UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA

EVA YUNUS ORNAY

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON EM FUNÇÕES QUADRÁTICAS

ACARAPE - CE
2017

EVA YUNUS ORNAY

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON EM FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

ACARAPE - CE

2017

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro- Brasileira

Sistema de Bibliotecas da UNILAB (SIBIUNI)
Biblioteca da Unidade Acadêmica dos Palmares
Catalogação na fonte

Ornay, Eva Yunus.

O74c

Convergência do método de Newton-Raphson em funções quadráticas. / Eva Yunus Ornay. Acarape, 2017.
32 f. il.

Monografia (Graduação) do Curso de Ciências da Natureza e Matemática da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. Cálculos numéricos (Método de Newton-Raphson). 2. Funções quadráticas. 3. Raízes reais. I. Título.

CDD 511

EVA YUNUS ORNAY

CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON
EM FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 04 de Agosto de 2017.

BANCA EXAMINADORA

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

José Tiago Nogueira Cruz

Prof. Me. José Tiago Nogueira Cruz
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Dedico ao meus pais e minha familiares.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que iluminou meu caminho durante esta caminhada, que me dar oportunidade, força e persistência para cursar esta licenciatura.

Agradeço aos meus pais e minhas familiares pelo carinho e apoio.

Ao meu orientador, por aguentar todos os erros com muita pasciência e me orientar nesta escrita e trabalho.

Agradeço aos professores participantes da banca examinadora pela disponibilidade de analisar meu trabalho e pelas contribuições.

A todos os professores do curso que foram tão importantes na minha vida acadêmica e no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos pelo incentivo e apoio constantes.

E ao governo de Timor-Leste pelo apoio de financeiro.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que fizeram parte dessa etapa decisiva em minha vida.

"O grande valor da inteligência humana não está em achar a verdade, mas sim em esforçar-se por descobri-la."(Évariste Galois)

RESUMO

O presente trabalho objetiva realizar um estudo acerca da convergência do método de Newton-Raphson aplicado às funções polinomiais quadráticas, verificando para quais valores iniciais é possível garantir a convergência do referido método e determinando a natureza da convergência. No primeiro momento, identificamos os valores iniciais que garantem a convergência monótona (crescente ou decrescente) do método de Newton-Raphson para funções quadráticas e por fim, concluímos ainda que nesta mesma classe de funções, a convergência do método ocorre para quaisquer valores iniciais diferentes da abscissa do vértice. A pesquisa realizada deu-se por meio de uma revisão bibliográfica, enfocando as funções quadráticas, suas raízes e o método Newton-Raphson, culminando com a obtenção de resultados qualitativos relacionados à convergência do Método de Newton-Raphson. Este material poderá ser muito útil para outros estudantes, podendo ser usado como fonte de pesquisa em disciplinas e na realização de futuros Trabalhos de Conclusão de Curso.

Palavras-chave: Método de Newton-Raphson. Funções Quadráticas. Raízes reais.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma função polinomial real de uma variável real é chamada de quadrática, quando esta é definida a partir de um polinômio quadrático (ou polinômio do 2° grau) sobre o corpo dos reais em uma incógnita. Por volta do ano 300 a. C., a função quadrática foi associada à ideia de equação quadrática (ou equação polinomial do 2° grau), momento este em que o matemático grego Euclides desenvolveu uma nova técnica denominada Álgebra Geométrica. Dentre os fatos que motivaram o surgimento da função quadrática, destaca-se as tentativas de explicar o movimento em queda livre de um corpo ou trajetória de uma bala de canhão.

Chama-se de equação quadrática (ou equação polinomial do 2º grau), a equação polinomial que assume a forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde a, b e c são constantes reais com a não-nulo. As raízes da equação quadrática são obtidas pela expressão

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

mais conhecida no Brasil como *Fórmula de Bháskara*. Deve-se ressaltar que a constante $\Delta = b^2 - 4ac$, chamada de *discriminante* da equação, nos permite identificar se as raízes são reais ou complexas não-reais.

Este trabalho apresenta um estudo da convergência do método de Newton-Raphson em funções quadráticas (ou funções polinomiais do 2º grau), na perspectiva de identificar para quais valores iniciais ocorre a convergência da sequência recorrente fornecida pelo método supracitado. Mais do que isso, buscaremos identificar os valores inicias que garantem a convergência monótona (crescente ou decrescente) deste método numérico iterativo, bem como compreender os demais tipos de convergência possíveis e consequentemente, concluir os casos de divergência.

Esta monografia estrutura-se basicamente em três capítulos, apresentando no primeiro uma breve introdução que fornece uma ideia geral sobre o trabalho e os problemas a serem estudados. No segundo capítulo, faremos uma abordagem preliminar que inicia com polinômios sobre um corpo e funções reais, encerrando com o método de Newton-Raphson, deduzido a partir do Teorema do ponto fixo de Banach. O último capítulo tem por finalidade expor resultados sobre funções quadráticas, enfatizando resultados sobre a convergência do método de Newton-Raphson aplicado a esta classe de funções, obtidos em parceria com o orientador.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos sobre polinômios e funções reais, bem como importantes resultados como o algoritmo da divisão de polinômios e Teorema do ponto fixo de Banach, culminando com o método de Newton-Raphson.

2.1 Polinômios sobre um corpo

Iniciamos a seção, introduzindo a definição de corpo para que na sequência, possamos definir polinômios, bem como operações e outros elementos relacionados.

Definição 2.1 Um corpo é um conjunto não-vazio $\mathbb{K}$ que possui duas operações fechadas

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ (soma)} \qquad \text{e} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ (produto)}$$

que satisfazem, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{K}$, as seguintes propriedades:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma);
2. Existe $0 \in \mathbb{K}$, tal que $a + 0 = 0 + a = a$ (existência do elemento neutro da soma);
3. Existe $-a \in \mathbb{K}$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (existência do inverso aditivo);
4. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma);
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade do produto);
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributividade à esquerda) e
   $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributividade à direita);
7. Existe $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
8. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade do produto);
9. Se $a \neq 0$, então existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$ satisfazendo $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Exemplo 2.1 São exemplos de corpos os conjuntos $\mathbb{Q}$ (números racionais), $\mathbb{R}$ (números reais) e $\mathbb{C}$ (números complexos), munidos com as operações usuais de soma e produto.

Definição 2.2 Sejam $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ um corpo e $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ um subconjunto que munido com as operações de $\mathbb{L}$ é um corpo, então dizemos que $\mathbb{K}$ é um subcorpo de $\mathbb{L}$.

Exemplo 2.2 $\mathbb{Q}$ é subcorpo de $\mathbb{R}$ que, por sua vez, é subcorpo de $\mathbb{C}$.

Definição 2.3 Um polinômio sobre um corpo $\mathbb{K}$ em uma incógnita x é a expressão formal

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots ,$$

onde $a_i \in \mathbb{K}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e existe $n \in \mathbb{N}$, de modo que $a_j = 0$ sempre que $j \geq n$.

Observação 2.1 Denotaremos por $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ em uma incógnita x.

Definição 2.4 Dizemos que dois polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$, dados por

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k + \cdots,$$

são iguais, quando $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Observação 2.2 Dizemos que um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo, quando $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definição 2.5 Se um polinômio sobre um corpo $\mathbb{K}$, expresso por

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots,$$

admite um índice $n \in \mathbb{N}$, tal que $a_n \neq 0$ e $a_j = 0$ para todo $j > n$, dizemos que $P(x)$ possui grau n.

Observação 2.3 O grau n de um polinômio $P(x)$ é denotado por $\partial P(x)$.

Observação 2.4 Por simplicidade de notação, escrevemos um polinômio de grau $n \in \mathbb{N}$ na forma $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$.

Exemplo 2.3 Os polinômios $P_1(x) = 2 + x$, $P_2(x) = 5 + 3x$ e $P_3(x) = 12 + 4x + 3x^2$ pertencem ao conjunto $\mathbb{R}[x]$.

Exemplo 2.4 O polinômio $P(x) = -1 + 2x + 5x^2$ possui grau 2, ou equivalentemente, podemos escrever $\partial P(x) = 2$.

Neste momento, passamos a definir a soma e o produto entre dois polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ em uma incógnita x.

Definição 2.6 Considerando dois polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$, expressos por

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + \cdots \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_kx^k + \cdots,$$

definimos a soma e o produto por

$$\begin{aligned} \text{a) } (P_1 + P_2)(x) &:= c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m + \cdots \quad \text{e} \\ \text{b) } (P_1 \cdot P_2)(x) &:= d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m + \cdots, \end{aligned}$$

onde $c_i := a_i + b_i$ e $d_j := a_0b_j + a_1b_{j-1} + \cdots + a_jb_0$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$ e $j \in \mathbb{N}$.

Observação 2.5 Dados polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, temos que:

a) $\partial(P_1 + P_2)(x) \leq \partial P_1(x) + \partial P_2(x)$ com $P_1(x) + P_2(x) \neq 0$;

b) $\partial(P_1 \cdot P_2)(x) = \partial P_1(x) + \partial P_2(x)$ com $P_1(x) \cdot P_2(x) \neq 0$.

Exemplo 2.5 Dados polinômios $P_1(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ e $P_2(x) = 2x^2 - 5x - 2$ sobre o conjunto $\mathbb{R}[x]$, tem-se que:

a) $P_1(x) + P_2(x) = 4x^3 - x^2 - x + 3$;

b) $P_1(x) \cdot P_2(x) = 8x^5 - 26x^4 + 15x^3 - 4x^2 - 33x - 10$.

Definição 2.7 Sejam $P(x)$ um polinômio não-nulo sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ um elemento que satisfaz $P(\alpha) = 0$, então dizemos que α é uma raiz de $P(x)$ em $\mathbb{K}$.

Exemplo 2.6 O número $r = 1$ é raiz do polinômio $P(x) = x^2 - 6x + 5$ sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Definição 2.8 Sejam $\mathbb{K}$ um subcorpo $\mathbb{L}$ e $\alpha \in \mathbb{L}$ raiz de um polinômio $P(x) \in \mathbb{K}$, dizemos que α é algébrico sobre $\mathbb{K}$. Se $P(x)$ possui grau $n \in \mathbb{N}$ e α não é raiz de nenhum polinômio sobre $\mathbb{K}$ com grau menor que n, então α é dito algébrico de grau n.

Encerrando a seção, apresentamos um importante resultado conhecido como o algoritmo da divisão de polinômios.

Teorema 2.1 (Algoritmo da Divisão) Sejam $P_1(x)$ e $P_2(x)$ polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ com $P_2(x)$ não-nulo, então existem únicos $Q(x), R(x) \in \mathbb{K}[x]$, tais que

$$P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x) + R(x),$$

onde $R(x)$ é nulo ou $\partial R(x) < \partial P_2(x)$.

Demonstração: Faremos a demonstração em duas partes, contemplando existência e unicidade:

1ª Parte: Existência.

Primeiramente, observe que se $P_1(x)$ for nulo, basta tomar $Q(x)$ e $R(x)$ nulos e assim, a existência será trivialmente satisfeita. Por outro lado, se tivermos $\partial P_1(x) < \partial P_2(x)$, basta tomar $Q(x)$ nulo e $R(x) = P_1(x)$ e mais uma vez, a existência será trivialmente satisfeito para este caso.

Nos resta trabalhar o caso em que $\partial P_1(x) \geq \partial P_2(x)$ e para isso, vamos admitir

$$\partial P_1(x) = m \quad \text{e} \quad \partial P_2(x) = n,$$

daí escrevemos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n,$$

então definimos

$$P_3(x) = P_1(x) - a_m b_n^{-1} x^{m-n} P_2(x),$$

observando que $\partial P_3(x) < \partial P_1(x)$.

Neste momento, faremos indução sobre o grau m de $P_1(x)$, conforme os passos descritos a seguir:

1º Passo: $m = 0$.

Se $m = 0$, então $n = 0$ e consequentemente

$$P_1(x) = a_0 \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0,$$

logo

$$P_1(x) = a_0 b_0^{-1} P_2(x),$$

bastando tomar $Q(x) = a_0 b_0$ e $R(x) = 0$.

2° Passo: $m > 0$.

Supondo que o Teorema é válido para todo polinômio de grau menor que m, observe que

$$P_3(x) = P_1(x) - a_m b_n^{-1} x^{m-n} P_2(x) \tag{1}$$

possui grau menor que m, então existem polinômios $\tilde{Q}(x)$ e $\tilde{R}(x)$ sobre $\mathbb{K}$ que satisfazem a igualdade

$$P_3(x) = \tilde{Q}(x) \cdot P_2(x) + \tilde{R}(x), \tag{2}$$

onde $\tilde{R}(x)$ é nulo ou $\partial \tilde{R}(x) < \partial P_2(x)$.

Decorre das igualdades (1) e (2) que

$$P_1(x) = [a_m b_n^{-1} x^{m-n} + \tilde{Q}(x)] P_2(x) + \tilde{R}(x),$$

portanto basta tomar

$$Q(x) = a_m b_n^{-1} x^{m-n} + \tilde{Q}(x) \quad \text{e} \quad R(x) = \tilde{R}(x),$$

satisfazendo assim as condições enunciadas.

2ª Parte: Unicidade.

Suponha que existam $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $Q_2(x)$ e $R_2(x)$, satisfazendo

$$P_1(x) = Q_1(x) \cdot P_2(x) + R_1(x) = Q_2(x) \cdot P_2(x) + R_2(x),$$

onde $R_i(x)$ é nulo ou $\partial R_i(x) < \partial P_i(x)$ com $i = 1, 2$. Sendo assim, segue-se que

$$[Q_1(x) - Q_2(x)] \cdot P_2(x) = R_2(x) - R_1(x),$$

implicando que $Q_1(x) = Q_2(x)$ e $R_1(x) = R_2(x)$, pois caso contrário, teríamos cada membro com graus diferentes. $\square$

Exemplo 2.7 Dados $P_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - x + 2$ e $P_2(x) = x^2 + x + 1$ em $\mathbb{R}[x]$, podemos escrevê-lo na forma

$$P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x) + R(x),$$

onde $Q(x) = 3x^2 - 5x + 8$ e $R(x) = -4x - 6$. De outra maneira, temos que:

$$(3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - x + 2) = (3x^2 - 5x + 8) \cdot (x^2 + x + 1) + (-4x - 6).$$

2.2 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um importante método numérico iterativo, usando para obter aproximações decimais de raízes de funções reais deriváveis, sob certas condições. Nesta seção, deduziremos o método de Newton Raphson a partir do Teorema do Ponto Fixo de Banach e para isso, iniciamos com alguns conceitos preliminares.

A partir da definição de polinômio, podemos introduzir a definição de função polinomial real em uma variável (ou incógnita).

Definição 2.9 Dizemos que uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é polinomial (em uma variável), quando existem $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, tais que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação 2.6 Se na definição anterior, o polinômio que define f for do segundo grau (ou quadrático), diremos que f é uma função quadrática ou do segundo grau.

Definição 2.10 Dada uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um número real $r \in X$ que satisfaz $f(r) = 0$, dizemos que r é uma raiz (ou zero) de f.

Definição 2.11 Dada uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um número real $r \in X$ que satisfaz $f(r) = r$, dizemos que r é um ponto fixo de f.

Neste momento, passamos a apresentar as definições de continuidade, limite e derivadas de funções definidas em um intervalo abero $I \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.12 Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *contínua* no ponto $a \in I$, se para cada $\epsilon > 0$ arbitrário, pode-se obter $\delta > 0$ satisfazendo a condição

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Se f for contínua em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é contínua.

Definição 2.13 Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui limite $L \in \mathbb{R}$ com x tendendo a $a \in I$, se para cada $\epsilon > 0$ arbitrário, pode-se obter $\delta > 0$ satisfazendo a condição

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definição 2.14 Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $a \in \mathbb{R}$, quando existe o limite

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ denota um intervalo aberto. Se f for derivável em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é derivável e a função $f' : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de derivada de f.

Observação 2.7 As raízes da derivada de uma função derivável $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são chamadas de pontos críticos.

Agora definimos um importante tipo de função real, elemento essencial ao Teorema do ponto fixo de Banach.

Definição 2.15 Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de *contração*, quando existe uma constante real $0 \leq \alpha < 1$, satisfazendo

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|,$$

para todo $x, y \in X$.

Observação 2.8 Toda contração é uma função contínua, podemos conferir em Lima (2012) e Oliveira (2008).

Em versão mais geral, o Teorema do ponto fixo de Banach aplica-se a contrações definidas em subconjuntos fechados de espaços métricos completos, no entanto apresentamos aqui uma versão mais elementar que trata de contrações definidas em intervalos fechados da reta real.

Teorema 2.2 (Ponto fixo de Banach) Toda contração $f : I \to I$ definida sobre um intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$ possui um único ponto fixo.

Demonstração:

Tomando um ponto $x_0 \in I$ arbitrário, definimos a sequência

$$x_n := f^n(x_0),$$

onde f^n denota a n-ésima iterada de f. Sendo assim, temos que

$$\begin{array}{rcl} |x_n - x_{n+1}| & = & |f(x_{n-1}) - f(x_n)| \\ & \leq & \alpha|x_{n-1} - x_n| = \alpha|f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})| \\ & \leq & \alpha^2|x_{n-2} - x_{n-1}| = \alpha^2|f(x_{n-3}) - f(x_{n-2})| \\ & \vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & \leq & \alpha^{n-1}|x_1 - x_2| = \alpha^{n-1}|f(x_0) - f(x_1)| \\ & \leq & \alpha^n|x_0 - x_1|, \end{array}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer, segue-se da desigualdade anterior e da desigualdade triangular que

$$\begin{array}{rcl} |x_n - x_{n+m}| & \leq & |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+m-1} - x_{n+m}| \\ & \leq & (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{n+m-1})|x_0 - x_1| \\ & = & \dfrac{\alpha^n(1-\alpha^m)}{1-\alpha}|x_0 - x_1| < \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_0 - x_1|, \end{array}$$

ou simplesmente,

$$|x_n - x_{n+m}| < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_0 - x_1|,$$

no entanto, observe que $\alpha^n \to 0$ para $n \to +\infty$, daí podemos afirmar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Como toda sequência de Cauchy de números reais é convergente e I é um intervalo fechado dos reais, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto $p \in I$.

Usando o fato de que toda contração é uma função contínua, obtemos

$$\begin{array}{rcl} f(p) & = & f(\lim x_n) \\ & = & \lim f(x_n) \\ & = & \lim x_{n+1} = p, \end{array}$$

logo p será um ponto fixo de f. Agora sejam $p, q \in I$ pontos fixos de f, então

$$|p-q| = |f(p) - f(q)| \leq \alpha|p-q|,$$

consequentemente

$$|p-q| = 0,$$

que implica em $p = q$, concluindo a unicidade do ponto fixo. $\square$

Observação 2.9 Uma versão mais geral do Teorema do Ponto Fixo de Banach sobre espaços métricos completos, encontra-se em Oliveira (2008).

Como aplicação do Teorema do ponto fixo de Banach, deduzimos o método de Newton-Raphson para funções reais como derivada segunda contínua.

Corolário 2.1 Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com segunda derivada contínua e $r \in I$ uma raiz real de f. Se $r \in I$ não é ponto crítico de f, então existe um subintervalo $J = [r-\delta, r+\delta] \subset I$, tal que

$$x_{n+1} = \begin{cases} k \in J, \ \ se\ n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ \ se\ n \geq 1 \end{cases}$$

converge para a raiz $r \in I$.

Demonstração:

Sendo f contínua e $f'(r)$ não-nulo, deve existir um intervalo aberto $\tilde{I} \subset I$ centrado em $r \in I$, onde a derivada f' não se anula. Dessa forma, definimos uma função $F : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

então sua derivada será dada por

$$F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

para todo $x \in \tilde{I}$.

De modo análogo, observe que $F'(r) = 0$ e F' é contínua, daí vamos tomar uma constante real $\alpha \in (0, 1)$ para obter $\delta > 0$, de modo que $J = [r-\delta, r+\delta] \subset \tilde{I}$ e ainda

$$|F'(x)| = |F'(x) - F'(r)| \leq \alpha < 1,$$

para todo $x \in J$. Usando o Teorema do valor médio e tomando $x \in J$, obtemos

$$|F(x) - F(r)| \leq \alpha|x - r| \leq \delta,$$

mas como $F(r) = r$, segue-se ainda que

$$|F(x) - r| \leq \delta,$$

implicando que $F(x) \in J$ e portanto $F|_J : J \to J$ é uma contração.

Aplicando o Teorema do ponto fixo de Banach, tem-se para todo $k \in J$ que

$$x_{n+1} = \begin{cases} k \in J, \text{ se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

converge para o único ponto fixo de $F|_J$, daí concluímos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a raiz $r \in J$. $\square$

Observação 2.10 Sobre o método de Newton-Raphson, importante destacar que sempre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, esta sequência converge para uma raiz de f. De fato, bastar denotar $a = \lim x_n$ e fazer um cálculo direto

$$a \quad = \quad \lim x_{n+1} = \lim x_n - \lim \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

implicando que $f(a) = 0$, ou seja, o limite a é uma raiz de f.

Ilustração:

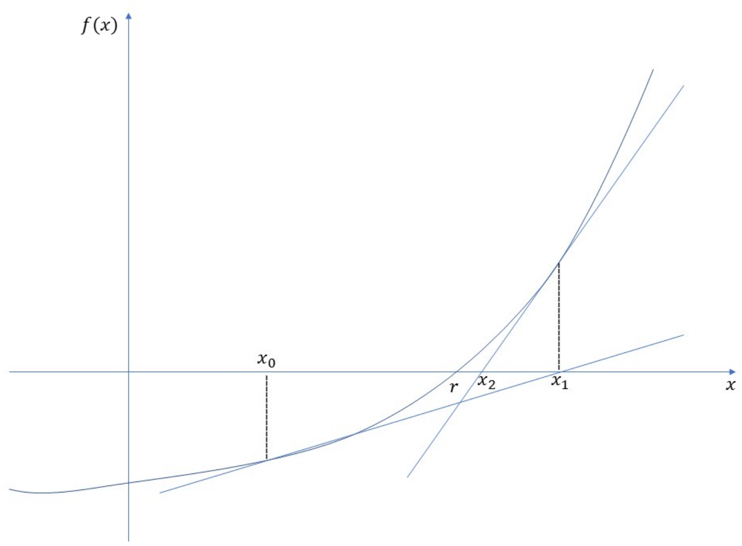

Figura 1: Método de Newton-Raphson.

3 CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Fazemos aqui uma breve revisão sobre polinômios quadráticos e equações polinomiais quadráticas, enfatizando a fórmula de Bháskara e o estudo de raízes (reais e/ou complexas não-reais). Na sequência, apresentamos os resultados obtidos em parceria com o orientador, no trabalho indicado em Ornay e Silva Filho (2017), que trata da convergência do método de Newton-Raphson aplicado às funções quadráticas.

3.1 Raízes de Funções Quadráticas

Primeiramente, apresentamos uma proposição que nos traz a Fórmula de Bháskara que determina as raízes de um polinômio quadrático.

Proposição 3.1 (Fórmula de Bháskara) Sejam $P(x) = ax^2 + bx + c$ um polinômio quadrático sobre o corpo dos reais e $\Delta := b^2 - 4ac$ o seu discriminante, então valem as seguintes afirmações:

a) Se $\Delta \geq 0$, então as raízes de f são reais, dadas por

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

b) Se $\Delta < 0$, então as raízes de f são complexas, dadas por

$$w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta} i}{2a}.$$

Demonstração:

Na perspectiva de determinar as raízes de P, vamos considerar a equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

então dividindo os dois membros da igualdade por a, obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

daí somamos $\dfrac{b^2}{4a^2}$ em cada membro, resultando em

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2},$$

Podemos reescrever a igualdade acima na forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2},$$

consequentemente,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

ou ainda,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Observe que se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, então

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

logo

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

serão as raízes de P. Por outro lado, se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, vamos ter

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i,$$

portanto

$$w_1=\frac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a} \quad \text{e} \quad w_2=\frac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a},$$

que corresponde ao segundo item. □

A partir da fórmula de Bháskara apresentada na proposição anterior, podemos deduzir os seguintes corolários:

Corolário 3.1 (Relações de Girard) Seja $P(x) = ax^2+bx+c$ um polinômio quadrático sobre o corpo dos reais com raízes w_1 e w_2. Nestas condições, temos que:

a) $w_1 + w_2 = -\frac{b}{a}$. b) $w_1 w_2 = \frac{c}{a}$.

Demonstração:

a) Usando a última proposição e fazendo um cálculo direto para os casos Δ não-negativo e negativo, respectivamente, temos que

$$r_1+r_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

bem como

$$w_1+w_2=\frac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a}+\frac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a}=-\frac{b}{a},$$

b) Novamente, por um cálculo direto e de modo análogo ao ítem anterior, segue-se que

$$r_1r_2 \quad = \quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

bem como

$$w_1w_2 \quad = \quad \frac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

onde usamos que $\Delta = b^2 - 4ac$. □

Corolário 3.2 Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial quadrática, dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

então f admite raízes, se e somente se, o discriminante $\Delta := b^2 - 4ac$ é não-negativo.

Demonstração: Decorre diretamente da Proposição 3.1.

Encerramos a seção, apresentando um corolário que faz um estudo do sinal de uma função quadrática que admite duas raízes reais.

Corolário 3.3 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial quadrática, dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

que admite raízes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ com $r_1 < r_2$. Nestas condições, valem as afirmações:

(a) Se $a > 0$, então f é negativa em (r_1, r_2) e positiva em $\mathbb{R} \setminus [r_1, r_2]$.
(b) Se $a < 0$, então f é positiva em (r_1, r_2) e negativa em $\mathbb{R} \setminus [r_1, r_2]$.

Demonstração: Desde que r_1 e r_2 são raízes de f, podemos usar o algoritmo da divisão de polinômios para escrever

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2),$$

daí vamos tratar separadamente de cada ítem:

(a) Supondo que $x \in (r_1, r_2)$, tem-se que

$$x - r_1 > 0 \quad \text{e} \quad x - r_2 < 0,$$

logo $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2) < 0$ para todo $x \in (r_1, r_2)$. Agora se tivermos $x \in \mathbb{R} \setminus [r_1, r_2]$, obtemos

$$x - r_1, x - r_2 < 0 \quad \text{ou} \quad x - r_1, x - r_2 > 0,$$

ou seja,

$$(x - r_1)(x - r_2) > 0,$$

portanto $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus [r_1, r_2]$.

(b) Basta proceder de modo análogo ao primeiro ítem. $\square$

Observação 3.1 Desde que uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 - \Delta],$$

observa-se que esta atinge seu ponto crítico em $x_v = -b/2a$, chamado de "x"do vértice.

3.2 Método de Newton-Raphson em Funções Quadráticas

Nosso primeiro teorema, tem o objetivo de identificar todos os valores iniciais que garantem a convergência do método de Newton-Raphson aplicado às funções quadráticas.

Teorema 3.1 Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática com discriminante não-negativo e $k \in \mathbb{R} \setminus \{x_v\}$ uma constante, então a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

é convergente. Denotando por r_1 e r_2 as raízes de f com $r_1 \leq r_2$, temos que:

(a) Se $k \leq r_1$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge monotonamente para r_1.
(b) Se $k \geq r_2$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge monotonamente para r_2.

Demonstração:

Primeiramente, escrevemos f na forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

e definimos a função $F : \mathbb{R} \setminus \{x_v\} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

então usamos o algoritmo da divisão de polinômios para escrever

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2),$$

daí obtemos

$$x - F(x) = \frac{a(x - r_1)(x - r_2)}{2ax + b} = \frac{(x - r_1)(x - r_2)}{2x + ba^{-1}}. \tag{3}$$

Nesse momento, passamos a tratar separadamente os itens (a) e (b) para obter as conclusões enunciadas:

(a) Dado um número real $x \leq r_1$ arbitrário, vamos ter

$$x - r_1, x - r_2 \leq 0, \tag{4}$$

bem como $x < x_v = -b/2a$, implicando que

$$2x + \frac{b}{a} < 0. \tag{5}$$

Decorre da desigualdade (4) que

$$(x - r_1)(x - r_2) \geq 0,$$

implicando por (3) e (5) na desigualdade

$$x \leq F(x), \tag{6}$$

para todo número real $x \leq r_1$.

Novamente considerando $x \leq r_1$, observe que

$$F(x) - r_1 = \frac{(x - r_1)[a(x + r_2) + b]}{2ax + b} = \frac{(x - r_1)[(x + r_2) + b/a]}{2x + b/a}, \tag{7}$$

no entanto, a primeira relação de Girard nos garante que

$$(x + r_2) + \frac{b}{a} \leq r_1 + r_2 + \frac{b}{a} = 0,$$

Sabendo que $x \leq r_1$, podemos escrever

$$x - r_1 \leq 0,$$

daí obtemos por (5) e (7) a desigualdade

$$F(x) - r_1 \leq 0,$$

a qual combinada com (6), nos fornece

$$x \leq F(x) \leq r_1, \tag{8}$$

para todo número real $x \leq r_1$.

Escolhendo $x_1 = k \leq r_1$ arbitrário, usamos a desigualdade (8) para garantir que $F(x_1)$ está bem definido. Observe que a desigualdade anterior nos dá

$$k = x_1 \leq F(x_1) = x_2 \leq r_1,$$

então por hipótese de indução, supomos que x_n está bem definido e satisfaz

$$k \leq x_n \leq r_1,$$

para algum $n \geq 1$. De modo análogo ao primeiro passo de indução, podemos garantir a boa definição de $F(x_n)$, bem como a desigualdade

$$k \leq x_n \leq F(x_n) = x_{n+1} \leq r_1,$$

daí podemos afirmar que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está bem definida e a última desigualdade é satisfeita para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta maneira, resulta que a sequência é monótona não-decrescente e limitada, portanto convergente, implicando pela Observação 2.10 que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a raiz r_1.

(b) Dado um número real $x \geq r_2$ arbitrário, vamos ter

$$x - r_1, x - r_2 \geq 0, \tag{9}$$

bem como

$$x > x_v = -\frac{b}{2a},$$

ou ainda,

$$2x + \frac{b}{a} < 0. \tag{10}$$

Decorre da desigualdade (9) que

$$(x - r_1)(x - r_2) \geq 0,$$

implicando por (3) e (10) na desigualdade

$$x \geq F(x), \tag{11}$$

para todo número real $x \geq r_2$.

Mais uma vez considerando $x \geq r_2$, observe que

$$F(x) - r_2 = \frac{(x - r_2)[a(x + r_1) + b]}{2ax + b} = \frac{(x - r_2)[(x + r_1) + b/a]}{2x + b/a}, \tag{12}$$

no entanto, a primeira relação de Girard nos garante que

$$(x + r_1) + \frac{b}{a} \geq r_1 + r_2 + \frac{b}{a} = 0,$$

Sabendo que $x \geq r_2$, podemos escrever

$$x - r_2 \geq 0,$$

daí obtemos por (10) e (12) que

$$F(x) - r_2 \geq 0,$$

então combinando com (11), nos fornece

$$r_2 \leq F(x) \leq x, \tag{13}$$

para todo número real $x \geq r_2$.

Escolhendo $x_1 = k < r_2$ arbitrário, usamos a desigualdade (13) para garantir que $F(x_1)$ está bem definido. Observe que a desigualdade anterior nos dá

$$k = x_1 \geq F(x_1) = x_2 \geq r_2,$$

daí por hipótese de indução, supomos que x_n está bem definido e satisfaz

$$r_2 \leq x_n \leq k,$$

para algum $n \geq 1$. De forma análoga ao primeiro passo de indução, podemos assegurar a boa definição de $F(x_n)$ e a desigualdade

$$k \geq x_n \geq F(x_n) = x_{n+1} \geq r_2,$$

então podemos afirmar que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está bem definida e a última desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, conclui-se que a sequência é monótona não-crescente e limitada, portanto convergente, implicando pela Observação 2.10 que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a raiz r_2. $\square$

Ilustração do Teorema 3.1:

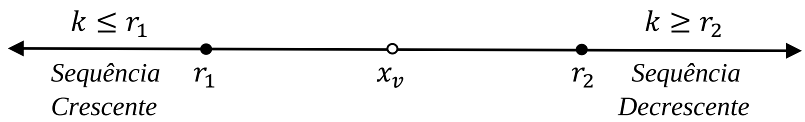

Figura 2 : Ilustração do Teorema 3.1

Na sequência, apresentamos um exemplo que evidencia o funcionamento do Teorema 3.1, anteriormente enunciado.

Exemplo 3.1 Verificar a convergência do método de Newton-Raphson aplicado à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$, baseado no Teorema 3.1.

Solução: Primeiro, observe que a fórmula de Bháskara nos fornece as raízes

$$r_1 = 1 \quad \text{e} \quad r_2 = 5,$$

enquanto o método de Newton-Raphson nos dá a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, \text{ se } n = 0 \\ \dfrac{x_n^2 - 5}{2x_n - 6}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

Nestas condições, vamos escolher $k_1 = -10 < r_1 = 1$ e $k_2 = 100 > r_2 = 5$ e construir a tabela a seguir:

Método de Newton-Rapshon		
Termos	$k_1 = -10$	$k_2 = 100$
x_1	$-10,00$	$100,00$
x_2	$-3,65385$	$51,52062$
x_3	$-0,62750$	$27,30153$
x_4	$0,63491$	$15,23306$
x_5	$0,97182$	$9,28002$
x_6	$0,99980$	$6,45848$
x_7	$1,00000$	$5,30753$
x_8	$1,00000$	$5,02049$
x_9	$1,00000$	$5,00010$
x_{10}	$1,00000$	$5,00000$

Nosso último teorema, mostra que a convergência do método de Newton-Raphson em funções quadráticas, ocorre para todo número real diferente da abscissa do vértice.

Teorema 3.2 Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática com discriminante não-negativo e $k \in \mathbb{R} \setminus \{x_v\}$ uma constante, então a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, \text{ se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

é convergente. Denotando por r_1 e r_2 as raízes de f com $r_1 \leq r_2$, temos que:

(a) Se $k < x_v$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para r_1.

(b) Se $k > x_v$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para r_2.

Demonstração:

(a) Diante do resultado provado no Teorema 3.1, basta verificar a convergência para

$$r_1 < k < x_v, \tag{14}$$

daí observe que

$$F(k) - r_1 = \frac{(k - r_1)[a(k + r_2) + b]}{2ak + b} = \frac{(k - r_1)[(k + r_2) + b/a]}{2k + ba^{-1}},$$

no entanto

$$(k + r_2) + b/a > (r_1 + r_2) + b/a = 0, \tag{15}$$

então decorre de (14) e (15) que

$$F(k) \leq r_1.$$

Nestas condições, temos que a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$y_n = x_{n+1}$$

satisfaz o Teorema 3.1 e portanto, converge monotonamente para r_1. Em particular, podemos concluir que

$$\lim x_n = \lim y_n = r_1,$$

que conclui a prova do primeiro ítem.

(b) Novamente o Teorema 3.1 nos garante que basta verificar a convergência para

$$-\frac{b}{2a} < k < r_2, \tag{16}$$

portanto

$$F(k) - r_2 = \frac{(k - r_2)[a(k + r_1) + b]}{2ak + b} = \frac{(k - r_2)[(k + r_1) + b/a]}{2k + b/a},$$

mas observe que

$$(k + r_1) + b/a < (r_1 + r_2) + b/a = 0, \tag{17}$$

então decorre de (16) e (17) que

$$F(k) \geq r_2.$$

Dessa forma, tem-se que a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$y_n = x_{n+1}$$

satisfaz o Teorema 3.1 e portanto, converge monotonamente para r_2. Em particular, concluímos que

$$\lim x_n = \lim y_n = r_2,$$

encerrando a prova do segundo ítem. $\square$

Ilustração do Teorema 3.2:

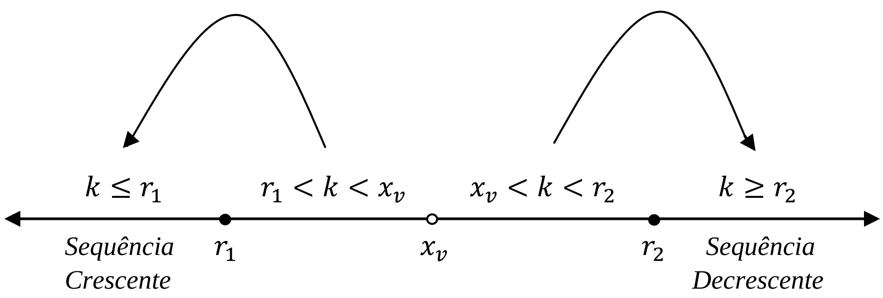

Figura 3 : Ilustração do Teorema 3.2

Exemplo 3.2 Verificar a convergência do método de Newton-Raphson aplicado à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$, baseado no Teorema 3.2.

Solução: Novamente, observe que a fórmula de Bháskara nos dáas raízes

$$r_1 = 1 \quad \text{e} \quad r_2 = 5,$$

enquanto o método de Newton-Raphson nos fornece a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, \text{ se } n = 0 \\ \dfrac{x_n^2 - 5}{2x_n - 6}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

Sendo assim, escolhemos $k_1 = 2 < x_v$ e $k_2 = 4 > x_v$ para construir a seguinte tabela:

Método Newton Rapshon		
Termos	$k = 2 < x_v$	$k = 4 > x_v$
x_1	$2,00$	$4,00$
x_2	$0,50000$	$5,50000$
x_3	$0,95000$	$5,05000$
x_4	$0,99939$	$5,00061$
x_5	$1,00000$	$5,00000$
x_6	$1,00000$	$5,00000$

Corolário 3.4 Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial quadrática com discriminante positivo e $r \in \mathbb{R}$ uma raiz de f, então a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, \text{ se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

convergente para r, sempre que

$$|k - r| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}.$$

Demonstração: Decorre diretamente dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Por fim, apresentamos mais dois exemplos que aplicam os Teoremas 3.1 e 3.2 em suas soluções.

Exemplo 3.3 (O número de ouro) Construir uma sequência de números racionais que converge para o número de ouro.

Solução: Devemos lembrar que o número de ouro é definido por

$$\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),$$

então

$$2\phi - 1 = \sqrt{5},$$

ou ainda

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

ou seja, ϕ é raiz da função quadrática $f(x) = x^2 - x - 1$.

Usando o Teorema 3.2, tem-se que a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, \text{ se } n = 0 \\ \dfrac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

converge para ϕ sempre que $k > x_v = 1/2$. Fazendo $k = 1$, obtemos os termos

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1, & x_2 = 2, & x_3 = 1,666666\ldots \\ x_4 = 1,619047\ldots, & x_5 = 1,618034\ldots \quad \text{e} & x_6 = 1,618033\ldots, \end{array}$$

portanto

$$\phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1,618033.$$

.

Exemplo 3.4 (Raiz quadrada) Construir uma sequência de números racionais que converge para a raiz quadrada de um número real positivo.

Solução: Observe que a raiz quadrada de um número real positivo $r \in \mathbb{R}$ é raiz da função quadráfica, dada por

$$f(x) = x^2 - r,$$

então usando o Teorema 3.2, segue-se que

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, \text{ se } n = 0 \\ \dfrac{x_n^2 + r}{2x_n}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

converge para $\sqrt{r}$ sempre que $k > x_v = 0$.

4 CONCLUSÃO

Diante dos resultados obtidos no presente trabalho, pode-se concluir que nas funções quadráticas reais que admitem duas raízes distintas, o método de Newton-Raphson converge para todos os valores iniciais diferentes da abscissa do vértice (ponto crítico da função). Deve-se ressaltar que a convergência monótona do referido método ocorre para todos os valores iniciais menores ou iguais à menor raiz ou para todos os valores iniciais maiores ou iguais à maior raiz, nunca ocorrendo para valores iniciais localizados entre as duas raízes.

REFERÊNCIAS

AMARAL, C.; SOUZA. M. e CATALAN, T. Um Estudo do Método de Newton Raphson, *Matemática e Estatística em Foco*, v. 3, p. 65-72, 2015.

ÁVILA, G. Análise matemática. 3 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BOYER, C. B. História da matemática. 3 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

CARVALHO, P. C. et al. A Matemática do Ensino Médio - Volume 1. 10 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GONÇALVES, A. Introdução à álgebra. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. Análise real - Volume 1, 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E. L. Curso de análise - Volume 1, 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LOPES, V. L. e RUGGIERO, M. A. G. Cálculo Numérico : Aspectos númericos e computacionais. 2 ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

OLIVEIRA, C. R. Introdução à análise funcional. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

ORNAY, E. Y.; SILVA Filho, J. F. O Método de Newton-Raphson Aplicado às Funções Quadráticas. Acarape, 2017 (Artigo em Elaboração).