe uma descontinuidade entre o sistema tradicional que é o método pelo qual os professores aprendam a ensinar e sistemas de aprendizagem atuais, os quais os alunos utilizam para aprender. Tendo em conta as evoluções tecnológicas atual, os alunos se envolve muito nas diversões, principalmente as que envolvem os jogos, filmes e música, como diz na Revista Veja (2001) A grande facilidade dessa geração é de consumir grande números de tecnologia ao mesmo tempo. Em comum, essa juventude muda de um canal para outro na televisão. Vai da internet para o telefone, do telefone para o vídeo e retorna novamente à internet. Também troca de uma visão de mundo para outra, na vida. Essa

flexibilidade de mudanças repentina, também contribui bastante na distração de alunos numa sala de aula.

Mas com todas as distrações que se pode observar dos alunos em sala de aula, quando o assunto envolve jogo, seja dentro ou fora de sala de aula, a distração se desaparece, esse comportamento nos fez questionar seguintes perguntas:

Porque não estudar o que tem nos jogos que deixa os seus consumidores muito envolvidos?

Porque não aproveitamos essa coisa para estimular também os participantes do processo de ensino?

Até que ponto o jogo ou os seus elementos pode auxiliar no ensino de matemática?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo geral, propor as atividades que torne o processo de ensino e aprendizagem da matemática mais dinâmico e atraente, incentivando assim, o engajamento de todo nesse processo através do uso do jogo ou os seus elementos (gamificação).

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estimular o engajamento no processo de ensino e aprendizagem da matemática;
- Aproximar os conteúdos da realidade dos alunos;
- Criar conexões entre professor e alunos;

1.3 JUSTIFICATIVA

De acordo com as perguntas levantadas acima, a nossa preocupação é tentar respondê-las, propondo os mecanismos que resolvam esses problemas, como afirma Crepaldi (2014), “com uma nova maneira de pensar e aprender, essa geração desafia as instituições a saírem do modelo tradicional de ensino para uma nova forma de aprendizagem”. É preciso mexer no sistema para tentar unir esses dois elementos muito importantes no ensino e aprendizagem da

matemática. Mas, como vamos fazer isso se falta motivação nos discentes? O que professor possa fazer para despertar seus interesses em aprender conteúdo ensinado?

Sendo professor, talvez seja isso sua preocupação, talvez se sente sozinho na sala, quando fala muito e para que ninguém consegue ouvir ou entender o que fala (sabemos muito bem que isso é frequente nas aulas de matemática). Perceba-se que o problema está em fazer quase tudo sozinho, numa coisa que é para ser feita em conjunto.

Podemos perceber isso, analisando os procedimentos dum professor de matemática e dos alunos, no processo de ensino. Por exemplo, um professor, para dar uma aula, separa um tempo para rever o conteúdo sozinho, elabora o seu plano de aula sozinho e chega na sala, faz quase tudo sozinho (porque, na maioria de vezes os alunos não conseguem acompanhar uma aula por muito tempo). Alunos por sua vez, estudam em casa sozinhos, chegam na sala e não conseguem colocar as dúvidas, escutam professor, mas, não consegue entender nada (porque o conteúdo está muito longe das suas realidades) acabam viajando no tempo, o que os deixam fora de sala de aula e acabam indo para casa com duvidas procurando assim outras formas de tirar suas dúvidas sozinhos.

Uma das soluções para esse problema proposta no ensino é o uso dos jogos (games) em sala de aula como afirma Esquivel, (2017, p.27), “surge então, como estratégia didática e pedagógica, a utilização dos *games* em sala de aula para estimular o *engagement* e fazer com que os conteúdos a serem ministrados, bem como o ato de aprender, tornem-se interessantes e desejáveis”.

Mas com isso tem um porem, pois, criar os jogos para serem aplicados no ensino seria algo muito mais desgastante para professores, do que simplesmente fazer o seu plano de aula e ir aplicar na sala. Criar jogo não é algo tão fácil, porque, exige do seu criador grande quantidade de tempo, muita reflexão e criatividade, sem esquecer dos recursos, por isso, o presente trabalho incentiva além do jogo, professor simplesmente pode usar os elementos que compõe os jogos (elementos que estimulam o engajamento) para assim estimular o engajamento dos participantes do processo acima dito. Esse uso dos elementos dos jogos num contexto que não é jogo é chamado de gamificação como já havíamos dito. E a sua principal função é despertar a motivação no aprendizado. Segundo Esquivel (2017), a gamificação tem por função primordial, quando aplicada à educação, unir estes dois aspectos tão importantes que são os elementos motivacionais dos jogos e os importantes conteúdo do currículo escolar.

Então digamos que agora com essa solução, podemos fazer com que as aulas de matemática sejam mais interessantes, podemos usar elementos de jogos para despertar interesse dos alunos, fazendo eles serem o protagonista do próprio aprendizado. Estimulando eles através

duma aula gamificada a descobrir as possíveis aplicação dos conteúdos ensinados nas suas realidades.

2 REVISÃO TEÓRICO

2.1 GAMIFICAÇÃO

Gameificação é um termo muito recente que surgiu na década de 2000, como afirma Esquivel (2017) a maioria dos autores afirmam que foi criado por Nick Pelling, um britânico que desenvolve jogos, que usou o termo em 2002, imaginando a possível conexão dos jogos em aparelhos eletrônicos comerciais, para ficarem mais fáceis de utilizar. A partir de então o termo começou a chamar atenção de várias pessoas, mas, “foi primeiramente documentado numa publicação acadêmica em 2008, tendo-se popularizado somente a partir da segunda metade de 2010” (DETERDING et al., 2011).

Depois disso, o termo despertou interesse das pessoas em diferentes áreas de atuação, tendo em conta a grandes mudanças proporcionado por ele. Assim, como as outras áreas e as pessoas que fazem parte delas, a educação também precisa dessa mudança, então houve-se esse interesse na aplicação do termo para que ocorra a mesma com as outras áreas.

Para Costa e Machiori junto com Deterding e Bunchaball inc (2015), a gamificação é definida de seguinte maneira,

Entendida comumente como a utilização de elementos de *design* de jogos em contextos que não são de jogos (DETERDING, 2011), a gamificação pode ser definida de forma mais consistente como sendo uma estratégia apoiada na aplicação de elementos de jogos para atividades *non-game1* que é utilizada para influenciar e causar mudanças no comportamento de indivíduos e grupos (BUNCHBALL INC., 2010). (COSTA e MACHIORI, 2015, P.45)

Como acima citada, a gamificação trabalha na mudança comportamentais das pessoas, com o objetivo de deixa-las mais ativos e envolvidos num determinado assunto, utilizando assim elementos de jogos para que isso possa acontecer. Perceba que o termo se refere o uso dos elementos de jogo em contextos que não são próprios jogo e com o objetivo de estimular o engajamento dos participantes. Isso pode ser feito na educação também, para fazer uma ligação entre professor e os alunos numa sala de aulas incentivando assim o processo de aprendizagem, uma vez que sabemos que atualmente, um dos maiores problemas que o nosso sistema de ensino enfrenta é a falta de conexão entre docente e discentes.

Com essa técnica que é usada na gamificação esse problema pode ser solucionado, gamificando aula, relacionando os elementos de jogo com o conteúdo ensinado, assim como

Landers (2015) e Esquivel, (2017, p.14) a define “... o uso de elementos de *games*, [...], avaliação, conflito/desafio, controle, ambientação, ficção, interação humana, imersão, e regras/objetivos, para facilitar o aprendizado e consequências relacionadas. ” É bom deixar claro que o conteúdo a ser ensinada, pode ser gamificado duma forma digital ou não.

Ao longo do tempo a gamificação tem sido criticado por aqueles que estudam jogos, como afirma Nicholson (2012) na visão de Costa e Machiori, (2015, P.45),

Nicholson (2012) destacou que parte significativa das gamificações ainda se caracteriza como a aplicação simples de pontos, medalhas, e de *ranking* de líderes sem qualquer compromisso com a visão de longo prazo. O autor ainda alerta que a gamificação tem recebido críticas negativas significativas por aqueles que estudam jogos. Primeiramente, ao se colocar o termo "jogo" (*game*) como prefixo de gamificação há um reforço de que toda a atividade vai se tornar uma experiência envolvente quando, na realidade, a gamificação normalmente utiliza apenas a parte menos interessante de um jogo como, por exemplo, o sistema de pontuação. O termo "*pointsification*" tem sido sugerido como um rótulo para sistemas com estas características. (COSTA e MACHIORI, 2015, P.45)

Ainda hoje podemos ver essa confusão no nosso meio, onde a gamificação é confundido com os sistemas que utiliza jogos completo para o ensino, como por exemplo, ensino lúdicos (que é o mais conhecido), serious game entre outros. Mas é bom deixar claro que esses sistemas e a gamificação, embora são utilizados no processo de ensino, tem objetivos e metodologias diferentes.

Para entender essas diferenças entre eles, explicaremos melhor a gamificação, mas antes, é bom que fique na mente do leitor que os sistemas supracitados utilizam um jogo completo na sua metodologia para cumprir os seus objetivos, seja eles ensinar conteúdo ou estimular aprendizagem.

2.2 COMO FUNCIONA A GAMIFICAÇÃO

A gamificação diferente dos outros, trabalha com elementos de jogos e tem como objetivo estimular o engajamento “e quando é aplicada na educação tem por função primordial, unir dois aspectos tão importantes, que são os elementos motivacionais dos *games* e os importantes conteúdo do currículo escolar” (DETERDING et al., 2011). Agora, você possa estar com dificuldades para entender melhor o que significa elementos de jogos e contextos em que possam ser aplicados, será explicado com detalhes.

Duma forma geral, elementos de jogo se refere a todo parte que compõem um jogo, quer ela física ou abstrata, mas para essa temática, vamos destacar três categorias segundo Werbach e Hunter (2012) citado por Costa e Machiori, (2015, P.48),

Identificaram três tipos de elementos (dinâmicas, mecânicas e componentes) como categorias aplicáveis aos estudos e desenvolvimento da gamificação. Tais categorias são organizadas em ordem decrescente de abstração de modo que cada mecânica se liga a uma ou mais dinâmicas, e cada componente a uma ou mais mecânicas ou dinâmicas. (COSTA e MACHIORI, 2015, P.48).

São estas três categorias que vamos tratar deles, começando assim pelo mais abstrato e com ela os conceitos que a compõe.

Das três categorias, o mais abstrato é a dinâmicas, pois ela só pode ser sentida por jogadores, não é algo físico, mas, ela conecta os jogadores e as mecânicas de jogo e compõem os aspectos do quadro geral de uma gamificação. Devem ser gerenciadas, mas não são explicitadas obrigatoriamente no jogo, como afirmam Werbach e Hunter (2012) *apud* Costa e Machiori (2015, P.48).

São estas as principais dinâmicas que os autores destacaram:

Emoções: Os jogos despertam em suas participantes respostas emotivas, tais como: alegria, curiosidade, frustração, surpresa, espírito coletivo e/ou competitivo, etc.

Narrativa: Uma estória consistente que progride à medida em que os jogadores avançam no jogo. É um dos elementos indispensáveis em jogos de interpretação de personagem, mais conhecidos pela sigla RPG. Entretanto, é comum, também, vê-la presente em títulos de jogos eletrônicos, nos quais o jogador encarna um ou mais personagens, que tem suas histórias desenvolvidas ao longo do jogo.

Progressão: A progressão está relacionada ao desenvolvimento do jogador. Pode ser medida através de pontos atrelados ou não a um sistema de *leaderboards*¹⁰, ou por níveis alcançados, entre outras formas.

Relacionamentos: Interações sociais, que, por consequência, geram sentimentos como companheirismo, altruísmo, rivalidade, etc. entre os jogadores.

Restrições: Qualquer tipo de limitação ou trocas forçadas. Nesta dinâmica estão incluídas as regras do jogo.

A segunda categoria, que é um pouco menos abstrato, são as mecânicas, elas são os elementos mais específicos e através delas vem às ações também mais específicas. O que os jogadores devem ou não fazer dentro dum jogo são orientadas por elas. Ainda para reforçar,

Werbach e Hunter afirmam que: “Mecânicas são os processos básicos que dirigem o progresso da ação e geram nos jogadores o *engagement* [...] Cada mecânica é uma maneira de alcançar uma ou mais das dinâmicas descritas.” Da mesma forma como antes, vamos alista as principais mecânicas apontadas pelos autores:

Acaso: O elemento da aleatoriedade. Por exemplo, jogos que envolvem roletas ou dados possuem esta mecânica.

Aquisição de Recursos: A ação ou efeito de obter itens úteis e/ou colecionáveis.

Competição: Disputa onde um ou mais jogadores ou grupos são declarados vencedores, e o restante, vencidos.

Cooperação: Esta mecânica é utilizada quando os jogadores necessitam trabalhar em conjunto durante todo o jogo ou parte dele para alcançarem objetivos pretendidos por cada um.

Desafios: Atividades que envolvem emprego de esforço mental para sua solução, tais como enigmas ou charadas, por exemplo.

Estados de Vitória: Objetivos a serem alcançados que tornam um jogador ou grupo vencedor da disputa. Analogamente, tem-se os conceitos de Estado de Empate e Estado de Derrota.

Feedback: Informação sobre o desenvolvimento dos jogadores.

Recompensas: Benefícios concedidos por uma ação ou conjunto de ações executadas no jogo.

Transações: Trocas de recursos entre jogadores, que podem ocorrer com ou sem a interferência de intermediários.

Turnos: Participação sequenciada entre os jogadores. Jogos como xadrez, damas, Banco Imobiliário, War, e outros jogos de tabuleiro são baseados em turnos. Alguns jogos eletrônicos e muitos jogos de baralho também o são.

Na terceira e a última posição, vem os componentes, que são as formas mais concreta do jogo do que as duas primeiras. Cada componente está relacionado a um ou mais elementos da mecânicas ou dinâmicas. Os principais conceitos destacados pelos autores são seguintes:

Avatares: Representação visual do(s) personagem(ns) controlados pelo jogador.

Badges: As badges são representações visíveis das conquistas, sendo uma das recompensas por havê-las alcançado. Como medalhas, seu propósito, além de premiar o jogador, é ficar à mostra, para que todos os demais participantes possam saber quais conquistas o jogador alcançou, indicando o nível de sucesso deste no jogo. Geralmente, a cada conquista ou conjunto destas, corresponde uma *badge* específica. Outro propósito é manter o interesse do

jogador, estimulando-o a alcançar conquistas, ainda que estas não se relacionem, necessariamente, com o objetivo maior a ser alcançado.

Bens Virtuais: Objetos que possuem valor na unidade monetária do jogo ou em unidades monetárias reais.

Boss Fights: Desafios com nível de dificuldade especialmente elevado, ao fim de cada nível. Geralmente envolve uma disputa contra um personagem forte (o Boss).

Coleções: Um inventário que contém os itens e *badges* conseguidos pelo jogador.

Combate: Uma batalha específica, geralmente rápida. Pode envolver dois ou mais jogadores ou um jogador e um NPC¹³.

Conquistas: Objetivos menores ou maiores alcançados nos jogos. Geralmente as conquistas estão relacionadas com as mecânicas de Recompensas ou Aquisição de Recursos.

Desbloqueio de Conteúdo: Geralmente uma recompensa dada aos jogadores que atingem determinados objetivos.

Doações: Oportunidades de compartilhar ou doar itens ou outros recursos para outros jogadores.

Equipes: Grupos definidos de jogadores que trabalham juntos em prol de um ou mais objetivos comuns.

Grafos Sociais: Representações internas das redes e interações sociais dos jogadores.

Leaderboards: Como definido anteriormente, são, em geral, tabelas de pontuação. Seu propósito é servir de referência para quantificar o progresso de um jogador.

Níveis: Estágios previamente definidos os quais os jogadores alcançam ao atingirem certo progresso.

Pontos: Representações numéricas, e portanto, quantificáveis, do progresso dos jogadores.

Quests: São desafios que podem ou não estar relacionados com o objetivo maior do jogo. Uma vez cumpridos, geram recompensas aos jogadores.

2.3 DESAFIOS PARA OS PROFESSORES NO USA DA GAMIFICAÇÃO

Com uso da gamificação nas aulas de matemática, tudo pode ficar mais fácil e mais bonito, porem como professor, tem que ter muito cuidada quando for gamificar uma aula, porque se for bem-feita pode ter resultados maravilhosos, mas, se for malfeita pode obter resultados indesejáveis, até pior que uma aula tradicional, assim como diz o Esquivel,

Se as atividades forem demasiadamente repetitivas, os alunos as acharão maçantes. Desta forma, perde-se o desafio como fator motivacional, perde-se a atenção dos alunos, e por fim, a experiência de gamificação não trará melhor resultado do que uma aula tradicional.

A solução intuitiva para isso parece ser elevar o nível de dificuldade das atividades. Entretanto, há que se tomar um cuidado para que não se chegue ao extremo oposto, ou seja, tornar as atividades tão difíceis que os alunos não consigam avançar. Isso também é desmotivador. (ESQUIVEL, 2017, p.29)

Para evitar que isso aconteça, o professor deve primeiro avaliar nível do conhecimento dos seus alunos, o que os torna muito próximo, solucionando assim um dos problemas acima citado no ensino e aprendizagem que é aquela distância que existe entre professores e alunos. Professor estará focado em descobrir as dificuldades que os alunos têm sobre o conteúdo para assim poder propor uma aula gamificada aos seus níveis, para melhores resultados. Os alunos por sua vez, terão oportunidade de participar ativamente nos seus aprendizados, pois aplicando bem os elementos de jogos numa aula e dar aluno liberdade de atuar, é dar ele liberdade de se autodescobrir, de procurar melhor trajetória para desenvolver seu aprendizado.

Dessa forma, professor ficará simplesmente ajudando no uso das ferramentas utilizadas no processo da gamificação e alunos por si ou entre eles, estarão interessados em conseguir desvendar os mistérios envolvido na aula, fazendo questionários para professor ou para colegas e se sentirão mais à-vontade, o que vai levar eles numa forma indireta a aprender o conteúdo.

2.4 GAMIFICAÇÃO E AS DINÂMICAS DO ENSINO DA MATEMÁTICA (EQUAÇÃO DE 2º GRAU)

No ensino da matemática, geralmente os discentes reclamam muito sobre o nível das dificuldades enfrentadas durante o processo. Talvez seja por critérios estabelecidos no sistema tradicional como afirma Crepaldi,

Grande parte das instituições continuam exigindo trabalhos feitos em papel, passando matéria na lousa e insistindo no ensino de cálculos manuais e fórmulas complicadas que poucos estudantes entendem. Ao entrar em contato com esse método de ensino, é natural que a nova geração se sinta desmotivada. (CREPALDI, 2014, p.12)

Seria muito importante dinamizar um pouco mais as aulas de matemática para mostrar para os discentes a sua real beleza e importância no nosso cotidiano. Para isso, existem várias coisas que possam ser feitas. Então, nesse trabalho, será trabalhado um conteúdo específica da

matemática, utilizando as técnicas da gamificação para comparar os resultados com métodos de ensino tradicional.

Conteúdo escolhido é a equação de 2º grau, onde serão alistados no capítulo 2, todos os possíveis elementos que compõe o assunto e no capítulo 3 será apresentada uma esse mesmo conteúdo na sua forma gamificada.

3 FUNÇÃO QUADRÁTICA OU DE 2º GRAU

Neste capítulo, será falada numa forma sintética do que seria uma função em geral, depois será falada especificamente da função quadrática que vai ser a nossa base do estudo no presente capítulo, pois vamos falar da sua representação gráfica, tipo de curva que ela representa no plano e todos os elementos notáveis dessa curva, depois algebricamente vamos analisar as expressões que representa a cada parte notável dessa curva.

Também, vamos trazer algumas outras ferramentas matemática que podem ajudar na construção do gráfico dessa função nas quais vamos fazer analogia no sentido de poder destacar ou enfatizar a nossa equação de segundo grau. Iniciaremos o capítulo falando da função.

3.1 FUNÇÃO

Para falar da equação de 2º grau, primeiramente é necessário saber o que é uma equação, e para saber o que é uma equação não tem como não saber o que é uma função. Por isso começaremos este assunto falando da função. A função ou aplicação é definida de diferentes formas por diferentes autores, mas, todas elas têm o mesmo significado.

Para Iezzi e Murakami (2011), a função é definida de seguinte maneira, que é a definição que vamos adotar neste trabalho:

“Dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de *aplicação de A em B* ou *função definida em A com imagens em B* se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. (IEZZI e MURAKAMI, 2011, P.81).

$$f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \leftrightarrow (\forall x \in A, \exists |y \in B| (x, y) \in f)$$

Observe que para ter uma função, é preciso primeiro ter dois conjuntos não vazios nos quais vai estabelecer uma relação entre eles, na qual os elementos do primeiro conjunto implicarão nos elementos de segundo conjunto e tudo numa ordem, ou seja, a função é uma relação que vai precisar de elementos do primeiro conjunto para obter os elementos de segundo conjunto o que nos mostra uma dependência, e outra coisa, os elementos de primeiro e de segundo conjunto sempre tem que formar **par ordenada** entre si.

Perceba que afirmamos que função sempre organiza os elementos de primeiro conjunto com de segundo conjunto em par ordenado, agora o que seria esse par ordenado?

Bem, chamamos de par, todo conjunto formado por dois elementos, nesse caso a ordem dos elementos não importa, ou seja, num conjunto, pode-se trocar as ordens dos elementos, mas, o conjunto será o mesmo, não vai alterar. Mas na matemática, existem casos em que isso não se aplica, ou seja, existem conjuntos que conservam as ordens dos seus elementos, o que quer dizer que se alterar as ordens dos elementos, também altera o conjunto, nesse caso, a alteração das ordens resultará num novo conjunto. Esse tipo de conjunto é chamado de par ordenado. Isso vai ficar mais claro com ajuda de Iezzi e Murakami, que a define como, “Admitiremos a noção de par ordenado como conceito primitivo. Para cada elemento a e cada elemento b , admitiremos a existência de um terceiro elemento (a, b) , que denominamos par ordenado, de modo que se tenha” (IEZZI e MURAKAMI, 2011, P.65)

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Essa definição nos mostra que um par ordenado conserva ordem dos seus elementos, o que significa que os elementos que vão ficar na posição de a formarão um único conjunto que é o primeiro conjunto representado por A e os elementos que vão ficar na posição de b também formarão um único conjunto que é o segundo conjunto representado por B . Outra coisa muito importante também, é que esse par ordenado formado por a e b são as **coordenadas dum ponto** no plano cartesiano, onde a representa as coordenadas no eixo x e é chamado de **abscissa** e b representa as coordenadas no eixo y e é chamada de **ordenada**.

Essas coordenadas, também, podem ser chamadas numa função de domínio da função e a imagem da função. O conjunto representado por A e chamado de domínio e o conjunto representado por B é chamado de imagem.

Como já afirmamos, a função nos mostra uma relação de dependência, onde uma coisa que é desconhecido depende da outra que é conhecido para ser conhecido também. Podemos verificar vários exemplos disso no nosso cotidiano, um deles é o produto e o seu preço. A quantidade de produto para ser comprado depende do seu preço, logo, a variação dos preços é que vai definir se o produto valerá muito dinheiro ou não.

Existem diferentes tipos de expressões na matemática que podem ser chamadas de função, ou seja, existem vários tipos de funções, mas o nosso objetivo aqui é destacar uma dessas expressões que são considerados funções que no caso é a **função quadrática**.

3.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA OU FUNÇÃO DE 2º GRAU

Na definição de função, vimos que é uma relação estabelecido entre dois conjuntos, que são conjunto **A** (Domínio) e conjunto **B** (Imagem), e que essa relação transforma os elementos desses conjuntos em par ordenado. O que não vimos é como se dá essa relação e quais as suas características. Bem, assim como existem diversas expressões, existem também diversas funções matemáticas, nos quais as suas características e nomes vão variando de acordo com as relações estabelecidos entre esses grupos. Mas como já dissemos, aqui vamos falar exclusivamente da função de segundo grau. Vamos falar do que seria a função de segundo grau? Quais as suas características?

De acordo com Iezzi e Murakami, a função de segundo grau é definido de seguinte maneira, “Uma aplicação f de \mathbb{R} em \mathbb{R} recebe o nome de função quadrática ou de 2º grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que a, b, c são números reais dados e $a \neq 0$ ”, (IEZZI e MURAKAMI, 2011, P.138).

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$a \neq 0$$

Com essa definição, podemos perceber que a função de segundo grau não passa de uma relação também, que associa as coordenadas x e y do plano cartesiano através desse elemento, $ax^2 + bx + c$, onde todos eles pertencem conjunto de números reais. Agora vamos entender o que é essa expressão, e porque é chamado de função de segundo grau.

Primeiramente o significado geométrico desse elemento, é que ele representa uma parábola, ou seja, o gráfico dele representado geometricamente num plano tem a forma e os elementos duma parábola. Para facilitar a interpretação algébrica desse elemento posteriormente, vamos agora definir o que é uma parábola e os seus componentes.

3.3 PARÁBOLA

O nosso plano cartesiano conte nele vários pontos, que ao serem hierarquizado de formas distintas, podemos gerar variais representações geométricas de diferentes figuras em forma de gráfico, a parábola, também é gerado dessa forma no plano, combinando infinitos pontos que se encontra em uma distância igual de um ponto fixe e de uma reta fixa que pertence

esse plano. “Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo que é chamado de foco e de uma reta fixa desse plano que é chamado de diretriz” (SOARES, SANTINHO, p.8), mas esse ponto fixo dito na definição, não pertence essa reta também dita na definição. Ainda podemos afirmar que “A parábola é uma curva simétrica, possuindo um eixo de simetria que passa pelo seu vértice. Esse eixo divide a parábola em duas partes iguais” (MACHADO, p.5). Também podemos observar ainda na figura que ela divide o plano em dois regiões distintas, região interna e externa. A região interna limitada por ela, chamamos de concavidade. Esta concavidade pode estar voltada para cima ou para baixo, e também pode ficar mais achatado ou não, dependendo do sinal e valor absoluto do coeficiente a da função respectivamente.

Nas ideias pegadas acima para definir a parábola, pode-se perceber que destacaram algumas características notáveis de uma parábola, como, **Foco, Diretriz, Eixo De Simetria, Vértice e Concavidade** e os **parâmetros**. Estas características serão trabalhadas aqui, numa perspectiva ou abordagem algébrica, mostrando assim suas equações representativas ou correspondentes.

A expressão algébrica que define a parábola é representada por,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Mas o que significa cada elemento que se verifica nessa expressão? O que é que cada um deles representa numa parábola?

3.4 FOCO E DIRETRIZ

O gráfico de uma parábola pode ser criado de diferentes formatos (tamanho ou posição) numa superfície plana, mas, independentemente desses formatos, ele conserva todas as propriedades ou elementos que o caracteriza. Uns dos esses elementos característicos são foco e diretriz.

Na sua definição, vimos que todos os pontos que a compõem, mantem a mesma distância de uma reta e um ponto fora dessa reta no plano, essa reta é chamada de diretriz e esse ponto é chamado de foco. A posição do foco em relação a diretriz também pode nos dar informações sobre a concavidade de uma parábola, se é para baixo ou se é para cima de uma forma muito simples. Se a posição do foco está a cima da diretriz a concavidade também está voltada para cima e se ela está a baixo dela a concavidade também está para baixo.

3.5 CONCAVIDADE

Como já havíamos afirmado na definição, o gráfico da parábola no plano cartesiano, representa uma figura geométrica que divide o plano em duas partes, uma de fora e outra de dentro. O lado que envolve a parte do dentro da figura tem formato de uma figura côncava, ou seja, a figura cujo superfície é cavada e esse lado que é chamado de concavidade da parábola. Algebricamente quem determina o sentido dessa concavidade no plano cartesiano é o coeficiente a da equação de 2º grau. A concavidade da parábola pode estar voltada para “cima” ou para “baixo” obedecendo os seguintes critérios:

- **Se $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima.**
- **Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo.**

Isso significa que o sentido para baixo e para cima da concavidade da parábola depende do sinal de a na equação de segundo grau.

3.6 EIXO DE SIMETRIA

Se observamos bem o gráfico de uma parábola, também, podemos perceber que os pontos que a formam se constituem simetria entre si ou seja existe uma linha reta que separa a parábola em duas partes que tem a mesma forma, e que essas partes ao serem sobrepostas se encaixarão perfeitamente, essa linha reta intersecta os eixos de coordenadas x perpendicularmente formando assim um ângulo de 90° com eles. Essa reta é o eixo da simetria e ela intersecta a parábola em um ponto chamado vértice como afirmam Iezzi e Murakami (2011, P.153) “O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo horizontal e que passa pelo vértice da parábola”. E como sabemos que uma reta é formada por um conjunto de infinitos pontos colineares num plano, então esses pontos com certeza obedecem a mesma equação característica. Então com o eixo da simetria também não é diferente, todos os pontos nele obedecem a uma equação característica, desta forma, consoante o mesmo autor “Os pontos de uma reta vertical que passa pelo vértice de uma parábola obedecem à equação $-b/2a$ pois todos os pontos têm abscissa $-b/2a$ ”. E a prova desse fato será demonstrado posteriormente.

3.7 VÉRTICE

“Seja um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz) de um plano, o ponto F não Pertence a reta d , o conjunto dos pontos desse plano equidistantes de d e F , denomina-se *Parábola*” (PAIVA, 1999 *apud* MACHADO p.6). Quando pegamos a menor distância entre ponto F e d , dividimos no meio, encontraremos um ponto desse plano que pertence a parábola e esse ponto é chamado de vértice da parábola. Vértice é o ponto mais alto ou mais baixo da parábola, dependendo do sentido da concavidade da parábola.

Analogamente, vértice é o ponto da parábola que tem o valor máxima ou mínima da coordenada de y quando a função é aplicada no ponto médio, que é ponto de máximo ou de mínimo da parábola na coordenada x .

3.8 PARÂMETROS (A, B, C)

Como sabemos que um plano cartesiano é representado por intersecção perpendicular de duas retas que chamamos de coordenada x (abscissa) e coordenada y (ordenada), os parâmetros (a, b e c), nos dão informações muito importante sobre gráfico da parábola. Começando por a como já afirmamos acima, ele define o sentido da concavidade da parábola, se é para baixo ou para cima, dependendo do seu sinal, também define abertura da concavidade através do seu valor absoluto. Quanto a essa abertura, quanto maior é o valor absoluto do a mais fechada será ela, e quanto menor é o seu valor, maior a abertura será.

O parâmetro b nos da informação de intersecção do braço ou ramo do gráfico da parábola com o eixo da ordenada, se está crescendo, decrescendo ou nenhum dos dois. Através do seu sinal podemos saber sobre essas informações. Se o sinal for negativo, então, o gráfico intercepta o eixo com o seu braço decrescente, se for positivo, a intersecção é com braço crescente e quando for igual a zero a intersecção não é crescente e nem decrescente.

Quanto ao parâmetro c , a informação que ele nos dá é sobre o ponto da intersecção entre gráfico e o eixo.

3.9 FORMA CANÔNICA

Até agora, se percebe que só falamos do gráfico da função do segundo grau (a parábola) e as suas características, mas, em nenhum momento focamos na forma de como gerar esse

gráfico. Então vamos agora falar sobre isso, e vamos tentar entender, qual seria a forma mais precisa e conveniente de gerar essa figura.

Prestando bem atenção no que foram ditos acima sobre essa figura, já dá para construí-la, gerar o seu gráfico. Por exemplo com ajuda duma régua, compasso e lápis, e de acordo com as definições acima, já dá para desenhar esse gráfico, mas, existem ainda outras formas de fazer isso e uma delas é feita utilizando as expressões matemáticas.

Na matemática, usa-se tabela de valores para construir o gráfico, mas, não é melhor ferramenta para tal, pois pode existir algumas imprecisões no processo, assim como podemos ver na abordagem do Iezzi e Murakami,

A construção do gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com o auxílio de uma tabela de valores x e y , como foi feito no item anterior, torna-se às vezes um trabalho impreciso, pois na tabela atribuímos a x alguns valores inteiros e pode acontecer que em determinado função quadrática os valores de abscissa (valores de x), em que a parábola intercepta o eixo dos x ou a abscissa do ponto da parábola de maior ou menor ordenada, não são inteiros, (IEZZI e MURAKAMI, p.140).

Mas, tabela não é única ferramenta, existe uma outra forma mais precisa, e ela é chamada de *forma canônica*, que vai ser a nossa ferramenta do estudo.

A forma canônica nada mais é do que a combinação matemática das expressões que representa os elementos duma parábola destacados a cima, que se resume numa função de segundo grau. Aproveitaremos as demonstrações do Iezzi e Murakami para argumentar esse fato.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$b^2 - 4ac$, é representado por símbolo Δ que é chamado de delta e que é a mesma coisa com o discriminante do trinômio do segundo grau, a forma canônica fica como:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Perceba que durante as descrições sobre o gráfico, e como fazer o gráfico acima, nos deu quase todas as informações, mas parece que não falou nada sobre a intercepção do gráfico com o eixo x (abscissa). Essa informação é muito importante para a construção do gráfico e vamos falar de como achar esses pontos se no caso eles existam ou não, caso existir, se são dois ou um só.

As intercepções do gráfico com o eixo x é o que nós chamamos de zeros ou raízes da função quadrática, que são justamente as soluções ou valores expressados na nossa equação de segundo grau, ou seja, equação de segundo grau nada mais é do que as raízes da nossa função quadrática. Vamos usar a forma canônica para comprovar isso:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \\ &= 0 \leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \\ &= \frac{\Delta}{4a^2} \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} \\ &= \mp \sqrt{\Delta} \leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Portanto a solução ou as raízes da nossa equação do segundo grau se expressa como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como estamos a trabalhar com os números reais, então, as raízes da equação também têm que ser reais, isso nos leva a considerar três casos sobre o nosso Δ .

1º) $\Delta > 0$

Nesse caso, o nosso gráfico intersecta o eixo x em dois pontos, o que nos dá duas raízes distintas como soluções da nossa equação,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$2^\circ) \Delta = 0$$

Nesse caso, o nosso gráfico intersecta o eixo x tangencialmente com o seu vértice, o que significa que as duas raízes são iguais, e a nossa solução fica escrito como,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$3^\circ) \Delta < 0$$

Nesse caso, o gráfico não intersecta o eixo x em nenhum ponto, logo, não existe raiz como solução da nossa equação.

3.10 SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Para determinar sinal duma função quadrática, as informações que devemos saber é sobre os três casos que aparecem nos cálculos do discriminante ou delta. Como já salientamos acima, esses três casos nos dizem quando a função tem dois raízes distintas, dois raízes iguais e quando não existe nenhuma raiz.

Essas informações nos ajudam muito na determinação do sinal da função e vamos tentar mostrar como prosseguir em cada uma desses casos. Mas para facilitar a nossa explicação, vamos utilizar as informações do Iezze e Murakami, (pp.160-163).

1- Caso: $\Delta < 0$

Nesse primeiro caso, temos que o discriminante é menor que zero, o que significa que não existe interseção da parábola com o eixo x, quando isso acontece, implica que a nossa função só pode ter um sinal. Ela pode ser negativa ou positiva e quem vai definir o seu sinal é o nosso coeficiente angular, se ele for negativo, o sinal da função será negativo e se ele for positivo a função será positivo também. Para ficar mais clara, vamos usar forma canônica para explicar.

Pegando a função quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

Deixando ela na forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2} \right) \right] \rightarrow a \cdot f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Analisando os termos da função acima podemos perceber que o termo a^2 é positivo, pois está sendo elevado ao quadrado, o termo $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ também nunca vai ser negativo, pois elevado ao quadrado e com o termo $\frac{-\Delta}{4a^2}$ vai acontecer a mesma coisa, porque para $-\Delta$ só vamos ter valores positivos o que deixa esse termo também positivo.

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta < 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R}$, ou melhor:

$$a > 0 \rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemplos

1) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ apresenta $\Delta = (-2)^2 - 4.1.2 = -4 < 0$ e, como $a = 1 > 0$, concluímos que:

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

2) $f(x) = -x^2 + x - 1$ apresenta $\Delta = 1^2 - 4.(-1).(-1) = -3 < 0$ e, como $a = -1 < 0$, concluímos que:

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

2- Caso: $\Delta = 0$

Quando discriminante é igual a zero a nossa parábola intercepta o eixo x em um só ponto, o que nos diz que a nossa função só pode ter um único sinal também, mas com exceção do ponto da intercessão com eixo x , que vai ser igual a zero. Ou seja, o seu valor começa a partir do zero, e quem vai definir se o sinal vai ser positiva ou negativa vai ser o coeficiente angular da função também.

Usando a mesma função acima na sua forma canônica, temos:

$$a.f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{0}{4a^2} \right) \right] = a^2 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

Fazendo análise dos termos aqui, vemos que os dois primeiros termos vão continuar sendo positivo e o último termo vai zerar, o que nos diz que o sinal da função continua sendo sinal de coeficiente angular.

Isso significa que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $\Delta = 0$, tem o sinal de a para todo $x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$, sendo $x_1 = -\frac{b}{2a}$ zero duplo de $f(x)$, ou melhor:

$$a > 0 \rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \rightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemplo

1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ apresenta $\Delta = (-2)^2 - 4.1.1 = 0$; então $f(x)$ tem um zero duplo $x_1 = -\frac{b}{2a} = 1$ e, como $a = 1 > 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 \text{ se } x = 1 \end{cases}$$

2) $f(x) = -2x^2 + 8x - 8$ apresenta $\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = 0$, então $f(x)$ tem um zero duplo para $x_1 = -\frac{b}{2a} = 2$ e, como $a = -2 < 0$, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(x) = 0 \text{ se } x = 2 \end{cases}$$

3- Caso: $\Delta > 0$

Nesse caso o valor do delta é positivo, o que nos diz que a parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos, isso significa que a nossa função vai ter valores com sinais distintas e nesse caso que vai definir o sinal de a que vai ser o sinal da função também são os fatores da raiz da função, isso ficara mais claro com exemplos abaixo.

Ainda usando a mesma função na sua forma canônica, temos:

$$a \cdot f(x) = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = a^2 \left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right]$$

Lembrando que a formula que dá as raízes de uma equação do segundo grau é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{isto e} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Fica evidente que a forma canônica se transforma em:

$$af(x) = a^2 \left[\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right] = a^2 (x - x_1)(x - x_2).$$

O sinal de $a \cdot f(x)$ depende dos sinais dos fatores $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$.

Percebam que a forma usada até agora para falar do sinal da função foi só utilizar a forma canônica, mas ela não é a única forma de analisar sinal duma função. Vamos agora falar duma outra forma também que podemos usar para fazer a mesma coisa. Quando falamos do zero da função, analisamos três casos quanto o comportamento da parábola e o eixo de abcissa.

Vimos que existe caso onde a parábola se intercepta o eixo da abcissa em dois pontos, caso onde eles se interceptam em um ponto e caso onde eles não se interceptam em nenhum ponto. Outra informação importante que vamos nos ajudar muito, e sobre a concavidade. Quando falamos da concavidade, vimos que, o que define se a concavidade está voltada para baixo ou para cima e o sinal da coeficiente do x^2 , que é representado por letra a e chamado de coeficiente angular.

Reunir essas informações sobre a função, nos ajuda a construir o seu gráfico, e através delas analisar o seu sinal.

4 MONTAGEM DO JOGO E OS MATERIAIS UTILIZADOS.

Antes de trazer as imagens que serão apresentadas neste capítulo, vamos primeiramente apresentar as etapas percorridas durante o nosso trabalho, como está organizado, qual o motivo da escolha desse jogo e por fim, apresentaremos as peças que foram utilizados durante a montagem do jogo, também vamos explicar passo a passo de como ele foi montado.

4.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é dividido em quatro capítulos, sendo que no primeiro temos a introdução do trabalho, as considerações a respeito do problema estudado, objetivos gerais e específicos e a justificativa do nosso tema.

No segundo capítulo se encontra referencial teórico que são os assuntos abordados para desenvolvimento dos estudos do trabalho. Neste capítulo abordamos assuntos que descreve o nosso objeto de estudo, como ele funciona, suas possíveis contribuições no ensino da matemática e por fim como os professores devem usá-lo para ensinar os conteúdos.

Terceiro capítulo, trata-se do conteúdo escolhido para testar o nosso objeto de estudo, nesse caso o conteúdo é sobre função quadrática, que vem sendo abordado com uma visão da curva que ela descreve no plano e os seus componentes.

Quarto capítulo apresenta a organização do trabalho, etapas percorridas durante trabalho e as peças do jogo e sua montagem.

Quinto capítulo apresenta a aplicação do jogo, os resultados obtidos e as suas discussões. Por fim, no sexto e último capítulo, tem-se a conclusão e recomendações para projetos futuros.

4.2 ETAPAS PERCORRIDAS

O procedimento do nosso trabalho aconteceu em quatro etapas diferentes:

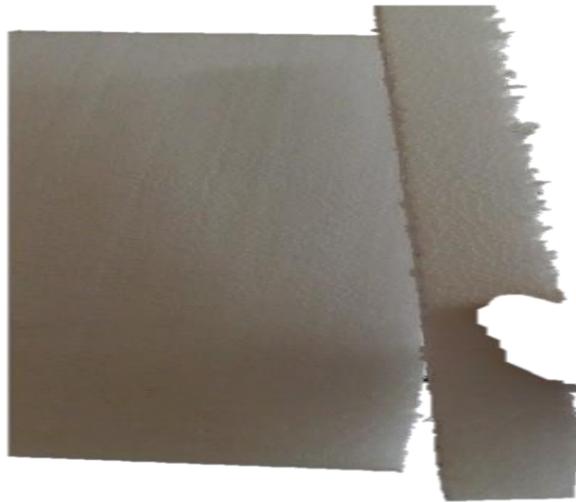
Primeira etapa foi a da revisão bibliográfica, onde ocorreu as leituras dos textos para fundamentação teórica e a inspiração da ideia de criar o jogo com as suas regras, depois vem a segunda etapa, na qual aconteceu as criações das peças e montagem do jogo. Também nessa mesma etapa que surgiu a ideia de o jogo ser criado com matérias bem simples e de baixa custo.

Na terceira etapa foi a aplicação do jogo para comprovar se no real o material criado terá efeito e por último ocorreu a coleta dos dados, que foi feito por meio dos questionários elaborados para serem respondidos depois de aplicação.

4.3 IMAGENS DAS PEÇAS.

As imagens que serão apresentadas aqui são imagens fotografadas no celular do pesquisador ao longo da etapa da criação das peças e montagem do jogo. Começaremos com as imagens do início até o produto final.

Figura 1.1 - Isopor



Fonte: foto tirado pelo pesquisador.

A figura 1.1 mostra a imagem do isopor que foi usado para montar a maquete do jogo, e podemos ver na imagem que ele ainda está na sua fase inicial, não tem muitas modificações nele. A parte que está acima da mesa, vai ser usada como base da nossa maquete e o pedaço acima dele servirá do usa para as casas que vão compor o nosso jogo.

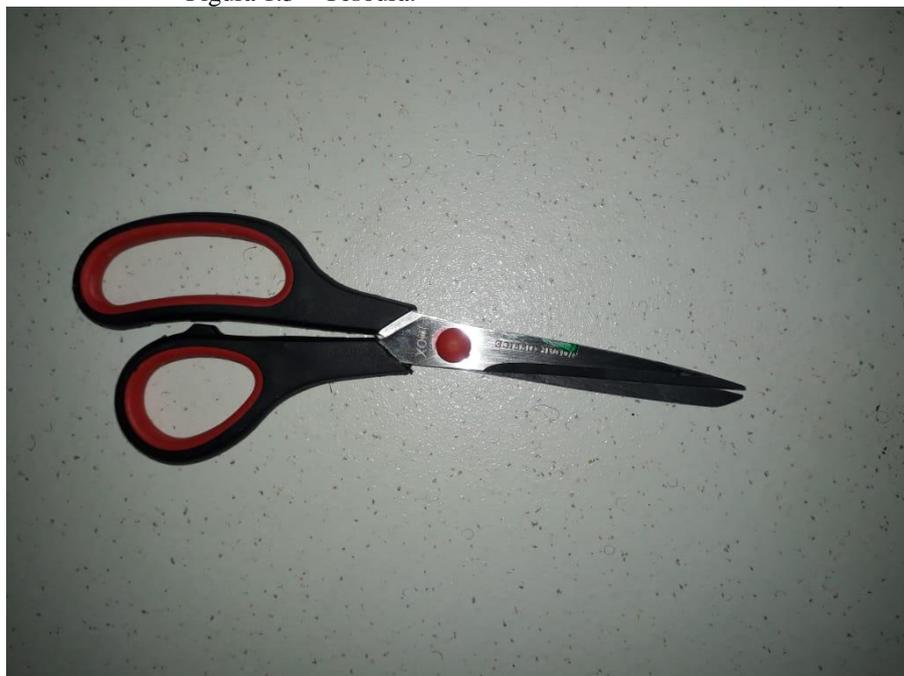
Figura 1.2 – Marcadores e compasso



Fonte: foto tirado pelo pesquisador.

Figura 1.2 mostra as imagens dos marcadores e compasso que foram usados para traçar a curva que representa o caminho do nosso jogo.

Figura 1.3 – Tesoura.



Fonte: foto tirado pelo pesquisador.

Na figura 1.3, temos imagem duma tesoura que serviu de apoio para cortar isopor e as fitas.

Figura 1.4 - cola isopor



Fonte: foto foi tirado pelo pesquisador.

Usamos a cola isopor para colar o isopor como o nome já disse, a sua imagem é representada na figura 1.4.

Figura 1.5 – tinta guache e pincel.



Fonte: foto foi tirado pelo pesquisador.

Na figura 1.5, temos imagem de tinta guache e pincel que foram usados para pintar a nossa maquete do jogo.

Figura 1.6 - fita adesivo.



Fonte: foto tirado pelo pesquisador

A fita adesiva mostrada na figura 1.6, foi usada para alinhar e dividir as cores que foram usadas na nossa maquete para representar os níveis do jogo.

4.4 COMO SE DEU A MONTAGEM DO JOGO.

Antes de falar do jogo e as suas regras, vamos primeiro falar do âmbito como ele foi pensado, e o que incentivou essa ideia.

Na tentativa de definir qual seria o tema do meu trabalho de conclusão do curso, tive umas conversas com o meu orientador na forma de encontros para orientação do meu trabalho, durante esses encontros, surgiram muitas ideias para trabalhar, mas, acabamos ficar com essa ideia de fazer um trabalho que não aborda só conteúdo da matemática, mas também, como tornar o ensino desse conteúdo interessante.

Pensando em fazer um trabalho com esse caráter, o meu orientador acabou tentando essa brilhante e desafiadora ideia que acabou sugerindo, então a gente se concordou em fazê-la. O trabalho foi feito de seguinte maneira:

1º Etapa:

Esta etapa foi desenvolvida, fazendo revisão bibliográfica de diversos livros e artigos que tem como assuntos gamificação e função quadrática, que são os assuntos que foram usados

para posteriormente criarmos o jogo. Sobre abordagem desses assuntos, podem ser encontrados nos capítulos 1 e 2 desse trabalho.

2º Etapa:

Foi dedicada para pensar o jogo, como vai ser criado e que instrumentos podem ser usados, quais regras vão ser usadas para que ele se torne algo cativante e envolvente, em que situações vai poder ser jogado e como vai ser jogado. Tudo isso foi pensado com base nas leituras feitas e nas realidades vividas em salas de aulas.

3º Etapa:

A confecção do jogo foi feita durante essa etapa, foram mostradas nas figuras acima nesse capítulo, algumas imagens dos materiais que foram usados para montar o jogo. Também foram feitos alguns testes para ver se o jogo funciona e foram editadas algumas regras propostas inicialmente para finalizar a criação do jogo.

4º Etapa:

O jogo foi aplicado nessa etapa, numa turma do 9º ano composta por 30 alunos na escola do ensino fundamental Padre António Crisostomo, para provar se o que foram discutidos por diferentes autores inclusive neste trabalho é realmente o fato. O relato de como aconteceu o jogo será feito no próximo capítulo.

4.5 O JOGO

Com todas as ideias apresentadas acima sobre os procedimentos para criar o jogo, acabou surgindo Bhaskara, que é o nome dado por jogo, pois tem a ver com o conteúdo usado para pensa-lo.

Bhasckara é um jogo de tabuleiro que contem três caminhos diferentes a serem seguidos por três bolinhos que vão representar os três grupos, cada caminho tem 7 casas e acima das casas que formaram os três caminhos, temos uma casa que fica no ponto da intercessão dos caminhos que chamamos do nosso topo. Outra coisa para se observar é que esses caminhos que vão ser seguidos, têm formato duma parábola, que é exatamente a curva que representa uma função do segundo grau, que por acaso foi o assunto que pretende ser abordado com esse jogo.

O jogo vai ser disputado por 2 ou 3 equipes, no caso, se for jogado por 2 equipes o caminho do meio ficara de fora. As equipes vão disputar com uma briga de perguntas e respostas para ver quem vai chegar ao topo com mais pontos acumulados.

O tabuleiro do jogo é pintado por 4 cores diferentes, onde cada cor representa um nível do jogo, ou seja, o jogo está separado por níveis. As perguntas se encontram no formato de carta de baralho, mas elas estão separadas por níveis que são representados por cores. Segui na figura abaixo a imagem do tabuleiro do jogo.

Figura 1.7 – Tabuleiro



Fonte: foto tirado pelo pesquisador

Na figura 1.7, apresentamos o tabuleiro do jogo com os 3 bolinhos nas partes iniciais do jogo.

Figura 1.8 - tabuleiro



Fonte: foto tirado pelo pesquisador

Nessa figura, o tabuleiro é mostrado com uma bolinha na casa acima dos três caminhos que é justamente o nosso topo e é o ponto final do jogo.

Como leitor pode ver, tabuleiro está pintada numa ordem de cores que representa os níveis do jogo de seguinte maneiras:

Verde – primeiro nível

Amarelo – segundo nível

Vermelho – terceiro nível

Preto – topo ou desafio

4.6 REGRA DO JOGO

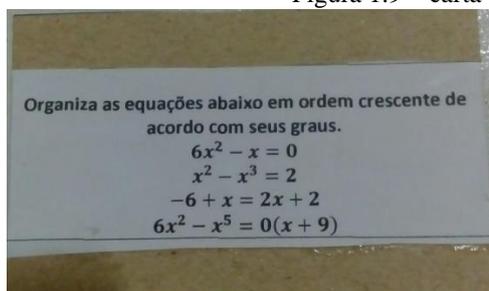
- O jogo pode ser disputado por 2 ou 3 competidores individuais ou por 2 ou 3 equipes.
- O jogo possui 3 caminhos para serem trilhados até chegar ao topo, um a esquerda, um no meio e outro a direita. Cada caminho só pode ser percorrido por um participante (ou equipe). Por isso deve ter no mínimo dois participantes (ou equipes) e no máximo três participantes (ou equipes) para jogar o jogo. Cada participante (ou equipe) deverá escolher o seu caminho para trilhar.

- As cartas deverão ser embaralhadas e colocadas com o verso virado para cima. As cartas deverão ser divididas segundo o seu tipo: verdes (nível 1), amarelas (nível 2), vermelhas (nível 3) e pretas (nível 4), caracterizando assim, respectivamente os níveis envolvidos no jogo. Portanto, haverá quatro montes de cartas.
- A ordem de quem iniciará o jogo será decidida por sorteio. O participante (ou equipe) que começa o jogo escolherá um dos caminhos laterais, sendo seguidos pela segunda equipe que traçará o caminho do meio e pela terceira equipe que traçará o outro caminho lateral.
- A equipe ou participante que for escolhido para começar o jogo, escolherá uma carta no monte correspondente ao nível que estão as bolinhas e mostrará a pergunta constante na carta a todos os participantes. Em seguida, ele e a sua equipe deverá responder à pergunta, detalhando o cálculo, de forma que todos os participantes do jogo vejam. Caso acertem a questão, farão subir a sua bolinha por uma casa e passarão a vez para outra equipe, caso contrário, a bolinha permanece no mesmo lugar e só passa a vez para outra equipe. O mesmo procedimento será feito para todas as equipes até terminar o jogo.
- Os pontos no jogo, serão acumulados por níveis até chegarem no total de 10 pontos da seguinte maneira: para o nível 1, cada resposta correta vale 0,75 ponto, para o nível 2, cada resposta correta vale 1 ponto, para nível 3 cada resposta correta vale 1,5 pontos e por fim o nível 4 que é o nosso topo, cada resposta correta vale 2 pontos e a equipe ou participante terá que responder duas perguntas para garantir o topo. Respondendo todas as perguntas corretas, participante ou equipe terá no total de 9,25 pontos e 0,75 ponto que fica sobrando, será dado pela participação no jogo.
- O jogo persiste até que alguma equipe alcance a casa denominada topo e ganha o jogo a equipe com mais pontos acumulados na partida. Casos omissos neste regulamento deverão ser decididos pelo professor que está aplicando o jogo.

Agora vamos apresentar as cartas das perguntas de acordo com os níveis:

Nível 1:

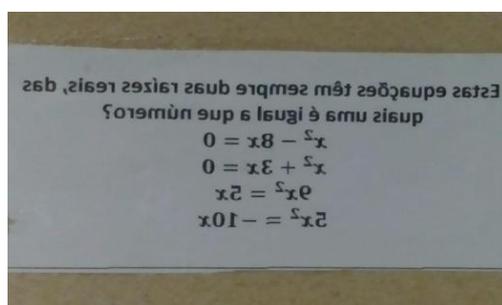
Figura 1.9 – carta do nível 1



Fonte: foto tirado pelo pesquisador.

Nível 2:

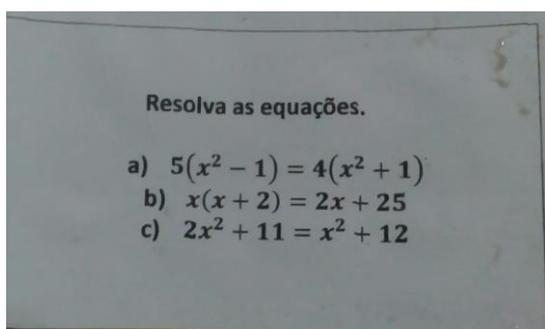
Figura 1.10 – carta do nível 2



Fonte: foto tirado pelo pesquisador.

Nível 3:

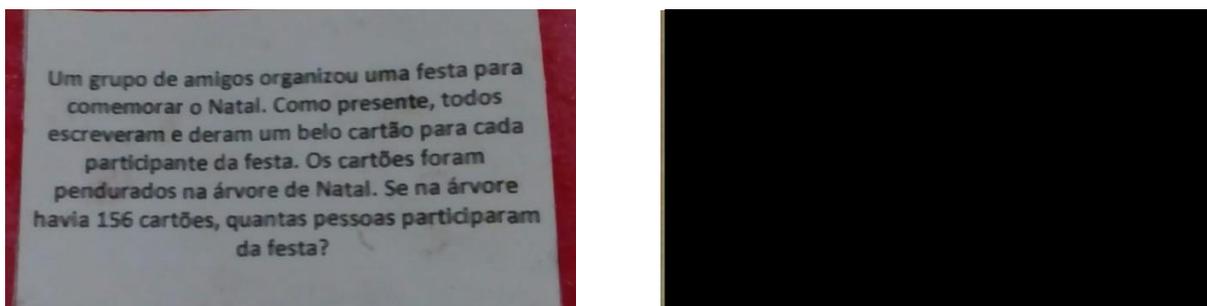
Figura 1.11 – carta do nível



Fonte: foto tirado pelo pesquisador.

Nível 4 ou desafio:

Figura 1.12 – carta do nível



Fonte: foto tirado pelo pesquisador

Nas figuras acima, são mostradas as cartas de acordo com os seus níveis, são mostradas frentes e versos, são quatro grupos de cartas diferentes feitos de cartolina que também é um material de fácil acesso e de baixo custo.

5 APLICAÇÃO DO JOGO, SEUS RESULTADOS E DISCUSSÕES.

No capítulo três apresentamos o jogo, seus elementos e como foi confeccionado, mas, ainda não falamos dos resultados e aplicação dele. Neste capítulo é justamente o que vamos fazer, vamos falar de como se deu sua aplicação, onde se deu, quem são os participantes, se teve êxito na sua aplicação e se realmente o que foi relatado no primeiro capítulo foi observado. Também vamos apresentar tabelas com dados da pesquisa e gráfico dos resultados obtidos.

5.1 APLICAÇÃO

A nossa atividade foi aplicada numa escola pública “Padre Antônio Crisostomo”, que se encontra localizado na cidade de Acarape, numa turma de 9º b que é formado por 30 alunos. A atividade foi aplicada em duas etapas de formas diferentes, na qual a primeira etapa consiste em apresentação do conteúdo, o qual foi baseado para elaborar o jogo, e também apresentar as regras do jogo e fazer divisão das equipes, a segunda etapa consiste em aplicação do jogo entre as equipes formadas. Para detalhar melhor o que aconteceu e como aconteceu, vamos explicar em detalhes as duas etapas das nossas atividades de seguintes formas:

Etapa 1

Atividade ocorreu no dia 11 do mês de março no período de manhã, das 9:00 à 10:30, o que totaliza numa quantia de 90 minutos, para aplicar essa atividade, foi elaborado um plano de aula no modelo tradicional que descreve o procedimento de como vai ser aplicado essa atividade, o plano será apresentado na página do anexo que se encontra nas páginas finais.

Iniciamos atividade com uma breve apresentação para turma, explicando como vai ser feita o jogo, depois a aula prosseguiu com uma explanação do conteúdo no modo tradicional, onde foi mantido um clima de interação entre o professor e os alunos, e alunos entre se. No final da aula, foram dados para os alunos como atividade para casa, uma lista de exercícios, que são os questionários que compõem as cartas do jogo de acordo com o seus níveis de desafios, o que permitirá com que eles estudem para assim poder participar do jogo.

Nessa primeira parte de atividade, podemos observar vários elementos abordados por autores que estudam a gamificação na educação, como mostram os autores FRANCO, Patrícia Marins et all (2015) e Prensky (2010), quando diz seguinte:

De maneira geral, a gamificação dos processos educacionais requer que professores mudem seu jeito de pensar e de dar aula, afim de

que os alunos assumam os papéis sugeridos por Prensky, dentre os quais os de pesquisador, de pensador e gerador de significados, que constrói suas próprias aprendizagens refletindo sobre o mundo ao seu redor. (Marins et all 2015)

Podemos perceber que os alunos vão ser protagonistas das suas próprias aprendizagens, onde eles vão passar num processo que envolve os três caracteres mencionado por Prensky, que são, ser pesquisador, porque para responder os exercícios dados como atividade para casa, vão ter que pesquisar as informações que vão lhes ajudar na resolução dos exercícios, e resolvendo os exercícios, vai fazer com que eles pensão nas vias mais acessíveis para chegar nas soluções, o que os levam a ser pensador, por fim, mecanismos que eles vão usar para resolver os exercícios, com certeza vão ser os que fazem sentidos para eles, o que nos leva a concluir que estão gerando os significados do conteúdo por eles.

Etapa 2

No dia 11 do mesmo mês, ainda no período de manhã, foi dado a continuidade da nossa atividade, dessa vez com um caráter diferente, ou seja, atividade como um jogo, que é justamente o jogo criado para desenvolver esse trabalho. Ela começou as 10:40 e terminou as 11:25, o que deu num total de 45 minutos. Como já foram formadas as equipes, só damos a continuidade, onde começamos ela com a distribuição das folhas dos questionários elaborados para recolha dos dados que serão utilizados para concluir o nosso trabalho.

O jogo começou com participação de três equipes adversárias, formados por 5 integrantes cada, e como a turma é composto por 30 alunos, foram criadas 6 equipes para participar do jogo, onde os integrantes vão trabalhar juntos em uma colaboração para poder ganhar o jogo. Então, durante atividade, podemos observar o engajamento dos alunos e o espírito de comprometimento com o jogo, todo mundo estava participando, mas devido pouco tempo que tivemos para aplicar o jogo, não deu tempo para definir o grupo vencedor, pois o jogo não chegou ao fim. Mas aproveitamos os minutos finais, pedindo a turma que respondesse os questionários para recolha dos dados, depois recolhemos as informações, e foi assim que terminamos atividade.

Assim como na primeira parte da atividade, podemos também observar o impacto que uma aula gamificada tem no processo de aprendizado, para torna isso mais visível, vamos apresentar para vocês os dados coletados abaixo.

5.2 DADOS COLETADOS E RESULTADOS

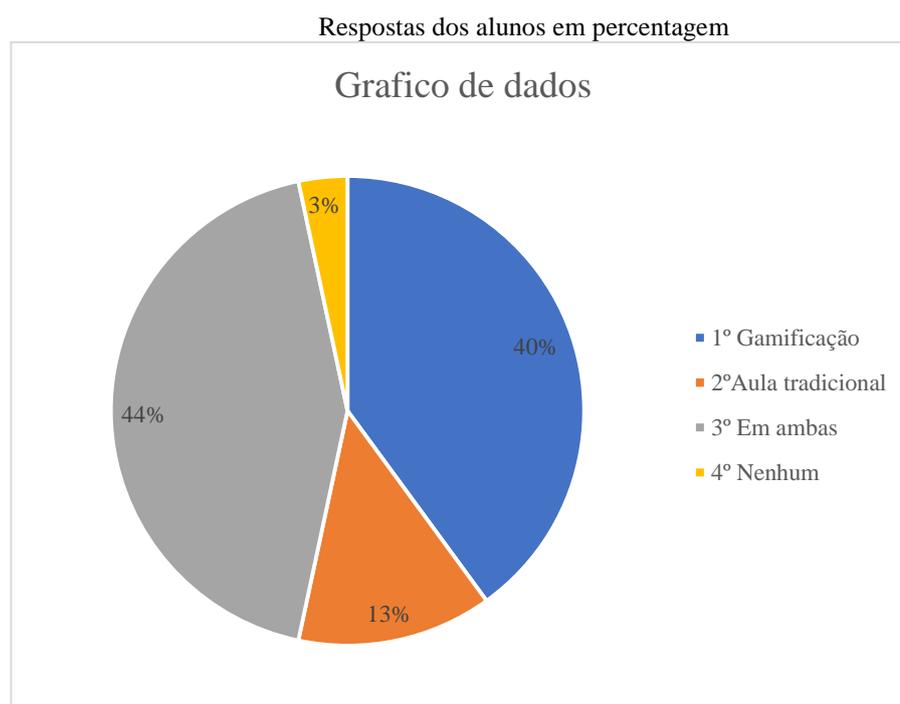
Após terem participado da atividade, os alunos responderam às perguntas feitas, na qual essas respostas são organizadas na tabela abaixo. Também é bom saber que a nossa pesquisa foi feita com o interesse no engajamento que uma aula gamificada pode proporcionar, por isso não levamos em consideração a questão de gênero, faixa etária ou qualquer outra coisa que possa separar a turma como grupo, mas sim, consideramos a turma toda como uma só, e simplesmente levamos em consideração as diferenças das respostas dadas por eles.

Tabela das respostas dos alunos

Quantidade dos alunos	Gamificação	Aula tradicional	Em ambas	Nenhum
30	12	4	13	1

FONTE: escola padre Antônio Crisostomo

Esses mesmos dados apresentados em forma de tabela, podem ser apresentados em forma de gráfico que é o que faremos abaixo:



FONTE: escola padre Antônio Crisostomo

De acordo com os dados acima apresentados, podemos ver que a gamificação estão presente em 84% da turma todo somando a quantidade dos alunos que escolheram gamificação e os que escolheram ambas.

Para mais informações, apresentaremos algumas falas dos alunos e a visão do professor falando sobre o tema, para não identificação dos nomes dos alunos, usaremos letras alfabetos para identifica-los.

Segue as falas:

- A. É uma forma legal de aprender.
- B. Gosto sim, porque a gente além de aprender a gente se diverte.
- C. Sim, porque é muito divertido.
- D. Sim, porque eu me envolvo, mas também gosto de seminários.
- E. Sim, porque é bem melhor... a atividade com jogo fico bem mais fácil e divertido de se envolver.
- F. Sim, porque praticamos e aprendemos mais.
- G. Sim, porque sou uma pessoa que é ligada em games e jogos em forma de atividade é a mesma coisa e me empenho mais ainda.
- H. Sim, porque todos os alunos participam e podem aprender muito mais
- I. Sim, porque ele ajuda os alunos a se interagir
- J. Sim, porque aula não se torna chata e sem motivação, eu acredito que com jogo os alunos interagem mais.
- K. Aula com jogos é muito bom, a gente discute sobre o jogo, assunto e ainda aprende muita coisa.
- L. Sim, porque através de praticar eu consigo entender tudo melhor.
- M. Sim, porque quando é algo divertido se torna mais fácil de se aprender.
- N. Sim, porque as vezes eu não sei de algumas coisas e os amigos me explicam.

Nas falas dos alunos I, J, K, N, podemos perceber que eles trazem uma informação muito fundamental, quando se trata do uso de jogos para fins educativos, que é a “interação”, assim como também é vista no site OJE (2011) que mostra como aplicação do jogo pode facilitar numa aula quando é aplicada adequadamente,

A principal função do professor na OJE é a comunicação com os alunos, auxiliando a equipe no decorrer da competição. Portanto, há a possibilidade de maior integração com os alunos, diminuindo o distanciamento entre corpo discente e docente, facilitando a troca de experiências e o aprendizado. OJE (2011)

Ainda para continuar, podemos observar a liberdade de aprender que uma aula gamificado proporciona para os alunos como afirma SHELDON (2012) citado por (FRANC, et al, 2015), que também pode ser vista nas falas dos alunos F, H, K, L, M, que diz seguinte,

O uso estratégias de jogos na educação e os métodos de ensino tradicionais se diferem bastante na forma como tratam os fracassos. Na forma tradicional, os erros, em geral, são punidos e não são discutidos com os estudantes, devido a uma série de questões, tais como, a grande quantidade de alunos e a falta de tempo ou interesse do professor. Ao utilizar as técnicas de jogos os alunos aprendem cometendo erros, sendo motivados a tentar de novo e a superar seu fracasso.

Numa aula gamificado os erros são vistos como um incentivo para aprendizagem, o que deixa os alunos mais à vontade e com grande desejo de encontrar a forma de como pode aprender para cometer o mesmo erro. Sendo assim, eles se interagem numa forma divertida e envolvente tentando assim, descobrir as vias para solucionar seus problemas.

Podemos também observar que durante a aplicação do nosso jogo, teve muita interação e diversão entre alunos e com professor com vamos mostrar na fala do professor, que diz seguinte:

A atividade sobre o conteúdo programático equações de segundo grau proposta pelo graduando do curso de Licenciatura em Ciências da Natureza e Matemática, teve grande valia para o processo de aprendizagem dos estudantes da Turma do 9º ano B, ano letivo de 2019. Apesar de que para este processo tivemos que antecipar tal conteúdo para a turma, pois não estava previsto para esse trimestre, a turma respondeu de forma positiva, interagindo e compreendendo a aula teórica ministrada pelo graduando que ocorreu anteriormente ao dia da aula prática/gamificada. Presenciei os estudantes exercitando as atividades propostas durante toda a semana, questionando sobre algumas dúvidas, se preparando para a culminância da prática, a aula gamificada. O esforço do graduando de repassar os fundamentos principais e essenciais para a compreensão do conteúdo foram muito bem dosados para que os efeitos, no dia da prática, fossem satisfatórios.

No dia da aula prática, fiquei na expectativa dos resultados, pois as vivências no chão da escola sempre confirmaram a importância da ludicidade para que os conteúdos possam ser fixados e internalizados, principalmente no componente curricular da Matemática que historicamente são tradicionais ao ponto de resumirem aos elementos de quadro branco, pinceis e caderno. Ao perceber o tabuleiro confeccionado pelo graduando, a estrutura com elementos matemáticos (parábola, reta, ponto máximo), as peças no formato de esferas, as cores da estética do tabuleiro, escolhidas e que traduzem as cores características do continente Africano já sinalizaram-me as possibilidades de aula interdisciplinar a partir da visualização e explicação

introdutórias do tabuleiro, desmistificar estereótipos, o perigo da história única do continente Africano e de seus povos, geograficamente entender a localização, combater pré-conceitos/preconceito(s), e ainda sim trabalhar a proposta inicial referente as equações de segundo grau.

As equipes de estudantes foram interagindo e se envolvendo na aula prática e demonstrando que realmente obtiveram uma aprendizagem significativa a partir do conteúdo repassado na teórica, acredito que o questionário respondido pelos estudantes irá traduzir minha impressão/ sensibilidade docente.

O Programa Mais Paic, que é um Pacto de Aprendizagem na Idade Certa entre o Estado do Ceará e os Municípios, sugerem um plano estruturante em que um dos tempos pedagógicos de uma aula escolar precisa integrar a vivência com o concreto, e em especial a ludicidade para que a aula possa ser mais atrativa.

Dependendo das metodologias docentes e principalmente das experiências formativas da Graduação esse tempo pedagógico de vivências pode ser desenvolvido como potencialidades ou com grandes dificuldades, e na minha opinião a trajetória da Matemática nos currículos escolares ainda se apresentam com muita resistência a práticas inovadoras.

Na minha concepção é dever das novas gerações docentes incentivar essa mudança e implementar cada vez mais aulas lúdicas/gamificadas com a sensibilização de que é preciso reforçar bem as aulas teóricas, tendo a certeza que os principais conceitos foram realmente apreendidos pelos estudantes e sem dúvidas a culminância ser com uma aula prática diferenciada e com tempo suficientemente definido para finalizar toda a atividade proposta (Informação verbal).

De acordo com os nossos achados da pesquisa, pode-se perceber que, em bora não são estudantes do tema, mas as falas deles em geral, vem concordando com o que os autores e pesquisadores do tema tem nos dito nas suas escrituras.

Santos e Vale (2006), quando diz que os jogos de aprendizagem podem estimular as capacidades intelectuais do jogador, à medida que o conteúdo é fornecido, estruturado e construído por meio de estratégias de pensamento. E também Formanski (2015), que nos mostra que a aplicação da gamificação em um ambiente colaborativo pode ser utilizada como estratégia para melhorar a aprendizagem e a gestão organizacional. Então podemos dizer que o nosso trabalho conseguiu nos levar aos resultados esperado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante este trabalho, pude ver, vivenciar e aprender muitas coisas, que durante minha graduação não tinha percebido. No começo era só questão de fazer um trabalho que vai servir como meu trabalho de conclusão de curso, mas, quando comecei a desenvolvê-lo, comecei a ver beleza e a riqueza que se encontra nele.

Na primeira etapa, que é a de revisão bibliográfica, já estava bem evolvido com o tema, pois, trata justamente das ideias que eu vim construído durante a minha graduação, mas não tinha uma forma concreta de demonstrá-la, fazendo essas leituras, me proporcionou uma visão vislumbrante de como eu possa apresentar minhas ideias numa forma concreta e atrativa, que foi justamente o desenvolvimento desse trabalho.

Ao longo do processo das etapas de aplicação desse trabalho, podemos sentir o envolvimento e comprometimento dos participantes nesse processo, também podemos ver os resultados positivos que esse trabalho proporciona no campo educativo. Para começar, os materiais utilizados para montar o jogo são de baixo custo, não exige muitos recursos financeiros, as metodologias aplicadas também para realizar aulas desse caráter são muito simples e de fácil acesso para todo mundo que quer adotar o processo de aula gamificada. O objeto é fácil de se transportar, o que faz com que as aulas podem ser tiradas fora da sala, tornando assim o campo de processo de ensino e aprendizado muito mais amplo e divertido. Outra coisa que podemos frisar sobre esse trabalho, é que ele nos mostra como o processo de aprendizado pode ser diversificado, pois, durante a sua aplicação, percebemos que o modelo tradicional do ensino que aponta professor como única fonte do conhecimento não se verifica, mas sim, o professor como orientador e os alunos são livres de adotar os mecanismos que lhes proporcionam aprendizados, ou seja, os alunos são protagonistas das suas próprias aprendizados.

O objetivo do nosso trabalho que é de criar as conexões entre alunos e com professor foi alcançado, pois, durante sua aplicação todo mundo que participou no processo estava envolvido, teve muitas perguntas de parte dos alunos durante a semana de aplicação e no dia de aplicação em sala de aula todo mundo também participou. Durante a participação também, percebe-se que eles estudaram em casa para assim poderem competir uns com os outros, o que nos leva a dizer que metodologia usado funcionou, pois, conseguiu-se aproximar conteúdo com a realidade dos alunos o que acabou influenciando os seus engajamentos na sala de aula.

Com tudo o que vimos sobre esse trabalho, podemos concluir que a gamificação é uma ferramenta muito poderosa para fazer com que o ensino da matemática não se limita só nos

cálculos e números, mas também, abordar os outros conteúdos que envolve a sociedade como um todo e os seus elementos. Por isso os professores, desde então, devem começar logo a pensar na possibilidade de adotar a gamificação como ferramenta para os seus processos de ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CONCAVIDADE - VÉRTICE - MÁXIMO E MÍNIMO DA PARÁBOLA. Disponível em: <http://www.vejamatematica.com.br/al12_concavidade_da_parabola.html>. Acesso em: 17/07/2018

COSTA, Amanda Cristina Santos; MARCHIORI Patricia Zeni. **Gamificação, elementos de jogos e estratégia: uma matriz de referência.** 2015. Disponível em: <<http://www.revistas.usp.br/incid/article/view/89912>>. Acesso em: 10/06/2018

CREPALDI, Danielle Domeneghetti. **DESENVOLVIMENTO DE OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA DISPOSITIVOS MÓVEIS EXPLORANDO OS SENSORES INTERNOS DO SISTEMA OPERACIONAL ANDROID.** Bauru, 2014. Disponível em: <<https://www.google.com/search?q=DESENVOLVIMENTO+DE+OBJETO+DE+APRENDIZAGEM+PARA+DISPOSITIVOS+M%C3%93VEIS+EXPLORANDO+OS+SENSORES+INTERNOS+DO+SISTEMA+OPERACIONAL+ANDROID&ie=utf-8&oe=utf-8&client=firefox-b-ab>>. Acesso em: 15/06/2018

Eixo de simetria. Disponível em: <https://www.google.com.br/search?ei=KNtfW5TCKYuB5wKVvYjIBw&q=eixo+de+simetria+da+fun%C3%A7%C3%A3o+quadratica+pdf&oq=eixo+de+simetria+da+fun%C3%A7%C3%A3o+quadratica+pdf&gs_l=psy-ab.3...13590.16718.0.18564.4.4.0.0.0.438.1170.2-3j0j1.4.0...0...1c.1.64.psy-ab..0.2.489...0i22i30k1j33i160k1.0.-1IvX2SWTk>. Acesso em: 31/07/2018

ESQUIVEL, Hugo Carlos Da Rosa. **Gamificação no ensino da matemática: uma experiência no ensino fundamental.** Seropédica, RJ Agosto de 2017.

FORMANSKI, Francieli Naspolini; ALVES, João Bosco. **Gamificação aplicada à aprendizagem de grupo.** Disponível em: <<https://int.search.tb.ask.com/search/GGmain.jhtml?searchfor=GAMIFICA%C3%87%C3%83O+APLICADA+%C3%80+APRENDIZAGEM+DE+GRUPO&enableSearch=true&rdrcr=no&st=sb&tpr=omni&p2=%5EY6%5Expv067%5ELMPTBR%5Ebr&ptb=ACBAC828-1EE0-4500-AFC3-E1D9116DC673&n=784a12d1&si=001007013000076>> acesso em: 15/01/2019

Gamificação na Educação: Considerações Sobre o Uso Pedagógico de Estratégias de Games. Disponível em: <<http://www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/citi/article/view/6950>> acesso em: 01/09/2018

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1: Conjuntos e Funções.** São Paulo: atual, 2004.

MACHADO, Mirtes Tamy Gomes. **Parábolas – As curvas preciosas.** Disponível em: <<https://www.google.com/search?client=firefox-b-ab&ei=WK9LW86NNcHz5gLqoKWwDg&q=par%C3%A1bola+matem%C3%A1tica+pdf>>

oq=par%C3%A1bola+matem%C3%A1tica+pd&gs_l=psy-ab.1.0.0.19757.21155.0.23136.3.2.0.1.1.0.290.545.2-2.2.0....0...1c..64.psy-ab..0.3.556....0.PS966XTAEQM>. Acesso em: 15/07/2018

Math game: Uma Estratégia Lúdica Para O Ensino De Cálculo Diferencial E Integral Em Cursos De Ciências Exatas. Disponível em <
https://int.search.tb.ask.com/search/GGmain.jhtml?n=784a12d1&p2=%5EY6%5Expv067%5ELMPTBR%5Ebr&ptb=ACBAC828-1EE0-4500-AFC3-E1D9116DC673&qS=&si=001007013000076&ss=sub&st=sb&tpr=sbt&enc=2&searchfor=Qq6ZyBVbbbp-7g5MMDjqVlgVPjjRA-UN7O0hVK5m073Cglz7k4yNkP11R7zn6_OI2Ye6Jdb7dUo9WJ4FMLKcmVvaYamkWlOnIh69mREtbmkSVa2UN0gWJ9lvfjH-aiAylwo1lietBDbZzlCIgNzouMWy44KOJJtRS5L-ZTJT0TYoSZkrl7GeKkaJBS6ywFfq21XOgRESRdZbarCnbFsUF1ncCbsrTkvJd5EYqD2j9Gp xFWgL9oU4uSqrKvVXTkBODnLVQ_kN0itNWLbn9KedeJ1-Cx6_h5dfiOHHOy1W03NaSRNuhxedbIlhYdoMvGSbgjj7ooGP80vMGK-1X0UxQ&ts=1553813796906> acesso em: 10/06/2018

OJE (2011) “**Olimpíada de Jogos Digitais e Educação - Video Release**”, disponível em: https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=hVhyW_3F_HM>. Acesso em 26 mar. 2019.

REVISTA VEJA. **A geração Z - Características e perspectivas de uma juventude que conhece a internet desde a infância.** 2001. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/idade/palavra_leitor/geracao_z.html>. Acesso em: 20 mar. 2019.

SANTOS, M.; SCARABOTTO, S. C. A.; MATOS, E. L. M. **Imigrantes e nativos digitais: um dilema ou desafio na educação?** In: Congresso Nacional de Educação – EDUCERE, 10, 2011, Curitiba. Disponível em < http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/5409_3781.pdf >. Acesso em: 19 dez. 2018.

SOARES, Maria Zoraide M C; SANTINHO Miriam Sampieri; et al. **INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA PARABOLA.** Disponível em: <https://www.google.com/search?client=firefox-b-ab&ei=WK9LW86NNcHz5gLqoKWwDg&q=par%C3%A1bola+matem%C3%A1tica+pdf&oq=par%C3%A1bola+matem%C3%A1tica+pd&gs_l=psy-ab.1.0.0.19757.21155.0.23136.3.2.0.1.1.0.290.545.2-2.2.0....0...1c..64.psy-ab..0.3.556....0.PS966XTAEQM>. Acesso em: 15/07/2018

WERBACH, K.; HUNTER, D. **For the win: how game thinking can revolutionize your business.** Philadelphia: Wharton Digital Press, 2012.

ANEXOS 1 – QUESTIONÁRIOS USADOS NAS CARTAS DO JOGO

Nível 1

<p align="center">Quais das seguintes expressões abaixo representam uma equação? Porquê?</p> <p>a) $f(x) = ax + b$</p> <p>b) $ax + b = c$</p> <p>$3x + 9 = 0$</p>	<p align="center">Quais são os valores do x nas seguintes expressões:</p> <p>a) $3x + 5 = 8x$</p> <p>b) $-2x + 30 = 20$</p> <p>c) $3x + 5x = 0$</p>	<p align="center">Considere a equação do 2º grau:</p> $x^2 + 3x - 10 = 0$ <p>3 é solução dessa equação?</p> <p>2 é solução dessa equação?</p> <p>-2 é solução dessa equação?</p> <p>-5 é solução dessa equação?</p>
<p>Para a expressão abaixo, existem dois números reais que podem ser colocados no lugar de ____.</p> <p>Quais são eles?</p> $(__ + 1)^2 = 9$	<p align="center">Organiza as equações abaixo em ordem crescente de acordo com seus graus.</p> $6x^2 - x = 0$ $x^2 - x^3 = 2$ $-6 + x = 2x + 2$ $6x^2 - x^5 = 0(x + 9)$	<p align="center">Calcule, mentalmente, os valores de x.</p> <p>a) $x^2 + 1 = 10$</p> <p>b) $x^2 + 3 = 19$</p> <p>c) $x^2 - 1 = 0$</p> <p>d) $3x^2 = 75$</p>
<p>De que forma as equações podem ser classificadas, para saber qual é o seu grau?</p>	<p align="center">Quais são os dois valores reais de x nas seguintes equações:</p> $x^2 = 9$ $x^2 = 36$ $x^2 = 0, 36$	<p align="center">Qual é grau das seguintes equações:</p> $x(x - 9) = 0$ $x(x^2 - 9) = 0$ $(x + 3)(x - 1) = 0$

Nível 2

<p>O que é necessário para que um produto de fatores desconhecidos seja nulo?</p>	<p>Indique quais das equações são impossíveis resolver com os números reais.</p> <p>a) $x^2 - 9 = 0$ b) $x^2 + 9 = 0$ c) $-x^2 + 9 = 0$ d) $-x^2 - 9 = 0$</p>	<p>O dobro do quadrado de um número é 72. Qual é o número?</p>
<p>Resolva as equações. $x^2 - 90 = 31$ $5x^2 + 4 = 49$</p>	<p>Estas equações têm sempre duas raízes reais, das quais uma é igual a que número?</p> <p>$x^2 - 8x = 0$ $x^2 + 3x = 0$ $9x^2 = 5x$ $5x^2 = -10x$</p>	<p>Determina os x das seguintes equações. $(x + 3)(x - 1) = 0$ $(x - 6)(4x - 8) = 0$</p>

Nível 3

<p>Uma área formada por 5 quadrados mede $20m^2$. Quanto mede o lado de cada uma das 5 quadrados?</p>	<p>Em um quadrado de lado x, o número que expressa a área é igual ao número que expressa o dobro de seu perímetro.</p> <p>a) Quanto mede o lado do quadrado?</p> <p>b) Qual é o perímetro do quadrado?</p> <p>c) Qual é a área do quadrado?</p>	<p>Resolva as equações.</p> <p>a) $5(x^2 - 1) = 4(x^2 + 1)$</p> <p>b) $x(x + 2) = 2x + 25$</p> <p>c) $2x^2 + 11 = x^2 + 12$</p>
<p>Usando a formula geral de resolução da equação do 2º grau, resolva seguinte equação.</p> $x^2 + 3x - 10 = 0$	<p>Identifique os coeficientes e o termo independente nas equações seguintes:</p> <p>a) $x^2 + 3x - 10 = 0$</p> <p>b) $2x^2 - 4x + 3 = 0$</p> <p>c) $6x^2 + x - 3 = 0$</p>	<p>Usando a formula geral de resolução da equação do 2º grau, resolva seguinte equação.</p> $2x^2 - 4x + 3 = 0$

Desafios

<p>Um grupo de amigos organizou uma festa para comemorar o Natal. Como presente, todos escreveram e deram um belo cartão para cada participante da festa. Os cartões foram pendurados na árvore de Natal. Se na árvore havia 156 cartões, quantas pessoas participaram da festa?</p>	<p>Um retângulo mede 26 cm do seu perímetro e 42 cm^2 da área. Quais são as medidas de seus lados?</p>	<p>A soma das idades de dois irmãos é 12 anos, e o produto delas é 35. Calcule essas idades.</p>
---	--	---

ANEXO 2 -PERGUNTAS PARA COLETAR DADOS



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA

AFRO-BRASILEIRA – UNILAB

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – ICEN

CURSO DE LICENCIATURA EM CIÊNCIAS DA NATUREZA E

MATEMÁTICA

DISCIPLINA TCC

Questionários

1. O que você achou da aula?
 Ruim
 Razoável
 Boa
 Muito boa

2. Em qual situação você se sente mais envolvido?
 Numa aula gamificada
 Numa aula tradicional
 Em ambas
 Em nenhuma das duas

3. De que forma você prefere ser avaliado?
 Através de seminários
 Através de provas escritas
 Através de atividades que envolvam jogos

4. Você gostaria que mais aulas fossem ministradas utilizando jogos? Porque?
R:

ANEXO 3 - PLANOS DE AULA 1



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA – UNILAB**

**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – ICEN
CURSO DE LICENCIATURA EM CIÊNCIAS DA NATUREZA E
MATEMÁTICA**

DISCIPLINA TCC

Formulário de Plano de Aula

DADOS DA ESCOLA CAMPO DE ESTÁGIO

<p>Escola: Padre António Crisostomo</p> <p>Professor: Gilmar Canos Frosé</p> <p>Duração da atividade: 90 min</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Ensino Fundamental <input type="checkbox"/> Ensino Médio</p> <p>Conteúdo ministrado: Equação de 2º grau</p>
--

Objetivos

<p>Objetivo Geral: Ensinar como resolver a equação do 2º grau.</p> <p>Objetivos específicos: Aprender o que é uma equação do 2º grau e aprender como resolve-la.</p>
--

Metodologia

A aula inicia com uma breve apresentação para turma. Em seguida, explanação do conteúdo e depois finalizará com divisão da turma em grupa para participar do jogo na próxima aula.

Recursos

Quadro, caderno, caneta ou lápis, pincel, apagador e livro.

Avaliação

A avaliação será feita através da participação dos alunos na atividade proposta sobre o conteúdo ministrado que será um jogo.

Bibliografia

Praticando matemática 9/ Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos – 4 ed. renovada. São Paulo; Editora do Brasil, 2015. – (Coleção praticando matemática; v.9)

ANEXO 4 - PLANO DE AULA 2



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA – UNILAB

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – ICEN

CURSO DE LICENCIATURA EM CIÊNCIAS DA NATUREZA E
MATEMÁTICA

DISCIPLINA TCC

Formulário de Plano de Aula

DADOS DA ESCOLA CAMPO DE ESTÁGIO

<p>Escola: Padre António Crisostomo</p> <p>Professor: Gilmar Canos Frosé</p> <p>Duração da atividade: 45 min</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> Ensino Fundamental <input type="checkbox"/> Ensino Médio</p> <p>Conteúdo ministrado: Aplicação do jogo Bhaskara</p>
--

Objetivos

<p>Objetivo Geral: Aplicar o jogo.</p> <p>Objetivos específicos: Observar o engajamento da turma, avaliar o nível de aprendizado da turma.</p>
--

Metodologia

--

A aula inicia com uma apresentação do tabuleiro do jogo e depois com a disputa dos três primeiros grupos e em seguida os outros grupos até conseguir um vencedor. Aula terminará com a turma respondendo questões para coleta dos dados.

Recursos

Tabuleiro do jogo e as suas cartas.

Avaliação

A avaliação será feita através da participação dos alunos na atividade proposta sobre o conteúdo ministrado que será um jogo.

Bibliografia

Praticando matemática 9/ Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos – 4 ed. renovada. São Paulo; Editora do Brasil, 2015. – (Coleção praticando matemática; v.9)