UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

CARLA SOFIA DA CONCEIÇÃO BÁRIS ARAÚJO

QUADRATURA DE FIGURAS PLANAS: DA HISTÓRIA PARA A SALA DE AULA

ACARAPE

2018

CARLA SOFIA DA CONCEIÇÃO BÁRIS ARAÚJO

QUADRATURA DE FÍGURAS PLANAS: DA HISTÓRIA PARA A SALA DE AULA

Monografia apresentada ao curso de Ciências da Natureza e da Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito para a obtenção do título de Bacharela em Ciências da Natureza e da Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Danila Fernandes Tavares.

ACARAPE
2018

CARLA SOFIA DA CONCEIÇÃO BÁRIS ARAÚJO

QUADRATURA DE FÍGURAS PLANAS: DA HISTÓRIA PARA A SALA DE AULA

Monografia apresentada ao curso de Ciências da Natureza e da Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito para a obtenção do título de Bacharela em Ciências da Natureza e da Matemática.

Aprovada em: 05 / 06 / 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Danila Fernandes Tavares (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Rafael Jorge Ponts Diógenes

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Examinador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Prof. Dr. Lourenço Ocuni Cá (Examinador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Araujo, Carla Sofia da Conceicao Baris.

A687q

Quadratura de figuras planas: da história para a sala de aula / Carla Sofia da Conceicao Baris Araujo. - Acarape, 2018.
62f: il.

Monografia - Curso de Ciências da Natureza e Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2018.

Orientador: Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares.

1. Matemática (Ensino Fundamental) - Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Desenhos geométricos. I. Título

CE/UF/BSP CDD 372.76

A minha Família, em especial a minha mãe e aos meus irmãos, e o meu pai que me inspira e que se orgulharia dessa conquista.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor meu Deus, todo poderoso por tudo. A minha mãe Domingas da Conceição, por me ter dado tudo que pôde. A meus filhos Jorge Gabriel e Nazariela Maria Hortência, que são o meu refúgio nas horas de angústia e de incertezas. Aos meus irmãos por todo o carinho, conselho e suporte dado.

Ao minha orientadora Danila Fernandes Tavarez pelo apoio, motivação e excelentíssima orientação e suporte, sem o qual não seria possível efetuar esse trabalho.

Aos meus amigos e colegas de turma que compartilharam comigo momentos de aprendizados ao longo desses anos de formação.

O meu companheiro e namorado Luís Carlos, por sempre ter me apoiado em todos os sentidos ao longo do curso, me aconselhando e ajudando nos momentos mais difíceis.

Ao Brasil, país que me acolheu sempre de forma espetacular e que permite o ensino superior aos países em desenvolvimento.

.

“Agir, eis a inteligência verdadeira. Serei o que quiser. Mas tenho que querer o que for. O êxito está em ter êxito, e não em ter condições de êxito.”

(Fernando Pessoa)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo revisitar o problema da quadratura de figuras geométricas planas, utilizando o método de Euclides, ou seja, com régua não graduada e compasso, propondo mecanismos alternativos que auxiliem, de forma didática, seu uso em salas de aula, contemplando especialmente estudantes do Ensino Fundamental II das Escolas do Maciço de Baturité e dos Países parceiros da nossa Universidade. Entendemos que o ensino bem feito nos anos iniciais, onde os alunos têm seus primeiros contatos com a geometria plana, é de fundamental importância para que tenham um sólido aprendizado que vão ser refletidos, positivamente, na aprendizagem nos anos futuros. Quadrar figuras planas consiste da construção de um quadrado com área equivalente à área de um polígono dado. É mostrada, detalhadamente, a construção, com régua e compasso, da quadratura de um retângulo e de um triângulo, polígonos de quatro e de três lados, respectivamente e, posteriormente, é feita a generalização da construção da quadratura de um polígono qualquer de n lados. Com a decomposição de figuras e sua equicomposição em outras, são propostas atividades práticas para serem trabalhadas em sala de aula, abordando o conceito de equivalência de figuras planas e o cálculo de áreas que, posteriormente, tem suas fórmulas algebricamente deduzidas através da equicomposição para polígonos como o retângulo, o triângulo, o paralelogramo e o trapézio. Verifica-se então que a geometria pode ser uma ferramenta muito didática que, se usada de forma criativa e, por que não, divertida pode despertar a atenção dos alunos e seu consequente interesse pelos estudos desta disciplina e também de outras dentro da matemática, obtendo um melhor rendimento e aprendizagem do aluno, além de aumentar o leque de opções pedagógicas de ensino para o professor.

Palavras-chave: Quadratura de figuras planas. Figuras Equicompostas. Ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

This paper aims to revisit the problem of quadrature plane geometric figures, using the Euclidean method, ie, with no graded and compass ruler, proposing alternative mechanisms to assist, in a didactic way, its use in classrooms, contemplating especially students of Elementary School II of the Baturité Massif Schools and partner countries of our University. We understand that teaching well done in the early years, where students have their first contact with the plane geometry, is crucial to have a solid learning that will be reflected positively on learning in future years. Quadrate plane figures is the construction of a square with area equal to the area of a given polygon. It is shown in detail the construction with ruler and compass, the square of a rectangle and a triangle, four polygons and three sides, respectively, and subsequently is made to generalize the construction of quadrature any polygon of n sides. With the breakdown of figures and their equicomposição in others, it is proposed practical activities to be worked in the classroom, addressing the concept of equivalence of plane figures and the calculation of areas which subsequently has its algebraic formulas deduced by equicomposição for polygons such as rectangle, triangle, parallelogram and trapezoid. It appears then that the geometry can be a very educational tool that, if used creatively and, why not, fun can arouse the attention of students and their consequent interest the study of this subject and also other within mathematics, obtaining better performance and student learning, and increase the range of educational options for teaching the teacher.

Keywords: Quadrature plane figures. Figures equalizer. Teaching and learning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática em geral é uma componente curricular muito importante, ela é a base para o ensino de outras disciplinas como física, por exemplo. A matemática está presente em tudo o que fazemos diariamente e segundo Velho e Lara (2001) *apud* Andrade (2013), a matemática é necessária para a sobrevivência e que sem ela o convívio social e as possibilidades de ascensão social ficam muito condicionadas. Ela apresenta uma importância singular no dia-a-dia. Embora a matemática seja muito importante, Santos J., França e Santos L. (2007) mostram que os alunos consideram a matemática como sendo uma disciplina de difícil compreensão e que os alunos apresentam inúmeras dificuldades no aprendizado desta componente curricular. Leonardo, Menestrina e Miarka (2014) dizem que a matemática é a disciplina que apresenta índices de aproveitamento mais baixos, através de exames realizados pelo brasileiro. Silva (2014) apresenta como maior dificuldade para os alunos o fato de os elementos teóricos ensinados para resolver problemas não estarem ligados a realidade, o que resulta num desinteresse dos alunos no aprendizado. Neste contexto, que surge a necessidade da utilização de técnicas e novos elementos no ensino da matemática como forma de captar a atenção dos alunos e aumentar o seu interesse pela disciplina. A geometria e o ensino da quadratura de figuras geométricas surgem como forma de auxiliar nesse problema (SILVA, 2006 *apud* SOUZA, 2015) afirma que os desenhos das figuras geométricas apresentam parte importante para a compreensão, fixação e a imaginação criativa.

A geometria nasceu das necessidades das civilizações antigas como a Egípcia e a Babilônia de resolver problemas cotidianos. A palavra geometria vem do grego e é formada por "Geo" que se refere à terra, "Metria" que se refere à medida, o que pode ser traduzida como medição da terra. A geometria nasceu dessas civilizações e os primeiros conceitos criados foram a noção de distância e de área. Essas civilizações pioneiras deixaram um legado para nós como o cálculo da área do triângulo, do retângulo, do quadrado e até do círculo através de seus tabloides e papiros.

Outra civilização que contribuiu muito para o desenvolvimento da geometria foi a civilização grega que substitui o caráter empírico e prático da geometria Egípcia e Babilônica e transmite um carácter mais lógico e dedutivo. A geometria é levada para a Grécia por Tales de Mileto onde ela é estudada e difundida em muitas escolas filosóficas. Na Grécia ela é desenvolvida até que Euclides reúne todo o conhecimento geométrico em treze livros que são conhecidos como "Os Elementos" de Euclides. Euclides reúne então os conhecimentos Pitagóricos nos livros I-IV e IX, o conhecimento de Architas no livro VIII, os conhecimentos de Eudoxo nos livros V, VI e XII, os conhecimentos de Teeteto nos livros X e XIII (PENEIREIRO; SILVA, 2008), O livro VII reúne os conhecimentos acerca dos números, grandezas e o papel da medida (ROQUE; CARVALHO, 2012), enquanto que o livro XI aborda a problemática da geometria espacial (MOL, 2013).

Este trabalho tem como objetivo utilizar o método de Euclides para o cálculo de áreas, utilizando apenas régua não graduada e compasso. Revisitar o problema da quadratura de figuras planas, obtendo, da literatura, os principais conceitos já estudados e os mais eficientes do ponto de vista do ensino. Estudar equivalência de áreas através da equicomposição de figuras e desenvolver mecanismos que proponham uma forma mais didática para uso em sala de aula, buscando sempre melhorar a aprendizagem do ensino da Geometria Euclidiana Plana.

O trabalho está dividido em seis capítulos. No Capítulo 1, fazemos uma breve introdução acerca do tema a ser discutido e apresentamos os objetivos do trabalho. No Capítulo 2, fazemos um levantamento histórico do surgimento da geometria e dos primeiros geômetras da Babilônia e do Egito até o surgimento da obra de "Os Elementos" de Euclides. No Capítulo 3, apresentamos alguns meios didáticos para o ensino do cálculo de áreas de alguns polígonos, construindo o conceito através da equicomposição de figuras até chegar à dedução algébrica das fórmulas que conhecemos e utilizamos hoje. No Capítulo 4, abordamos o conceito de quadratura e apresentamos as quadraturas do retângulo e do triângulo, utilizando o método de Euclides, ou seja, com régua e compasso. As quadraturas do retângulo e do triângulo são a base para a construção da quadratura de qualquer polígono de n lados, com o auxílio do famoso Teorema de Pitágoras. No Capítulo 5, são apresentadas algumas atividades propostas para o ensino do cálculo de área e equivalência de figuras planas para aplicação em sala de aula. As propostas são para turmas do Ensino Fundamental II, com o objetivo de facilitar o ensino da geometria nos anos iniciais de aprendizagem da disciplina. Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos nossas considerações finais do trabalho e perspectivas.

2 BREVE HISTÓRIA DA GEOMETRIA NA BABILÔNIA E NO EGITO

O desenvolvimento do conhecimento acerca da geometria deve-se à necessidade das civilizações antigas como a egípcia e a babilônica de solucionarem problemas cotidianos de suas atividades. Segundo Piaseski (2010), a geometria nasceu da necessidade de compreender melhor o meio onde viviam. Eves, (1997) *apud* Piaseski (2010), afirma que as primeiras considerações feitas na geometria são a simples observação e a capacidade de reconhecer figuras, comparar formas e tamanhos. Logo, o autor afirma que, um dos primeiros conceitos geométricos desenvolvidos foi a noção de distância (PIASESKI, 2010) e de área.

Eves, (1997) *apud* Piaseski (2010), afirma que, uma geometria caracterizada pelo traçado de desenho de formas, fórmulas, cálculo de medidas de comprimento de área e volume nasceu da necessidade das sociedades antigas delimitarem a terra. O significado para a palavra geometria derivada do grego GEO "terra" e METRIA "medida" significa medição de terra (PIASESKI, 2010). A noção geométrica de figuras como triângulos, quadrados e retângulos foi desenvolvidas nessa época. Outras noções geométricas como paralelismo e perpendicularidade foram surgindo pelas necessidades das referidas civilizações de construírem muros e moradias (PIASESKI, 2010).

Boyer, (1974) *apud* Piaseski (2010) afirma que a geometria nasceu no Egito da necessidade de calcular medidas de terreno sempre que estes sofressem inundações do Rio Nilo de forma a ser cobrado um imposto justo sobre as mesmas. Neste sentido Mlodinow, (2005) *apud* Piaseski (2010) afirma que a cobrança de imposto foi o primeiro principal impulsionador para o desenvolvimento da geometria.

As áreas a serem medidas eram então divididas em triângulos e retângulos (PIASESKI, 2010) e quando o terreno era irregular, os responsáveis por essas medições recorriam a triangulação que consiste em dividir o terreno em campos menores e triangulares cujas áreas somadas eram idênticas a área total do terreno correspondente (PIASESKI, 2010). Este carácter prático da geometria egípcia leva muitos outros autores a questionarem se ela pode ser descrita como geometria (GASPAR E MAURO, 2004). Porém recorrendo a visão mais restrita da palavra ("TERRA"+ "MEDIDA") geometria, Piaseski (2010) afirma que a geometria de uma maneira mais rústica era utilizada também pelas civilizações chinesas e babilônicas, porém o seu uso como ciência dedutiva nasce no Antigo Egito. As atividades realizadas por estas civilizações estão na origem do surgimento da geometria como ciência. A noção de leis e regras geométricas surgem quando se conseguia resolver problemas distintos com o mesmo procedimento.

2.1 Cálculos geométricos na Babilônia

O conhecimento da matemática babilônica, chegou até nós quase que da mesma forma que o conhecimento da matemática egípcia, porém em vez dos papiros, os antigos povos babilônicos que habitaram a região da mesopotâmia, entre os rios Tigre e Eufrates, deixaram o seu conhecimento em placas de argilas marcadas com estiletes (MOL, 2013). Uma dessas placas é o tablete YBC 7289.

Figura 1 — Tablete YBC 7289

Fonte: Roque e Carvalho, 2012.

A geometria babilônica, era segundo Roque e Carvalho (2012) essencialmente uma geometria métrica que dedicava-se em calcular comprimentos, áreas e volumes. Os autores afirmam que eles faziam uso de propriedades geométricas de figuras planas e de sólidos geométricos, porém não apresentavam de forma explícita como chegavam aos seus resultados.

Os registros mostram que os babilônios já conheciam a área do retângulo, do triângulo retângulo e do trapézio. Conheciam também a circunferência do círculo, estimada em 3 vezes o seu diâmetro, e sua área como sendo 1/12 do quadrado da sua circunferência (MOL, 2013), porém o autor afirma que essa civilização não respeitava o princípio da homogeneidade e faziam operações com grandezas diferentes por exemplo subtrair um lado (com a grandeza m) a uma área (com a grandeza m2).

O famoso tablete babilônico (YBC 7289), que possuía registros de problemas geométricos achados pelos arqueólogos na mesopotâmia, nos sugerem a maneira como os babilônios consideravam o círculo (ROQUE; CARVALHO, 2012). Segundo autores, para os babilônios, o círculo era concebido como a figura limitada por uma circunferência enquanto para nos, o círculo é obtido traçando-se uma circunferência com compasso. Logo, tinham a necessidade de calcular sempre a sua área. Calculavam a área do círculo usando o comprimento de sua circunferência, quando dado seu diâmetro (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Vejamos um exemplo. Sendo A, a área do círculo de circunferência S e raio r, então, $A = \pi r^2$, S = 2 π r. Assim,

$$r = \frac{S}{2\pi}, \tag{1}$$

$$A = \frac{\pi S^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot S^2 . \tag{2}$$

Observe que se substituirmos π por 3, temos que,

$$A = \frac{1}{12} \cdot S^2 . \tag{3}$$

Este exercício foi observado num dos tabletes babilônicos e nos mostram como os mesmos procediam para calcular a área do círculo de circunferência S (ROQUE; CARVALHO, 2012). Observando atentamente vemos que existe uma outra diferença entre a nossa matemática e a dos babilônios, quanto ao conceito de π, pois segundo os autores (ROQUE; CARVALHO, 2012), os babilônios frequentemente utilizavam o π como sendo 'triplicar' o diâmetro de um círculo, e isto é verificável quando analisando o exercício do tablete, percebemos que a fração 1/12 só é possível quando fazemos esta operação. Os autores afirmam que em muitos casos os babilônios utilizavam a fórmula da equação 1 para calcular qualquer área de um círculo. O conceito de π para nós é apresentado pelos autores como uma constante de proporcionalidade entre a área de um círculo e o quadrado de seu raio, enquanto que para os babilônios π consistia em uma operação que consiste em triplicar o diâmetro de um círculo, de modo a obter a sua circunferência. Não podemos afirmar que os babilônios tinham um valor para π, apesar do método dos babilônios não estar longe do nosso, se admitirmos que π tenha um valor de 3.

2.2 A geometria no antigo Egito

O conhecimento da geometria do Antigo Egito, chega até nós através do registro de alguns exercícios e atividades em papiros datados do século XVIII a.C. (GASPAR; MAURO, 2004). Os papiros contém informações sobre documentos ainda mais antigos e seu conteúdo possui informações sobre a posição social da matemática. Em alguns papiros são encontrado exercícios e resultados, forma de se calcular o volume do tronco da pirâmide e de um exercício que se acredita tratar-se da área de um hemisfério (GASPAR; MAURO, 2004). O caráter prático da geometria egípcia que se propunha ao cálculo de áreas de terrenos, cálculo da área do círculo e volumes de armazéns, celeiros, silos e pirâmides fez com que estes desenvolvessem seus métodos de cálculos e possibilitou que calculassem corretamente resultados de problemas de medidas e áreas de figuras planas e sólidos conhecidos (GASPAR; MAURO, 2004). Eles possuíam métodos que permitiam o cálculo preciso de áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles. Possuíam métodos de calcular volume de pirâmides, blocos retangulares, paralelepípedos e cilindros (GASPAR; MAURO, 2004).

2.3 Os elementos de Euclides

É na grécia que a matemática deixa de ter um carácter essencialmente técnico e prático e adquire uma nova postura lógica, abstrata e de certa forma independente da prática (MOL, 2013). A matemática passou então a exigir demonstrações puramente lógicas a fim de demonstrar resultados que obedeciam a uma estrutura dedutiva, baseados em argumentos racionais (MOL, 2013).

Muito do conhecimento grego é resultado de conhecimentos de outras civilizações, nomeadamente a egípcia que foi levada para a Grécia por seus matemáticos como exemplo do Pitágoras que teve seu aprendizado geométrico aprendido no Egito (GASPAR E MAURO, 2004). Outro matemático mundialmente famoso foi Euclides que tem como mérito além de apresentar descobertas matemáticas, o de ser o primeiro a apresentar a geometria como uma ciência da natureza lógica e dedutiva (GASPAR E MAURO, 2004). Os mesmos autores afirmam que Euclides não se limitou a anunciar as leis geométricas, ele preocupava-se em demonstrá-las.

Euclides escreveu o livro “Os elementos” que serviu de base para o ensino e proliferação da geometria (GASPAR; MAURO, 2004). Ele, no seu livro, utiliza uma linguagem clara e simples de forma a que seja entendida por todas as pessoas (GASPAR; MAURO, 2004).

Os elementos é uma coleção de 13 livros onde o Euclides compilou e sistematizou todo o conhecimento geométrico e matemático da época. O conteúdo matemático presente da série dos 13 livros não é de sua autoria, porém possui o mérito pela originalidade em compilar e organizar o conteúdo de maneira como expõe e o demonstra, além da forma como o estruturou (MOL, 2013). Segundo o Mol (2013) os elementos mostram toda a característica da matemática grega como o caráter abstrato e dedutivo.

Mol (2013) mostra que o conteúdo dos 13 livros da série estão divididos da seguinte forma, ficando os livros I, II, III, IV com questões relacionadas à geometria elementar e estudam propriedades de figuras retilíneas e círculos cuja solução deve ser feita exclusivamente com o auxílio de régua não graduada e compasso. O livro V aborda a teoria de proporções. O livro VI aplica essa teoria ao estudo da geometria, enquanto que os livros VII, VIII e IX abordam questões acerca da teoria dos números. O livro X aborda questões dos incomensuráveis enquanto que os livros XI, XII e XIII tratam de assuntos sobre a geometria sólida.

O livro I apresenta conteúdos presentes no ensino atual da geometria plana como Teoremas de congruência de triângulos, construções elementares com régua e compasso, desigualdades envolvendo ângulos e lados de triângulos, construções envolvendo retas paralelas. Para o entendimento da obra como um todo é apresentado no livro I conceitos e definições utilizados ao longo de todos os outros livros. Embora as 23 definições apresentados no livro I serem muito intuitivas, e tendo a realidade física como referência, ele utiliza a abstração e a dedução como forma de os apresentar (MOL,2013). Ao todo o livro I apresenta 23 definições, 5 postulados e 5 axiomas.

Segundo Mol (2013), para Aristóteles os axiomas são requisitos importantes para aprender qualquer outro conteúdo na obra. Neste sentido o autor afirma que os axiomas são “indispensáveis para aprender qualquer coisa”, sendo apresentados como verdades comuns a todos os estudos e tinham a validade geral.

.

Os postulados não pressupõe um conhecimento prévio pois apenas se aplicam à Geometria Euclidiana. Embora Euclides tenha apresentado os axiomas separados dos postulados, a matemática moderna não faz tal distinção (MOL, 2013).

São esses postulados e axiomas no entanto, apresentados no livro I na série de “OS ELEMENTOS”, que asseguram a existência de figuras geométricas como a reta e o círculo, onde posteriormente se formam e se constroem outras figuras geométricas, eles também determinam propriedades da Geometria Euclidiana, como: o espaço é homogêneo e infinito, as retas podem ser prolongadas continuamente, dois ângulos retos são iguais entre si, e que as figuras geométricas não sofrem alterações ou são modificadas no seu deslocamento.

O livro II é relativamente curto, uma vez que apresenta ao todo um conjunto de apenas 13 proposições e aborda questões da álgebra geométrica. Mol (2013) afirma que Euclides prova resultados de natureza algébrica de forma geométrica, com o uso de quadrados e retângulos.

O livro III trata de questões relacionadas com a intersecção e tangenciamento de retas e círculos (MOL, 2013).

No livro IV são tratados problemas sobre a inscrição e a circunscrição de figuras retilíneas no círculo (MOL, 2013).

O livro V aborda, segundo Mol (2013), as questões sobre a teoria de proporções de Eudoxo. Afirma que a teoria de Eudoxo é uma das mais finas construções matemáticas gregas que possibilitou contornar o problema da existência de incomensuráveis, colocou toda a teoria geométrica envolvendo proporções bem conceitualizada e é acrescentada aos Elementos para ser utilizada nos livros subsequentes. Este livro trata de resultados mais recentes do que os outros livros, na medida em que as definições de razão e proporções são válidos para todos os casos, que evitam identificação de grandezas e números (ROQUE; CARVALHO, 2012).

O livro VI aplica a teoria das proporções de Eudoxo ao estudo da geometria.

Os livros VII, VIII e IX, abordam questões relacionadas com a teoria dos números. Mol (2013) afirma que o livro VII apresenta vinte e duas definições de tipos de números: par e ímpar, primo e composto, plano e sólido. Diferente do que era apresentado na geometria babilônica, aqui nos Elementos, nos livros VII, VIII e IX fica claro uma separação entre números e grandezas. As grandezas e os números são representados por segmento de retas, porém os números são agrupados de unidades divisíveis enquanto que as grandezas geométricas são divisíveis em partes da mesma natureza (ROQUE; CARVALHO, 2012).

As proposições presentes no livro VII mostram o que hoje corresponde ao algoritmo de Euclides para encontrar o maior divisor comum de dois números.

O livro VIII trata, segundo Roque e Carvalho (2012), de números em proporção continuada o que hoje chamamos de progressão geométrica.

O livro IX, aborda proposições sobre a infinidades de números primos e o método para construir números perfeitos.

O livro X, intrinsecamente ligado ao livro V, aborda assuntos relativos aos incomensuráveis, fazendo uma classificação sistemática de segmentos de reta incomensuráveis. A descoberta da incomensurabilidade causou uma ruptura entre o universo dos números e o das grandezas e, segundo Roque e Carvalho (2012), tornou-se necessária uma nova teoria das razões e proporções e um novo conceito de proporcionalidade independente da igualdade entre números.

O livro XI apresenta 39 proposições sobre a geometria espacial (MOL, 2013), enquanto que o livro XII preocupa-se com a medida das figuras utilizando o método da exaustão. É mostrado que polígonos similares inscritos em dois círculos têm suas áreas em razão igual ao quadrado dos diâmetros dos círculos, utilizando o método de Eudoxo para demonstrar que as áreas dos dois círculos seguem a mesma proporção. Este método é também empregado para o cálculo do volume de pirâmides, cones, cilindros e esferas.

O livro XIII apresenta propriedades dos quatro sólidos regulares (cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro), mostrando que um poliedro é regular quando as suas faces são polígonos regulares congruentes e, em cada vértice, se encontra o mesmo número de faces (MOL, 2013).

Este importante material deixado por Euclides presente na nossa matemática até hoje, chegou até nós pelas edições de outros autores, uma vez que não se tem nenhum registro dos manuscritos da época de Euclides (ROQUE; CARVALHO, 2012). Este fato pode levantar questionamento do quanto foi alterado, acrescentado ou mutilado da obra original. As edições na língua portuguesa foram devidas a tradução feita pelo Padre Jesuíta Manoel de Campos, publicada em Lisboa em 1735, a primeira versão de os elementos na língua portuguesa intitulado Elementos de geometria plana e sólida para o ensino da aula sobre Esfera do colégio de Santo Antão. Este livro inspirou-se no trabalho de André Tacquet que publicou sua edição dos Elementos em 1725. Outras edições foram feitas. Uma, "Elementos de Euclides" em 1768, com os seis primeiros livros e os livros onze e doze, baseada na versão latina de Frederico Comandino e de forma incompleta na medida em que não apresentavam todos os livros (ROQUE; CARVALHO, 2012). Em 1792 foi produzida uma versão inspirada na obra de Simpson para a universidade de Coimbra (ROQUE; CARVALHO, 2012).

No Brasil foi publicada uma versão do livro em 1944 e 1945, pela Editora Fundo de Cultura, em São Paulo. Por fim uma versão mais atualizada na língua portuguesa foi feita em 2009 pelo professor Irineu Bicudo e foi traduzido diretamente do grego (ROQUE; CARVALHO, 2012).

3 CÁLCULO DE ÁREAS - MEIOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO

Atualmente, o conceito de área é reduzido a fórmulas que nos permitem calcular as dimensões de algumas figuras geométricas conhecidas. Este fato é curioso uma vez que o atual conceito de área, hoje, é mais limitado que o dos antigos geômetras gregos. Segundo Miranda (2017) os parâmetros curriculares nacionais priorizam a área como sendo uma medida de superfície. Este conceito reduz a importância do conhecimento geométrico a aplicações de fórmulas no cálculo de áreas e de volumes. Miranda (2017) mostra que a área do triângulo era vista pelos gregos como metade da área do paralelogramo que se obtém pela junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado, diferente do atual conceito de área em que a área do triângulo é vista como metade do produto da sua base pela sua altura. Essas duas diferentes formas de se calcular a área nascem com o desenvolvimento da álgebra (Miranda, 2017). A primeira ideia de área, era utilizada pelos gregos como sendo igualdades de figuras e este conceito é descrito nos livros de Euclides ‘Os Elementos’ através das proposições XXXVI e XXXVII. Ao longo dos tempos, muitos foram os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da geometria. O conceito de quadratura de círculos que era visto como sendo um problema impossível de se resolver (MOL, 2013 *apud* MIRANDA, 2017), foi possível através da contribuição de Arquimedes, utilizando como ferramenta o Método da Exaustão proposto por Eudoxo (MIRANDA, 2017). Este método consiste em buscar aproximações sucessivas da área a ser determinada, a partir de áreas de figuras conhecidas.

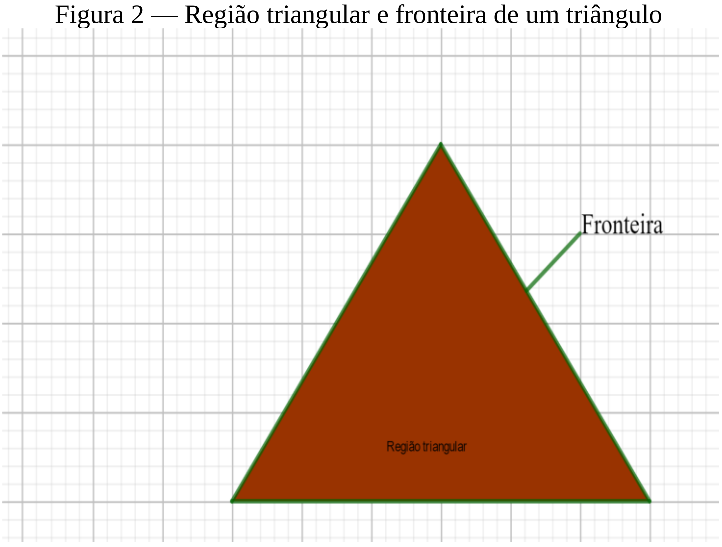
Descartes, através de seus trabalhos, desenvolveu técnicas para o cálculo da área que temos hoje. Desenvolveu equações a partir de problemas geométricos que podem ser solucionadas através da álgebra (MIRANDA, 2017). O autor atribui a metodologia proposta por Descartes como a causa da transformação da geometria em álgebra. Porém o cálculo de áreas sob uma curva, só foi possível através do desenvolvimento do Cálculo Diferencial como contribuição de Newton e Leibniz. O método proposto através do desenvolvimento do cálculo integral permitiu revolucionar a forma como se calculava a área, e a medida que esses conceitos foram desenvolvidos, o cálculo das áreas passou a ter um caráter muito mais algébrico do que geométrico.

3.1 O conceito de Área

Nesta seção, pretende-se construir um conceito de área a partir de regiões triangulares e, posteriormente, a partir do conceito criado, deduzir as fórmulas para o cálculo dos outros polígonos utilizando assim o procedimento proposto por Miranda (2017).

Miranda (2017), primeiramente, conceitua uma região triangular da mesma maneira que Barbosa (2012), como o conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados do triângulo. Define triângulo como a fronteira da região triangular. Com estes dois conceitos criados, pode-se afirmar que a região triangular é o conjunto de todos os pontos internos a um triângulo incluindo os pontos da sua fronteira, enquanto que o interior da região triangular é o conjunto dos pontos que não pertencem à sua fronteira, como mostra a Figura 2.

Figura 2 — Região triangular e fronteira de um triângulo



Fonte: Autora deste trabalho.

O conjunto de pontos de uma região triangular que não pertencem à sua fronteira é chamado de interior da região triangular.

Como foi proposto pela metodologia, definiremos a região poligonal através dos conceitos criados. A região poligonal é a união de um número finito de regiões triangulares que, duas a duas, não partilham pontos interiores em comum (BARBOSA, 2012). Do mesmo modo, um ponto é interior se, e somente se existir na região poligonal uma região triangular que contém o ponto em seu interior (BARBOSA, 2012). Através desses conceitos, da mesma forma que definimos o interior da região triangular, a região poligonal é o conjunto dos pontos que pertencem ao seu interior, e a sua fronteira é constituída pelos pontos que não pertencem ao seu interior (BARBOSA, 2012). De uma maneira mais simples, a região poligonal contendo um número finito de regiões triangulares e essas regiões triangulares contendo um número finito de pontos em seus interiores, a região poligonal é então o conjunto de todos os pontos nos interiores de todos os triângulos que formam o polígono (BARBOSA, 2012). Define também a fronteira da região poligonal como sendo constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior, e o interior da região poligonal ao conjunto de pontos que formam o seu interior.

São os axiomas VI.1, VI.2 e VI.3 que introduzem o conceito de área e suas propriedades na geometria: o axioma VI.1 determina que toda região poligonal corresponde a um número maior que zero (BARBOSA, 2012). Em outras palavras, a área de uma região poligonal é sempre maior que zero; o axioma VI.2 determina que uma região poligonal é composta por outras regiões poligonais menores que, duas a duas, não tenham pontos interiores em comum entre si. Então, a sua área é a soma das áreas das regiões poligonais menores (BARBOSA, 2012); o axioma VI.3 determina que regiões triangulares têm áreas iguais se forem limitadas por triângulos congruentes (BARBOSA, 2012).

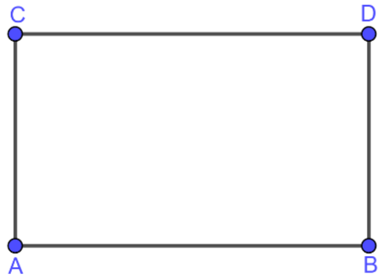
Miranda (2017) destaca as principais ideias contidas nos axiomas VI1,VI2 e VI3 que são as de que a área é uma medida que pode ser calculada para qualquer região poligonal. Pode-se calcular a área, pode-se decompor a região poligonal em outras regiões poligonais menores mas de áreas conhecidas, e que a área da região poligonal será, então, a soma das áreas menores.

A área de um polígono pode ser referida como a região cuja fronteira é aquele polígono (BARBOSA, 2012). Neste sentido, o autor utiliza a expressão ‘área de um quadrado’ para se referir à área da região formada por um polígono (região poligonal), onde sua fronteira é um quadrado.

3.2 Área de alguns polígonos

O Axioma VI.4 determina que dado um retângulo *ABCD*, como mostra a Figura 3 então sua área é dada pelo produto $\overline{AB} \cdot \overline{BD}$.

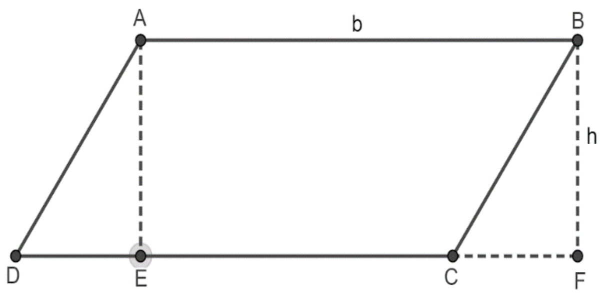
Figura 3 — Retângulo ABCD.



Fonte: Autora deste trabalho.

Definidas as proposições, os conceitos e apresentados os axiomas, pode-se facilmente determinar a área de algumas regiões simples. Determina-se, então, a área da região poligonal onde sua fronteira é um paralelogramo, como mostra a Figura 4.

Figura 4 — Paralelogramo ABCD de base b e altura h.



Fonte: Autora deste trabalho.

Dado um paralelogramo *ABCD* e, chamando o comprimento do lado $\overline{AB}$ de b, a altura h do paralelogramo é dada pelo segmento de reta que parte do vértice B e encontra o prolongamento do lado $\overline{CD}$ no ponto F, formando com este lado um ângulo de 90°. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes, pois são lados de um paralelogramo, os lados $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ também são congruentes, pois correspondem à altura do paralelogramo. Logo, pelo caso especial dos triângulos retângulos, os triângulos *ADE* e *BCF* são congruentes.

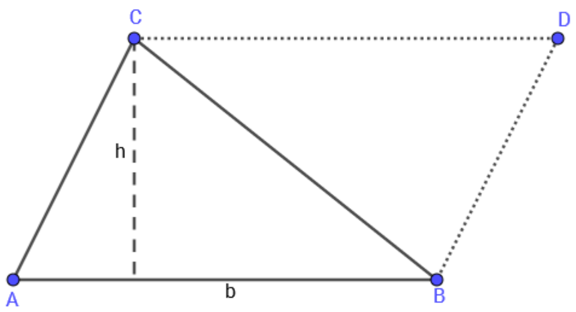
Sendo os triângulos *ADE* e *BCF* congruentes, podemos deslocar o triângulo *ADE* até que sobreponha o triângulo *BCF*, transformando o paralelogramo *ABCD* no retângulo *ABEF*, de modo que o paralelogramo tenha a mesma área que o retângulo. Pelo Axioma VI.4, temos que a área de um retângulo é dada pelo produto de sua base por sua altura. Assim, podemos provar que a área do paralelogramo *ABCD* da Figura 4 é dada pelo produto de *b*h*. Vamos considerar o retângulo *ABEF* cuja área é dada por $\overline{AB}*\overline{BF}$. Consequentemente temos que, o produto $\overline{AB}*\overline{BF}$ corresponde ao produto *b*h*, como se segue,

$$\begin{aligned} Área\ (ABCD) &= Área\ (ABCE) + Área\ (ADE) = \\ &= Área\ (ABCE) + Área\ (BCF) = \\ &= Área\ (ABEF) = b\ .\ h\ . \end{aligned} \tag{4}$$

A proposição X.2 denota que a área de um triângulo é metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a esse mesmo lado (Barbosa, 2012).

Para demonstrar essa proposição, observa-se no triângulo *ABC* da Figura 5 que, construindo uma paralela ao lado $\overline{AB}$ do triângulo, passando pelo ponto *C* e traçando-se a paralela ao lado $\overline{AC}$ do triângulo, passando pelo ponto *B*, essas duas paralelas, $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ interceptam-se no ponto *D*, dando origem a uma nova figura, o paralelogramo *ABCD*. Esse paralelogramo pode ser decomposto pelos triângulos *ABC* e *BCD*. É importante salientar que os triângulos *ABC* e *BCD* são congruentes pelo caso LLL (lado-lado-lado), pois os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes (lados opostos do paralelogramo), os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes (lados opostos do paralelogramo) e $\overline{BC}$ é lado comum. Portanto, os triângulos *ABC* e *BCD* têm mesma área.

Figura 5 — Triângulo ABC transformado no Paralelogramo ABCD



Fonte: Autora deste trabalho.

Extraindo, então, informações da Figura 4, podemos mostrar que a área do paralelogramo é dada por:

$$Área(ABCD) = Área\ (ABC) + Área\ (BCD) \qquad (5)$$

Como os triângulos *ABC* e *BCD* são congruentes, podemos reescrever a equação acima como

$$Área\ (ABCD) = 2*Área\ (ABC). \qquad (6)$$

logo,

$$Área\ (ABC) = \frac{1}{2}\,Área\ (ABCD) \qquad (7)$$

Uma última observação que pode ser feita é que a altura (*h*) do triângulo *ABC*, é a mesma que a do triângulo *BCD*, que é a mesma que a do paralelogramo *ABCD*. Chamando o lado $\overline{AB}$ do triângulo *ABC* de base (*b*), temos que:

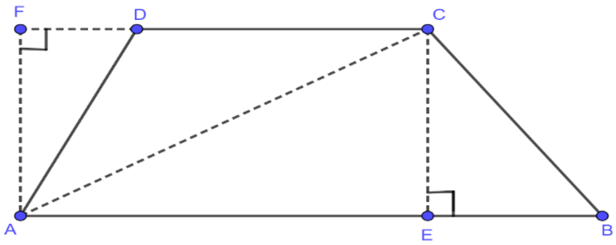
$$Área\ (ABC) = \frac{1}{2}\,(b*h) \qquad (8)$$

ou seja, a área do triângulo *ABC* é dada pela metade do produto de sua base por sua altura.

A proposição X.3 nos dá que, a área de um trapézio é a metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases (BARBOSA, 2012).

Esta proposição é demonstrada observando o trapézio *ABCD* da Figura 6, onde as bases maior e menor são dadas, respectivamente, por $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Traçando uma diagonal $\overline{AC}$ desse trapézio, o mesmo fica dividido em dois triângulos, *ABC* e *ACD*. Traçando a altura $\overline{CE}$ do triângulo *ABC* e a altura $\overline{FA}$ do triângulo *ACD*, observamos que $\overline{CE}$ e $\overline{FA}$ são congruentes, pois são segmentos perpendiculares a duas retas paralelas ($\overline{AB}$ e $\overline{CD}$). Logo $\overline{AF} = \overline{CE}$. Note que a altura do trapézio também é dada pela medida de $\overline{CE}$.

Figura 6 — Trapézio ABCD de altura CE.



Fonte: Autora deste trabalho.

Logo, observa-se pela Figura 6 que:

$$Área\ (ABCD) = Área\ (ABC) + Área\ (ACD) \tag{9}$$

$$Área\ (ABCD) = [\tfrac{1}{2}\,(\overline{AB})*(\overline{CE})] + [\tfrac{1}{2}(\overline{CD})*(\overline{FA})] \tag{10}$$

Como $\overline{CE} = \overline{AF}$ e, substituindo $\overline{AF}$ por $\overline{CE}$, temos que:

$$Área\ (ABCD) = [\ \tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) * \overline{CE}]. \tag{11}$$

Logo, fica verificada a proposição X.3 (do Livro X, de Os Elementos).

3.3 Figuras equivalentes

Conforme Roveran (2015), duas figuras planas são ditas equivalentes quando têm formatos diferentes e áreas iguais. A equivalência é, segundo Miranda (2017) um princípio básico que os gregos utilizavam em sua geometria. Para o autor, todas as relações geométricas eram transmitidas pelos gregos através de relações de equivalência.

Existem cinco Axiomas no livro Os Elementos de Euclides que se referem ao conceito de equivalência:

1.Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.

2.Se coisas iguais forem adicionadas a iguais, os resultados são iguais.

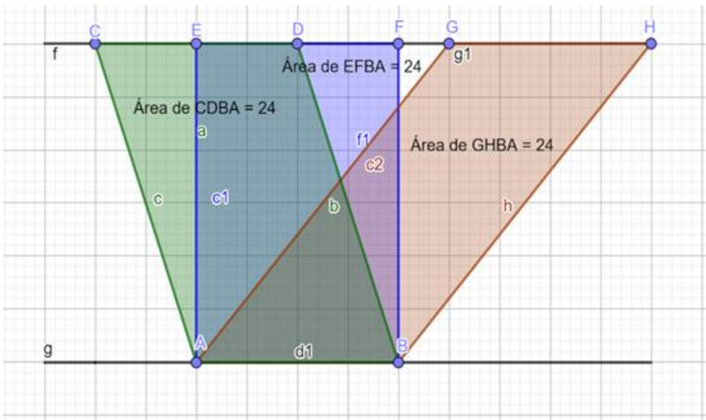
3.Se coisas iguais forem subtraídas de iguais, os restos são iguais.

4.Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.

5.O todo é sempre maior que qualquer uma de suas partes.

Na Figura 7, pode-se verificar, através das proposições acima, e através das considerações feitas, que esses três polígonos, o paralelogramo ABDC, o retângulo ABFE e o paralelogramo ABHG, embora apresentem fronteiras diferentes, elas são equivalentes entre si, uma vez que apresentam a mesma área. Pode-se facilmente comprovar que as áreas são iguais uma vez que esses três paralelogramos partilham da mesma base $\overline{AB}$ e da mesma altura ($\overline{AE}$ ou $\overline{BF}$) compreendida entre as retas f e g.

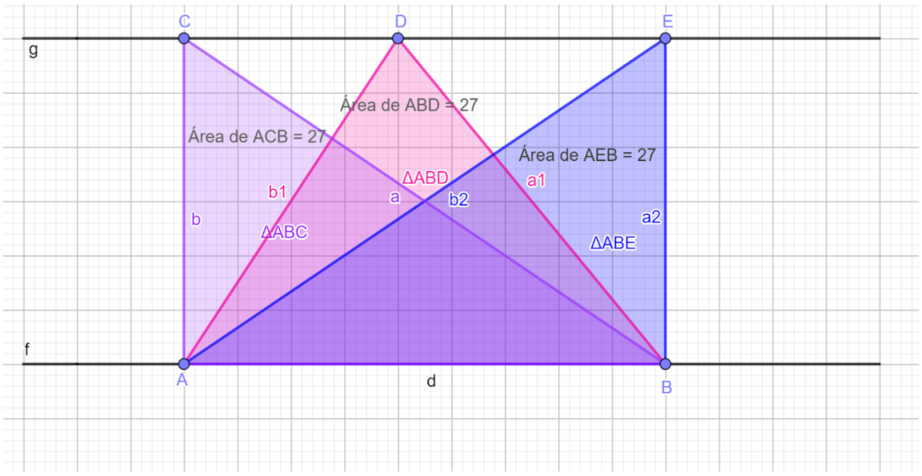
Figura 7— Paralelogramos ABDC, ABFE e ABHG equivalentes.



Fonte: Miranda (2017).

Da mesma forma que foi apresentado o exemplo dos paralelogramos da Figura 7, a Figura 8 apresenta exemplos de triângulos equivalentes. Como sabemos pela proposição XXXVII, triângulos que partilham da mesma base e da mesma altura possuem a mesma área, logo são equivalentes. Na Figura 8, podemos observar que os triângulos *ABC*, *ABD* e *ABE* possuem a mesma base $\overline{AB}$ e a mesma altura relativa às retas g e f.

Figura 8 — Triângulos ABC, ABD e ABE equivalentes.



Fonte: Miranda (2017).

3.4 Figuras Equicompostas

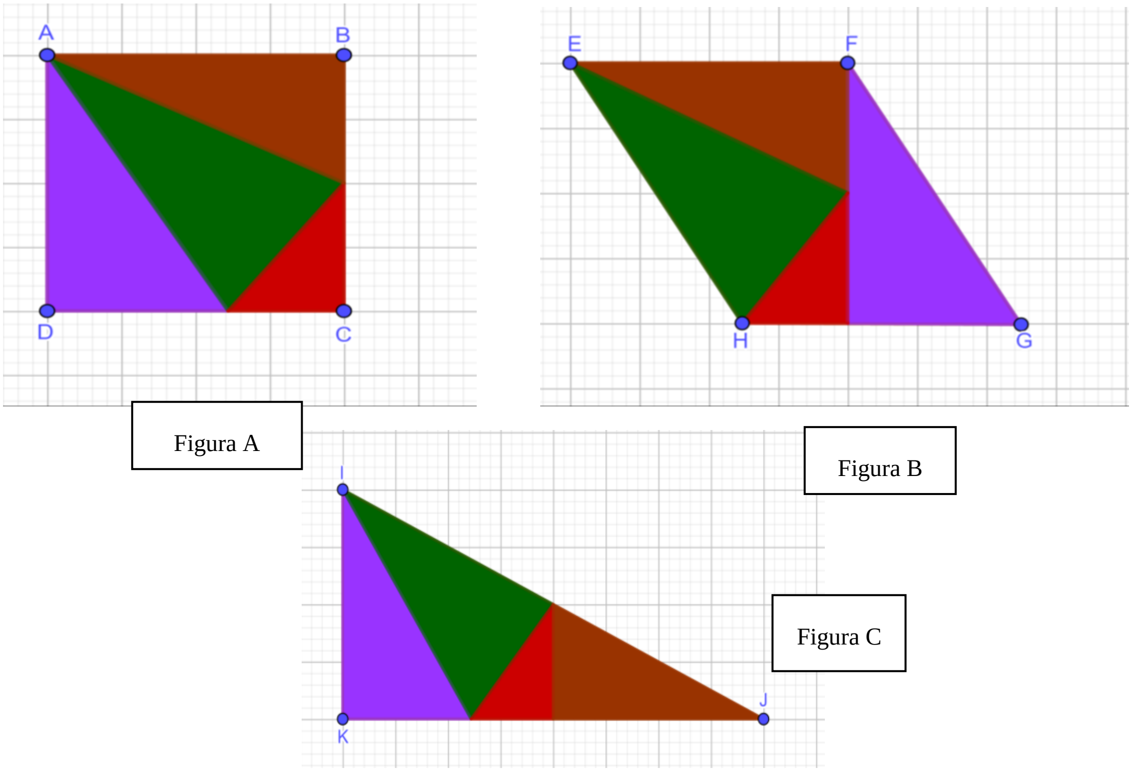
Boltianski (1996) *apud* Miranda (2017) afirma que duas figuras são equicompostas se for possível decompor uma das figuras num número finito de partes que podem ser usadas para compor a outra figura. Miranda (2017) afirma que polígonos equicompostos são equivalentes. O conceito de equicomposição já era conhecido na antiguidade, porém só em 1807 que se demonstrou que polígonos equivalentes são equicompostos.

O teorema que permite demonstrar essa proposição é chamado de Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein (MIRANDA, 2017).

Primeiramente, para que se prove esse Teorema, é necessário definir algumas proposições.

A primeira proposição é a semelhança do Axioma 1, que nos diz que se uma figura A é equicomposta com a figura B e a figura B é equicomposta com a figura C, então a figura C é equicomposta com a figura A. Essa proposição é denominada por Miranda (2017) como sendo a proposição da Transmissividade da equicomposição.

Figura 9 — Equicomposição das Figuras A, B e C.

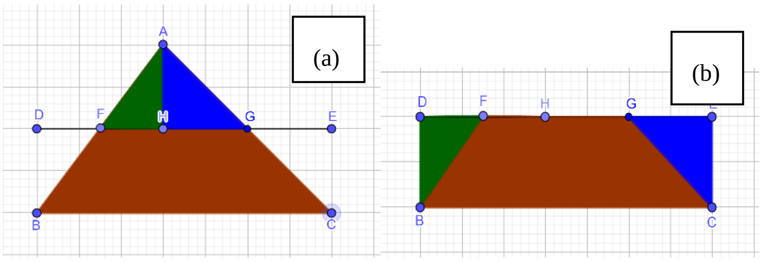


Fonte: Miranda (2017).

A Figura 9 mostra o quadrado da Figura A equicomposto no paralelogramo da Figura B, o paralelogramo da Figura B equicomposto no triângulo da Figura C e, finalmente, o quadrado da Figura A equicomposto no triângulo da Figura C, ou seja, os três polígonos equicompostos entre si e, portanto, equivalentes. As cores iguais dos polígonos das figuras A, B e C correspondem à polígonos congruentes.

A segunda proposição é a proposição de que todo triângulo é equicomposto com algum retângulo. Esta proposição pode ser facilmente compreendida com o auxílio da Figura 10. No triângulo ABC da Figura 10(a), fazendo-se um corte paralelo à base $\overline{BC}$ que passe nos pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, pontos F e G, respectivamente, recorta-se o triângulo formado AFG em sua altura AH relativa à base $\overline{FG}$, obtendo-se assim dois triângulos retângulos AHF e AHG. Pode-se posteriormente a essas alterações, deslocar cada um desses triângulos (AHF e AHG) para as extremidades do triângulo ABC, a fim de se encaixarem nas posições BDF e CEG, respectivamente, obtendo-se, então, o retângulo BCED, Figura 10(b).

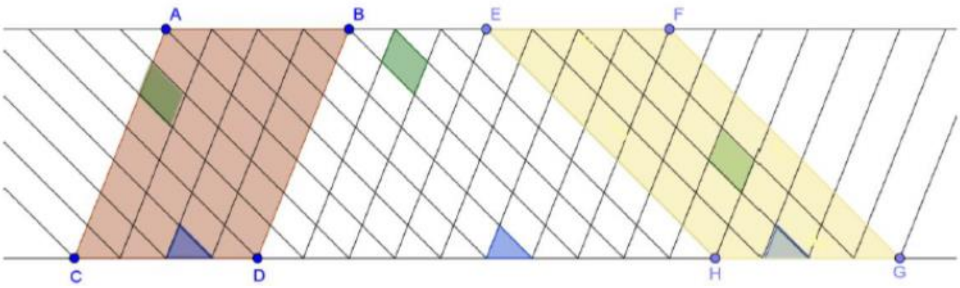
Figura 10 — (a) Triângulo ABC dividido em dois triângulos retângulos, AHF e AHG, a partir de sua altura AH e da paralela FG ao lado BC, passando pelos pontos médios, F e G dos lados AB e AC, respectivamente. (b) Triângulo ABC equicomposto com o retângulo BCED



Fonte: Autora deste trabalho.

A terceira proposição apresentada por Miranda (2017) é a de que se dois paralelogramos têm áreas iguais e têm um lado com mesma medida, então são equicompostos. Para se comprovar essa proposição, deve-se primeiramente traçar paralelas $\overline{BD}$ e $\overline{EH}$ aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{FG}$ dos paralelogramos, respectivamente. Desse modo, forma-se uma malha de quadriláteros (verdes) e triângulos (azuis). Percebe-se através da Figura 11, que os paralelogramos ABCD e EFGH são compostos por uma mesma quantidade de triângulos e quadriláteros, ou seja, 8 triângulos e 24 quadriláteros de mesma medida. Isto faz com que se verifique que os paralelogramos ABDC e EFGH configuram-se com a mesma composição, logo são equicompostos.

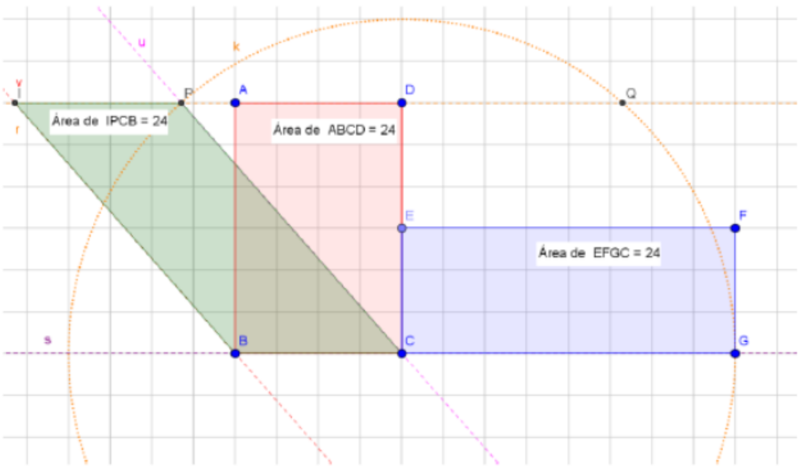
Figura 11 — Dois paralelogramos equicompostos



Fonte: Miranda (2017).

A quarta proposição (MIRANDA, 2017) é de que dois retângulos equivalentes são equicompostos. Esta proposição pode ser demonstrada da seguinte forma. Por serem equivalentes, os retângulos ABCD e EFGC, como apresentados na Figura 12, possuem a mesma área. Construindo-se um paralelogramo como apresentado na Figura 12, em que os lados $\overline{PC}$ e $\overline{CG}$ são iguais. O paralelogramo IPCB foi construído traçando-se uma circunferência de centro em C e de raio o maior dos lados entre os dois retângulos, fazendo com que os lados $\overline{PC}$ e $\overline{CG}$ tenham a mesma medida, pois são raios da mesma circunferência. Na Figura 12, o raio tem a medida do segmento $\overline{CG}$. Posteriormente, traçou-se uma reta r contendo o segmento $\overline{AD}$ e cortando a circunferência nos pontos P e Q. A partir do ponto P e do centro C, traça-se uma reta u concorrendo com o lado AB do retângulo. Para completar o paralelogramo, traça-se a reta v paralela à reta u, passando pelo ponto B do retângulo e interceptando a reta r no ponto I. Assim sendo, tem-se o paralelogramo IPCB. O retângulo ABCD e o paralelogramo IPCB partilham a mesma base BC e a mesma altura AB. Por serem equivalentes e possuírem a mesma base $\overline{BC}$, pela terceira proposição temos que os polígonos IPCB e ABCD são equicompostos. Da mesma forma, como a medida de $\overline{CP}$ é igual à medida de $\overline{CG}$, e IPCB e EFGC são equivalentes, podemos afirmar, pela terceira proposição, que o paralelogramo IPCB e o retângulo EFGC também são equicompostos. Finalmente, pela primeira proposição, se ABCD e EFGC são equicompostos a um mesmo paralelogramo, então eles são equicompostos entre si. Assim, podemos concluir que dois retângulos serão sempre equicompostos.

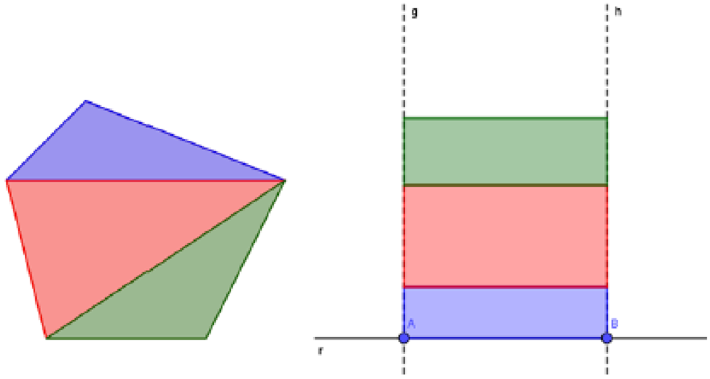
Figura 12 — Paralelogramo IPCB equicomposto aos retângulos ABCD e EFGC.



Fonte: Miranda (2017).

A quinta proposição (MIRANDA, 2017) nos mostra que todo polígono é equicomposto com algum retângulo. Esta proposição pode facilmente ser demonstrada, desde que se assuma que qualquer polígono pode ser decomposto por um número finito de triângulos e, pela segunda proposição, temos que todo triângulo é equicomposto com algum retângulo. Logo rearranjando os triângulos de forma que todos os retângulos formados pela sua equicomposição fiquem com a mesma base e entre duas retas perpendiculares, pode-se agrupá-los de modo que juntos formem um único retângulo, sem que haja sobreposição entre os retângulos. Por este modo temos que o retângulo é equicomposto ao polígono original. A Figura 13 ilustra esta construção.

Figura 13 — Pentágono equicomposto a um retângulo.



Fonte: Miranda (2017).

A figura mostra um pentágono equivalente a um retângulo. O pentágono é decomposto em três triângulos, cada um deles equivalente a um retângulo. Os retângulos podem ser rearranjados em uma mesma base, dando origem a um retângulo maior que é equivalente ao pentágono original (MIRANDA, 2017).

Finalizamos este capítulo citando o Teorema de Bolyai-Gerwien: "Dois polígonos que tem áreas iguais são equicompostos." Este teorema não mostra apenas que polígonos equicompostos são equivalentes, ele define também uma relação de dualidade entre equivalência e equicomposição, um implica em outro (MIRANDA, 2017).

Assim, concluímos que equivalência implica em equicomposição, como equicomposição implica em equivalência, dois conceitos que podem ser facilmente encontrados, na literatura, como sinônimos.

4. QUADRATURA

Fazer a quadratura de uma figura plana significa encontrar um quadrado que tenha a mesma área da referida figura. Partindo do pressuposto que qualquer polígono pode ser dividido em um número finito de triângulos, então é possível quadrar qualquer figura já que é possível quadrar qualquer triângulo (ROVERAN, 2015).

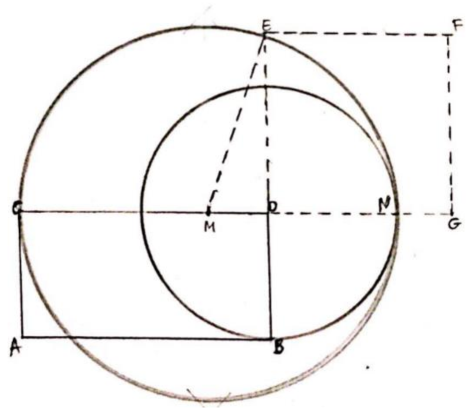
O início da história da geometria está, segundo Galvão e Souza (2013) *apud* Roveran (2015), intimamente relacionado com a determinação de áreas de figuras planas. Os mesmos autores, citados por Roveran (2015), identificam que o primeiro desafio encontrado pelas civilizações antigas era o de determinar a área do círculo por quadratura, uma tarefa que se mostrou impossível com os instrumentos utilizados por eles à época, a régua e o compasso. O uso da quadratura para a determinação da área de figuras planas era muito frequente pelos gregos. Determinar a área do retângulo foi a quadratura mais imediata (ROVERAN, 2015). Os atenienses, em geral, possuíam habilidades e imensa facilidade em converter um retângulo de lados a e b num quadrado. De fato, o problema consistia em encontrar a média proporcional ou geométrica entre a e b (BOYER, 1974 *apud* ROVERAN, 2015).

4.1 Quadratura do retângulo

Nesta seção vamos calcular, utilizando apenas régua e compasso, a área de um quadrado equivalente à área de um retângulo dado, conhecidos seus lados. Em outras palavras, vamos fazer a quadratura do retângulo.

Considere o retângulo *ABDC* dado, como apresentado na Figura 14. Para fazer a sua quadratura é necessário encontrar um quadrado tal que, sua área seja igual à área do retângulo dado. Sendo a área do retângulo *ABDC* dada pelo produto de sua base por sua altura, ou seja, $\overline{AB} * \overline{CA}$, então o que precisamos é encontrar um quadrado cuja área l^2 seja igual a $\overline{AB} * \overline{CA}$. Para encontrar o quadrado cuja área seja igual à do retângulo *ABDC*, é necessário seguir os seguintes passos:

Figura 14 — Quadratura do retângulo ABDC dado.



Fonte: Autora deste trabalho.

1. Com centro em *D*, descreva uma circunferência de raio $\overline{BD}$;
2. Prolongue o lado $\overline{CD},$ cortando a circunferência em *N*;
3. Encontre o ponto médio do segmento $\overline{CN}$; e marque como M; O procedimento para determinar o ponto médio de um segmento está descrito no apêndice A.
4. Com centro em *M*, descreva uma circunferência de raio $\overline{CM}$;
5. Trace a perpendicular a $\overline{CM}$ por *D* e marque o ponto *E* na circunferência maior; O procedimento para determinar uma reta perpendicular à outra, passando por um ponto, está descrito no apêndice B.
6. Construa em quadrado sobre o segmento $\overline{DE}$. Este quadrado *EFGD* tem a mesma área do retângulo *ABCD.*

Para construir o quadrado, traçamos uma perpendicular à reta $\overline{DE}$ (como mostra o apêndice *B*) e transportamos o segmento $\overline{DE}$, a partir do ponto *E*, para esta perpendicular, marcando sobre ela o ponto F. Em seguida, prolongamos a reta $\overline{CD}$ e transportamos para esta reta, a partir do ponto *D*, o segmento $\overline{DE}$, marcando o ponto *G*. Finalmente, traçamos a reta obtendo, assim, o quadrado *EFGD.*

Depois da construção geométrica descrita acima, precisamos justificar que o quadrado *EFGD* possui mesmo área igual à do retângulo dado. Para isso, acompanhe a seguinte demonstração:

$$A_{ABDC} = \text{base x altura} \qquad (12)$$

$$A_{ABCD} = \overline{AB} * \overline{BD}$$

mas, $\overline{AB} = \overline{CD}$, logo

$$A_{ABCD} = \overline{CD} * \overline{BD} \qquad (13)$$

como $\overline{BD} \equiv \overline{DN}$ (raios da mesma circunferência)

$$A_{ABCD} = \overline{CD} * \overline{DN} \qquad (14)$$

Na figura, temos

$$\overline{CD} = \overline{CM} + \overline{MD}$$

$$\overline{CD} = \overline{MN} - \overline{MD}$$

mas,

$$\overline{MN} = \overline{CM}$$

então

$$\overline{DN} = \overline{CM} - \overline{MD} \qquad (15)$$

Substituindo (13) e (14) em (12), temos

$$A_{ABCD} = (\overline{CM} + \overline{MD})\ (\overline{CM} - \overline{MD})$$

$$= \overline{CM}^2 - \overline{MD}^2 \qquad \text{(área do retângulo)} \qquad (16)$$

Do triângulo retângulo MDE, aplicando teorema pitágoras, temos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\overline{ME}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{DE}^2 \qquad \text{como } \overline{ME} = \overline{CM}$$

então

$$\overline{CM}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{DE}^2$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{MD}^2 \qquad \text{(área do quadrado)} \qquad (17)$$

$$A_{ABCD} = \overline{DE}^2$$

$$A_{ABCD} = \overline{CM}^2 - \overline{MD}^2 \qquad (18)$$

Portanto, comparando (16) e (17) concluímos que

$$A_{ABDC} = A_{EFGD}$$

ou seja, a área do retângulo *ABDC* é igual à área do quadrado *EFGD*.

A Figura 14 foi construída manualmente, com o auxílio de uma régua e um compasso somente. Ao final da construção, digitalizamos e anexamos a figura ao trabalho.

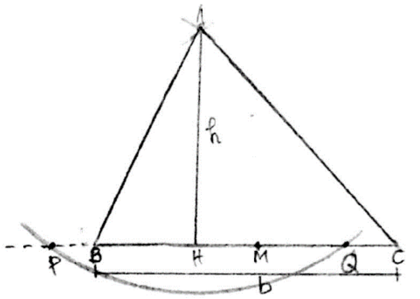
4.2 Quadratura do triângulo

A Figura 1 foi construída manualmente, com o auxílio de uma régua e um compasso somente. Ao final da construção, digitalizamos e anexamos a figura ao trabalho.

Nesta seção, vamos fazer a quadratura de um triângulo qualquer dado, conhecidos seus lados. Tal quadratura consiste de encontrar um quadrado onde sua área seja igual a área do triângulo dado.

Seja o triângulo ABC dado da Figura 15. Sendo a área de um triângulo qualquer dada por $\frac{\text{base}*\text{altura}}{2}$, no triângulo ABC da figura temos que sua área é igual a $\frac{\text{BC}*\text{h}}{2}$. Então nosso objetivo é encontrar um quadrado de lado l cuja área, que é dada por l^2, seja igual a $\frac{\text{BC}*\text{h}}{2}$, ou seja, seja igual à área do triângulo ABC da figura. Este resultado pode ser encontrado utilizando-se o conceito de média geométrica entre dois segmentos. Dados os segmentos a e b, definimos a sua média geométrica por $g = \sqrt{ab}$. Para a construção desta média geométrica vamos utilizar as conhecidas relações métricas no triângulo retângulo, em especial, $h^2 = mn$, ou seja, o quadrado da altura (h) de um triângulo retângulo referente à sua hipotenusa é igual ao produto das projeções m e n dos seus catetos sobre a hipotenusa.

Figura 15 — Triângulo ABC qualquer e o traçado de sua altura h.

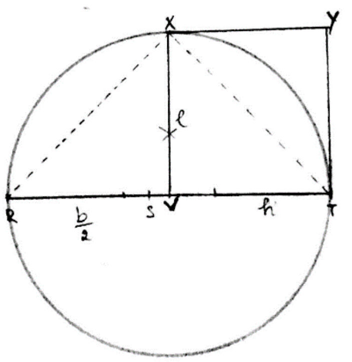


$\overline{BC} = b$

$\overline{BM} = \frac{b}{2}$

Fonte: Autora deste trabalho.

Figura 16 — Quadratura do triângulo ABC, utilizando média geométrica



$\overline{RV} = \frac{b}{2}$

Fonte: Autora deste trabalho.

1. Dado o triângulo *ABC* qualquer (Figura 14);
2. Trace a altura *AH*=*h* deste triângulo, ou seja, uma perpendicular ao lado $\overline{BC}$ de medida *b*, passando pelo vértice *A*;
3. Trace o ponto médio de $\overline{BC}$, denotado por *M*; Ficam então determinados os segmentos $BM = MC = \frac{b}{2}$.
4. Transporte os segmentos de medidas $\frac{b}{2}$ e *h* para uma reta suporte $\overleftrightarrow{RT}$ (Figura 16). O segmento de medida $\frac{b}{2} + h$ será a medida da hipotenusa de um novo triângulo a ser construído;
5. Trace o ponto médio de $\overline{RT}$, marcando como ponto *V*;
6. Trace a circunferência de raio $\overline{RV}$;

7. Trace uma perpendicular à reta $\overleftrightarrow{RT}$, passando pelo ponto *V* e encontrando a circunferência no ponto *X*. Fica então determinado o triângulo *XRT*, retângulo em *X*. O segmento $XV = l$ é a altura do triângulo *XRT*;

   Nota: O triângulo *XRT* é retângulo em *X* pois, o ângulo $R\hat{X}T$ sendo inscrito numa semicircunferência é, por definição, reto, já que qualquer ângulo inscrito numa circunferência deve medir a metade do seu ângulo central correspondente.
8. A medida de $\overline{XV}$ é a medida (*l*) do lado quadrado procurado. Ou seja, o quadrado construído com o lado medindo $XV = l$ da Figura 3 tem área equivalente à área do triângulo *ABC*;
9. Construir o quadrado *XYVT* de lado medindo *l*.

Note no triângulo *XRT* que, através das relações métricas no triângulo retângulo, podemos obter a relação $l^2 = \frac{b}{2} \cdot h$, que pode ser escrita como $l = \sqrt{\frac{b}{2} . h}$, a média geométrica procurada. A expressão $l^2 = \frac{b}{2} \cdot h$ pode ser entendida como: a área do quadrado de lado *l* é igual à área do triângulo de base *b* e altura *h*, ou seja, do triângulo *ABC*.

Para demonstrar que a área do triângulo *ABC* é igual à área do quadrado *XYVT*, escrevemos:

$$l^2 = \frac{b\ .\ h}{2}\ ; \tag{19}$$

$$l = \sqrt{\frac{b\ .\ h}{2}}\ ; \tag{20}$$

$$l = \sqrt{\frac{b}{2} . h}\ , \tag{21}$$

ou seja, para a igualdade (19) ser satisfeita, basta calcular a média geométrica entre os segmentos $\frac{b}{2}$ e *h*, equação (21), onde *l* é a medida do lado do quadrado procurado.

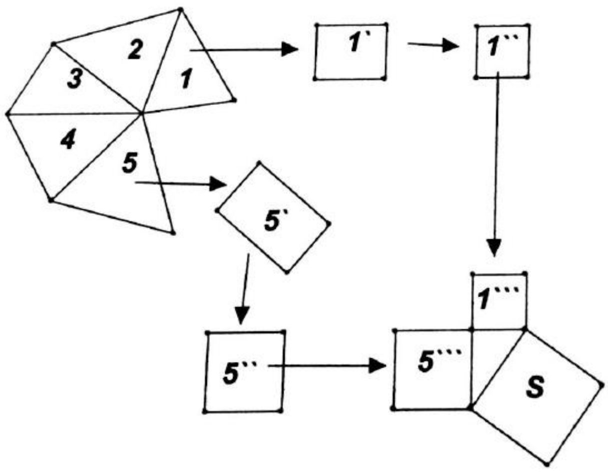
4.3 Quadratura para qualquer polígono de *n* lados

Nas seções anteriores deste capítulo, mostramos como fazer a quadratura do retângulo e a quadratura do triângulo, dois polígonos convexos simples, de 4 e 3 lados, respectivamente. Surge então a pergunta: será que é possível quadrar um polígono de 5, de 6, de 10, de 20 lados? A resposta é sim! E nesta seção vamos mostrar uma generalização do procedimento para fazer a quadratura de um polígono qualquer de n lados n ≥3.

Este procedimento comum, que era muito usado pelos matemáticos gregos na antiguidade, não será para nós, também, de difícil compreensão, uma vez que reunimos, na seção 4.1, parte dos elementos necessários para realizar tais construções geométricas.

Roque e Carvalho (2012), ilustram de forma esquemática, na Figura 16, os procedimentos necessários para quadrar um polígono de 7 lados. Tal ilustração nos permitirá, posteriormente, generalizar o problema. Acompanhe os passos a seguir.

Figura 17 — Quadratura de um polígono de 7 lados.



Fonte: Roque e Carvalho (2012).

Passos:

1. Dado um polígono qualquer como o mostrado na Figura 17, recorre-se a divisão do mesmo em um número de cinco triângulos;

2. O triângulo 1 foi transformado em um retângulo equivalente, 1'. Esse retângulo, por sua vez, foi transformado no quadrado 1" que lhe é equivalente;

3. Analogamente, o triângulo 5 foi transformado em um retângulo equivalente, 5'. Esse retângulo, por sua vez, foi transformado no quadrado 5" que lhe é equivalente;

4. Os quadrados 1'" e 5'" são equivalentes, respectivamente, a 1" e 5".

5. O Teorema de Pitágoras permite transformar esses dois quadrados em um quadrado S.

6. Aplicando este procedimento aos outros triângulos obteremos, ao final, um quadrado equivalente ao polígono dado.

O procedimento descrito acima pode ser generalizado para um polígono qualquer de n lados. No entanto, a fim de simplificar a construção da quadratura de um polígono com muitos lados, propomos uma pequena modificação. Que seja feita a quadratura do triângulo direto para o quadrado, sem que para isso tenha que transformá-lo primeiro num retângulo equivalente. Nossa proposta é que seja feita a quadratura de um triângulo conforme fizemos na seção 4.3 deste capítulo, via média geométrica. Assim, é possível reduzir, significativamente, o trabalho gasto na construção da quadratura final de um polígono de n lados.

Resumindo, então, a idéia é a mesma. A partir de um polígono qualquer de n lados, divida-o em m triângulos. Logo após, utilizando régua e compasso, faça a quadratura de cada um desses m triângulos, utilizando o conceito de média geométrica, obtendo assim, m quadrados equivalentes. Por fim, com a ajuda do Teorema de Pitágoras, transforme cada par desses quadrados em um quadrado resultante, e assim, sucessivamente, até chegarmos a um quadrado equivalente ao polígono inicial dado.

As quadraturas apresentadas até aqui foram construídas a partir do método utilizado por Euclides, utilizando somente régua não graduada (que não dispõe de uma escala de valores) e compasso. Considerando o caráter didático que desejamos propor no ensino do conceito de áreas e figuras equivalentes e que nem sempre o estudante do ensino fundamental possui esta ferramenta fundamental para as construções geométricas, o compasso, e nem as escolas possuem recursos financeiros para comprar e oferecer a seus alunos, apresentaremos no Capítulo 5, alternativas simples e criativas para se desenvolver um trabalho lúdico, prático, que apresente resultados satisfatórios, sem que seja necessário o uso do compasso. A idéia é que a falta do compasso não impeça a realização de atividades que auxiliem no processo de ensino-aprendizagem da disciplina. Em particular, as atividades poderão ser realizadas com materiais de fácil acesso a todos os estudantes e que qualquer escola possui: papel, caneta, lápis de cor, régua, tesoura, boa vontade e, principalmente, conhecimento.

5 SUGESTÃO DE ATIVIDADES ENVOLVENDO CÁLCULO DE ÁREAS E EQUICOMPOSIÇÃO DE FIGURAS PARA SE TRABALHAR EM SALA DE AULA

Neste capítulo, apresentamos algumas sugestões de atividades para o professor trabalhar em sala de aula, diversificando sua prática de ensino e reforçando o aspecto pedagógico relacionado à compreensão do conceito de área.

O conceito de área relaciona características muito importantes para que haja um bom aprendizado como, por exemplo, área é um número positivo que quantifica o espaço ocupado por uma figura, ou ainda, é o resultado do somatório de todas as pequenas partes que constituem um todo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem a importância das habilidades que devem ser trabalhadas no ensino fundamental e salientam:

> ...o trabalho com áreas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter a área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações (BRASIL, 1998, P. 131).

O processo de ensino-aprendizagem deve focar no fato de que a área é uma medida, um número que deve estar relacionado a uma determinada superfície. Para facilitar este processo, entendemos que o uso de materiais concretos e a diversificação dos meios didáticos sejam de fundamental importância para que os alunos desenvolvam uma aprendizagem efetiva.

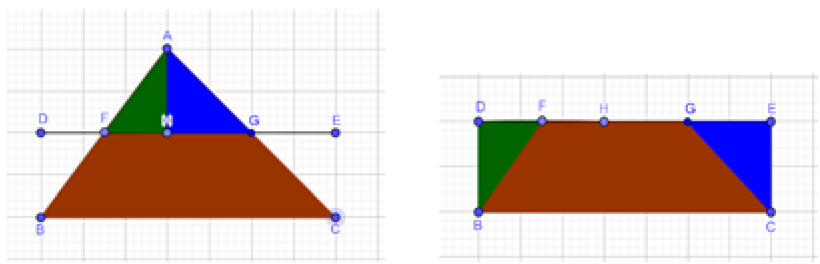
A compreensão de que toda figura pode ser decomposta em figuras menores e que a área desta figura é justamente a soma das áreas de suas partes será nosso ponto de partida para propor as atividades que se seguem.

5.1 Primeira atividade proposta

Nossa primeira sugestão é bem simples e pode ser trabalhada, por exemplo, nos primeiros anos do Ensino Fundamental II, 6º e 7º anos, para se trabalhar o conceito de equivalência de figuras planas. Consiste em decompor um triângulo qualquer em um retângulo.

A proposta é de que sejam construídos, pelos alunos, triângulos variados, cada um constrói o seu, podendo ser triângulos retângulos, acutângulos, isósceles, equiláteros, enfim, à escolha de cada aluno. Depois, com a ajuda de um esquadro, cada aluno deve traçar a altura do seu triângulo. A altura do triângulo é um segmento de reta que parte de um dos vértices do triângulo até encontrar o lado oposto a esse vértice, formando com ele um ângulo de 90°. O próximo passo é determinar os pontos médios de dois lados do triângulo, os lados que não foram usados no traçado da altura. Farão isto com o auxílio de uma régua graduada. Finalmente, traça-se uma reta passando por esses dois pontos médios determinados e os dois triângulos retângulos formados pela altura do triângulo original e a reta passando pelos pontos médios são recortados com o auxílio de uma tesoura sem ponta. Antes de recortar os triângulos retângulos, os alunos poderão, a seu critério, colorir todas as peças, os dois triângulos retângulos e o trapézio, um de cada cor, promovendo assim um espaço de trabalho lúdico e divertido. Com as peças coloridas e recortadas, o último passo consiste de reposicionar os triângulos retângulos do lado do trapézio a fim de se obter um retângulo, conforme a Figura 17.

Figura 18 — Decomposição de um triângulo em um retângulo.



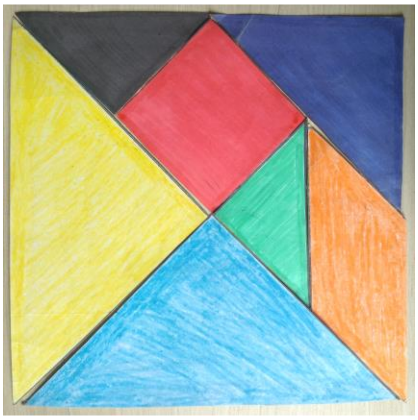
Fonte: Autora deste trabalho.

Com esta atividade é possível trabalhar os conceitos de área, altura do triângulo, ponto médio de um segmento, retas paralelas e equivalência entre figuras geométricas planas, através da equicomposição. Qualquer outro polígono pode ser usado nesta atividade, uma vez que pode ser decomposto em um número finito de triângulos que, por sua vez, podem ser decompostos em retângulos, onde a soma de todas as áreas dos retângulos dá a área do polígono original. Devido à praticidade e viabilidade, é preferível escolher polígonos com um número menor de lados para se trabalhar em sala de aula, para que a atividade não se torne um obstáculo e dificulte a compreensão do conceito de figuras planas equivalentes, que é o objeto foco da aula. É importante salientar que, todos os materiais usados na atividade são fáceis de encontrar, de baixo custo e, na maioria das vezes, os alunos ou a própria Escola já possuem.

5.2 Segunda Atividade Proposta

Uma excelente forma de se trabalhar a compreensão da equivalência de figuras e da equicomposição das mesmas é utilizando um famoso quebra cabeça chinês conhecido como Tangram. Este quebra cabeça é composto por 7 peças, sendo 2 triângulos retângulos grandes, 1 triângulo retângulo médio, 2 triângulos retângulo pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Existem vários tipos de Tangram, mas para esta atividade utilizaremos o Tangram quadrado, como mostra a Figura 18.

Figura 19 — Tangram quadrado.



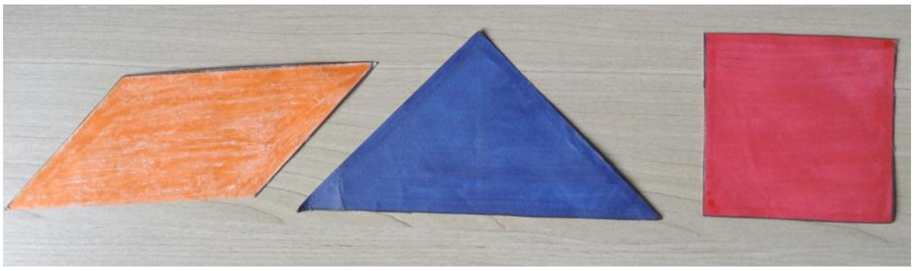
Fonte: Autora deste trabalho.

Neste quebra cabeça geométrico bastante popular, podemos separar as figuras e utilizar as mesmas para construir um grande número de outras figuras. O detalhe é que o Tangram quadrado é muito fácil de construir, usando apenas papel, caneta e lápis de cor, o que pode ser construído com os alunos, na sala de aula, numa aula anterior, e depois utilizá-lo para esta atividade.

Nossa proposta de segunda atividade também é simples do ponto de vista da execução, mas muito significativa do ponto de vista da aprendizagem, pois torna mais fácil a compreensão do que vem a ser figuras equivalentes de uma forma bem pedagógica e, principalmente, prática.

A proposta é a seguinte: em sala de aula, os alunos todos com seus Tangrans em mãos, o professor pede que os alunos separem 5 peças, o paralelogramo, o quadrado, o triângulo médio e os dois triângulos menores. A seguir, o professor pede que cada aluno fique com os dois triângulos pequenos e disponha, em sua carteira, o paralelogramo, o quadrado e triângulo médio, conforme Figura 19.

Figura 20 — Peças do Tangram: Paralelogramo, triângulo médio e quadrado.

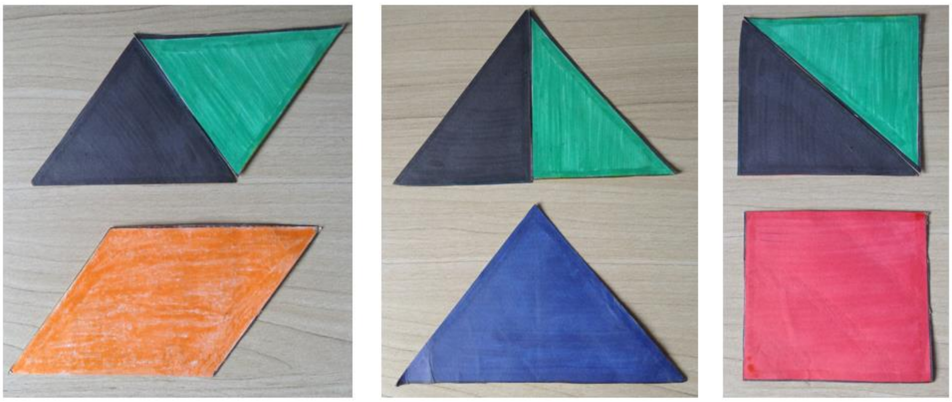


Fonte: Autora deste trabalho.

A tarefa dos alunos, então, será sobrepor os dois triângulos pequenos em cada figura, posicionando-os de forma a se encaixarem perfeitamente sobre o paralelogramo, o quadrado e o triângulo médio, como mostram as Figuras 19(a), 19(b) e 19(c).

Figura 21 — (a) Paralelogramo equicomposto em dois triângulos pequenos; (b) Triângulo médio equicomposto em dois triângulos pequenos e (c) Quadrado equicomposto em dois triângulos pequenos.

(b



(a) (b) (c)

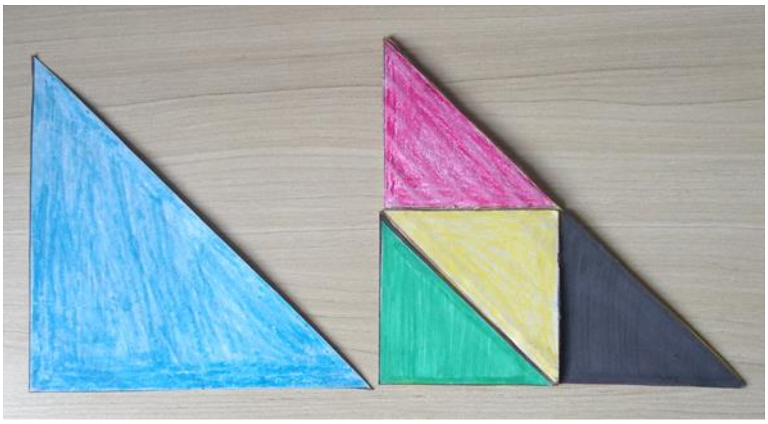
Fonte: Autora deste trabalho.

Assim, os alunos perceberão, com a ajuda do professor, que com os mesmos dois triângulos pequenos foi possível obter três polígonos diferentes, no entanto, todos três com a mesma área e, portanto equivalentes.

Com esta atividade é relativamente rápida de se executar, o professor pode propor, para o restante da aula, uma competição, onde os alunos deverão construir polígonos variados, ao comando do professor, com um certo número de peças do Tangram. A competição pode ser feita em grupos. Por exemplo, construir um retângulo com três peças. O grupo que terminar primeiro ganha um ponto. Outro exemplo, construir um triângulo com cinco peças. Ou um trapézio isósceles com sete peças. E assim por diante. Ao final, o grupo que somar o maior número de pontos, ganha a competição.

Uma outra proposta de atividade com o Tangram pode ser a decomposição de suas peças em termos dos triângulos pequenos. Por exemplo, com a ajuda do professor, o aluno deve ser capaz de concluir que o triângulo grande pode ser decomposto em 4 triângulos pequenos, ou seja, que sua área é igual à soma das áreas de 4 triângulos pequenos do Tangram. Veja a Figura 20.

Figura 22 — Triângulo grande decomposto em 4 triângulos pequenos.



Fonte: Autora deste trabalho.

Pode concluir também que, a área do quadrado formado com as 7 peças do Tangram é igual à soma das áreas de 16 triângulos pequenos do Tangram. Veja a Figura 20. E assim, por diante.

Figura 23 — Tangram quadrado equicomposto em 16 triângulos pequenos.

Fonte: Autora deste trabalho.

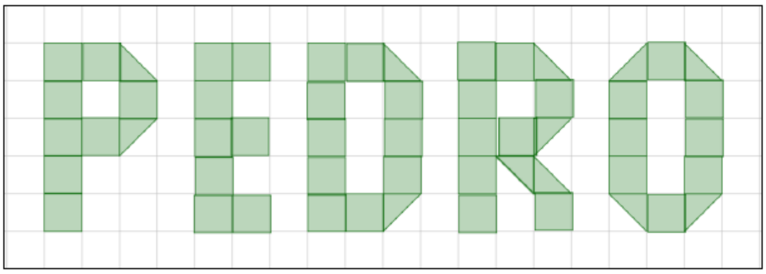
Por ser uma excelente forma de se trabalhar equicomposição, o Tangram vem sendo muito utilizado, em sala de aula, no estudo de áreas e equivalências de figuras planas. Mas deve-se tomar o cuidado de não fixar um objetivo apenas estético de montar figuras, diminuindo o objetivo matemático de observar na prática a equicomposição. Este recurso pode e deve ser melhor aproveitado explorando os aspectos matemáticos que lhe são peculiares e muito significativos do ponto de vista do aprendizado e memorização dos conceitos trabalhados em sala de aula. Por seu caráter lúdico e criativo pode ser aplicada aos alunos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental II.

5.3 Terceira Atividade Proposta

Para a realização, em sala de aula, da terceira e última proposta de atividade deste trabalho, o professor deve disponibilizar para seus alunos uma folha de papel quadriculado, facilmente encontrado em qualquer papelaria. Alternativamente, o professor com o auxílio de uma caneta e uma régua pode quadricular uma folha de papel ofício, com quadrados de $1cm^2$ de área, e xerocar para seus alunos.

Esta atividade consiste no professor propor o seguinte problema lúdico para seus alunos: Pedro deseja escrever seu nome no fundo de uma piscina, usando ladrilhos coloridos conforme a Figura 7 a seguir

Figura 24 — Ladrilhos da piscina



Fonte: Miranda (2017).

Note que a única divisão que é feita nos ladrilhos é na diagonal do quadrado. Pede-se:

a. A área de cada letra do nome de Pedro. Considere cada ladrilho como tendo 1cm² de área.
b. Qual deve ser a área total da piscina (retângulo inferior) para que o nome de Pedro possa ser escrito conforme o modelo da Figura 7? (Deve-se respeitar o espaço de um quadradinho ao redor do nome).
c. Alice, irmã de Pedro, gostou tanto que deseja fazer em sua piscina o mesmo. Construa no papel quadriculado disponibilizado pelo professor, o nome de Alice tal que, o A tenha área de 11 quadradinhos, o L tenha área de 7 quadradinhos, o I tenha área de 5 quadradinhos, o C tenha área de oito quadradinhos e o E tenha área de 9 quadradinhos. Respeito o espaço de um quadradinho nas laterais do nome.
d. Suponha, agora, que você, aluno(a) é o(a) irmão(ã) de Pedro. Construa no papel quadriculado disponibilizado pelo professor, o seu nome, conforme orientações feitas na letra (c) deste problema.

Esta atividade trabalha de maneira contextualizada a área do retângulo e o princípio multiplicativo que dá origem à expressão dessa área. Oportuniza, de forma individual, que cada aluno(a) possa fazer um cálculo de área diferente, referente às letras de seu próprio nome, incentivando a participação e a interação de todos. É uma atividade importante, pois nela o aluno(a) acaba relacionando uma superfície a um número, criando a noção de área enquanto medida. Pode ser aplicada em turmas de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental II.

Nossa terceira atividade proposta deste trabalho foi inspirada no trabalho de Miranda, 2017.

As propostas de atividades aqui apresentadas ainda não foram aplicadas em sala de aula. Nossa perspectiva é de aplicá-las nas escolas da região do Maciço de Baturité e também nas escolas do meu País, Timor Leste, a fim de extrair, na prática, resultados que possam ser satisfatórios ou apontem melhorias. Deixamos, para os leitores deste trabalho, como sugestão e/ou inspiração para aplicação em suas turmas de Ensino Fundamental II ou equivalente, quando se tratar de outro país.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho foi possível observar a maneira como Euclides e os geômetras da antiguidade calculavam a área de polígonos utilizando apenas o compasso e a régua não graduada. Foi possível fazer uma breve contextualização acerca do surgimento da geometria e o legado das primeiras civilizações e dos primeiros geômetras para a atualidade através de um breve levantamento bibliográfico apresentado no Capítulo 2. Foi apresentada a diferença entre os conceitos de área da antiguidade e da atualidade. Após a abordagem do conceito de área, foi possível rever como são deduzidas as fórmulas para o cálculo do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e do trapézio.

O Capítulo 3 é finalizado apresentando dois conceitos muito importante, que são o de equivalência de figuras geométricas planas e o de figuras equicompostas. Foi mostrado que duas figuras são equivalentes quando apresentam fronteiras diferentes e mesma área, enquanto que duas figuras são ditas equicompostas quando se consegue dividir qualquer uma delas em um número tal que, reagrupando, pode-se obter a outra.

Posteriormente, foi apresentado no Capítulo 4 o conceito e a construção da quadratura de polígonos como o triângulo e o retângulo. Com o método de decomposição de polígonos em triângulos, mostrou-se que é possível quadrar qualquer polígono utilizando apenas o compasso e a régua não graduada. Foi mostrado que este método permite dividir um polígono em um número finito de triângulos e posteriormente quadrar os mesmos. Depois de quadrá-los, soma-se os pares de quadrados através do Teorema de Pitágoras, até que se obtenha um quadrado com a mesma área que o polígono original.

No capítulo 5, apresentou-se algumas sugestões de atividades para que o professor possa trabalhar em sala de aula. A proposta é que as atividades devem ser utilizadas para diversificar sua prática de ensino e reforçar o aspecto pedagógico relacionado à compreensão do conceito de área e equivalência de figuras planas.

Finalizando nossas considerações, deixamos como perspectiva a aplicação das atividades aqui propostas em salas de aula do 6º e do 7º anos do Ensino Fundamental II ou equivalente quando se tratar de Países parceiros. Verificar na prática a eficiência ou não deste método alternativo para ensinar o conceito e o cálculo de áreas através da equicompoisção de figuras e também a equivalência de área entre as figuras é nosso próximo objetivo. É nosso objetivo, também, estimular o estudo da geometria plana através das construções geométricas com régua e compasso, sempre que for possível e viável, pois entendemos que este recurso ajuda, e muito, na compreensão de diversos conceitos geométricos como os abordados neste trabalho.

Com as temáticas aqui trabalhas também pretende-se despertar nos leitores o interesse pelos conceitos abordados, construções e decomposição de figuras geométricas, de forma a contribuir com o ensino e aprendizagem da geometria nas salas de aula. Deixamos como sugestão e/ou inspiração para que outros professores utilizem as ferramentas aqui propostas e/ou se inspirem para criar novas, sempre em prol do conhecimento e com vistas à melhoria da aprendizagem dos alunos das Escolas do Maciço de Baturité e das Escolas dos Países parceiros.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, C. C. de. **O ensino da matemática para o cotidiano**. Monografia de especialização (Especialização em Pós Graduação em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná: Medianeira, 2013.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

GASPAR, M. T; MAURO, S. Explorando a geometria através da história da matemática e da etnomatemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 8., 2004, Pernambuco. **Anais...**2004.

LEONARDO P. P; MENESTRINA, T. C; MIARKA, R. A importância do ensino da matemática na educação infantil. *In*: SIMPÓSIO EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM DEBATE, 1., 2014, Joinville. **Anais...**2014.

MIRANDA, R. R. de. Uma abordagem sobre cálculo de áreas com base na decomposição de figuras. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de São João del-Rei: São João del-Rei, 2017.

MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

PENEIREIRO, J. B. SILVA, M. F. da. **Geometria Plana e Desenho Geométrico**. Santa Maria, 2008.

PIASESKI, C. M. **A Geometria no Ensino Fundamental**. Monografia (Licenciatura em Matemática) — Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI: Erechim, 2010.

ROQUE, T; CARVALHO, J. B. P; **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

ROVERAN, A. P. **Atividades para a sala de aula usando como recurso pedagógico a história matemática. Das quadraturas ao número pi. Matemática na antiga grécia.** Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2015.

SANTOS, J. A; FRANÇA, K. V; SANTOS, L. S. B. dos. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. Trabalho de conclusão de curso (licenciatura em Matemática) — Centro.

SILVA, M. V da. **As dificuldades de aprendizagem da matemática e sua relação com a matofobia**. Monografia de especialização (Especialização em Fundamentos da Educação:

Práticas Pedagógicas Interdisciplinares) — Universidade Estadual da Paraíba: Princesa Isabel, 2014.

SOUZA, T. P. dos S. **O uso do desenho geométrico como motivador de aprendizagem no ensino de área de figuras planas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Recôncavo da Bahia: Cruz das Almas, 2015.

APÊNDICES

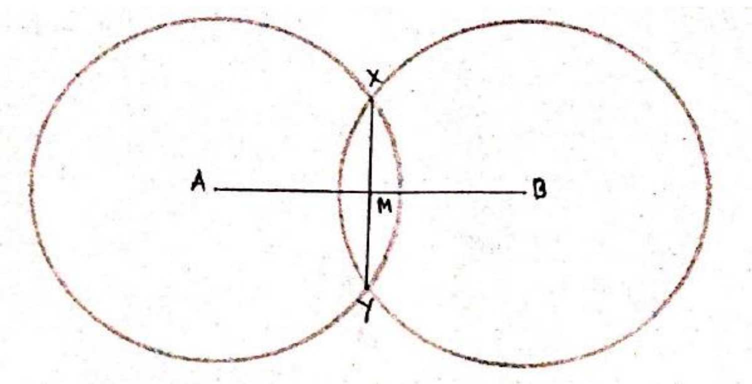
APENDICE A — Ponto médio de um segmento

❖ Construções Geométricas Básicas

1. Ponto médio de um segmento

Construa, com régua e compasso, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ dado.

Figura 1— Construção do ponto médio do segmento



Fonte: Autor deste trabalho.

Procedimento:

➢ Traça-se um segmento qualquer de reta, por exemplo, o segmento $\overline{AB}$ da Figura 1;

➢ Com o compasso centrado no ponto *A*, traça-se uma circunferência de raio $r > \frac{1}{2}\,\overline{AB}$;

➢ Com o compasso centrado no ponto *B*, traça-se uma outra circunferência com raio $r > \frac{1}{2}\,\overline{AB}$;

➢ As circunferências se interceptam em dois pontos distintos, *X* e *Y*;

➢ Traça-se a reta $\overleftrightarrow{XY}$ determinando com o segmento $\overline{AB}$ um ponto de interseção *M*;

➢ O ponto *M* é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Justificativa: Observe, na Figura 1, que o triângulo AXB é isósceles, pois a medida de $AX = XB = r$. Logo, como propriedade dos triângulos isósceles, o segmento $\overline{XM}$ é uma mediana do triângulo AXB, o que garante que M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

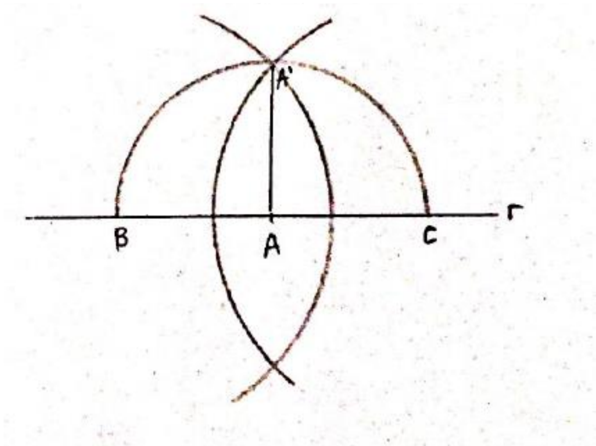
APÊNDICE B — Perpendicular a uma reta *r*, passando por um ponto A da reta

- ❖ Construções Geométricas Básicas

2. Perpendicular a uma reta *r*, passando por um ponto *A* da reta.

Construa, com régua e compasso, uma reta perpendicular a uma reta r dada, passando por um ponto A da reta dada.

Figura 2 — Construção de uma reta $\overleftrightarrow{AA'}$ perpendicular a uma reta r dada.



Fonte: Autor deste trabalho.

Procedimento:

- ➢ Traça-se uma reta *r*. Destaca-se o ponto *A* sobre a reta *r* (Figura 2);
- ➢ Com centro em *A*, traça-se uma semicircunferência, de raio qualquer, interceptando a reta *r* em dois pontos distintos, *B* e *C;*
- ➢ Agora, com centro em *B*, traça-se um arco de circunferência de raio $r > \frac{1}{2}\ \overline{BC}$;

- ➢ Analogamente, com centro em *C*, traça-se um arco de circunferência de raio $r > \frac{1}{2}\ \overline{BC}$;
- ➢ Marca-se o ponto de interseção dos três arcos, o ponto *A'*;
- ➢ Traça-se a reta $\overleftrightarrow{AA'}$, perpendicular à reta *r* dada.

Justificativa: Observe, na Figura 2, que o triângulo *BA'C* é isósceles, pois a medida de $BA' = A'C = r$. Logo, como propriedade dos triângulos isósceles, o segmento $\overline{AA'}$ é uma altura do triângulo *BA'C*, o que garante que a reta $\overleftrightarrow{AA'}$ é perpendicular à reta *r*.

APÊNDICE C — Mediatriz de um segmento

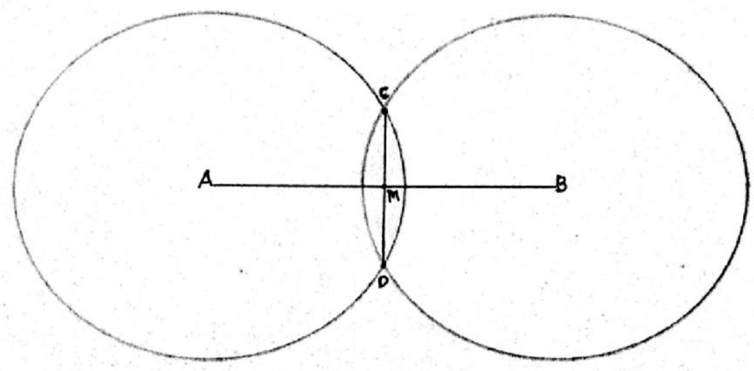
- ❖ Construções Geométricas Básicas

3. Mediatriz de um segmento

Construa, com régua e compasso, a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ dado.

A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é a reta perpendicular a $\overline{AB}$ que contém o seu ponto médio. A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ pode ser entendida, também, como o conjunto de todos os pontos que eqüidistam dos extremos do segmento. Acompanhe os passos para sua construção.

Figura 3: Construção da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



Fonte: Autor deste trabalho.

Passos:

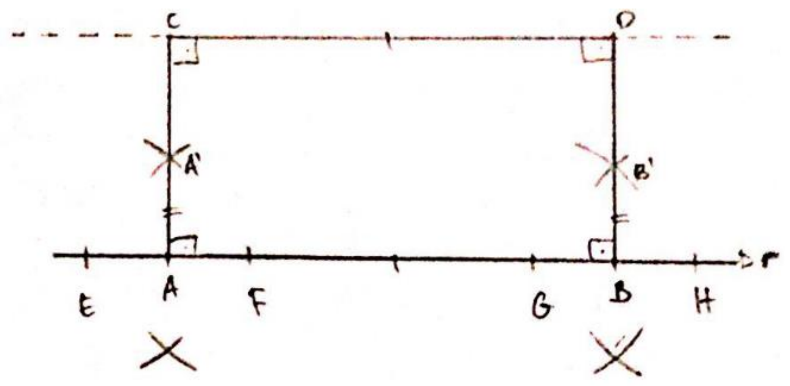
- ➢ Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, Figura 3, com o compasso centrado em *A*, traça-se uma circunferência de raio $r > \frac{1}{2}\,\overline{AB}$;
- ➢ Com o compasso centrado em *B*, traça-se uma circunferência de raio $r > \frac{1}{2}\,\overline{AB}$;
- ➢ As circunferências se interceptam nos pontos *C* e *D*;
- ➢ A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Justificativa: Na Figura 3, o triângulo *ACB* é isósceles, pois a medida de $AC = CB = r$. Logo, como propriedade dos triângulos isósceles, o segmento $\overline{CD}$ é tanto uma mediana quanto uma altura do triângulo *ACB*, o que garante que a reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

APÊNDICE D – Construção de um retângulo usando apenas régua e compasso

4. Construir um retângulo usando apenas régua e compasso.

Figura 4: Construção de um retângulo usando apenas régua e



Fonte: Autor deste trabalho.

Procedimentos:

- Traça-se uma reta *r*. Sobre *r*, destaca-se os pontos *A* e *B* (Figura 4);
- Traça-se uma reta perpendicular à reta *r* passando pelo ponto *A*, $\overleftrightarrow{AA'}$, conforme mostrado no Apêndice B;
- Traça-se uma reta perpendicular à reta *r* passando pelo ponto *B*, $\overleftrightarrow{BB'}$, conforme mostrado no Apêndice B;
- Marca-se um ponto *C* qualquer na reta $\overleftrightarrow{AA'}$;
- Traça-se uma reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AA'}$ passando pelo ponto *C*, marcando o ponto de interseção desta reta com a reta $\overleftrightarrow{BB'}$, o ponto *D*;
- O quadrilátero *ABDC* é um retângulo.

Justificativa: Por sua própria definição, um retângulo é um quadrilátero plano convexo que possui os quatro ângulos internos congruentes. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º, os quatro ângulos internos do retângulo tem que ser retos. Logo, por construção, podemos ver, na Figura 4, que o quadrilátero *ABDC* é, de fato, um retângulo.