UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA

BENEDITO GASTÃO MENDES

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

ACARAPE
2018

BENEDITO GASTÃO MENDES

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza e matemática com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

ACARAPE - CE

2018

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Mendes, Benedito Gastao.

M49c

Construção dos Números Reais / Benedito Gastao Mendes. - Redenção, 2018.
65f: il.

Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Ciências da Natureza e Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva.

1. Números reais (Construção). 2. Análise real. 3. Análise matemática. I. Título

CE/UF/BSC CDD 512.786

BENEDITO GASTÃO MENDES

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza e matemática com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 05 / 06 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Rodrigo Mendes Pereira

Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

DTavares

Prof. Drª. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho especialmente para o meu pai Gastão Mendes que se encontra desde 2009 na casa do pai, dedico também este trabalho para a minha mãe, meus irmãos, meu orientador prof. Dr. Joserlan, meus filhos e a minha namorada e para todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me dado saúde, força e sabedoria para concretizar este trabalho.

Aos meus familiares pelo incentivo, apoio, incondicional e todos que me apoiaram diretamente ou indiretamente nessa caminhada.

Agradeço à minha mãe Domingas Mendes, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço. Terá os meus eternos agradecimentos.

Ao meu pai que apesar de não estar vivo, mas sempre viverá ao meu lado, foi o meu melhor amigo que me colocou na escola, e me fortaleceu, e tudo o que eu sou hoje, graças a Deus ao meu pai mesmo com ausência dele, mas para mim, foi muito importante tê-lo como pai, terá os meus eternos agradecimentos.

Obrigado meus irmãos e meus filhos pelo apoio e incentivo mesmo com a distância eu dedico o estudo superior a vocês, sempre vocês me fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente.

À minha namorada Whildislany da silva pelo apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

À Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira pela oportunidade de fazer o curso superior.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxilio durante a minha graduação.

Ao PIBID, pelo apoio de bolsa e que me proporcionou a mais experiência na minha formação a docência.

Ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, pela excelente orientação, pelas suas correções, incentivos, apoio e confiança para elaborar este trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira e Profª. Dra. Danila Fernandes Tavares pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

À minha professora de fundamentos de matemática, Kelma Gomes, que me proporcionou a fazer habilitação em matemática.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, portanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender.

Aos colegas da turma de graduação, pelas sugestões críticas construtivas para superação de dificuldades durante minha graduação.

“Os números governam o mundo. (Platão).”

RESUMO

No presente trabalho estudamos a construção dos números reais a partir do conjunto dos números naturais, este introduzido através dos Axiomas de Peano. Em seguida construímos os números inteiros e os números racionais usando o conceito de relação de equivalência. Por fim completamos a construção dos reais através do método dos Cortes de Dedekind.
Palavras-chave: Axiomas. Relação de equivalência. Cortes de Dedekind. Construção dos Reais.

ABSTRACT

The present work studies the construction of real numbers from the set of natural numbers, which is introduced through the Peano´s axioms. Then, we build integers and rational numbers using the concept of equivalence relation. Finally, we completed the construction of the reals numbers through the cut Dedekind´s method.
Keywords: Axioms. Equivalence relation. Cuts of Dedekind. Construction of the Real numbers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagonal do quadrado de lado 1 46
Figura 2 – Segmento de três retas AB ,CD e EF 47
Figura 3 – Corte de Dedekind nos números reais 48

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UNILAB	Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
SIBI	Sistema Integrado de Bibliotecas
aprox.	Aproximadamente
trad.	Tradutor

LISTA DE SÍMBOLOS

®	Marca Registrada
α	Alfa
β	Beta
δ	Delta
ϵ	Epsilon
$\leq$	Menor ou igual a
$\geq$	Maior ou igual a
$\sim$	Equivalência
$/$	Tal que
$\neq$	Diferente
$\subset$	Está contido
$\Re$	Relação
$\supset$	Contém
$\approx$	Aproximado
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\equiv$	Equivalente
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\emptyset$	Conjunto vazio

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	14
2	**PRELIMINARES**	16
2.1	**Conjuntos**	16
2.1.1	**Conjunto das Partes**	17
2.1.2	**Par Ordenado e Produto Cartesiano**	17
2.2	**Relação de Equivalência**	18
3	**CONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS**	20
3.1	**Axiomas da Indução**	21
3.2	**Operações e Propriedades dos Números Naturais**	22
3.2.1	**Propriedades da Adição dos Números Naturais**	22
3.2.2	**Propriedades da Multiplicação dos Números Naturais**	24
3.3	**Ordem Entre os Números Naturais**	25
3.3.1	**Boa Ordenação e o Segundo Princípio de Indução**	26
4	**CONJUNTOS DOS NÚMEROS INTEIROS**	28
4.1	**Construção do Conjunto dos Números Inteiros**	28
4.2	**Operações em Números Inteiros**	29
4.2.1	**Adição de Números Inteiros**	29
4.2.2	**Multiplicação de Números Inteiros**	31
4.3	**Ordem Entre os Números Inteiros**	33
4.4	**Boa Ordenação dos Números Inteiros**	35
5	**CONJUNTOS DOS NÚMEROS RACIONAIS**	37
5.1	**Construção dos Números Racionais**	37
5.2	**Operações em Números Racionais**	38
5.2.1	**Adição em Racionais**	38
5.2.2	**Subtração em Números Racionais**	39
5.2.3	**Multiplicação em Números Racionais**	39
5.2.4	**Divisão em Números Racionais**	40
5.3	**Propriedades dos Números Racionais**	40
5.3.1	**Propriedade da Adição**	40
5.3.2	**Propriedade da Subtração**	42
5.3.3	**Propriedade da Multiplicação**	42
5.3.4	**Propriedade Distributiva**	42
5.3.5	**Propriedade da Divisão**	43
5.4	**Relação de Ordem Entre os Números Racionais**	43
6	**CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS**	46
6.1	**Conjunto dos Números Irracionais**	46

6.1.1 **Comensuráveis e Incomensuráveis** 46
6.2 **Cortes de Dedekind** 48
6.3 **Relação de Ordem Entre os Números Reais** 52
6.4 **Operações em Números Reais** 53
7 **CONCLUSÃO** 63
REFERÊNCIAS 64

1 INTRODUÇÃO

A história da matemática nos dá possiblidades de investigar sobre descobertas e origem numéricas segundo contexto histórico quando o ser humano deixando de ser nômade fixou-se em um só lugar, dedicava-se ao cultivo de certas plantas e à criação de rebanhos ai sentia necessidades de fazer contagem dos seus rebanhos, medir áreas que ele precisava fazer cultivo então ele precisava contar e numerar as coisas. A partir dai que surgiram os números, não é possível determinar uma data exata para a aparição dessa forma de linguagem, mas provavelmente, ela precedeu de vários milhões de anos à aparição da escrita.

Quando antigas civilizações como Egípcios, Mesopotâmia ou Babilônia, Romana, Chinesa, Grego, Maia, Indo-Arábica sentiam necessidades de efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado. A partir daí cada civilização desenvolveu o sistema de numeração ou um sistema numérico de acordo com a ordem da grandeza dos objetos.

Indo-Arábico é um sistema de numeração que foi adotado por matemáticos persas e árabes na Índia e repassado para outros povos ao longo do tempo eles utilizavam um sistema decimal são os dez dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\ e\ 9$, criados com base no sistema numérico Indo-arábico o sistema mais comum para a representação simbólica de números no mundo atual.

Assim de acordo com o sistema de numeração do Indo-Arábico que hoje, o que chamamos conjuntos dos números naturais se baseiam do latim que significa Número [Do lat. Numeru.], o conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$. Segundo (Lima, 2012) os números são entes abstrato, desenvolvidos pelo homem como modelos que permite contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza. Com isso a matemática nos fornece modelos abstratos para serem utilizadas em situação concretas do dia-a-dia e das ciências.

Inicialmente fazemos um capítulo de preliminares tratando das noções básicas de conjunto, par ordenado, produto cartesiano e por fim abordamos a relação de equivalência, usando $\Re$ para denotar relação de equivalência.

No terceiro capítulo começamos a construção dos números naturais através de axiomas de Peano e para construímos os números naturais usamos os conceitos de sucessor e antecessor de um número natural. Abordamos operações, propriedades e ordem dos naturais.

No quarto e quinto capitulo que é construção dos números inteiros e números racionais, construímos com base baseando no conceito relação de equivalência. Abordamos também as operações, propriedades e relação de ordem.

No sexto capitulo construímos os números reais começando pela comensurabilidade e incomensurabilidade onde os matemáticos do século XIX principalmente os gregos na escola pitagórica queriam dar explicação sobre teorias sobre razões envolvendo comensuráveis e incomensuráveis baseando pela diagonal de um quadrado que mede lados 1. Em seguida mostramos o trabalho de Dedekind sobre os números reais. Outros matemáticos do século XIX cuidaram da construção dos números reais, entre eles karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor mas a teorias dos números reais que permaneceram foram a de Dedekind e de Cantor. Entretanto neste trabalho de conclusão do curso vamos trabalhar com as teorias desses autores citadas ,vamos nos concentrar mais nas ideias de Dedekind, procurando dar uma boa compreensão de todo o seu trabalho principalmente da propriedade e teoremas dos números reais.

Por fim apresentamos uma conclusão e as referências bibliográficas que serviram como base para este trabalho.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo estudaremos a noção intuitiva dos conjuntos, par ordenado, produto cartesiano e relação de equivalência que são conceitos necessários para que se definam construções numéricas.

2.1 Conjuntos

Abordaremos um pouco do conceito de conjunto, com isso admitiremos a noção intuitiva de conjuntos e particularmente nesta seção o nosso maior foco é estudar conceitos rigorosos dos conjuntos numéricas e das suas propriedades básicas de suas operações.

Agora definiremos o conjunto da seguinte maneira:

Definição 2.1 *Um conjunto é qualquer coleção, dentro de um todo de objetos definidos e destinguíveis chamados elementos da nossa intuição ou pensamento.*

Exemplo 2.1 *O conjunto de todas as cadeiras na sala de aula.*

Exemplo 2.2 *O conjunto de todos os estudantes na Unilab.*

Exemplo 2.3 *O conjunto de todos os números naturais.*

Exemplo 2.4 *O conjunto de todos os números inteiros;*

Exemplo 2.5 *O conjunto dos países de língua portuguesa;*

Neste trabalho adotaremos letras maiúsculas para denotar conjuntos e letras minúsculas para denotar elementos.

Exemplo 2.6 *Se m é elemento de um conjunto M, então escrevemos $m \in M$ e lemos "m pertence a M". Caso contrário escrevemos $m \notin M$ e lemos "m não pertence ao conjunto M".*

Os conjuntos são frequentemente designados fechando-se entre chaves os símbolos que representam seus elementos, quando pretendemos escrevê-lo:

Exemplo 2.7 $M = \{a, b, c, d, e\}$

Exemplo 2.8 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...m, ...\}$ *(Números Naturais)*

Exemplo 2.9 $\mathbb{Z} = \{..., -k, ..., -1, 0, 1, ..., m, ...\}$ *(Números Inteiros)*

Quando o conjunto não tem elementos, é chamado de conjunto vazio e denotado pelo símbolo $\emptyset$. Quando temos dois conjuntos A e B onde todos os elementos do conjunto A pertencem a um conjunto B dizemos que A está contido em B ou A é subconjunto de B e denotamos por $A \subset B$.

Definição 2.2 *Dois conjuntos A e B são iguais ou idênticos quando contêm os mesmos elementos. Isto é, $A = B$ significa que $(\forall x)[(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$.*

Definição 2.3 *Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A é elemento de B, então A é chamado um subconjunto de B. Em símbolos: $A \subset B$ou $B \supset A$. Se A é subconjunto*

de B, então B é chamado um superconjunto de A.
Assim, escrevendo logicamente,

$$A \subset B \equiv (\forall x)[(x \in A) \Rightarrow (x \in B)].$$

2.1.1 Conjunto das Partes

Definição 2.4 *Seja A um conjunto. O conjunto das partes de A, ou conjunto das potências de A, denotado por $P(A)$, é o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A.*
Exemplo 2.10 *Se $A = \{a, b\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.*
Exemplo 2.11 *Se $A = \{c\}$, então $P(A) = \{\emptyset, \{c\}\}$.*
Exemplo 2.12 *Se $A = \emptyset$, então $P(A) = \{\emptyset\}$, pois $\emptyset$ é o único subconjunto de A.*
Exercício 2.1 *Descreva $P(A)$ quando $A = \{1, 2, 3\}$*
Solução. *Como $A = \{1, 2, 3\}$. Então $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;*

2.1.2 Par Ordenado e Produto Cartesiano

Antes de falarmos da relação de equivalência gostaria falar um pouco sobre par ordenado e produto cartesiano. Não é o foco neste trabalho mas é pré-requisito para os próximos capítulos.

Um **par ordenado** $p = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado de primeira coordenada de p e um objeto y, chamado de segunda coordenada de p. Dois pares ordenados $p = (x, y)$ e $q = (u, v)$ serão chamados iguais quando tiverem a mesma primeira coordenada e a mesma segunda coordenada. É permitido considerar o par ordenado (x, x) no qual a primeira coordenada coincide com a segunda.
O par ordenado $p = (x, y)$ não é a mesma coisa que o conjunto $\{x, y\}$ porque $\{x, y\} = \{x, y\}$ sempre, mas $(x, y) = (x, y)$ somente quando $x = y$.

O **produto cartesiano** $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada x pertence a X e cuja segunda coordenada y pertence a Y. Simbolicamente:

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}.$$

Definição 2.5 *Dado um conjunto A, o produto cartesiano de A por A, denotado por $A \times A$, é o conjunto de todos os pares ordenados compostos por elementos de A, isto é, $A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$.*
Exemplo 2.13 *Se $A = \{1, 2\}$, então $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.*
Se $A = \emptyset$, então $A \times A = \emptyset$.
Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

2.2 Relação de Equivalência

Vamos abordar relação de equivalência de forma superficial. Não vamos aprofundar o tema, só para ter noção sobre relação de equivalência. Relações de equivalência são particularmente importantes na matemática moderna e bem útil nos sistemas numéricos.

Dado um conjunto A qualquer, chamamos de relação binária sobre o conjunto A todo subconjunto R de $A \times A$. Assim dizemos que R é uma relação de equivalência sobre o conjunto A, e denotemos por $\Re$, se os elementos a, b e $c \in A$ obedecem as seguintes propriedades:

1. **Reflexiva**

   Definição 2.6 *Dizemos que $\Re$ é reflexiva quando todo elemento a se relaciona a si mesmo. Ou seja, quando, para todo $a \in A$ então $a\Re a$.*

   Exemplo 2.14 *A relação $A = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$ e $B = \{(a, b, c)\}$ é reflexiva porque existe relação entre o mesmo elemento , $a\Re a, b\Re b$ e $c\Re c$.*

   Observação 2.1 *Notemos que uma relação A sobre B não é reflexiva quando existe um elemento a em B tal que (a não se relaciona com a).*

2. **Simétrica**

   Definição 2.7 *Dizemos que $\Re$ é simétrica se $a\Re b$ então $b\Re a$, ou seja, se $a\Re c$, então $c\Re a$.*

   Exemplo 2.15 *A relação $A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, c)\}$ é uma relação simétrica sobre $B = \{a, b, c\}$.*

   Observação 2.2 *Notemos que uma relação A sobre B não é simétrica se existem a e b em B tais que $a\Re b$ e (b não se relaciona com a).*

3. **Transitiva**

   Definição 2.8 *Dizemos que A é transitiva se $a\Re b$ e $b\Re c$ então $a\Re c$*

   Exemplo 2.16 *A relação $A = \{(a, b), (b, b), (b, c), (a, c), (c, c)\}$ sobre $B = \{(a, b, c)\}$ é transitiva.*

   Observação 2.3 *A propriedade transitiva sobre o conjunto dos números naturais esta definida por aRb se e somente se , $a \leq b$ é transitiva, pois dados três naturais a, b e c tem-se: $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.*

   Observação 2.4 *Notemos que uma relação A sobre B não é transitiva se existirem a, b e c em B tais que $a\Re b$, $b\Re c$, e (a não relaciona com c). Assim por exemplo, a relação $A = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, c)\}$ sobre $B = \{(a, b, c)\}$ não é transitiva, pois $a\Re b$, $b\Re c$ e (a não relaciona com c).*

4. **Antissimétrica**

   Definição 2.9 *Dizemos que A é antissimétrica se $a = b$ sempre que $a\Re b$ e $b\Re a$. ou seja, se $a\Re b$ e $b\Re a$, então $a = b$*

   Exemplo 2.17 *A relação $A = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a)\}$ sobre $B = \{(a, b, c)\}$ é* *antissimétrica.*

Observação 2.5 *A relação* $\Re$ *de divisibilidade sobre o conjunto dos números naturais* $a\Re b$ *se e somente se* $a \mid b$ *(lê-se* $''a$ *é divisor de* b'' *) é antissimétrica, pois, dados dois números naturais,*a *e* b *se* $a \mid b$ *e* $b \mid a$*, então* $a = b$*.*

Observação 2.6 *Notemos que uma relação* A *sobre* B *não é antissimétrica se existirem* a *e* b *em tais que* $a \neq b$ *e* $a\Re b$ *e* $b\Re a$*.*

$A = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$ *sobre* $B = \{(a,b,c)\}$ *não é antissimétrica, pois* $b \neq c$*,* $b\Re c$ *e* $c\Re b$*.*

3 CONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS

Os números naturais se remetemos aos tempos mais antigos pela necessidade o ser humano de contar seus objetos fazendo comparações dos seus conjuntos de objetos com valores abstratos que tornaram mais organizados e preciso a noção de quantidade. E por conta desse processo de contagem que decorreu muitos milênios, podemos hoje descrever concisa e precisamente o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, valendo-nos da notável síntese feita pelo matemático Italiano Giuseppe Peano no século XIX.

Chamamos $\mathbb{N}$ um conjunto cujos elementos são chamados números naturais e forma da caraterização de $\mathbb{N}$ reside na palavra "sucessor" Intuitivamente, quando n, $n^{'} \in \mathbb{N}$, dizer que $n^{'}$ é o sucessor de n significa que $n^{'}$ vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n' Evidentemente, está explicação apenas substitui o sucessor n por $n + 1$. Portanto não é uma definição. O termo primitivo "sucessor" não é definido explicitamente. Seu uso e suas propriedades são regidos por algumas regras, abaixo enumeradas:

1. todo número natural tem um único sucessor;
2. número naturais diferentes tem sucessores diferentes;
3. existe um único número natural, chamado um representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.
4. seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \subset X$ e se além disso, sucessor de todo elemento de x ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Os itens acima citadas são conhecidos como os Axiomas de Peano. Tudo o que vamos falar dos números naturais pode ser demonstrado como consequências desses axiomas.

Exemplo 3.1 *Mostre que* $n \neq s(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Faremos a prova por indução, definindo o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} : n \neq s(n)\}$ assim considerando dois passos a seguir:

1. Provar que $1 \in X$. Pelo terceiro axioma de peano existe um único número natural, chamado 1 que não é sucessor de nenhum outro natural, logo $1 \neq s(1)$ e portanto $1 \in X$.
2. Suponha que um natural $k \in X$, então $s(k) \neq k \Rightarrow s(s(k)) \neq s(k)$, onde usamos o segundo axiomas de peano. Dessa forma, tem-se $s(k) \in X$, portanto 4ª axioma de peano garante que$X = \mathbb{N}$.

Então para enumera-lo recorremos ao processo, chamado Sistema de Numeração Decimal que permite representar todos os números naturais com o auxílio dos símbolos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Além disso, os primeiros números naturais têm o sucessor, excepto o número 1 que não tem sucessor, e o resto números, por exemplo, número "dois" o sucessor de dois chama-se "três" e o sucessor de "três" chama-se "quatro", ... A partir de um certo ponto, esses nomes tornam-se muito complicados, sendo preferível abrir mãos deles e designar os grandes números por sua representação decimal. (Na realidade os números

muito grandes não possuem nomes. Por exemplo, como se chamaria o número 10^{2000}?).
Podemos perceber que conjuntos de $N = 1, 2, 3...$ dos números naturais é sequência de objetos abstratos que, em princípio vazios de significado. Cada um desses objetos (um número natural) possui um lugar determinado nesta sequência. Nenhuma outra propriedade lhe serve de definição. Todo número tem um sucessor (único), e com exceção de 1, tem também um único antecessor (número do qual é sucessor).
Podemos dizer também que os números naturais são números ordinais: 1 é o primeiro, 2, é o segundo, etc.
Observação 3.1 *Nós consideramos o zero (0) como número natural porque desde ensino básico, fundamental, ensino médio e universidade sempre os meus professores considerava o zero (0) como o numero natural então aprendemos com eles e consideramos também o zero como o numero natural. Mas quando nos estávamos estudar a disciplina de analise da reta no semestre 2017.1 o nosso professor de analise disse que a consideração de zero como número natural é questão de preferencial.*

Na matemática grega, segundo apresentado pelo (Lima, 2016) que os gregos não consideravam 1 como um numero mas como unidade. Então ele nos convida a não dar muita importância á eterna questão de saber se 0 (zero) deve ou não ser incluído entre os números naturais.

3.1 Axiomas da Indução

Para demonstrar como são construindo os números naturais recorremos ao ultimo axiomas de Peano que é conhecido como axioma da Indução. Ele é base de um eficiente método de demonstração de proposição referentes a número naturais (demonstração por indução, ou por recorrência). Enunciado sob a forma de propriedade em vez de conjuntos, ele se formula assim:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

$i)$ $P(1)$ é verdadeiro;

$ii)$ se para $P(n)$ é verdadeiro, implica que $P(n')$ também é verdadeiro onde n' é o sucessor de n.

Então n é verdadeiro para qualquer que seja o número natural $n \in \mathbb{N}$.
Com efeito, se chamamos de X o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é valido, veremos que $1 \in X$ em virtude de $i)$ e que n e $X \Rightarrow n' \in X$ em virtude de $ii)$. Logo, pelo axioma da indução, concluímos que $X = \mathbb{N}$.
Exemplo 3.2 *Queremos provar a validade, para todo número natural n, da igualdade*

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Prova: Para demonstra-lo usaremos indução.
Para $n = 1, P(1)$ se resume a afirmar que $1 = 1$.
Supondo que P(n) é verdadeiro para um certo valor de n, somamos $2n + 1$ ambos os

membros da igualdades acima, obtendo

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1,$$

ou seja :

$$1 + 3 + 5 + ... + [2(n + 1) - 1] = (n + 1)^2.$$

Mas esta última igualdade é $p(n + 1)$. Logo $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Assim, $p(n)$ é valido para todo $n \in \mathbb{N}$. Então concluímos que $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

3.2 Operações e Propriedades dos Números Naturais

Entre os números naturais estão definidas duas operações fundamentais, adição e multiplicação onde, representamos a soma $n + p$ para todo $p \in \mathbb{N}$ e a multiplicação, que lhes associa o produto $n.p$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

A soma $n + p$ é número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar o sucessor. Em particular, $n + 1$ é sucessor de n; $n + 2$ é o sucessor do sucessor de n; etc. Por exemplo, tem se $2 + 2 = 4$ simplesmente porque 4 é o sucessor do sucessor de 2.

Daqui para frente; o sucessor do número natural n, será designado por $n + 1$.

Quanto ao produto, põe-se $n.1 = n$ por definição e, quando $p \neq 1$; np é a soma de p parcelas iguais a n.

Como vimos que a soma $n+p$ e o produto $n.p.$ por isso as operações fundamentais devem ser definidas por indução como se segue.

Adição: $n + 1 =$ sucessor de n e $n + (p + 1) = (n + p) + 1$. Esta última igualdade diz que se sabemos somar p á todos os números naturais n, sabemos também somar $p + 1$: a soma $n + (p + 1)$ é simplesmente o sucessor $(n + p) + 1$ de $n + p$. O axioma da indução garante que a soma $n + p$ está definida para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$.

Multiplicação: $n.1 = n$ e $n(p + 1) = np + n$. Ou seja: Multiplicar um número n por 1 não altera. E se sabemos multiplicar todos os números naturais n por p, sabemos também multiplicá-los por $p + 1$: basta tomar $n(p + 1) = np + n$.

3.2.1 Propriedades da Adição dos Números Naturais

Definição 3.1 *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, definimos a soma deste números por $m + 1 = s(m)$ e $m + s(n) = s(m + n)$*

Propriedades da Adição;

[**A.1**]**Associatividade**: $m + (n + p) = (m + n) + p$; $\forall m, n$ e $p \in \mathbb{N}$;

[**A.2**]**Comutativa**: $m + n = n + m; \forall m$ e $n \in \mathbb{N}$

[**A.3**]**Lei de corte**: $m + p = n + p \Rightarrow m = n$; $\forall m, n$ e $p \in \mathbb{N}$;

[**A.4**]**tricotomia**:Dados $m, n \in \mathbb{N}$ ou $m = n$, ou existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$,ou existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Seguem as demonstrações:

A.1 Dado $X = p, m + (n + p) = (m + n) + p, \forall m, n\ e\ p \in \mathbb{N}$.

A prova será feita por indução sobre p, tomando m, n fixos;

i)Dado, $1 \in X$, pois ora $p = 1$, pela definição temos que para $p = 1$, $m + (n + 1) = m + s(n) = (m + n) + 1$;

ii) Suponhamos valido para um $p \in \mathbb{N}$ daí temos $m + (n + p) = (m + n) + p$;

iii) Agora vamos verificar para $p + 1$, $m + (n + (p + 1)) = m + (n + (s(p)) = m + s(n + p)$ $= s(m + (n + p)) = s((m + n) + p)$ pela hipótese (ii) $= (m + n) + s(p) = (m + n) + p + 1 \Rightarrow$ $m + (n + (p + 1)) = (m + n) + p + 1$.

como $1 \in X,\ e\ p \in X \Rightarrow p + 1 \in X$,. Concluímos por indução que $X = N$, ou seja $m + (n + p) = (m + n) + p, \forall m, n$ e $p \in \mathbb{N}$.

[**A.2**] Dado $X = p, m + p = p + m, \forall m, p \in \mathbb{N}$ Agora, a prova será feita por indução sobre p, tomando m fixo.

i) tomando $p = 1$;

i.1) se $m = 1$, temos $1 + 1 = 1 + 1$, logo $1 \in X$;

i.2) se $m \neq 1$ podemos escrever $m = m_1 + 1$ com isso $m + 1 = (m_1 + 1) + 1 = m_1 + (1 + 1)$ $= 1 + (m_1 + 1)$ pela associatividade $\Rightarrow m + 1 = 1 + m$;

ii) suponhamos válido para um $p \in \mathbb{N}$, temos $m + p = p + m$.

iii) Agora iremos verificar para $p + 1$, $m + (p + 1) = (m + p) + 1$ (pela associatividade) $\Rightarrow (p + m) + 1$,(de ii) $= p + (m + 1) = p + (1 + m) = (p + 1) + m \Rightarrow m + (p + 1) = (p + 1) + m$.

como $1 \in X$, e $p \in X \Rightarrow p + 1 \in X$, Concluímos por indução que $X = N$,ou seja, $m + p$ $= p + m, p \in \mathbb{N}$.

[**A.3**] Dado $X = p, m + p = n + p \Rightarrow m = n, \forall m, n\ e\ p \in \mathbb{N}$

A prova será feita por indução sobre p, tomando m e n fixos.

i) Dado, $1 \in X$, pois seja $p = 1$, temos $m + 1 = n + 1 \Rightarrow s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$ (pela injetividade);

ii) Suponhamos válido para um $p \in \mathbb{N}$, temos $m + p = n + p \Rightarrow m = n$;

iii) Agora vamos verificar para p+1, $m + (p + 1) = (m + p) + 1$ (pela associatividade) $=$ $(n + p) + 1 \Rightarrow s(m + p) = s(n + p) \Rightarrow m + p = n + p(\textit{pela injetividade}) \Rightarrow m = n$ (por ii) como $1 \in X$ e de $p \in X \Rightarrow p + 1 \in X$, Concluímos, por indução, que $X = \mathbb{N}$, p seja, $m + p = n + p \Rightarrow m = n, \forall m, n$ e $p \in \mathbb{N}$.

[**A.4**] Deixaremos esta a demonstração para após definirmos a ordem dos números naturais;

$\blacksquare$

3.2.2 Propriedades da Multiplicação dos Números Naturais

Definição 3.2 *Dados* $m, n \in \mathbb{N}$ *,definimos o produto destes números por* $m.1 = m$ *e* $m(n+1) = m.n + m$

Propriedades da Multiplicação

[M.1] Associativa: $m.(n.p) = (m.n).p; \forall m, n$ e $p \in \mathbb{N}$;

[M.2] Comutativa: $m.n = n.m; \forall m$ e $n \in \mathbb{N}$;

[M.3] Lei de corte: $m.p = n.p \Rightarrow m = n \ \forall m, n \ e \ p \in \mathbb{N}$;

[M.4] Distribuitiva:$m(n+p) = m.n + m.p \ \forall m, n$ e $p \in \mathbb{N}$.

Seguem as demonstrações:

Vamos começar demonstrando [M.4], pois, pela definição já vimos que ela indica a validez da propriedade associativa.

[**M.4**] Seja $X = p; m(n+P) = m.n + m.p, \forall m, n \ e \ p \in \mathbb{N}$.

Prova será feita por indução sobre p, tomando m, n naturais fixos.

i) Ora, $1 \in X$, pois seja $p = 1$, temos $m(n+1) = m.n + m$ (da definição).

ii) suponhamos válido para um $p \in \mathbb{N}$, ou seja, $m(n+p) = m.n + m.p$;

iii) Agora iremos verificar para um $p+1, m(n+(p+1)) = m((n+p)) = m(n+p)+m$ (da definição)= $(m.n+m.p)+m = m.n+(m.p+m)$ (associativa da adição)= $m.n+m.(p+1)$; como $1 \in X$ e $p \in X \Rightarrow p+1 \in X$. Concluímos, por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m.(n+p)$ $= m.n + m.p, \ \forall m, n \ e \ p \in N$.

[**M.1**] Seja $X = p, m.(n.p) = (m.n).p \ \forall m, n \ e \ p \in \mathbb{N}$

A prova será feita por indução sobre P, tomando m, n naturais fixos

i) Para $p = 1$ temos, $m.(n.1)$ (definição)= $m.n$ =(definição) $(m.n) = (m.n).1$, logo $1 \in X$;

ii) suponhamos válido para um p, ou seja, $m.(n.p) = (m.n).p$ (hipótese de indução)$ii)$ Agora iremos verificar para um $p+1 \in N \ dai \ m.(n(p+1))$ =(definição) $m(n.p+n) =$ $m.(n.p) + m.n$ (de M.3)= $(m.n).p + (m.n).1$,(por ii)= $(m.n)(p+1)$.

como $1 \in X$ e de $p \in X \Rightarrow p+1 \in X$, concluímos por indução que $X = N$, ou seja, $m.(n.p) = (m.n).p \ \forall m, n$ e $p \in \mathbb{N}$.

[**M.2**] seja $X = n : m.n = n.m, \forall m, n \in \mathbb{N}$

A prova será feita por indução sobre n tomando m um natural fixo.

i) Ora $1 \in X$, pelo definição;

ii) Suponhamos válido para um $n \in \mathbb{N}$ ou seja $m.n = n.m$

iii) Agora iremos verificar para um $n+1 \in \mathbb{N}, m.(n+1) =$ (definição) $m.n+m = n.m+m$ (por ii)pela lei do cancelamento da edição temos que $m.n = n.m$, logo iii) verdadeiro como $1 \in X$, e de $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$. Concluímos por indução, que $X = N$, ou seja, $m.n =$ $n.m, \ \forall m \ e \ n \in \mathbb{N}$.

[**M.3**] Seja $X = p, \ m.p = n.p \Rightarrow m = n, \forall m, n \in \mathbb{N}$

A prova será feita por indução sobre p tomando m, n naturais fixos,

i) Para $p = 1$ temos, $m.1 = n.1 \Rightarrow m = n$ pela definição, portanto $1 \in X$.
ii) Suponhamos valido para um p ou seja, $m.p = n.p \Rightarrow m = n$.
iii) Agora iremos verificar para um $p + 1 \in \mathbb{N}$;
$m.(p + 1)$=$n.(p + 1) \Rightarrow m.p + m = n.p + n$, (pela definição) $\Rightarrow m + m = n + n$, (por ii) $\Rightarrow m$= n.
Como $1 \in X$, e $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$. Concluímos, por indução que $X = \mathbb{N}$, ou seja, $m.p$ = $n.p \Rightarrow m$ =n $\forall m, n$ e $p \in \mathbb{N}$.

■

3.3 Ordem Entre os Números Naturais

Nossa breve descrição é sobre ordem do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) e é escrita pela seguinte, relação de ordem $m < n$.
Definição 3.3 *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que m é menor do que n, e escrevemos $m < n$, então para significar que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. (isto quer dizer que n é o sucessor do sucessor de m, ato de tomar o sucessor sendo iterado p vezes).*
A relação $m < n$ tem as seguintes propriedades :
[P.1] Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.
[P.2] Tricotomia: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m = n, m < n$ ou $n < m$;
[P.3] Monotonicidade: Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$.

Seguem as demonstrações das propriedades de ordem dos números naturais.
[P.1] seja $m < n$ e $n < p$, temos pela definição de ordem que existe r e $s \in \mathbb{N}$ tais que $m + r = n$ e $p = n + s$, daí obtemos que $p = (m + r) + s = m + (r + s) \Rightarrow p = m + (r + s)$, pela definição temos $m < p$.
[P.2] Diremos que os números naturais m, n são comparáveis quando se tem $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.
seja X= (p, p é comparável a um m, p e $m \in \mathbb{N}$)
i) Dado, $1 \in X$, como já vimos, sendo $m \neq 1$ temos $1 > m$.
ii) Suponhamos válido para um $p \in \mathbb{N}$, ou seja, p é comparável a um número natural m.
iii) agora iremos verificar para $p + 1$, sabemos de (ii), que podemos ter $m < p$, ou $m = p$, ou $p < m$, vamos verificar cada uma das possiblidades;

1. $m < p$, temos que $p < p + 1$ e daí por transitividade teremos que $m < p + 1$.
2. $m = p$, onde $m = p < p + 1$, então $m < p + 1$.
3. E por fim , $p < m$, então $m = p + n$, neste caso temos as seguintes possiblidades, ou se tem $n = 1$ e daí $n = n + 1$ e consequentemente $m = p + (n + 1)$, então $m < p + 1$.

Como isso vimos que $p+1$ é comparável a qualquer número natural m.

[P.3] Analisaremos as seguintes situações:

1. Se $m < n$ e $m = n$, existiria um $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m+p$ e $m = n$, entao $n = n+p$; com isso obtemos $n+1 = (n+p)+1 \Rightarrow n+1 = n+(p+1) \Rightarrow 1 = p+1 \Rightarrow 1 = s(p)$, absurdo!
2. Se $m < n$ e $m > n$, existiria um p e $q \in \mathbb{N}$, tais que $n = m+p$ e $m = n+q \Rightarrow m = (m+p)+q \Rightarrow m+1 = m+(p+q)+1 \Rightarrow 1 = (p+q)+1 \Rightarrow s(p+q) = 1$, absurdo!
3. $m < n$ e $m = n$, segue análogo a 1ª.

[P.4] Analisares também pela seguintes situações:

1. Se $m < n$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m+r$, dai $n+p = (m+r)+p \Rightarrow n+p$ $= (m+p)+r \Rightarrow n+p > m+p$.
2. Se $m < n$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m+r$, dai $n.p = (m+r).p \Rightarrow n.p = m.p + r.p \Rightarrow n.p > m.p$.

■

3.3.1 Boa Ordenação e o Segundo Princípio de Indução

Definição 3.4 *Dados $X \subset \mathbb{N}$ e $p \in X$, dizemos que:*
a)p é menor elemento de X (ou elemento mínimo), quando $p \leq X$ para todo $x \in X$.
b) p é maior elemento de X (ou elemento máximo), quando $p \geq X$ para todo $x \in X$.
Observação 3.2 *O menor elemento de um conjunto X (ou elemento mínimo) é o maior elemento de um conjunto X(ou elemento máximo), caso existam, serão denotado para min(x) e max(x), respectivamente.*
Proposição 3.1 *Dados um conjunto $X \subset \mathbb{N}$,temos que:*
a)Se x admite um menor elemento, então este seria único.
b)Se x admite um maior elemento, então este seria único.
Demonstração:
a) Suponha por absurdo a existência de dois elementos mínimos de X, denotados por p_1 e p_2. Nestas condições, tem-se que:

- $P_1 \leq X$ para todo $x \in X$; em particular $p_1 \leq p_2$.
- $P_2 \leq X$ para todo $x \in X$; em particular $p_2 \leq p_1$.

Diante das conclusões acima, segue-se $p_1 = p_2$:
Teorema 3.1 ***Princípio de Boa Ordenação****: Todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.*
Demonstração: Considere o conjunto $In := \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n,\}$ ou seja, $In = \{1, 2; ...n\}$. Dai definimos o conjunto $A := \{n \in \mathbb{N} : In \subset \mathbb{N} - X\}$ Ou seja se tivermos $n \in A$; logo $n \in X$ e todo natural menor que também não pertencem a X.
Podemos analisar dois casos distintos:

1. $1 \in X$ neste caso,1 seria o menor elemento de X e pela Proposição 3.1 estaria aprovado.
2. $1 \in X$ neste caso tem-se $1 \in A$ e além disso, observe que $A \neq \mathbb{N}$, pois X é não vazio.

Dessa forma, podemos afirmar pelo **1ª principio da indução** que existe $n \in A$, tal que $n + 1 \in A$, ou seja, todos os naturais, a partir de 1 até n pertencem ao complementar de X e $n + 1$ pertencem a X, então $n + 1$ será o menor elemento de X.

$\blacksquare$

Proposição 3.2 *(**2º principio de Inducão**): Dados um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$, satisfazendo a propriedade:*

- *Se todos os números naturais menores que $K + 1 \in \mathbb{N}$ pertencem a X, então $k + 1 \in X$.*

Nestas condições, temos que $X = \mathbb{N}$.

Demonstração: Defina $Y := \mathbb{N} - X$ e suponha por absurdo que $y \neq 0$; então existe um elemento mínimo, $p \in y$; logo $k \in X$ para todo $k < P$ e assim $p \in X$; que é uma contradição.

$\blacksquare$

4 CONJUNTOS DOS NÚMEROS INTEIROS

Neste capitulo faremos uma construção rigorosa com todas as demonstrações precisas do conjunto dos números inteiros, através das noções básicas de Teoria dos Conjuntos e de relações de equivalência.

4.1 Construção do Conjunto dos Números Inteiros

A construção dos números inteiros que vamos trabalhar aqui vai ser baseado pela relação de equivalência no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Segundo (Ferreira, 2013)um número inteiro será então definido como classe de equivalência dada por essa relação. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros será portanto o conjunto de classes de equivalência. Definiremos duas operações aritméticas em $\mathbb{Z}$ e mostraremos que $\mathbb{Z}$ é copia algébrica de $\mathbb{N}$, num sentido que precisaremos oportunamente. Enfim definiremos a operação de subtração em $\mathbb{Z}$ que , restrita a elementos da cópia de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, trará as operações do tipo 7-9 e ás demais operações ao longo desenvolvimento deste capitulo.
Teorema 4.1 *A relação* $\Re$ *em* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *definida por* $(a, b)\Re(c, d)$ *quando* $a + d = b + c$ *é uma relação de equivalência.*
Observação 4.1 *Se admitirmos por algum momento os nossos pensamentos sobre os números inteiros e de subtração, então perceba que* $a + d = b + c \iff a - b = c - d$*, isto é, dois pares ordenados são equivalentes segundo a definição acima, quando a diferença entre suas coordenadas, na mesma ordem, coincidem.*
Logo vamos seguir a demonstração do **Teorema** acima citado.
Demonstração.

1. **Reflexividade**: Se $(a, b)\Re(a, b)$, pois $a + b = b + a$. para todo $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
   Assim, a reflexividade de $\Re$ é herança da comutatividade da adição em $\mathbb{N}$.

2. **Simetria**: Se $(a, b)\Re(c, d) \Rightarrow (c, d)\Re(a, b)$. para todos (a, b) e $(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
   Demonstração: Se $(a, b)\Re(c, d) \Rightarrow a+d = b+c \Rightarrow c+b = d+a \Rightarrow c+d = d+a \Rightarrow (c, d)\Re(a, b)$.

3. **Transitividade**: Se $(a, b)\Re(c, d)$ e $(c, d)\Re(e, f) \Rightarrow (a, b)\Re(e, f)$. Para todos $(a, b)(c, d)$ e $(e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   Demonstração: Se $(a, b)\Re(c, d)$ *e* $(c, d)\Re(e, f)$ segue $a + d = b + c$; $c + f = d + e$, assim associamos cada igualdade teremos:
   $a + d + c + f = b + c + d + e$
   $a + (d + c) + f = b + (c + d) + e$
   $a + f + (d + c) = b + e + (c + d)$

cortamos pares semelhantes e resta somente

$a + f = b + e \Rightarrow (a,b)\Re(e,f)$

Notação Se (a,b) é um elemento qualquer de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; denotemos por $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência de (a,b) pela relação $\Re$, isto é $\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : (x,y)\Re(a,b)\}$.

Definição 4.1 *O conjunto quociente* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\Re$, *constituído pelas classes de equivalência (a,b), se denota por* $\mathbb{Z}$ *e será chamado de conjunto dos números inteiros.*

Assim,

$\mathbb{Z} = (\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\Re) = \{\overline{(a,b)} \mid (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$.

4.2 Operações em Números Inteiros

No conjunto dos números inteiros são definidas também duas operações que são : Adição e multiplicação.

4.2.1 Adição de Números Inteiros

Perceba que no Teorema 4.1, nós dá uma intuitiva de subtração em $\mathbb{Z}$, temos: $(a,b)\Re(x,y)$ que equivale a $\overline{(a,b)} = \overline{(x,y)}$, expressa o fato de que $a - b = x - y$. Vamos usar essa ideia como o ponto de partida para ter uma definição melhor da adição dos números inteiros. Vejamos o que deveria ser $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}.Se\overline{(a,b)}$ expressa, em essência, a "diferença" $(a - b)$ e $\overline{(c,d)}$ expressa $(c-d)$, a matemática elementar nos dá $(a-b)+(c-d) = (a+c)-(b+d)$. Esta ultima expressão se traduz, no nosso contexto, como classe $\overline{(a+b, b+d)}$.

Definição 4.2 *Dados* $\overline{(a,b)}$ *e* $\overline{(c,d)}$ *em* $\mathbb{Z}$, *definimos a soma* $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$ *como sendo o inteiro* $\overline{(a+c, b+d)}$.

Por exemplo , pela definição acima teríamos que $\overline{(3,5)} + \overline{(4,1)} = \overline{(7,6)}$. No entanto, $\overline{(2,4)} = \overline{(3,5)}$ e $\overline{(3,0)} = \overline{(4,1)}$, logo deveríamos ter $\overline{(2,4)} + \overline{(3,0)}$ também $\overline{(3,5)} + \overline{(4,1)}$ que iguala $\overline{(7,6)}$. Pela definição dada,$\overline{(2,4)} + \overline{(3,0)} = \overline{(5,4)}$ infelizmente, não é igual a $\overline{(7,6)}$. Em seguida mostraremos que a definição acima dada não depende dos representantes das classes de equivalência envolvidas. Diz-se neste caso que a adição está bem definida.

Teorema 4.2 *Se* $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ *e* $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, *então* $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a'+b')} + \overline{(c'+d')}$, *isto é, a adição de números inteiros está bem definida.*

Demonstração. Lembre da ideia de relação de equivalência estudada no capitulo anterior temos $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$, então $(a,b)\Re(a',b')$, isto é,

1ª equação: a+b'=b+a'.

da mesma temos $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então $(c,d)\Re(c',d')$, isto é,

2ª equação: c+d'=d+c'

temos:

$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}$ e $\overline{(a',b')} + \overline{(c',d')} = \overline{(a'+c', b'+d')}$.

Mostremos que dois segundos membros acima coincidem. Isso equivale a mostrar que $(a+c)+(b'+d')=(b+d)+(a'+c')$. Usando 1ª e 2ª equação teremos:
$(a+c)+(b'+d')=(a+b')+(c+d')=(b+a')+(d+c')=(b+d)+(a'+c')$, como queremos chegar.

∎

Teorema 4.3 *A operação de adição em* $\mathbb{Z}$ *é associativa, comutativa, tem* $0:=\overline{(1,1)}$ *como elemento neutro e vale a lei do cancelamento, como em* $\mathbb{N}$, *Além disso vale a propriedade do elemento oposto(ou simétrico, ou inverso aditivo).*

[**A.1**] **Associativa da adição:** $(\alpha+\beta)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)\ \forall\alpha,\beta$ e $\delta\in\mathbb{Z}$

Demonstração: Sejam $\alpha=\overline{(a,b)}$; $\beta=\overline{(c,d)}$ e $\delta=\overline{(e,f)}$ assim temos:

$(\alpha+\beta)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)$

$$\begin{aligned}
[\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}]+\overline{(e,f)}=\overline{(a,c)}+[\overline{(b,d)}+\overline{(e;f)}]
&=\overline{(a+b)}+[\overline{(c+e,d+f)}]\\
&=[\overline{a+(c+e),b+(d+f)}]\\
&=[\overline{(a+c)]+e,[(b+d)+f}]\\
&=\overline{(a+c,b+d)}+\overline{(e+f)}\\
&=[\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}]+\overline{(e,f)}=\alpha+(\beta+\delta).
\end{aligned}$$

[**A.2**] **Comutativa da adição:** $\alpha+\beta=\beta+\alpha\ \forall\alpha$ e $\beta\in\mathbb{Z}$

Demonstração: Sejam $\alpha=\overline{(a,b)}$; $\beta=\overline{(c,d)}$ assim temos:

$\alpha+\beta=[\overline{(a,b)}]+[\overline{(c,d)}]$

$=[\overline{(a+c,b+d)}]$

$=[\overline{(c+a,d+b)}]$

$=[\overline{(c,d)}]+[\overline{(a,b)}]=\beta+\alpha.$

[**A.3**] **Elemento neutro da adição:** $\alpha+0=0+\alpha=\alpha\ \forall\alpha\in\mathbb{Z}$

Demonstração: Suponhamos que $\alpha=\overline{(a,b)}$ pois tem-se $0=\overline{(1,1)}$ tal que $\alpha+0=\alpha$, assim temos:

$\alpha+0=[(a,b)]+[(1,1)]$

$=[\overline{(a+1,b+1)}]$

$=[\overline{(a,b)}]=\alpha.$

[**A.4**] **Cancelamento da adição:** $\alpha+\beta=\delta+\beta=\alpha=\delta$, $\forall\alpha,\beta$ *e* $\delta\in\mathbb{Z}$.

Demonstração: Dado $\alpha=\overline{(a,b)},\beta=\overline{(c,d)}$ e $\delta=\overline{(e,f)}$,assim temos: $\alpha+\beta=\delta+\beta$

$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(e,f)}+\overline{(c,d)}$

$\Rightarrow\overline{(a+c,b+d)}=\overline{(e+c,f+d)}$

$\Rightarrow\overline{(a+c)}=\overline{(f+d)}=\overline{(b+d)}+\overline{(e+c)}$

$\Rightarrow(\overline{a+f}=\overline{b+e})$

$\Rightarrow\overline{(a,b)}=\overline{(e,f)}$

$\Rightarrow\alpha=\delta$

[**A.5**] **Simétrico ou Oposto para a adição:** Existe $\alpha\in\mathbb{Z}$ tal que $\alpha+(-\alpha)=0$. Então podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de subtração, estabelecendo que $\alpha-\beta=\alpha+$

$(-\beta)$ $\forall \alpha$ e $\beta \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Sejam $\alpha = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ e $-\beta = \overline{(b,a)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ onde pares $(n,n) = (1,1)$ assim teremos:

$\alpha + (-\beta) = [\overline{(a,b)}] - [\overline{(b,a)}]$

$= [\overline{(a-b, b-a)}]$

$= [\overline{(a-b, a-b)}]$

$= [\overline{(1,1)}] = 0.$

■

Teorema 4.4 *A subtração em $\mathbb{Z}$, denotada por (-), é a operação definida da seguinte forma: Se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$,então:*

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

Assim, a subtração $\alpha - \beta$ nada mais é do que a soma de α com o simétrico de β.

Proposição 4.1 *Para α, β e $\delta \in \mathbb{Z}$, vale:*

i) $-(-\alpha) = \alpha$;

ii) $-\alpha + \beta = \beta - \alpha$;

iii) $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$;

iv) $-\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$;

v) $\alpha - (\beta + \delta) = \alpha - \beta - \delta$.

Vamos demostrar i) e ii) e deixamos o restante dos itens para os leitores. Assim temos as seguintes demonstrações :

i)Suponhamos que $\alpha = \overline{(a,b)}$, então $-(-\alpha) = -\overline{(b,a)} = \overline{(a,b)} = \alpha$.

ii)Suponhamos que $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ pois $-\alpha = \overline{(b,a)}$ assim temos:

$-\alpha + \beta = \overline{(b,a)} + \overline{(c,d)} = \overline{(b+c, a+d)} = \overline{(c+b, d+a)} = \overline{(c,d)} + \overline{(b+a)} = \beta - \alpha.$

■

4.2.2 Multiplicação de Números Inteiros

Definição 4.3 *Sejam $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ em $\mathbb{Z}$, definimos o produto $\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}$ como sendo o número inteiro $\overline{(ac+bd, ad+bc)}$.*

Por exemplo, pela definição a cima teríamos que $(4,6).(10,9) = (40,54)$. Agora mostraremos em caso geral da definição dada acima que não depende de representantes de classe equivalência envolvida, então aceitamos sempre que ela esta bem definida.

Teorema 4.5 *Se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então $\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} = \overline{(a',b')}.\overline{(c',d')}$, isto é , Multiplicação dos números inteiros está bem definida.*

Teorema 4.6 *A multiplicação em $\mathbb{Z}$ é comutativa, associativa, tem (2,1) como elemento neutro da multiplicação e é distributiva em relação á adição. Além disso, vale a propriedade do cancelamento multiplicativo, isto é se α, β e $\delta \in \mathbb{Z}$, com $\delta \neq \overline{(1,1)}$ e $\alpha\delta = \beta\delta$, logo $\alpha = \beta$.*

Seguem as demonstrações das propriedades multiplicativas dos números Inteiros .

[**M.1**] **Associativa da multiplicação:** $(\alpha.\beta).\delta = \alpha(\beta.\delta)$ $\forall \alpha, \beta$ e $\delta \in \mathbb{Z}$

Demonstração: Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}; \beta = \overline{(c,d)}$ e $\delta = \overline{(e,f)}$ assim temos:

$(\alpha.\beta).\delta = [\overline{(a,b)}.\overline{(c,d)}].\overline{(e,f)}$

$= [(\overline{ac+bd,ad+bc})].\overline{(e,f)}$

$= [(\overline{(ac+bd)}.e + \overline{(ad+bc)}.f, \overline{(ac+bd)}.f + \overline{(ad+bc)}.e)]$

$= [(\overline{ace+bde+adf+bcf}, \overline{acf+bdf+ade+bce})]$

$= [(\overline{ace+adf+bcf+bde}, \overline{acf+ade+bce+bdf})]$

$= [\overline{a(ce+df)} + \overline{b(cf+de)}, \overline{a(cf+de)} + \overline{b(ce+df)}$

$= \overline{(a,b)}.[\overline{(ce+df,cf+de)}]$

$= \overline{(a,b)}.[\overline{(c,d)}.\overline{(e,f)}]) = \alpha.(\beta.\delta).$

[**M.2**]**Comutativa da multiplicação:** $\alpha.\beta = \beta.\alpha$ $\forall \alpha$ e $\beta) \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}; \beta = \overline{(c,d)}$ assim temos:

$\alpha.\beta = [\overline{(a,b)}].[\overline{(c,d)}]$

$= [\overline{(ac+bd,ad+bc)}]$

$= [\overline{(ac+bd,bc+ad)}]$

$= [\overline{(ca+db,cb+da)}]$

$= [\overline{(c,d)}].[\overline{(a,b)}] = \beta.\alpha$

[**M.3**] **Existência da unidade** em $\mathbb{Z} : \alpha.1 = 1.\alpha = \alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Sejam $\alpha = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ e $1 = \overline{(2,1)}$ assim temos:

$\alpha.1 = \overline{(a,b)}.\overline{(2,1)}$

$= [\overline{(a.2+b.1,a.1+b.2)}]$

$= [\overline{(2a+b,a+2b)}]$

$= a + \overline{(a+b)}, b + \overline{(a+b)}$

$= \overline{(a,b)} = \alpha.$

[**D**] **Distributiva da multiplicação relativamente a adição**: $(\alpha.(\beta+\delta) = \alpha.\beta + \alpha.\delta$ $\forall \alpha, \beta$ e $\delta \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}; \beta = \overline{(c,d)}$ e $\delta = \overline{(e,f)}$ assim temos: $\alpha.(\beta).\delta) = \overline{(a,b)}.[\overline{(c,d)}.\overline{(e,f)}]$

$= \overline{(a,b)}.[\overline{(c+e,d+f)}]$

$= [\overline{a(c+e)} + \overline{b(d+f)}, \overline{a(d+f)} + \overline{b(c+e)}]$

$= [\overline{(ac+ae+bd+bf,ad+af+bc+be)}]$

$= \overline{(ac+bd)} + \overline{(ae+bf)}, \overline{(ad+bc)} + \overline{(af+be)}$

$= [\overline{(ac+bd,ad+bc)}] + [\overline{(ae+bf,af+be)}]$

$= \overline{(a,b)}.\overline{(c,d)} + \overline{(a,b)}.\overline{(e,f)}$

$= \alpha.\beta + \alpha.\delta.$

[**M.4**] **Cancelamento multiplicativo**: $\alpha.\beta = \delta.\beta \Rightarrow \alpha = \delta$, $\forall \alpha, \beta$ e $\delta \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}, \beta = \overline{(c,d)}$ e $\delta = \overline{(e,f)} \neq \overline{(1,1)}$ assim temos:

$\alpha.\beta = \delta.\beta =$
$\overline{(ae+bf,af+be)} = (ce+df,cf+de) \Longrightarrow ae+bf+cf+de = af+be+ce+df.$
Usando a aritmética dos naturais nessa igualdade, obtemos:
$e(a+d)+f(b+c) = e(b+c)+f(a+d)$. como $\overline{(e,f)} \neq \overline{(1,1)}$, então $e \neq f$. Suponhamos $e > f$, sem perda de generalidade, o que equivale a $e = f+g$, para algum $g \in \mathbb{N}^*$. Substituindo e por $f+g$ na penúltima igualdade , obtemos:
$f(a+d)+g(a+d)+f(b+c) = f(b+c)+g(b+c)+f(a+d)$. Usando o cancelamento aditivo em $\mathbb{N}$ vem: $g(a+d) = g(b+c)$. Como $g \in \mathbb{N}^*$, segue cancelamento multiplicativo em $\mathbb{N}$ que $a+d = b+c$, ou seja, $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$. Como queríamos, $\alpha = \beta$.

■

4.3 Ordem Entre os Números Inteiros

Definição 4.4 *Sejam* $\alpha = \overline{(a,b)}$ *e* $\beta = \overline{(c,d)}$ $\forall \alpha$ *e* $\beta \in \mathbb{Z}$ *e dizemos que* $\alpha \leq \beta$ *se somente se* $a+d \leq b+c$.

Exemplo 4.1 $\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow a+d \leq b+c$ *onde é definida por* $\mathbb{N}$.

Teorema 4.7 *Ora temos* α, β *e* $\delta \in \mathbb{Z}$ *é uma relação de ordem dos inteiros que possui o sinal* $\leq$ *em* $\mathbb{Z}$ *e apresenta as seguintes propriedades de relação de equivalência.*

1. **Reflexiva**: Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ onde $\alpha \leq \alpha$.
   Demonstração:sejam $\alpha = \overline{(a,b)}$ logo temos
   $\alpha \leq \alpha = \overline{(a,b)} \leq \overline{(a,b)} \Rightarrow \overline{(a+b)} = \overline{(b+a)}$.

2. **Antissimetrica**: Se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ e onde $\alpha = \beta$ $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$;
   Demonstração: Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}$ e $\beta = \overline{(c,d)}$ logo temos:
   $\alpha \leq \beta = \overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} = a+d \leq b+c$ ou $\beta \leq \alpha = \overline{(c,d)} \leq \overline{(a,b)} = b+c \leq a+d$ portanto $\alpha = \beta \Rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.

3. **Transitiva**: Se $\alpha \leq \beta$, $\beta \leq \delta$ então $\alpha \leq \delta$;
   demonstração:Sejam $\alpha = \overline{(a,b)}, \beta = \overline{(c,d)}$ e $\delta = \overline{(e,f)}$ logo temos :
   $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \delta \Rightarrow \alpha \leq \delta$ $(a,b) \leq (c,d)$ e $(c,d) \leq (e,f) = a+d \leq b+c$ e $c+f \leq d+e$
   pois se consideramos ainda existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que
   1ª eq: $\boxed{a+d+m = b+c}$ e $\boxed{c+f+n = d+e}$ **2ª eq:**
   somando igualdades de primeira equação com igualdades da segunda equação teremos:
   $a+d+m+c+f+n = b+c+d+e = a+f+m+n = b+e$ como $m+n \in \mathbb{N}$ podemos concluir que $a+f \leq b+e$ ou seja $(a,b) \leq (e,f)$.

4. **Associatividade da soma**: Se $\alpha \leq \beta$ $\forall \alpha$ β e $\delta \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Sejam $\alpha = (a, b)$, $\beta = (c, d)$ e $\delta = (e, f)$ logo temos:
$(a, b) \leq (c, d) \Rightarrow a + d \leq b + c \Rightarrow a + e + d + f \leq b + f + c + e \Rightarrow (a + e, b + f) \leq (c + e, d + f) \Rightarrow (a, b) + (e, f) \leq (c, d) + (e, f) = \alpha + \delta \leq \beta + \delta.$

5. **Associatividade da multiplicação**: Se $\alpha \leq \beta$ e $\delta \geq 0 \Rightarrow \alpha\beta \leq \beta\delta$;
   Demonstração Sejam $\alpha = (a, b), \beta = (c, d)$ e $\delta = (e, f)$ logo temos:
   $(a, b) \leq (c, d)$ e $(e, f) \geq (1, 1)$
   $(a + d) \leq (b + c)$ e $c \geq f$
   pois podemos considerar que ainda existe $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $b + c = a + d + m$ e $e = f + q$ logo teremos:
   i) $b + c = a + d + m \Rightarrow be + ce = ae + de + me$
   ii) $b + c = a + d + m \Rightarrow bf + cf = af + df + mf$
   iii) $e = f + n \Rightarrow me = mf + mn$
   Logo Somamos o segundo membro da 1ª equação com o primeiro da igualdade 2ªequação e o primeiro membro de 1ª equação com o segundo de 2ª equação, assim teremos:
   $ae + de + mf + mn + bf + cf = be + ce + af + df + mf$
   $ae + de + bf + cf + mn = be + ce + af + df$
   $ae + de + bf + cf \leq be + ce + af + df$
   $(ae + bf, af + be) \leq (ce + df, cf + de)$
   $(a, b).(e, f) \leq (c, d)(e, f) = \alpha.\delta \leq \beta.\delta.$

■

Definição 4.5 *Seja* $(a, b) \in \mathbb{Z}$, *dizemos que:*
i)$\overline{(a, b)}$ é positivo quando $\overline{(a, b)} > \overline{(1, 1)}$;
ii)$\overline{(a, b)}$ é não negativo quando $\overline{(a, b)} \geq \overline{(1, 1)}$;
iii)$\overline{(a, b)}$ é negativo quando $\overline{(a, b)} < \overline{(1, 1)}$;
iv)$\overline{(a, b)}$ é não positivo quando $\overline{(a, b)} \leq \overline{(1, 1)}$.
Observe que $\overline{(a, b)} \geq \overline{(1, 1)}$ significa $a + 1 \geq b + 1$, isto é, $a \geq b$. Analogamente, temos: $(a, b) > (1, 1) \iff a > b, (a, b) \leq (1, 1) \iff a \leq b$ e $(a, b) < (1, 1) \iff a < b$.
Teorema 4.8 *Seja* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(m) = (m + 1, 1)$. *Então* f *é injetora e valem as seguintes propriedades:*

1. $f(m + n) = f(m) + f(n)$;
2. $f(mn) = f(m)f(n)$;
3. *Sem* $\leq n$, *então* $f(m) \leq f(n)$.

Demonstração: Provemos inicialmente que f é injetora. De fato, $f(m) = f(n) \to \overline{(m + 1, 1)} = \overline{(n + 1, 1)} \to m + 1 + 1 = 1 + n + 1 \to m = n$. Agora vamos provar os três itens. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. $f(m+n) = \overline{(m + n + 1, 1)} = \overline{(m + n + 1 + 1, 1 + 1)} = \overline{(m + 1, 1)} + \overline{(n + 1, 1)} = f(m) + f(n)$; $f(mn, 1) = \overline{(mn + 1, 1)} = \overline{(mn + 1 + m + n + 1, 1 + m + n + 1)} = \overline{((m + 1)(n + 1) + 1, (m + 1).1 + (n + 1).1)} = \overline{(m + 1, 1)}.\overline{(n + 1, 1)} = f(m)f(n)$; Se $m \leq$

n, temos que, $\overline{(m+1,1)} \leq \overline{(n+1,1)}$, ou seja, $f(m) \leq f(n)$.

■

O teorema acima nos garante que f é um homomorfismo injetor, ou seja, um monomorfismo. Dessa forma, o conjunto $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}_+^* = \{\overline{(m+1,1)}; m \in \mathbb{N}\}$, tem a mesma estrutura algébrica que $\mathbb{N}$.

Exemplo 4.2 *Por exemplo,* $2+3=5$, *corresponde, via* f, *a* $\overline{(2+1,1)} + \overline{(3+1,1)} = \overline{(7,2)} = \overline{(5+1,1)}$. *Do mesmo modo,* $2.3 = 6$, *corresponde, via* f, *a* $\overline{(2+1,1)}.\overline{(3+1,1)} = \overline{((2+1)(3+1)+1, 2+1+3+1)} = \overline{(2.3+2+3+1+1), 2+3+1+1)} = \overline{(2.3+1),1)}$. *A relação* $2 \leq 3$ *se preserva, via* f, *como* $\overline{(2+1,1)} \leq \overline{(3+1,1)}$, *confirmando a ideia de que a ordem em* $\mathbb{Z}$ *é uma extensão da ordem em* $\mathbb{N}$.

Dizemos que $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$.

A função f descrita acima, chama-se imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$.

Notemos que, se $m \in \mathbb{N}$, o simétrico de $\overline{(m+1,1)}$ é $\overline{(1,m+1)}$, logo, se identificarmos $\overline{(m+1,1)}$ com m através de f, obtemos $-m = -\overline{(m+1,1)} = \overline{(1,m+1)}$. Dessa forma, identificando $\mathbb{N}$ com $\mathbb{Z}_+^*$, via f, obtemos o que será definido a seguir.

Definição 4.6 *Definimos o conjunto dos inteiros como*

$$\mathbb{Z} = \{-m; m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \{..., -m, ..., -1, 0, 1..., m, ...\}$$

Usaremos, a partir de agora, esta identificação e, então, consideraremos $\mathbb{N}$ como um subconjunto de $\mathbb{Z}$. Assim podemos obter $a - b = \overline{(a+1,1)} - \overline{(b+1,1)} = \overline{(a+1,1)} + (-\overline{(b+1,1)}) = \overline{(a+1,1)} + \overline{(1,b+1)} = \overline{(a+1+1, b+1+1)} = \overline{(a,b)}$ conforme nossas motivações intuitivas feitas anteriormente. Dessa forma, sendo x um inteiro qualquer, podemos identificar $-x$ por $(-1).x$, pois, sendo $x = \overline{(a,b)}$, $(-1).x = \overline{(1,2)}.\overline{(a,b)} = \overline{(b,a)} = -\overline{(a,b)} = -x$

4.4 Boa Ordenação dos Números Inteiros

Segundo (Gonçalves, 2015). Em números inteiros existem as noções de ordem "$\leq$" e de modulo $|\ .\ |$ as quais admitimos com suas propriedades básicas em citadas. Neste caso vamos assumir inicialmente o principio de boa ordenação.

Principio de boa ordenação: Todo subconjunto não vazio K de $\mathbb{Z}$ de elementos não negativos possui um primeiro elemento, isto é, existe $x_0 \in K$ tal que $x_0 \leq x$ para todos $x \in K$.

Agora segue proposição abaixo.

Proposição 4.2 *Não existe inteiro* p *tal que* $0 < p < 1$.

Demonstração: De fato suponhamos por absurdo que existe um p inteiro tal que $0 < p < 1$. Então o conjunto $S = \{p \in \mathbb{Z} : 0 < p < 1\}$ é não vazio e do principio da boa ordenação existe $p_0 = min(s)$. Como $p_0 \in S$ segue que $0 < p_0 < 1$ e onde temos $0 < p_0^2 < p_0 < 1$ e isto contradiz a minimalidade de $p_0 \in S$.

■

5 CONJUNTOS DOS NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo faremos uma construção rigorosa do conjunto dos números racionais a partir do conjunto dos inteiros e suas propriedades já demonstradas. Utilizaremos o conceito de relação de equivalência, do mesmo modo que o utilizamos para definir um número inteiro a partir dos naturais.

5.1 Construção dos Números Racionais

Seja o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a,b)$ *tal que* $a \in \mathbb{Z}$ *e* $b \in \mathbb{Z}^*\}$; então dizemos que há relação $\Re$ entre (a,b) e (c,d) quando $a.d = b.c$.

Teorema 5.1 $\Re$ *é uma relação de equivalência* $(a,b)\Re(c,d)$ *quando* $a.d = b.c$.

Demonstrção. Vamos demonstrá-lo através das propriedades de relação equivalências que são a reflexiva, a simétrica e a transitiva.

Reflexiva se $(a,b)\Re(b,a)$ $\forall a, b \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$;

Demonstração: Se $(a,b)\Re(a,b) \Leftrightarrow a.b = b.a$ é reflexiva.

Simétrica Se $(a,b)\Re(c,d) \Rightarrow (c,d)\Re(a,b)$ $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$;

Demonstração: Se $(a,b)\Re(c,d) \Rightarrow (c,d)\Re(a,b)$ como (a,b) se relaciona com (c,d) temos que $a.d = b.c \Rightarrow c.b = d.a \Rightarrow (c,d)\Re(a,b)$ é simétrica;

Transitiva. Se $(a,b)\Re(c,d)$ e $(c,d)\Re(e,f) \Rightarrow (a,b)\Re(e,f)$ $\forall (c,d),(a,b)$ *e* $(e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$;

Demonstração: Se $(a,b)\Re(c,d)$, e se $(c,d)\Re(e,f)$ então $a.d = c.b$, e $c.f = d.e$ assim temos:

$a.d + c.f = b.c.d.e$

$a.(d.c).f = b.(c.d).e$

$a.f.(d.c) = b.e + (c.d)$

logo cortamos pares semelhantes na igualdade acima

$a.f = b.e \Rightarrow (a,b)\Re(e,f)$ Portanto é transitiva. Logo é uma relaçao equivalência.

$\blacksquare$

Definição 5.1 *Seja* $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, *denotamos por* $\dfrac{a}{b}$ *(que se lê "razão a sobre b") a classe equivalência do par* (a,b) *pelas relação* $\Re$ *acima. Assim temos:*

$\dfrac{a}{b} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *tal que* $(x,y)\Re(a,b)\}$.

Exemplo 5.1 $\dfrac{1}{2} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ *tal que* $(x,y)\Re(1,2)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ *tal que* $2x = y\}$.

Assim temos : $(1,2) \in \dfrac{1}{2}$; $(-31,-62) \in \dfrac{1}{2}$; $(2,5) \notin \dfrac{1}{2}$.

Definição 5.2 *Denotamos por* $\mathbb{Q}$, *e denominamos conjunto dos números racionais, o conjunto quociente de* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *pela relação de equivalência* $\Re$, *isto é*

$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\Re = \{\dfrac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}$ *e* $b \in \mathbb{Z}^*\}$,

como nos aprendemos no ensino fundamental.

5.2 Operações em Números Racionais

Na construção dos números racionais são definidas quatro operações básicas que reinam as propriedades dos racionais e esses operações são as seguintes: Adição em $\mathbb{Q}$, Subtração em $\mathbb{Q}$, Multiplicação em $\mathbb{Q}$ e Divisão em $\mathbb{Q}$

5.2.1 Adição em Racionais

Definição 5.3 *Dado* $m = \dfrac{a}{b}$ *e* $n = \dfrac{c}{d}$ *são os números racionais, isto para todos os elemento de* $m, n \in \mathbb{Q}$

Chama-se adição m com n e elemento da $\mathbb{Q}$ são definido da seguinte maneira:
$m+n = \dfrac{ad}{bd} + \dfrac{b.c}{b.d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$ pela notação dos pares teremos $(a,b)+(c,d) = (ad+bc, bd)$.

Exemplo 5.2 $i)\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\times 2 + 1\times 3}{6} = \dfrac{7}{6}$

$ii)\dfrac{2}{3} + (-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{-1}{2} = \dfrac{2+3(-1)}{6} = \dfrac{1}{6}$

$iii)\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{6} = \dfrac{2\times 6 + 3\times 4}{3\times 6} = \dfrac{24}{18} = \dfrac{4}{3}$

Então queremos provar que a soma $a+b$ independente dos pares escolhidos para definir m e n .

Assim temos $m = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ e $n = \dfrac{c}{d} = \dfrac{c'}{d'}$

Então $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$.

Multiplicando a primeira dessas igualdades por dd' e a segunda por bb' e somando membro á membro obtemos:

$adb'd' + cbd'b' = bda'd' + db'c'd$ ou seja $(ad = cb)d'b' = bd(a'd' + b'c')$ o que nos dá

$\dfrac{ad+cc}{bd} = \dfrac{a'd' + b'c'}{d'b'}d$ logo a correspondência $(m, n) \Rightarrow (m+n)$.

Pela definição podemos obter, de imediato, algumas regras práticas

i) Dado: $\dfrac{m}{1} + \dfrac{n}{1} = \dfrac{m+n}{1}$ (imediata);

ii) Dado: $\dfrac{m}{a} + \dfrac{n}{a} = \dfrac{m\times a + n\times a}{a^2} = \dfrac{a(m+n)}{a\times\ a} = \dfrac{(m+n)}{a}$ logo;

iii) dado: $\dfrac{0}{a} + \dfrac{m}{n} = \dfrac{0\times n + m\times a}{a\times n} = \dfrac{a\times m}{a\times n} = \dfrac{m}{n}$.

A classe $\dfrac{0}{a}$ ou $\dfrac{0}{a}$ (usual) é elemento neutro da adição de racionais

Teorema 5.2 *As operações em $\mathbb{Q}$ estão bem definidas, isto é, se* $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ *e* $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ *então* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$.

Demonstração : Por hipótese, $ab' = ba$ e $cd' = dc'$, temos $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{ad}$ e $\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'd'+b'c'}{b'c'}$, queremos provar que as duas somas são iguais, ou seja, que $(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd$, isto é $adb'd' + bcb'd' = a'd'bd + b'c'bd$,
ou ainda $(ab')(bd') + (cd')(bb') = (a'b)(dd') + (bb')(c'd)$,o que segue a hipótese acima $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$.

■

5.2.2 Subtração em Números Racionais

Se, $m, n \in \mathbb{Q}$, denomina-se diferença entre m e n, indica-se por $m - n$, o seguinte elemento de Q :
$m - n = m + (-n)$ como $(-n) \in \mathbb{Q}$, para todo $n \in \mathbb{Q}$, então: $(m, n) \Rightarrow m - n$ é uma operação sobre $\mathbb{Q}$, a qual chamamos subtração em $\mathbb{Q}$.
Sejam dois números racionais quaisquer na forma de fração a subtração é a operação que a cada par ordenado $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$, faz corresponder o número racional $\frac{a-b}{c}$ com $(c \neq 0)$. *Observe* que a subtração não é fechada em $\mathbb{Q}_+$ contrariamente á adição. Com efeito, a diferença entre dois números racionais positivos pode ser um número racional negativo.

Exemplo 5.3 $\frac{2}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}$

Na subtração (o operação inversa da adição), caso as frações tenham denominadores diferentes, há que primeiro, obter frações equivalentes a dados de tal modos que os denominadores fiquem iguais e se possa aplicar a regra anterior.
Nesta operação, como nas outras, podemos mais compreendê-lo com a utilização de diversos modelos como o de área, o de comprimento ou de tempo.

5.2.3 Multiplicação em Números Racionais

A multiplicação entre racionais é definida por $\frac{m}{n} \times \frac{r}{s} = \frac{mr}{ns}$ ou por pares $(m, n) \times (r, s) = (mr, ns)$. Ou ainda se considerarmos $m = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *e* $n = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ define-se o produto de m por n o elemento $mn = m \times n = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$.

Exemplo 5.4 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 6} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

Exemplo 5.5 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Exemplo 5.6 $\frac{0}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{0 \times 2}{1 \times 3} = \frac{0}{3} = 0$
Pela definição da multiplicação, podemos ter algumas regras:
1ª regra: Dado $\frac{a}{1} \times \frac{b}{1} = \frac{a \times b}{1}$ *exemplo* $\frac{2}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{6}{1}$;
2ª regra Dado a classe $\frac{1}{1} = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{-4}{-4} ..., \}$ temos que $\frac{1}{1} \times \frac{m}{n}$ *ou* $\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{m}{n}$, assim concluímos que a classe $\frac{1}{1}$ é o elemento neutro da operação de multiplicação.
3ª regra: $\frac{0}{1} \times \frac{m}{n} = \frac{0 \times m}{n} = \frac{0}{n} = \frac{0}{1}$, a
classe $\frac{0}{1}$ é chamada de elemento anulador.

5.2.4 Divisão em Números Racionais

A divisão de dois números racionais é definida como a multiplicação do primeiro número pelo inverso do segundo, ou seja:
Entende-se por divisão em $\mathbb{Q}$ a operação de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ em $\mathbb{Q}$ definida por: $(m, n) \Rightarrow mn^{-1} ou \frac{m}{n} \div \frac{r}{s} = \frac{m}{n} \times \frac{s}{r} = \frac{ms}{nr}$ $ou (m, n) \sim (r, s) = (ms, nr)$ é o elemento mn^{-1} é chamado quociente de m por n e pode ser indicado por $m \div n$.

1. Suponhamos que $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{5}$, então $a \div b = \frac{2}{3} \times \frac{5}{1} = \frac{10}{3}$;
2. $\frac{2}{5} \div \frac{0}{1} =$ não é definida.
3. $\frac{0}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{0}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{0}{15} = 0$
4. $\frac{1}{1} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{1} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

5.3 Propriedades dos Números Racionais

5.3.1 Propriedade da Adição

$I)$**Associativa**$(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$ $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$.
Demonstração : Dado $r = \frac{a}{b}, s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f}$
temos:

$$
\begin{aligned}
(r + s) + t &= (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} \\
&= \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} \\
&= \frac{adf + (bcf + bde)}{bdf}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{cf + de}{df}$$

$$= \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = r + (s + f).$$

II)**Comutativa**. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \forall a, b, c, d \in Q$

Demonstração : Dado $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$
temos: $r + s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

$$= \frac{bc + da}{bd}$$

$$= \frac{bc + da}{db}$$

$$= \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = s + r.$$

III)**Elemento Neutro**. Classe de equivalencia $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = ...$, é o elemento neutro onde $r = \frac{a}{b}$ assim temos.
$\frac{a}{b} + \frac{0}{1}$

$$= \frac{a \times 1 + 0 \times b}{b \times 1}$$

$$= \frac{a \times 1}{b \times 1}$$

$$= \frac{a}{b} \text{ ou } r + \frac{0}{1}$$

$$= \frac{a \times 1 + 0 \times b}{b \times 1} = \frac{a}{b} = r$$

IV)Elemento inverso (**simétrico**)$\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = 0$ para Todo $a \in \mathbb{Q}$
admite simétrico aditivo(Inverso) em $\mathbb{Q}$: Se $a = \frac{m}{n}$, logo $-a = \frac{-m}{n}$,pois teremos:
$\frac{m}{n} + \frac{-m}{n}$

$$= \frac{mn + (-m)n}{nn} = 0$$

■

5.3.2 Propriedade da Subtração

A propriedade da subtração é muito semelhanante as propriedade da adição, a diferença está no sinal da operação assim teremos propriedades, envolvendo o oposto da adição:
i) $-(a+b) = -a-b$;
ii) $(a-b)+b = a$;
iii) $a+x = b \Leftrightarrow x = b-a$
iv) $a+b = a+c \Rightarrow b = c$

5.3.3 Propriedade da Multiplicação

i)**Associativa**: $(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} \times \frac{e}{f})\ \forall a, b, c, d\ e\ f \in \mathbb{Q}$;
Demonstração: $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$ e $t = \frac{e}{f}$ assim terremos : $(r \times s) \times t = (\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = (\frac{a \times c}{} b \times d) \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = \frac{a}{b} \times (\frac{c \times e}{d \times f}) = r \times (s \times t)$.
$ii)$**comutativa**$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{c}{d}.\frac{a}{b}\ \forall a, b, c, d \in Q$;
Demonstração: Seja $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$ assim, teremos:

$$rs = \frac{ac}{bd} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{ca}{db} = sr.$$

iii)**Elemento inverso(simétrico)**: Existe r' tal que $r + r' = \frac{0}{1}, r + r' = \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab + (-ab)}{bb} = \frac{0}{1}$ ou seja, todo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\ a \neq 0$, admite simétrico multiplicativo(inverso): Se $a = \frac{m}{n}$ então $m \neq 0$ e dai $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ e portanto $\frac{m}{n} \times \frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = 1$; indicando por a^{-1} , como é praxe, o inverso de $a = \frac{m}{n}, a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} = \frac{n}{m}$ assim decorre também se $a \neq 0$: $(a^{-1})^{-1} = \frac{m}{n} = a$ outro fato importante no que refere os inversos é que se a e b são elementos não nulos:
$(ab)^{-1} = a^{-1}a^{-1}$ de fato, como $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1$, então efetivamente

$a^{-1}b^{-1}$ é o inverso de ab. como $\frac{a}{b}$ é inverso de $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$.
Exemplo 5.7 $a)(\frac{2}{3})^{-1} = \frac{3}{2}$, *pois* $\frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{1}{1}$; ***elemento neutro***$(\frac{a}{b}).1 = \frac{a}{b}$.

5.3.4 Propriedade Distributiva

$IV)$(**Distributiva**) $\frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}\ \forall a, b, c, d, e, f \in\ \mathbb{Q}$; ;

Demonstraçao: $\frac{a}{b}\times(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\ =\frac{(a\times c)(b\times f)+(a\times e)(b\times d)}{(b\times d)(b\times f)}.$

5.3.5 Propriedade da Divisão

Na divisão dos números racionais são necessárias seguintes propriedades.

Suponhamos que $a,b,c\in\ \mathbb{Q}$, onde $c\neq 0$. Assim teremos:

i) $(a+b)\div c=a\div c+b\div c$ ainda se $c=\frac{r}{s}$ $(r,s\in\mathbb{Q})$, então: $(a+b)\div c=(a+b)\times\frac{r}{s}=$ $a\times\frac{s}{r}+b\times\frac{s}{r}=a\div\frac{r}{s}+b\frac{r}{s}=a\div c+b\div c.$

5.4 Relação de Ordem Entre os Números Racionais

Definição 5.4 *Sejam* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *número racionais com* $b,d>0$, *escrevemos* $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ *quando* $ad<bc$ *e dizemos que* $\frac{a}{b}$ *é menor do que* $\frac{c}{d}$

Os símbolos $\geq$, $>$ e $<$ serão utilizados da mesma forma que fizemos para a relação de ordem dos números naturais.

Teorema 5.3 *A relação menor igual que definimos acima é uma relação de ordem em* $\mathbb{Q}$

Demonstração: Inicialmente vamos demostrar que relação esta bem definida. Dado $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$, isto é, $ab=ab$ temos que $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}c\Rightarrow ad\leq bc$ e como $b>0$ assim terremos $ab'd\leq bcb'$, assim pela igualdade acima, $a'bd\leq bcb'$ onde podemos concluímos que $a'd\leq cb'$, ou seja, $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$.

De tal modo, como $\frac{c}{d}=\frac{c'}{d}\Rightarrow cd'=dc'$; $\frac{a}{b}\frac{c}{d}\Rightarrow a'd\leq cb'\Rightarrow a'dd'\leq cb'd'\leq add'\leq c'db\Rightarrow$ $a'd'\Rightarrow c'b'\Rightarrow\frac{a'}{b'}\leq\frac{c'}{d'}e\frac{a'}{b'}\leq\frac{c'}{d'}$. pois como $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a'}{b'}\leq\frac{c}{d}$ e $\frac{a'}{b'}\leq\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a'}{b'}\leq\frac{c'}{d'}$; concluímos que $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a'}{b'}\leq\frac{c'}{d'}$.

Agora vamos provar a relação de ordem em relação equivalência.

1. **Reflexiva:** Se $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ claramente, $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ isto é $\frac{a}{b}\leq\frac{a}{b}$;

2. **Simétria:** Se $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$, $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ *e* $\frac{c}{d}\leq\frac{a}{b}$, temos que $ad\leq bc$ *e* $cb\leq ad$, dai pela tricotomia dos inteiros obtemos, $ad=bc$, isto é $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

3. **Transitiva:** Se $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$, $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d}\leq\frac{e}{f}$, temos $ad\leq bc$ e $cf\leq ed$.

   Multiplicando f na primeira e b na segunda desigualdade (podemos fazer isto, pois , b , $d>0$); obtemos:

   $adf\leq bcf$ e $bcf\leq bed$, dai, pela transitividade dos inteiros, obtemos, $adf\leq bed$, ou ainda, $af\leq be$ e $(d>0)$, que significa, $\frac{a}{b}\leq\frac{e}{f}$.

■

Exemplo 5.8 *(compatibilidade da ordem com as operações em $\mathbb{Q}$) Mostre que, para $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Q}$, vale:*

1. Se $\alpha \leq \beta$, então $\alpha + \beta \leq \beta + \delta$;

2. Se $\alpha \leq \beta$ e $\delta \geq \frac{0}{1}$, então $\alpha\delta \leq \beta\delta$;

3. Se $\alpha \leq \beta$ e $\delta \leq \frac{0}{1}$, então $\alpha\delta \geq \beta\delta$.

Vamos resolver a primeiro exemplo e os dois últimos ficam como exercício para o leitor. Assim temos a resolução da primeira é dada pela seguinte maneira:

1ª Dado $\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{c}{d}$ e $\delta = \frac{e}{f}$ assim temos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff da \leq bc \iff daf \leq bcf$tem-se $f > 0$ ainda temos

$\iff daf + dbe \leq bcf + dbe$

$$\iff d(af + be) \leq b(cf + de) \iff df(af + be) \leq bf(cf + de)$$

$$\iff \frac{af + be}{bf} \leq \frac{cf + de}{df} \iff \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}.$$

Teorema 5.4 *(Lei da Tricotomia em racionais) Seja $m, n \in \mathbb{Q}$. Uma, e apenas uma das situações seguintes ocorre: ou $m = n$, ou $m < n$ ou $m > n$*

Demonstração. Escrevendo $m = \frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{d}$, com $b, d > 0$, comparemos os inteiros ad e bc. Pela lei da tricotomia em $\mathbb{Z}$, ou $ad = bc$, o cujo caso ocorre $m = n$, ou $ad < bc$, o cujo caso ocorre $m < n$, ou $ad > bc$, em cujo caso ocorre $n < m$.

■

Vamos ver agora a função imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$, a mesma que falamos, de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, na construção dos inteiros.

Teorema 5.5 *A função $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, definida por $i(n) = \frac{n}{1}$ é injetora. Além disso, ela preserva as operações e a relação de ordem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ no seguinte sentido:*

1. $i(m + n) = i(m) + i(n)$;

2. $i(mn) = i(m)i(n)$;

3. Se $m \leq n$, então $i(m) \leq i(n)$.

Demonstração. Inicialmente, provaremos que f é injetora. Se $i(m) = i(n)$, temos que $\frac{m}{1} = \frac{n}{1}$, isto é, $m.1 = n.1$, ou ainda, $m = n$, logo, $i(m) = i(n) \to m = n$, portanto, i é injetora. Agora verificaremos as três condições:

1. $i(m + n) = \frac{m + n}{1} = \frac{1.m + m.1}{1.1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = i(m) + i(n)$;
2. $i(mn) = \frac{mn}{1} = \frac{mn}{1.1} = \frac{m}{1}\frac{n}{1} = i(m)i(n)$;
3. $m \leq n \Rightarrow m.1 \leq n.1 \Rightarrow \frac{m}{1} \leq \frac{n}{1} \Rightarrow i(m) \leq i(n)$.

■

Novamente temos um homomorfismo injetor, de modo que, o conjunto $i(\mathbb{Z}) =$

$\{\frac{n}{1}; \in \mathbb{Z}\}$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$.

Teorema 5.6 *O conjunto dos números racionais não possui elemento máximo e nem elemento mínimo.*

Demonstração: Suponhamos que existe um elemento máximo em racionais. Que é $m_x = \frac{p}{q}$, isto é $\frac{a}{b} \leq \frac{p}{q}$ para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Asim, tem-se $\frac{p}{q} + 1 = \frac{p+q}{q} \in \mathbb{Q}$, além disso $\frac{p}{q} < \frac{p+q}{q}$, o que contradiz a maximalidade de m_x. Portanto $\mathbb{Q}$ não possuí um elemento máximo. Procedendo da mesma forma, obtemos que $\mathbb{Q}$ não possui elemento mínimo.

Lembre que o conjunto $X \subset \mathbb{Q}$ diz-se limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{Q}$ tal que $X \leq b$ para todo $x \in X$.

■

Neste caso, diz-se que b é uma cota superior do X. Vejamos a partir disso a seguinte definição.

Definição 5.5 *Seja $X \subset \mathbb{Q}$ limitado superior e não vazio. Um numero $b \in \mathbb{Q}$ chama-se o supremo do conjunto X quando é menor das cotas superiores de X, isto é, quando é cota superior mínima de X. Em outras palavras b é supremo de X quando cumpre as seguintes condições :*

1. *Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;*
2. *Se $C \in \mathbb{Q}$ é tal que $X \leq C$ para todo $x \in X$ então $b \leq C$;*

Escrevemos $b = SupX$ para indicar que b é supremo do conjunto X. O ínfimo é dado analogamente, sendo a maior das cotas inferiores (cota inferior máxima de x) e escreve-se $a = infX$ quando a é o ínfimo do conjunto X.

Temos que, se existe o supremo b de X, então este supremo é único. De facto, supomos que existam dois supremos b_1 e b_2. Dessa forma. $X \leq b$, para todo $x \in X$ e se $C \in \mathbb{Q}$ tal que $x \leq C$ para todo $x \in X$ então $b_2 \leq C$. Dai, como $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$, Então $b_1 \leq b_2$ e $b_2 \leq b_1$ logo $b_1 = b_2$.

6 CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

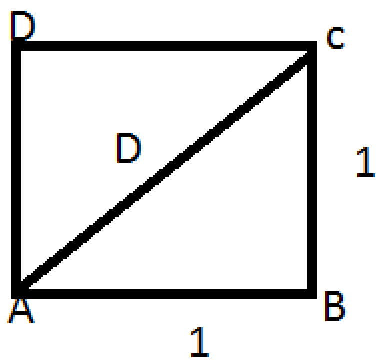
6.1 Conjunto dos Números Irracionais

Neste capitulo abordaremos o conceito de número real desde os tempo remonta aos gregos da escola pitagórica, com descoberta da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado que correspondem aos números chamados irracionais. Em seguida completamos os racionais através de corte de Dedekind .

6.1.1 Comensuráveis e Incomensuráveis

Na antiga Grécia os números conhecidos naquela época eram os números naturais eles consideravam o número um (1) como unidade, a partir da qual se formavam os números. Mas ao decorrer do tempo surgiu frações na forma de razão de duas grandezas por exemplo, volume de uma esfera e segmento de reta. Também nessa época os números irracionais não eram conhecidos .
Segundo (Avila, 2006) os números Irracionais surgiram na escola pitagórica na tentativa de explicar a diagonal de um quadrado e os catetos do triângulo retângulo.

Figura 1: Diagonal do quadrado de lado 1

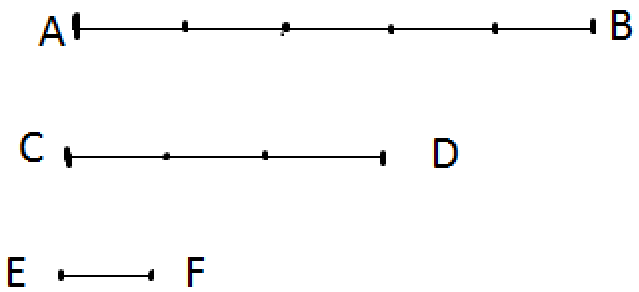


Fonte: Benedito Gastão Mendes

Exemplo 6.1 : *Quando mede o comprimento da diagonal do quadrado da figura 1 ?*
Solução: *Como* $(AC)^2 = (AB)^2 + (CD)^2$ *e* $AB = 1, BC = 1$. *Então* $(AC)^2 = (1)^2 + (1)^2$.

Assim $(AC)^2 = 2.$
Logo $AC = \sqrt{2}$ *que é um números irracionais*
Então a partir dessa demonstração podemos perceber que diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis.
Os matemáticos do século XIX queriam dar explicação sobre teoria sobre razões envolvendo grandeza comensuráveis e incomensuráveis onde eles adotam três segmentos retilíneos $\overline{AB}$ $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$.

Figura 2: Segmento de três retas AB ,CD e EF



Fonte: Autor: Benedito Gastão Mendes

Para explicação acerca disso, eles criaram toda teoria das proporções que só dependiam dos números naturais.
Suponhamos os dois seguimentos retilíneos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Dizer que a razão AB/CD é um numero racional m/n, significa que existe um terceiro segmento EF tal que AB seja m vezes EF e CD n vezes esse segmento.
Segundo (Avila, 2006) o criador dessa teoria exposta no livro V dos elementos de Euclides, foi EUDOXO, matemático e astrônomo ligado á escola pitagórica que percebeu que A está para B assim como m está para n onde $m, n \in \mathbb{N}$ equivalia a dizer que $nA = mB$. Então, no caso de quatro segmentos, dizer que A está para B assim como C está para D deveria significar a existência de dois números naturais m e n onde $nA = mB$ e $nC = mD$.
Observação: No caso em que A e B é considerado incomensuráveis, igualdade do tipo $nA = B$ não pode ocorrer. Mas se for dois números m e n, podemos sempre testa-lo que $nA > mB$, $nA = mB$ ou $nA < mB$; outra vez se $nC > mD$, $nC = mD$ ou $nC < mD$; Pois se percebemos são esses testes que EUDOXO discípulo de Pitágoras utilizava para dar uma definição de igualdade de duas razoes, $A : B$ e $C : D$, que se aplica sempre sejam os segmentos comensuráveis ou não.

Definição 6.1 ***(Dado pelo Eudoxo)****. Dadas quatro grandezas da mesma espécie,* A, B, C

e D (segmento, áreas ou volumes), diz-se que A está para B assim como C está para D se, quaisquer que sejam os números naturais m e n, se tenha:
$nA > mB \Leftrightarrow nC > mD; nA = mB \Leftrightarrow nC = mD; nA < mB \Leftrightarrow nC < mD.$
Esta definição, válida para quaisquer grandeza serviram como fonte de inspiração para Richard Dedekind na construção dos números reais.

6.2 Cortes de Dedekind

Richard Dedekind nasceu em 1831 na Alemanha e começou o seu estudo em Gottingem, onde foi aluno de Gauss e Dirichlet. Em 1858 tornou-se professor em Zurique, transferindo-se em 1862 para Braunschweik (Brunswick), sua terra natal, onde permaneceu pelo resto de sua vida. Ele contou ainda que início da carreira dele teve muita dificuldade de ensinar cálculos diferencias e percebeu que á falta de fundamentação adequado para os números reais, principalmente quando teve que provar que uma função é crescente e limitada tem limite. Dedekind ao perceber suas dificuldades começou a intensificar os estudos sobre os números reais baseando puramente na aritmética onde introduziu cortes dos números reais através da inspiração de Eudoxo onde associava a cada par de grandezas (A, B) e fez cortes de uma reta em duas partes que possa separar os números racionais em duas classes A e B onde $A < B$. Dessa forma cada corte produz um e um só número real, com isso temos dois casos a considerar:

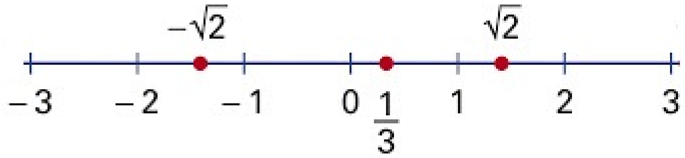
1. O número real racional é dito corte se A tem um maior elemento ou se B tem um menor elemento.

2. O numero real irracional é dito corte se A não tem um maior elemento e B não tem um menor elemento.

Então foi através desses cortes que Richard Dedekind conseguiu ampliar o conjunto dos racionais e introduziu os números Irracionais .

Exemplo 6.2 *Sejam $A = \mathbb{Q}_{-} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\}$. Então para determinar cortes perceba que A não tem maior elemento e B não tem menor elemento. Portanto o corte definido é um número irracional de $\sqrt{2}$*

Figura 3: Corte de Dedekind nos números reais



Fonte: Benedito Gastao Mendes

Definição 6.2 *Dedekind considera como corte a todo par (A, B) de conjuntos não vazios de números racionais, cuja união seja $\mathbb{Q}$ e tais que todo elemento de A seja menor que todo elemento de B.*
Por outro lado segundo (Avila, 2006) todo corte de Dedekind possui elemento de separação, que tantos podemos incorporando A como seu maior elemento ou B como seu menor elemento de separação. Assim todo corte do conjunto B terá mínimo após de introduzimos relação de ordem, pois ele observou á existência de cortes sem elementos de separação no conjunto $\mathbb{Q}$ e os números racionais é a expressão aritmética da descontinuidade de $\mathbb{Q}$ Se juntamos novos elementos de números Irracionais e obtemos o conjunto de $\mathbb{R}$ ao contrario de $\mathbb{Q}$ portanto os Irracionais vem para preencher as vagas deixadas pelos $\mathbb{Q}$.

E em seguida faremos cortes de dedekind através do trabalho realizado pelo (Ferreira, 2013) no seu livro intitulado construções dos números.
Definição 6.3 *Um conjunto α de números racionais diz-se um corte se satisfaz as seguintes condições :*

1. $\emptyset \neq \alpha \neq \mathbb{Q}$

2. Se $a \in \alpha$ e $b < a$ (b racional) então $b \in \alpha$;

3. Em α não existe elemento máximo.

Exercício 6.1 *Mostre que o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \dfrac{3}{5}\}$ é um corte:*
Demonstração. Provaremos as três condições citadas a cima :

1. $A \neq \emptyset$ pois $0 \in A$ e $A \neq \mathbb{Q}$, pois $1 \in \mathbb{Q}$ e $1 \notin A$;
2. Dado $a \in A$, pois temos que $b < a, \Rightarrow b < a < \dfrac{3}{5} \Rightarrow b < \dfrac{3}{5}$ logo $b \in A$;
3. Suponhamos que existe uma máxima em A, digamos m, sendo assim $a \leq m$ para todo $a \in A$. Veja que $m < (m + \frac{3}{5})_2^{-1} < \dfrac{3}{5}$

Logo $(m + \frac{3}{5})_2^{-1} \in A$, o que contradiz a maximalidade de m. Então A não possui máximo, portanto, A é um corte.
Exercício 6.2 *Mostre que o conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \dfrac{3}{5}\}$ não é um corte:*
Demonstração. Provaremos em duas propriedades:

1. $B \neq \emptyset$ pois $1 \in B$ e $B \neq \mathbb{Q}$, visto que $0 \in \mathbb{Q}$ e $0 \notin B$;

2. Dado $a \in B$ pois $b < a$, tem-se $a = 1$ e $b = 0$ entretanto , $b < a$ pois $b \in B$ Portanto B não é um corte.

Exercício 6.3 *Mostre que o conjunto $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \dfrac{3}{5}\}$ não é um corte:*
Demonstração. Provaremos em três propriedades:

1. $C \neq \emptyset$ pois $0 \notin C$ e $C \neq \mathbb{Q}$, visto que $1 \in \mathbb{Q}$ e $1 \in C$;

2. Dado $a \in C$ pois temos que $b < a, \Rightarrow b < a < \dfrac{3}{5} \Rightarrow b < \dfrac{3}{5}$. Logo $b \in C$;

3. Temos que $x \leq \dfrac{3}{5}$ para todo $x \in C$ sendo assim dizemos que $m = \frac{3}{5}$ é o máximo deste conjunto, por definição de máximo. Portanto C não é um corte.

Proposição 6.1 *Seja α um corte e $a \in \mathbb{Q}$. Então, a é cota superior de α se, somente se $a \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Se a é uma cota superior de α então $x \leq$ a para todo $x \in \alpha$, entretanto α não existe elemento máximo, portanto a não esta em α, isto é, $a \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$;
$(\Leftarrow)$ Dado $a \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e $b \in \alpha$ temos que, ou $a \geq b$, ou $a < b$. Assim de acordo com definição da corte (item 2) $a \in \alpha$ e $b < a$ onde a é racional então $b \in \alpha$, Logo se percebemos é uma contradição com a hipótese. Portanto $a \geq b$, isto é, a uma cota superior de α.

∎

Proposição 6.2 *Se $a \in \mathbb{Q}$ e $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha\}$ então α é um corte e a é menor cota superior de α.*

Demonstração.

1. $\alpha \neq \emptyset$, pois $x = a - 1 \in \alpha$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$ visto que $a \in \mathbb{Q}$ e $a \notin \alpha$;
2. Sejam $b \in \alpha$ e $t < b$. Assim, $t < b < a$ logo $t < a$, ou seja, $t \in \alpha$;
3. Basta observar que se $b \in \alpha$, então $b < \dfrac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$. Logo $\dfrac{a+b}{2} \in \alpha$. Portanto ,$b$ não é elemento máximo de α. Esse argumento também mostra que a é menor cota superior de α.

∎

Definição 6.4 *Os cortes do tipo da proposição anterior são denominados cortes racionais e se representam por a^*.*

Proposição 6.3 *Todo corte que possui cota superior mínima é racional.*

Demonstração: Admitimos que α é um corte com cota superior mínima de a, isto é, $x \leq a$ para todo $x \in \alpha$. Assim temos que $a \in \alpha$ pois, caso contrario, a seria máximo de α, o que não aconteceu como (Ferreira, 2013) definiu os cortes no começo e correlação isso $x < a$ para todo $x \in \alpha$. Como a é a mínima das cotas superiores de α, temos que, qualquer $b \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a$, não é cota superior de α isto é pertence a α. Portanto, se supomos que $a \in \mathbb{Q}$ é cota superior mínima de α, então $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \setminus x < a\}$, ou seja α é racional.

∎

Agora vamos fazer dois exemplos para concluir a demonstração dessa proposição

Exemplo 6.3 *A equação $x^2 = 2$ não possui solução em racionais. De fato supomos o contrario, isto é que o racional $\dfrac{a}{b}$, reduzido a uma fração irredutível, seja tal que $(\dfrac{a}{b})^2 = 2$. logo $a^2 = 2b^2$, logo a^2 é um numero inteiro par, o que implica que a é par, isto é $a = 2a_1$,* *pois $a_1 \in \mathbb{Z}$. Portanto $(2a)^2 = 2b^2$, isto é , $b^2 = 2a_1$, de onde segue que b^2 é par, ou seja , b é par. Mas isso contradiz a hipótese de que $\frac{a}{b}$ era uma fração irredutível.*

Exemplo 6.4 *Mostrar-se que o comprimento C de uma circunferência de diâmetro $d \in \mathbb{Q}$ não é um numero real, isto é, $C = \pi d \notin \mathbb{Q}$. Além disso , $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$, de modo que π não é solução de nenhuma equação do tipo $x^2 = q$, com $q \in \mathbb{Q}$.*

Teorema 6.1 *Seja $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}^*_-$. Então α é um corte que não é racional.*

Demonstração: Demonstremos esse teorema em três condições de um corte

1. $\alpha \neq \emptyset$ pois $0 \in \alpha$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$ pois $2 \in \mathbb{Q}$ e $2 \notin \alpha$

2. Sejam $a \in \alpha$ e $b \in \mathbb{Q}$, $b < a$.
   - Se $a \leq 0$ então $b \in \alpha$;
   - $b > 0$ e $b < a$, então $b^2 < a^2 < 2$ isto é, $b \in \alpha$.
3. Para cada $a \in \alpha$ é possível encontrar um racional $b \in \alpha$ tal que $a < b$. De fato, supomos que $a \in \alpha$, logo $a^2 < 2$.
   - Se $a \leq 0$, então $b = 1 \in \alpha$ e $a < b$;
   - Se $a > 0$ e $a^2 < 2$, tomemos $h \in \mathbb{Q}$, $0 < h < 1$ e $h < \dfrac{2-a^2}{2a+1}$ (existe h nessas condições pois $\mathbb{Q}$ é (arquimediano) e pôr $b = a + h$ logo $b \in \mathbb{Q}, b > a$.

     Temos $b^2 = a^2 + h^2 + 2ah = a^2 + (h+2a)h$. Como $0 < h < 1, b^2 < a^2 + (1+2a)h$, Dai, como $h < \dfrac{2-a^2}{2a+1}; b^2 < a^2 + (2 - a^2) = 2$. Portanto, $b \in \alpha$ e $a < b$.

   Mostramos, então, que α é um corte. Verificamos agora que α não possui cota superior mínima. Observe primeiramente que os racionais que não pertencem a α são os positivos que têm quadrado ≥ 2. Sabemos que não existe racional cujo quadrado é 2. Logo $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ se, e somente se, $y > 0$ e $y^2 > 2$. Sabemos, da proposição 5.1.1, que todo elemento $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ é maior que qualquer elemento $x \in \alpha$. Vamos então mostrar que dado $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, existe $z \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ com $z < y$, de onde decorre o que queríamos provar.

   Novamente busquemos h racional positivo tal que $(y-h)^2 > 2$ e façamos $z = y - h$. Não perdemos a generalidade se supusermos $h < 1$.

   A condição $(y-h)^2 > 2$ equivale a $y^2 - 2hy + h^2 > 2$ ou $y^2 - h(2y - h) > 2$ ou $h < \dfrac{y^2-2}{2y-h}$, já que $2y - h > 0$ (pois $y > 1$ *e* $h < 1$). Como $h > 0$, então $\dfrac{y^2-2}{2y-h}$ é maior do que $\dfrac{y^2-2}{2y}$. Assim tomando $h < min\{1, \dfrac{y^2-2}{2y}\}$ em $\mathbb{Q}^*_+$, o que é possivel pois $\mathbb{Q}$ é arquimediano, obtemos: $(y-h)^2 = y^2 - 2hy + h^2 > y^2 - 2y\dfrac{y^2-2}{2y} + h^2 = 2 + h^2 > 2$.

$\blacksquare$

Agora temos condições para introduzir o conceito de números reais

Definição 6.5 *O conjunto $\mathbb{R}$ formado por todos os cortes, racionais ou irracionais, é chamado de o conjunto dos números reais e seus elementos de números reais.*

6.3 Relação de Ordem Entre os Números Reais

Agora vamos definir ordem dos reais como Jamil Ferreira definiu ordem dos cortes dos reais dado pela seguintes definições:

Definição 6.6 *Sejam $\alpha, \beta \in C$. Dizemos que α é menor do que β e escrevemos $\alpha < \beta$ quando $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$.*

Valem aqui as observações notacionais para desigualdades análogas as feitas na ordem dos números inteiros assim temos o seguinte exemplo:

Exemplo 6.5 *Seja $\leq$ uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$ para todos $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}$ arbitrários, então vale:*

i) $\alpha\beta \Rightarrow \alpha + \delta \leq \beta + \delta$;

Definição 6.7 *Se $\alpha \in C$ e $\alpha > 0^*$ chama-se corte positivo. Se $\alpha < 0^*, \alpha$ é dito corte negativo. Se $\alpha \geq 0^*$, α chama-se corte não negativo e se $\alpha \leq 0^*, \alpha$ chama-se corte não positivo.*

Exemplo 6.6 *Mostre que, para $\alpha, \beta \in C$, valem as equivalências:*

1. *$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$;*
2. *$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha \subset \beta$.*

***Demonstração**:*

1. *$(\Rightarrow)\alpha < \beta$ queremos mostrar que $\alpha \subsetneq \beta$ se suponhamos que existe $p \in \alpha$ e $p \notin \beta$ logo $\alpha \subsetneq \beta$.*
   $(\Leftarrow)$ Suponhamos que $\alpha \subsetneq \beta$ queremos mostrar que $\alpha < \beta$. Então existe $p \in \beta$ e $p \notin \alpha$ logo $p \in \beta \setminus \alpha$ portanto $\alpha < \beta$.
2. *$(\Rightarrow)\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ pelo item anterior $\alpha \subset \beta$;*
   $(\Leftarrow)\alpha \subset \beta$ implica, que pelo item anterior, que $\alpha < \beta$, ou seja, $\alpha \leqslant \beta$.

Teorema 6.2 ***Tricotomia*** *Para $\alpha, \beta \in C$, temos que uma e apenas umas das possiblidades a seguir ocorre.*

$\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$.

Demonstração.É claro que $\alpha = \beta$ exclui as outras duas possiblidades, pela definição de igualdade de conjuntos. De modo análogo, as possiblidades $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$ claramente excluem $\alpha = \beta$, pelo exercício anterior, mostremos que as igualdades excluem mutuamente. Suponhamos o contrario, isto é que $\alpha < \beta$ e $\alpha > \beta$ ocorram simultaneamente. Então existem $a \in \beta \setminus \alpha$ e se $\alpha \setminus \beta$.

De $a \in \beta$ e $b \notin \beta$ resulta $a < b$ e de $b \in \alpha$ e $a \notin \alpha$ resulta $b < a$, contradizendo a lei da tricotomia em $\mathbb{Q}$. Assim concluímos que no máximo uma das três possiblidades ocorre. Para mostrar que uma delas necessariamente ocorre, temos que $\alpha = \beta$ ou $\alpha \neq \beta$. Se $\alpha = \beta$, nada há o que á provar. Suponhamos $\alpha \neq \beta$. Então $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$ ou $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$ (pois, caso contrario, $\alpha = \beta$). No primeiro caso,$\beta < \alpha$ e no segundo caso, $\alpha < \beta$.

■

Teorema 6.3 *A relação $\leq$ é uma relação de ordem em C.*
Demonstração. Demonstremos esse Teorema por relação de equivalência, visto nos capítulos anteriores. Assim teremos:

1. **Reflexiva**: Seja $\alpha \in C$. Obviamente $\alpha = \alpha$, portanto,$\alpha \leq \alpha$;
2. **Antissimétrica**: Sejam $\alpha; \beta \in C$, $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$. Pela tricotomia, $\alpha = \beta$;
3. **Transitiva**: Sejam α, β e $\delta \in C$ onde $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \delta$
   se $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta$;
   se $\beta \leq \delta \Rightarrow \beta \subset \delta$;
   Portanto pela transitividade o conjunto $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \delta$ implica que $\alpha \subset \delta$ logo $\alpha \leq \delta$.

■

6.4 Operações em Números Reais

Segundo (Ferreira, 2013) os cortes dos números reais nos permite definir as duas operações (+,.) onde ele enunciou um Teorema fundamental que define operações nos cortes.
Teorema 6.4 *Sejam $\alpha, \beta \in C$. Se $\delta = \{a + b \mid a \in \alpha$ e $b \in \beta\}$ então $\delta \in C$.*
Demonstração. Vamos demonstrar as operações que δ satisfaz as três condições para ser cortes dos números reais :

1. É claro que $\delta \neq \emptyset$. Sejam $t \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ e $u \in \mathbb{Q} \setminus \beta$. Como $t > a$ e para todo $a \in \alpha$ e $u > b$, para todo $b \in \beta$, então $t + u > a + b$, para todo $a \in \alpha$, para todo $b \in \beta$, isto é, $t + u \notin \delta$, logo $\delta \neq \mathbb{Q}$.
2. Sejam $a \in \delta$ e $b < a$ (racional), mostremos que $b \in \delta$, a é do tipo $p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Então, de $b < p + q$, podemos escrever $b = p + q'$ com $q' < q$ e, portanto, $q' \in \beta$. Logo, $b = p + q'$, com $p \in \alpha$ e $q' \in \beta$, isto é, $b \in \delta$.

3. Vamos mostrar que em δ não há elemento máximo, isto é, se $a \in \delta$, existe $b \in \delta$ com $b > a$. temos: $a = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Como existe $p' \in \alpha$ com $p' > p$, o racional $b = p' + q \in \delta$ e é maior do que a.

■

Definição 6.8 *Dado $\alpha, \beta \in C$ definimos $\alpha + \beta$ como sendo o corte do Teorema anterior, ou visto que,*
$\alpha + \beta = \{a + b \mid a \in \alpha$ *e* $b \in \beta\}$.
Teorema 6.5 *A adição em C é comutativa, associativa e tem 0^* como elemento neutro.*
Demonstração.
Comutativa. Dado $\alpha, \beta \in C$ queremos mostrar que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ então temos $a + b \in \alpha + \beta$ tal que $a \in \alpha$ e $b \in \beta$ pois lembre que a propriedade comutativa é valida para os

racionais. Logo $a+b=b+a$ com $a+b \in \beta+\alpha$ pois $b \in \beta$ e $a \in \alpha$ sendo assim $a+b \in \beta+\alpha$ então $\alpha+\beta \subset \beta+\alpha$ da mesma forma $\beta+\alpha \subset \alpha+\beta$. Portanto concluímos $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.
Associativa. Dado α, β e $\delta \in C$ queremos mostrar que $\alpha+(\beta+\delta)=(\alpha+\beta)+\delta$ então $a+(b+c) \in \alpha+(\beta+\delta)$ tal que $a \in \alpha, b \in \beta$ e $c \in \delta$: Também é valida para os racionais. Logo $a+(b+c)=(a+b)+c$ pois tem-se $(a+b)+c \in (\alpha+\beta)+\delta$ com $a \in \alpha, b \in \beta$ e $c \in \delta$, pois, tem-se $\alpha+(\beta+\delta) \subset (\alpha+\beta)+\delta$ da mesma forma $(\alpha+\beta)+\delta \subset \alpha+(\beta+\delta)$ portanto $\alpha+(\beta+\delta)=(\alpha+\beta)+\delta$.
Elemento Neutro. Dado $\alpha \in C$, queremos mostrar que $\alpha+0^*=\alpha$, vamos verificar em duas inclusões: $\alpha+0^* \subset \alpha$ e $\alpha \subset \alpha+0^*$.
Seja $a \in \alpha+0^*$. Então $a=p+q$; com $p \in \alpha$ e $q \in 0^*$, isto é,$q<0$. Assim, $a<p \in \alpha$ e, portanto, $a \in \alpha$ logo, $\alpha+0^* \subset \alpha$.
Seja agora $a \in \alpha$. Tomando $b \in \alpha$, com $b>a$ podemos expressar a como $a=b+(a-b)$; onde $a-b<0$ e, portanto, ele pertence 0^*. Assim, $a \in \alpha+0^*$ e $\alpha \subset \alpha+0^*$.

■

Lema 6.1 *Seja $\alpha \in C$ e $a \in \mathbb{Q}$. Então existem números racionais p e q tais que $p \in \alpha, q \notin \alpha$, q não é cota superior mínima de α e $q-p=a$.*
Demonstração. Tomemos b arbitrariamente em α e consideremos a sequência $bn=b+na$ para $n=0,1,2...$ Dado $A=\{n \in \mathbb{N} : bn \in \alpha\}$ Temos que:

- $A \subset N$; por definição de A;
- $A \neq \emptyset$, pois $0 \in A$;
- A é finito, por consequência das condições 2 e 3 para ser corte. Logo podemos dizer que o conjunto A assume um máximo m. Isto acarreta que $bn \in \alpha$ e $bn+1 \in \alpha$: Então provemos esta afirmação através do principio de Boa Ordenação.
  Se $b+(m+1)a$ não for cota superior mínima de α, devemos tomar $p=b+ma$ e $q=b+(m+1)a$, dai $q-p=a$.
  Se $b+(m+1)a$ for cota superior mínima de α; devemos tomar $p=b+ma+\dfrac{a}{2}$ e $q=b+(m+1)a+\dfrac{a}{2}$, dai, $q-p=a$.

■

Teorema 6.6 *Seja $\alpha \in C$. Existe um único $\beta \in C$ tal que $\beta+\alpha=0^*$: Como nos casos dos inteiros e racionais, tal β denota-se por $-\alpha$ e se chama simétrico (ou inverso aditivo) de α.*
Demonstração. No início vamos provar a unicidade do simétrico. Assim se supomos $\alpha+\beta_1=\alpha+\beta_2=0^*$:É bom que lembremos que a adição de cortes é comutativa, assim obtemos:
$\beta_2=\beta_2+0^*=\beta_2+(\alpha+\beta_1)=(\beta_2+\alpha)+\beta_1=0^*+\beta_1=\beta_1$. Para mostrar a existência do Simétrico de α consideremos inicialmente um caso particular simples, digamos $\alpha=\{3\}^*$ e em simetria $-\{3^*\}=\{-3\}^*$ em caso geral temos $3^*=\{a \in \mathbb{Q} \mid a<3\}, (-3)^*=\{b \in \mathbb{Q} \mid b<-3\}$ e $3^*+(3)^*=\{a+b \in \mathbb{Q} \mid a \in 3^*$ e $b \in (-3)^*\}$.
Para provar que $3^*+(-3)^*=0^*$ pois provaremos em duas inclusões pertinentes 3^*+

$(-3)^* \subset 0^*$ e Vice-versa. Seja $t \in 3^* + (-3)^*$. Então $t = a + b$; onde $a < 3eb < -3$: Logo, $t = a + b < 3 + (-3) = 0$; portanto $t \in 0^*$.
Seja agora $t \in 0^*$; ou seja, $t < 0$, para β se tomemos a ideia $t = -2$, como expressar o -2 como uma soma $a + b$ com $a < 3$ e $b < -3$. Então pelo Lema 6.1, existem $a \in 3^*$ e $a' \in 3^*$ com $a' \neq 3^*$ é igual a cota superior mínima de 3^*, tais que a' $-a = 2$, ou ainda,$-2 = a + (-a')$.Como $a' > 3$,então $-a' < -3$, ou seja,$-a' \in (-3)^*$.
Provemos agora a existência de um corte β que satisfaz $\alpha + \beta = 0^*$: Primeiro caso é tomar um β e mostrar que é um corte.
Seja $\beta = \{p \in \mathbb{Q} \mid -p \notin \alpha \; -p$ não é cota superior mínima de $\alpha\}$.

1. Mostraremos que $\beta \neq \emptyset$ assim temos dois casos a considerar;
   - Admitimos que α não possui cota superior mínima.
     Prova:como α é corte, então $\alpha \neq \mathbb{Q}$ e logo, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \notin \alpha$ se tomamos $p = -q \in \mathbb{Q}$ e $-p = q \neq \alpha$, tem-se $p \in \beta$ e portanto $\beta \neq \emptyset$;
   - Admitimos que α possui cota superior mínima m.
     prova: Como m é cota superior mínima de $\alpha, m \in \alpha$ se $m \in \alpha$, seria máximo de α, que contradiz a definição de corte e com isso escrevemos $m+1 \in \alpha$: Dado $p = -m - 1 \in \mathbb{Q}$ e $-p = m + 1 \in \alpha$, e além disso, $-p = m + 1 \neq m$: portanto $p \in \beta$ e $\beta \neq \emptyset$.
     b) Mostraremos que $\beta \neq \mathbb{Q}$ assim temos dois casos a considerar
   - Admitimos que α possui cota superior mínima:
     Prova: Como α é corte, então $\alpha \neq \emptyset$, e portanto existe $a \in \alpha$ pois $a \in \mathbb{Q}$. Tomemos $p = -a \in \mathbb{Q}$ e portanto, $-p = a \in \alpha$. Logo $p \in \mathbb{Q}$, isto é, $\beta \neq \mathbb{Q}$.
   - Admitimos que α possui cota superior mínima m:
     Prova: Como m é cota superior mínima de α, então $m-1 \in \alpha$ caso contrario,$m-1$ seria uma cota superior de α menor do que m, contradizendo a minimalidade de m). Seja $p = -m + 1 \in \mathbb{Q}$ e $-p = m - 1 \in \alpha$. Portanto,$p \in \alpha$ e $p \in \mathbb{Q}$, isto é, $\beta \neq \mathbb{Q}$.
2. Seja $p \in \beta$ e $q \in \mathbb{Q}$. Queremos mostrar que $q \in \beta$. Como $p \in \beta$, temos que $-p \notin \alpha$ e $-p$ não é cota mínima de α. Como $q < p$ então $-p < -q$ pois $-q \in \alpha$ tem-se $-p \notin \alpha$. Temos também que $-q$ não é cota superior mínima de α, (pois caso contrario, sabendo que $-p \notin \alpha$. Ou seja é uma cota superior de α.) Assim teríamos $-q \leq -p$, contradizendo equação como $q \in \mathbb{Q}, q \notin \alpha$ e $-q$ não é cota superior mínima de α concluímos que $q \in \beta$.

3. Dado $p \in \beta$ queremos mostrar que existe $q \in \beta$ tal que $q < p$. Assim temos dois itens a mostrar.
   - α não possui cota superior mínima;
     Prova: Como $-p \notin \alpha$ e não possui cota superior mínima então existe um cota superior q de α (isto é, $q \notin \alpha$), tal queb $q < -p$. Assim,$-q \in \beta$ e $p < -q$, logo

β não possui máxima.

- α possui cota superior mínima m.
Prova: Seja $a = \dfrac{-m+p}{2} \in \mathbb{Q}$. Como $p \in \beta$, temos que $-p \notin \alpha$, ou seja, é uma cota superior de α, mas não é cota superior mínima de α, portanto , $m < -p$, dai $p < -m$. Sendo assim,
$a\dfrac{-m+p}{2} = \dfrac{-m}{2} + \dfrac{p}{2} > \dfrac{p}{2} + \dfrac{p}{2} = p,$
por outro lado,
$-a = \dfrac{m-p}{2} = \dfrac{m}{2} - \dfrac{p}{2} > \dfrac{m}{2} + \dfrac{m}{2} = m.$
Portanto, $-a \neq m$. Como $-a > m$, então $-a \notin \alpha$. Finalmente como $a \in \mathbb{Q}$,-$a \notin \alpha$ e $-a$ não é cota superior mínima de α, temos que $a \in \beta$ e $p < a$, logo,β não possui máximo.

Agora vamos finalizar que $\alpha+\beta = 0^*$ com isso temos inclusão para mostrar $\alpha+\beta \subset 0^*$ e $0^* \subset \alpha+\beta$.

- Seja $q+a+a \in \alpha+\beta$ com $q \in \alpha$ e $a \in \beta(a \in \mathbb{Q},\ -a \notin \alpha$ e $-a$ não é cota superior mínima de $\alpha)$. Como $q \in \alpha$ e $-a \notin \alpha$, então , $q < -a$, daí $q + a < 0$, pois , $q + a \in 0^*$.
- $p = 0^* \Rightarrow p \in \mathbb{Q}$ e $p < 0(-p > 0)$. Sejam $a \in \alpha$ e $a' \notin \alpha$ (a' não sendo cota superior de α), tais que $a' - a = -p$ (pelo lema 5.1) segue que $p = a + (-a')$, com $a \in \alpha$ e $-a' \in \beta$,ou seja.$p \in \alpha+\beta$. Portanto $\alpha+\beta = 0^*$

■

Definição 6.9 *Como nos casos de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, definimos a subtração em cortes por $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, para todos α e $\beta \in$ cortes.*

Proposição 6.4 *Dado α, β e δ pertence cortes portanto vale seguintes propriedades opostas.*

i) $-(-\alpha) = \alpha$;
ii) $-\alpha + \beta = \beta - \alpha$;
iii) $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$;
iV) $-\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$;
v) $\alpha - (\beta + \delta) = \alpha - \beta - \delta$;

Demonstração. Sendo na proposição têm-se a mesma ideia no caso de $\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{Q}$, a demonstração é estreitamente algébrica, isto é, apenas utiliza as propriedades da adição e de elemento neutro e de elemento simétrico, que são mesmas nas duas situações e na presente. Confirme este fato realizando demonstração desta proposição.

■

Teorema 6.7 *(Compatibilidade da relação de ordem com a adição) Sejam $\alpha, \beta, \delta \in$ cortes tais que $\alpha \leq \beta$. Então $\alpha + \delta \leq \beta + \delta$.*

Demonstração. $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subset \beta$. Dado $t \in \alpha + \delta$, isto é , $t = a + b$ com $a \in \alpha$ e $b \in \delta$. Como $\alpha \subset \beta$, então $a \in \beta$ e $t = a + b \in \beta + \delta$, ou seja, $\alpha + \delta \subset \beta + \delta$. Portanto $\alpha + \delta \leq \beta + \delta$.

■

A partir de agora vamos fazer a multiplicação em cortes, em seguida fazemos os mesmos passos realizados na definição da adição e de suas propriedades. Faremos demonstrações e alguns serão deixados como exercícios para os leitores que estão interessados em aprofundar o conteúdo.

Teorema 6.8 *Para $\alpha, \beta \in C$ com $\alpha \geq 0^*$ e $\beta \geq 0^*$, seja $\delta = \mathbb{Q}_-^* \cup \{a \in \mathbb{Q} \mid a = pq$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta, p \geq 0$ e $q \geq 0\}$. Então, δ é um corte e $\delta \geq 0$.*

Demonstração: Demonstremos que δ satisfaz três condições como definimos os cortes assim temos:

i)$p = -1 \in \delta$ portanto $\delta \neq \emptyset$, Assim temos:

$\alpha \neq \mathbb{Q} \Rightarrow$ existe $p' \in \mathbb{Q}$ tal que $p' \notin \alpha$;

$\beta \neq \mathbb{Q} \Rightarrow$ existe $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $q' \notin \beta$. Logo $p'q' \in \mathbb{Q}$.

Mostremos agora que $p'q' \in \delta$, isto é existe $p \in \alpha$ e $q \in \beta$ $p \geq 0$ e $q \geq 0$ tal que $p'q' = pq$; pois não podemos ter $p' \leq p$ (pois teríamos $p' \in \alpha$), nem $q' \leq q$ (pois teríamos $q' \in \beta$).Assim $p < p'$ e $q < q'$ pois concluímos que $pq \leq p'q'$ o que é uma contradição com $p'q' = pq$. Portanto $p'q' \notin \delta$ logo $\delta \neq \mathbb{Q}$.

1. temos $a \in \delta$ suponhamos $a \in \{a \in \mathbb{Q} \mid a = pq$ com $p \in \alpha$ e $q \in \beta, pq \geq \emptyset\} \Rightarrow a \geq 0$;
2. Se $a = 0; b < a = 0 \Rightarrow b \in \mathbb{Q}_-{}^* \Rightarrow b \in \delta$;

   2.1) Se $a > 0 > b \Rightarrow b \subset \mathbb{Q}_-{}^* \Rightarrow b \in \delta$;

   2.3) Se $a > b > 0 \Rightarrow a = pq$, com $p \in \alpha, q \in \beta,\ p, q > 0$ como $b < a = pq$ tome $q' = \dfrac{b}{p} \in \mathbb{Q}_+{}^*, q'p = b \Rightarrow q'p < pq \Rightarrow q' < q \Rightarrow q' \in \beta$ logo $b = pq'$ com $p \in \alpha$ e $q' \in \beta$ portanto $b \in \delta$.

3. Dado $a \in \delta$ e mostremos que existe $b \in \delta$ tal que $a < b$. tem-se $a < b$. Então se tomarmos $b = \dfrac{a}{2} < 0$, dai $b > a$. Se $a \geq 0$. Neste caso $a\delta$ significa que $a = pq$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta, p \geq 0$ e $q \geq 0$ então existe $t \in \alpha$ e $u \in \beta$ tais que $p < t$ e $q < u$ pois α e β não possui elemento máximo.

■

Definição 6.10 *Se $\alpha, \beta \in Cortes$ e $\alpha \geq 0^*, \beta \geq 0^*$, definimos o produto $\alpha.\beta$ (ou $\alpha\beta$) como sendo o corte δ do teorema anterior.*

Para definir produto de cortes que contém fatores negativos, começamos com a noção de valor absoluto de um corte de modulo de um numero inteiro.

Definição 6.11 *Dado $\alpha \in Cortes$ definimos o valor absoluto de α (ou o módulo de α),representado por $\mid \alpha \mid$, do seguinte modo:*

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{se} \quad \alpha \geq 0^*, \\ -\alpha, & \text{se} \quad \alpha < 0^*. \end{cases}$$

Exemplo 6.7 *Mostre que para qualquer $\alpha \in Cortes$, tem-se $\mid \alpha \mid \geq 0^*$.*

Solução: *Suponha que $\alpha \geq 0^*$, então $\mid \alpha \mid = \alpha \geq 0^*$, dai $\mid \alpha \mid \geq 0^*$.*

Se $\alpha < 0^*$, *então* $\mid \alpha \mid = -\alpha$ *e ainda,* $-\alpha > 0^*$ *pela proposição anterior, temos* $\mid \alpha \mid > 0^*$.

Exemplo 6.8 *Mostre que para qualquer* $\alpha \in C$, *tem-se* $\mid \alpha \mid = 0^*$ *Se e somente se* $\alpha = 0$.

Solução: $(\Rightarrow)$ *Dado* $\mid \alpha \mid = 0^*$. *Se* $\alpha > 0^*$ *então* $\mid \alpha \mid = \alpha > 0^*$, *contradição, pois tem-se hipote-se* $\mid \alpha \mid = 0^*$;

$(\Leftarrow)$ *Dada* $\alpha = 0^*, \alpha = 0^* \Rightarrow \mid \alpha \mid = \alpha = 0^*$.

Exemplo 6.9 *Mostre que para qualquer* $\alpha \in Cortes$, *tem-se* $\mid \alpha \mid = \mid -\alpha \mid$.

Definição 6.12 *Se* $\alpha, \beta \in cortes$, *definimos:*

$$\alpha\beta = \begin{cases} -(\mid \alpha \mid\mid \beta \mid), & \text{se} \quad \alpha \leq 0^*, \beta \geq 0^*; \\ -(\mid \alpha \mid\mid \beta \mid), & \text{se} \quad \alpha \geq 0^*, \beta \leq 0^*; \\ \mid \alpha \mid\mid \beta \mid, & \text{se} \quad \alpha < 0^*, \beta < 0^*. \end{cases}$$

Proposição 6.5 *Para* $\alpha\,\beta \in Cortes$, *temos* $(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -\alpha\beta$, *e* $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.

Demonstração. A demonstração das duas primeiras igualdades é subdividida em casos, todos tratados de maneira similar. A terceira igualdade é consequência das duas anteriores, usando a primeira regra de sinais dada na Proposição 6.4. Demonstremos apenas a igualdade $(-\alpha)\beta = -\alpha\beta$ para o caso $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ e deixaremos os demais como exercícios para quem quer aprofundar.

Pois pela definição de multiplicação temos seguintes:

$(-\alpha)\beta = (\mid \alpha \mid\mid \beta \mid) = -([-(-\alpha)]\beta) = -(\alpha\beta)$.

Analogamente, verificamos que $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$.

■

Teorema 6.9 *A multiplicação de cortes é comutativa, associativa, tem* 1^* *como elemento neutro e* $\alpha, \beta, \delta \in cortes$ *e vale seguintes exemplos.*

i)**Comutativa**: $\alpha\beta = \beta\alpha$;

Demonstração.Dado $a \in \alpha\beta$ suponhamos que $a < 0$ pois $a \in \beta\alpha$ então pela definição do produto. Por outro lado $a \geq 0$. Então $a = pq, p \in \alpha$ e $p \in \beta$ e $p \geq 0$ e $q \geq 0$ entretanto $a = pq$ onde $p \in \alpha$ e $q \in \beta, q \geq 0$ e $p \geq 0$ pois tem-se $a \in \beta\alpha$. Portanto $\alpha\beta \subset \beta\alpha$ se analisamos que $a \in \beta\alpha \Rightarrow a \in \alpha\beta$ isto é $\beta\alpha \subset \alpha\beta$ podemos concluir que $\alpha\beta = \beta\alpha$.

ii)**Associativa**: $(\alpha\beta)\delta = \alpha(\beta\delta)$;

Demonstração. $(\alpha\beta)\delta = \{p \in \mathbb{Q} \mid p < 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q = (ab)c, a \in \alpha, b \in \beta \text{ } e \text{ } c \in \delta \text{ } onde \text{ } a \geq 0, b \geq 0 \text{ } e \text{ } c \geq 0\}$ por outro lado $\{p \in \mathbb{Q} \mid p < 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} = a(bc),$ *onde* $a \in \alpha,\ b \in \beta$ *e* $c \in \delta,$ *com* $a \geq 0,\ b \geq 0$ *e* $c \geq 0\} = \alpha(\beta\delta)$.

iii)**Elemento Neutro**: $\alpha.1^* = \alpha^*$;

Demonstração. Dado $a \in \alpha$, suponhamos que $a < 0$ pois temos $a \in \alpha$ pela definição do produto. Se $a \geq 0$ pois se tomemos $p \in \alpha$ tal que $0 \leq a \leq p$ (pois α não tem elemento máximo), por outro lado se $q = \dfrac{r}{p}$ então $0 \leq q < 1$ entretanto $q \in 1^*$. Assim podemos concluímos que, como $a + pq$ onde $p \in \alpha$ e $q \in 1^*, p > 0$ e $q \geq 0$ então $a \in \alpha.1^*$. Portanto $\alpha \subset \alpha.1^*$ Logo $\alpha = \alpha.1^*$.

■

Teorema 6.10 *Para $\alpha, \beta \in Corte$ então temos $(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta) e (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.*

Demonstração. Temos $(-\alpha)\beta + \alpha\beta = (-\alpha + \alpha)\beta) = 0^*.\beta = 0^*$.
Por outro lado se $\alpha(-\beta) + \alpha\beta = \alpha(-\beta + \beta) = \alpha.0^* = 0^*$.
Suponhamos pelas igualdades opostas temos dois casos a considerar:
1ª caso. $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$;
2ª caso. $(-\alpha)(-\beta) = -(\alpha(-\beta)) = -(-(\alpha\beta)) = \alpha\beta$.

■

Teorema 6.11 *(Compatibilidade da relação de ordem com a Multiplicação) suponha que $\alpha \leq \beta$ e $\delta \geq 0^*$ então $\alpha\delta \leq \beta\delta$.*

Demonstração. Temos $\alpha \leq \beta$ pelo Teorema 6.7, $0^* = \alpha + (-\alpha) \leq \beta + (-\alpha)$ portanto que $\beta(-\alpha) \geq 0^*$ por outro lado como $\delta \geq 0^*$ temos $(\beta + (-\alpha)), \delta \geq 0^*$ pela definição da multiplicação de corte temos $\alpha\delta + (-\alpha)\delta \geq 0^*$. Portanto concluímos pelo teorema em cima citada que $\beta\delta \subset \alpha\delta$ isto é $\alpha\delta \leq \beta\delta$.

■

Teorema 6.12 *Se $\alpha, \beta \in$ cortes e $\alpha < \beta$, então existe um corte racional a^* tal que $\alpha < a^* < \alpha$.*

Demonstração. Demonstremos esse teorema em dois casos:

1. α é um corte racional, digamos, $\alpha = b^*$. Como $\alpha < \beta$, existe $a \in \beta \setminus \alpha($ a racional), com $a > b$.(caso contrario), $\beta \setminus \alpha = \{s\}$, é,$\beta = \alpha \cup \{s\}$, contradiçao (iii) da definição de corte.) De $a \in \beta$ e $a \notin a^*$, obtemos $a^* < \beta$. Como $b < a$, então $\alpha = b^* < a^*$.

2. α não é um corte racional. Como $\alpha < \beta$, existe $a \in \beta \setminus \alpha$ (a racional). De $a \in \beta \setminus a^*$, obtemos $a^* < \beta$. como a é cota superior de α e α não é corte racional, então a não é cota superior mínima de α e, dai existe $b \in a^* \setminus \alpha$, ou seja, $\alpha < a^*$.

■

Definição 6.13 *O conjunto de C dos cortes será, a partir de agora, denominado de conjunto dos números reais e denotado por $\mathbb{R}$. Os cortes racionais serão identificados, via a injeção f, com os números racionais. Todo corte que não for racional será denominado número irracional.*

Observação 6.1 *Perceba que $f(\mathbb{Q})$ com $\mathbb{Q}$ nos permite escrever $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ representa o conjunto dos números irracionais .*

Teorema 6.13 *(Dedekind) Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que:*
i)$\mathbb{R} = A \cup B$;
ii)$A \cap B = \emptyset$;
iii) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$;
iv) Se $\alpha \in A$ e $B \in B$, então $\alpha < \beta$.
Nessas condições existe um, e apenas um, numero real δ tal que $\alpha \leq \delta \leq \beta$, para todo

$\alpha \in A$ e para todo $\beta \in B$.

Demostração. Unicidade: suponhamos que existam dois números δ_1 e δ_2,com $\delta_1 < \delta_2$ nas condições do enunciado. Consideremos δ_3 tal que $\delta_1 < \delta_3 < \delta_2$, o que é possível pelo teorema 5.10 quando $\delta_1 < \delta_2$ resulta $\delta_3 \in A$, pois $\beta \geq \delta_2 (> \delta_3)$, para todo $\beta \in B$ e $A \cup B = \mathbb{R}$. Analogamente, de $\delta_1 < \delta_3$, resulta $\delta_3 \in B$. Obtemos então $\delta_3 \in A \cap B$, uma contradição.

Agora vamos provar existência.

Seja $\delta = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \in \alpha,\ \textit{para algum}\ \alpha \in A\}$. Mostraremos que δ é um corte e segue três (3) condições para ser corte:

1. $\emptyset \neq \delta \neq \mathbb{Q}$: Desigualdade $\emptyset \neq \delta$ resulta imediatamente de $A \neq \emptyset$. Para mostrar que $\delta \neq \mathbb{Q}$, tomemos $\beta \in B$. Seja $b \notin \beta$ um racional. Como $\alpha \subset \beta$, para todos $\alpha \in A$, então $b \notin \alpha$, para todo $\alpha \in A$, de onde resulta $b \notin y$.
2. Se $a \in \delta$ e $b < a$ então $b \in \delta$: Temos que $a \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$ e como $b < a$, então $b \in \alpha$ de onde segue que $b \in \delta$.
3. Se $a \in \delta$, então existe $b > a$ com $b \in \delta$: Temos que $a \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$, e como α é um corte, existe $b > a$ em α, logo $b \in \delta$.

   Assim δ é um número real e temos que $\alpha \leq \delta, \forall \alpha \in A$, pois, pela definição de δ, sabemos que $\alpha \subset \delta, \forall \alpha \in A$.

   Mostraremos agora que $\delta \leq \beta, \forall \beta \in B$. Suponhamos que exista $\beta \in B$com $\beta < \delta$. Neste caso, existe um racional $a \in \delta \setminus \beta$. Por pertencer δ, a é um elemento de algum $\alpha \in A$ e não sendo elemento de β, obtemos $\beta < \alpha$, contrariando a hipótese.

■

Corolário 6.1 *Nas condições do teorema anterior, ou existe em A um numero máximo, ou em B, um número mínimo.*

Demonstração. Seja δ como no teorema anterior. Então δ está em A ou em B, pela hipótese (1^{a}) e, por (2^{a}), em apenas um desses conjuntos. Se $\delta \in A$, então δ é elemento máximo de A e, se $\delta \in B, \delta$ é elemento mínimo de B.

■

Se percebemos ainda no conjunto A do Teorema 6.13 não converte δ, então ele é um corte em $\mathbb{R}$, no sentido da definição de cortes do números racionais .A diferença entre ambas situação é que em racionais não tem necessariamente do Teorema 6.13 para os números reais, um elemento como δ. Essas lacunas é que geram os cortes (números) Irracionais , e tal lacunas não ocorrem em $\mathbb{R}$ então cortes em $\mathbb{R}$ dos seguintes tipos, onde a e b são reais com $a < b$:

Exemplo 6.10 1. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;

2. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$;

3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$;

4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$;

5. $]a,+\infty[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$; *e analogamente, para intervalos:* $[a,+\infty[\,;\,]-\infty,a[\,;\,]-\infty,a]$ *e* $]-\infty,+\infty[\, = \mathbb{R}$.

O próximo Teorema destaca a importância fundamental na análise matemática. Com isso recorremos ao Teorema do valor Intermediário e o Teorema de Weierstrass. O primeiro mostra a definição de função por intervalos fechados $[a,b]$, a valores reais, todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$. O segundo Teorema mostra função máxima e função mínima nesse intervalos de dois Teoremas. Assim temos a seguinte definição.

Definição 6.14 1. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que A é limitado superiormente se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $K \geq x, \forall\, x \in A$. Um tal K diz-se cota superior de A (como) já definido para subconjunto de $\mathbb{Z}$.*

2. *De modo análogo, define-se subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente e cota inferior.*

3. *A diz-se limitado se for limitado superiormente e limitado inferiormente.*

4. *Suponhamos que A seja limitado superiormente e que exista uma cota superior de A, digamos b, que seja mínima (no sentido de que qualquer cota superior de A seja maior ou igual b). Neste caso b diz-se supremo de A e é denotado por sup A.*

5. *De modo análogo, define-se ínfimo de A (para conjuntos A limitados inferiormente, denotado por inf A, como sendo uma cota inferior máxima para o conjunto A.*

Definição 6.15 *1-Dado* $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...; \frac{1}{n}, ...\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. *Temos: A é limitado, $SupA = 1$ e $infA = 0$. Observe que $SupA \in A$, mas $infA \in A$.*

$2 - A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. *$A$ é limitado inferiormente, mas não é limitado superiormente. Seu ínfimo é 0.*

Teorema 6.14 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio e limitado superiormente, então existe $SupX$.*

Demonstração. Definamos $A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha < x,\ \textit{para algum}\ x \in X\}$, isto é ,$A$ é o conjunto constituído precisamente pelo números reais que não são cotas superiores de X. Seja $B = \mathbb{R} \setminus A$, isto é, B é o conjunto constituído pelas cotas superiores de X. Vamos verificar que A e B satisfazem as condições do Teorema 6.13.

as condições (i) e (ii) são claramente validas. Quanto a (iii) temos que, sendo $X \neq \emptyset$, existe $x \in X$ e, portanto, qualquer $\alpha < x$ é elemento de A, logo $A \neq \emptyset$. Ainda, como X é limitado superiormente, $B \neq \emptyset$.

Para verificar (iv), sejam $\alpha \in A$ e $\beta \in B$. Assim, existe $x \in X$ tal que $\alpha < x$. Como $\beta \geq x$, obtemos $\beta > \alpha$.

Pelo o que visto no Corolário 6.1, ou A possui máximo, ou B possui mínimo. Vamos mostrar que a primeira alternativa não pode ocorrer, de onde decorrerá que B possui mínimo, que é tese do Teorema.

Tomemos, então, α arbitrário em A. Existe $x \in X$tal que $\alpha < x$. Consideremos α' tal que $\alpha < \alpha' < x$. Como $\alpha' < x$, então $\alpha' \in A$ e é maior do que α, ou seja, nenhum elemento de A é maior do que os demais, como queríamos verificar.

■

Teorema 6.15 *O conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais é limitado em* $\mathbb{R}$.
Demonstração. Suponhamos $\mathbb{N}$ limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e seja $\alpha = sup$ de $\mathbb{N}$. Assim,$\alpha \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $n+1 \in \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $n+1 \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde obtemos $\alpha - 1 \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é ,$\alpha - 1$ é cota superior para $\mathbb{N}$ menor do que o sup $\mathbb{N}$, uma contradição.

■

Exercício 6.4 *Como uma aplicação do que acabamos de estudar, vamos mostrar que existe um único número real positivo cujo quadrado é 2,isto é, a equação*$x^2 = 2$ *tem uma única solução real positiva (que já sabemos que não é racional). Então tal solução é denotado por* $\sqrt{2}$. *Como* $\alpha^2 = (-\alpha)^2$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *então* $-\sqrt{2}$ *também é solução da equação acima.*
Dado $X = \{X \in \mathbb{R^*}_+ \mid X^2 < 2\}$. É claro que $X \neq \emptyset.X$ é limitado superiormente, por exemplo, polo número 4.De fato, $4 > x > 0$ equivale a $4^2 > x^2$, que é verdadeira para $x \in X$, pois, para esses números, $x^2 < 2$.
Pelo teorema anterior, X possui o supremo, digamos, S. Mostraremos que $S^2 = 2$,por Exclusão dos casos $S^2 < 2.Como\mathbb{R}$ é arquimediano, podemos argumentar como na demonstração do teorema (falta citar teorema)e tomarmos h real positivo menor do que $\min\{1, \dfrac{2-s^2}{2s+1}\}$. Obtemos:
$(S+h)^2 = s^2 + 2sh + h^2 < s^2 + 2sh + h = s^2 + h(2s+1) < s^2 + \dfrac{2-s^2}{2s+1}.(2s+1) = 2$,isto é ,$(s+h)^2 < 2$; logo $s + h \in X$, contradizendo o fato de s ser menor cota superior de X.
Se $s^2 > 2$ como na demonstração de teorema (falta para citar)e maus uma vez se tomarmos h real positivo tal que $0 < h < min\{1, \dfrac{2-s^2}{2s}\}$, obtemos: $(s-h)^2 = s^2 - 2sh + h^2 > s^2 - 2s\dfrac{2-s^2}{2s} + h^2 = 2 + h^2 > 2$ pois $(s-h)^2 > 2$ entretanto $s - h > x, \forall x \in X$; contradizendo o fato de s ser menor cota superior de X. Portanto chegamos onde queríamos chegar.

Enfim a construção numérica feita aqui tem grande importância para educação em matemática porque ajuda os alunos nos primeiros anos em licenciaturas de matemática ter a capacidades e habilidade de compressão de construção numéricas, que posteriormente facilita a compressão de cálculo aritmética, calculo diferencial, analise e estrutura álgebra

7 CONCLUSÃO

Concluímos que a construção numérica teve muitos avanços no cálculo aritmético, cálculo diferencial, Analise e álgebra. E com base nessas disciplinas e conhecimentos repassadas pelos os nossos professores durante a graduação foi possível compreender as construções numéricas feitas aqui, partindo desde números naturais usando o conceito de Axiomas de peano nos faz entender a modelagem satisfatória para a dedução das operações de soma, produto e relação de ordem dos números naturais. Também concluímos que é a através do conceito de relação de equivalência, conjuntos, pares ordenados e produtos cartesianos que podemos definir os números inteiros e racionais. Concluímos que na construção dos números reais é possível completar o conjunto dos números racionais criando um sistema contínuo de números baseando-se pelo método de corte de Dedekind que é corte no conjuntos dos números racionais.

Por fim esperamos que este trabalho de conclusão de curso, venha de alguma forma contribuir para o ensino de matemática. Em resumo finalizamos usando a seguinte expressão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

REFERÊNCIAS

ÁVILA,G.S.S: Analise Matemática para licenciatura.3ª ediçao revista e ampliada-São Paulo; Blucher,2006.

LIMA, E. L.; A Matemática do Ensino Médio, vol.1; 10ª Edição, Rio de Janeiro:SBM 2012.

IEZZI,GELSON. Fundamentos de matemática elementar,1.9ª edição- São Paulo:atual,2013

FERREIRA,J.;: Construção dos Numeros.3ª ediçao Rio de janeiro:SBM,2013.

LIMA, E. L.; Curso de Analise,vol.1; 14ª Edição, Rio de Janeiro:Associação Instituto nacional de Matematica Pura e Aplicada, 2016.

GONÇALVES,A. Introdução á álagebra,5ª edição- Rio de janeiro:IMPA,2015 194 p.