



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA**

IVANILDO RUI BARBOSA

**ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE RESTRITA: ORIGENS
HISTÓRICAS, TEORIAS E CONEXÕES**

ACARAPE

2018

IVANILDO RUI BARBOSA

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE RESTRITA: ORIGENS HISTÓRICAS,
TEORIAS E CONEXÕES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Ciências da Natureza e Matemática com Habilitação em Física. Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga

ACARAPE - CE

2018

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Barbosa, Ivanildo Rui.

B195e

Electromagnetismo e relatividade restrita: origens, históricas, teorias e conexões / Ivanildo Rui Barbosa. - Redenção, 2018.
68f: il.

Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Ciências da Natureza e Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2018.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga.

1. Eletromagnetismo. 2. Relatividade (Física). 3. Física-Ensino e Pesquisa. 4. Física - Ensino superior. I. Título

CE/UF/BSC

CDD 530.071

IVANILDO RUI BARBOSA

ELETROMAGNETISMO E RELATIVIDADE RESTRITA: ORIGENS HISTÓRICAS,
TEORIAS E CONEXÕES

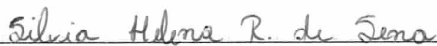
Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza e Matemática com Habilitação em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em: 29 / 05 / 2018.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Profa. Dra. Silvia Helena Roberto de Sena
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Aristéu Rosendo Pontes Lima
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a Deus, por força, saúde e coragem que sempre me deu na procura dos meus sonhos. A toda a minha família, meus amigos, meus colegas da turma de 2014.1, mas em especial aos meus pais, Rui e Anita, pelo apoio sempre incondicional que me deram, mesmo longe de casa.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente gostaria de agradecer a Deus pela vida, saúde, coragem e determinação que me concedeu na procura dos meus objetivos e também pela possibilidade que me proporcionou de alcançar essa conquista.

Aos meus pais, Rui António Barbosa e Anita da Conceição Sanca; aos meus irmãos; ao meu querido amigo Nico Nicolau Mendes e aos demais familiares pelo apoio.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio durante estes longos quatros anos longe da família.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga, por numerosos momentos que se disponibilizou para me orientar neste trabalho, onde sempre demonstrou uma competência extrema e admirável. Agradeço no fundo do meu coração por esforços feitos para que este trabalho fosse terminado com sucesso.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima e a Profa. Dra. Silvia Helena Roberto de Sena, curiosamente o meu primeiro e último professores de cadeiras de Física, pelo tempo e pelas valiosas colaborações e sugestões.

Ao Brasil e ao povo brasileiro principalmente do Estado de Ceará pela estada, durante estes quatros anos maravilhosos da minha vida e de muitas conquistas pessoais. À universidade da Integração Intenacional da Lusofonia Afro-Brasileira, UNILAB, por oportunidade que me deu de realizar o meu sonho de ser um Graduado em Física.

Aos meus colegas e amigos da entrada 2014.1, especialmente aos que sempre estiveram juntos. De modo especial aos amigos que se tornaram irmãos durante meu trajeto do curso, Edson Xavier Batista da Silva, Franklin Cá, Luís Campili Pereira, Júnior Djú, Luiz Távora da Silva Filho, Rudilson Manuel Ié, Rodolfo Ferreira de Oliveira e Paulo Ricardo Gonçalves Pereira, meu obrigado para vocês.

Aos colegas e amigos do grupo de estudo avançados de Física, Pedro Henrique Ferreira de Oliveira, Wellisson Pires Lima e Antônio Isael Paz Pires, este último que de modo geral nos tornamos camaradas, meu muito obrigado pelas oportunidades que sempre me deram.

Por último, mas não menos importante, quero aproveitar também essa oportunidade para agradecer ao Programa Bolsa Pulsar e aos Tutores Sêniores de Curso de Ciências de Natureza Matemática por diversas possibilidades que me deram para estar onde estou hoje.

A todos os que me apoiaram direta ou indiretamente sei que são muitos, mas não tem como mencionar o nome de todos vocês, minha mais profunda gratidão.

*“Não faças amanhã o sinônimo de nunca,
nem o ontem te seja o mesmo que nunca.
Teus passos ficaram. Olhes para trás... mas
siga em frente pois há muitos que precisam
que chegues para poderem seguir-te.”*

Charles Spencer Chaplin

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar as conexões entre a Teoria do Eletromagnetismo e a Teoria da Relatividade Restrita através de abordagens históricas, teóricas bem como através de aplicações. Essas duas teorias Físicas têm profundas relações, as quais são raramente abordadas nos livros didáticos da Graduação que esquecem muitas vezes que a Teoria da Relatividade surgiu na tentativa de corrigir o problema sobre movimento relativo do éter que era assunto do Eletromagnetismo. A Teoria do Eletromagnetismo é a responsável pelos estudos das propriedades magnéticas e elétricas das partículas, isto é, relação entre as forças da eletricidade e do magnetismo, enquanto a Teoria da Relatividade Restrita é responsável pelo estudo dos movimentos dos corpos em altas velocidades (mais de 10% da c , onde $c = 3 \times 10^8 m/s$), em referencial inercial. A metodologia usada para investigar essas conexões foi a revisão bibliográfica de muitos livros e artigos que tratam das histórias, teorias e aplicações das duas teorias. Nas abordagens históricas foram resgatadas as suas evoluções desde os primórdios, começando de Tales Mileto até Maxwell, passando por Einstein e chegando até os dias atuais. Na abordagem teórica, realizamos uma revisão e um aprofundamento das duas teorias, buscando sempre que possível estabelecer essas relações. Ao longo dessas abordagens foram observadas numerosas conexões que vão desde as bases históricas, passando pela teoria e seguindo até as aplicações. Desse modo, esse trabalho de Conclusão de Curso pode suprimir uma carência formativa de diversos estudantes de Graduação em Física.

Palavras-chave: Eletromagnetismo. Relatividade Restrita. Abordagens históricas. Abordagens teóricas.

ABSTRACT

The present work aims to study the connections between the Theory of Electromagnetism and the Theory of Restricted Relativity through historical, theoretical and as an application. These two Physical theories have deep relations which are seldom covered in the didactic books of Graduation, which they often forget that the Theory of Relativity arose in the attempt to correct the problem about movement relative of the ether which was the subject of Electromagnetism. The Theory of Electromagnetism the responsible for the studies of the magnetic and electric properties of the particles, that is, relationship between the forces of electricity and magnetism, while the theory of relativity Restricted and responsible for the study of body movements at high velocities (more than 10% of c , where $c = 3 \times 10^8 m/s$), in inertial frame. The methodology used to investigate these connections was the bibliographic review of many books and articles that deal with the histories, theories, and applications of the two theories. In historical approaches his evolutions were rescued from the earliest days, starting from Tales Mileto up to Maxwell, passing through Einstein and even up to the present day. In the theoretical approach, we carry out a revision and a refinement of the two theories, always seeking possible to establish such relationships. Throughout these approaches, numerous connections that go from the historical bases, going through theory and following the applications. In this way, this Concluding Course work can suppress a training of several undergraduate students in Physics.

Keywords: Electromagnetism. Restricted Relativity. Historical approaches. Theoretical approaches.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Campo magnético terrestre	14
Figura 2 – Esquema de pilha de Volta	16
Figura 3 – Interação entre cargas fontes e carga de prova	19
Figura 4 – Linhas de Campos	21
Figura 5 – Linhas de Campo saindo da carga positiva e chegando na carga negativa	22
Figura 6 – Linha de campos entre dois pontos	24
Figura 7 – Fios pendurados no teto, ligados a uma bateria.	25
Figura 8 – Distribuição volumétrica de correntes.	28
Figura 9 – Ilustração do experimeno de Michael Faraday.	31
Figura 10 – Mudança de referencial	34
Figura 11 – Aparato de Michelson e Morley	36
Figura 12 – Referenciais S e S'	37
Figura 13 – Simultaneidade dos eventos	40
Figura 14 – Diferenças de tempo nos dois referenciais	41
Figura 15 – Contração de Lorentz	42
Figura 16 – Espira de fio em um vagão.	49
Figura 17 – Séries de cargas positivas e negativas.	50
Figura 18 – Capacitor de placas paralelas alinhado com o plano xz	52
Figura 19 – Capacitor de placas paralelas alinhado com o plano yz	54
Figura 20 – Sistema de três referenciais, S_0, S, \bar{S}	55
Figura 21 – Capacitor de placas paralelas alinhado com o plano xy	56
Figura 22 – Um solenóide longo.	57
Figura 23 – Sistema de coordenadas contendo um campo magnético uniforme na direção z para $x \geq 0$	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Componentes da velocidade no referencial S'	44
Tabela 2 – Componentes da velocidade no referencial S	45

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO HISTÓRICA	13
2	ELETRODIÂMICA CLÁSSICA	19
2.1	Eletrostática	19
2.1.1	Lei de Coulomb	19
2.1.2	Campo Elétrico	20
2.1.3	Linha de Campo, Fluxo e lei de Gauss	21
2.1.4	Divergente e Rotacional de \vec{E}	23
2.2	Magnetostática	24
2.2.1	Campo Magnético	24
2.2.2	Força Magnética	25
2.2.3	Correntes Estacionárias	26
2.2.4	Lei de Biot-Savart	27
2.2.5	Divergente e Rotacional de \vec{B}	28
2.2.6	Força Eletromotriz (fem)	30
2.2.7	Lei de Faraday	30
2.2.8	Equações de Maxwell	32
3	RELATIVIDADE RESTRITA	34
3.1	Invariância de Galileu	34
3.2	Experimento de Michelson e Morley	35
3.3	Postulados de Einstein	36
3.4	A transformação de Lorentz	37
3.5	A Geometria da Relatividade	39
3.5.1	A Relatividade da Simultaneidade	39
3.5.2	A Dilatação do Tempo	41
3.5.3	A Contração de Lorentz	42
3.6	A Mecânica Relativística	43
3.6.1	A lei relativística de composição de velocidades	43
3.6.2	Momento relativístico	44
3.6.3	Energia relativística	46
3.7	A Dinâmica Relativística	48
4	ELETRODINÂMICA RELATIVÍSTICA E APLICAÇÕES	49
4.1	O Magnetismo como um fenômeno relativístico	49
4.2	Como os campos se transformam	52
4.3	Aplicações	58
4.3.1	Para região $x \geq 0$ onde existe campo magnético uniforme na direção \hat{k} ($\vec{B} = B_0\hat{k}$)	58

4.3.2	Para região $x \geq 0$ onde existe campo elétrico uniforme na direção \hat{j} ($\vec{E} = E_0\hat{j}$)	62
5	CONCLUSÕES	64
	REFERÊNCIAS	66

1 INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Desde os primórdios, o homem sempre teve a curiosidade sobre a natureza e dos relatos históricos, ele sempre foi atrás das respostas para explicar tais curiosidades. Na tentativa de explicá-las surgiram vários campos de conhecimento que ajudam e têm ajudado a humanidade.

Um dos primeiros campos do conhecimento a surgir foi a Física que na época era conhecida como *Filosofia Natural*, pois ela analisava os fenômenos naturais de forma mais racional, deixando de fora explicações que se baseavam nas atividades espirituais ou divinas. E as suas explicações racionais muitas vezes, ela é confundida com outras áreas do conhecimento que se assemelhava em alguns aspectos, com a Matemática, a Química, a Biologia e a Astronomia [1].

As suas explicações racionais passavam de civilização em civilização começando desde os povos do Antigo Egito, da Suméria, da Babilônia, da Grécia, da Roma Antiga até do Império Songai[2]. Ao longo desses percursos houve muitas mudanças nesses conhecimentos e isso levou o aparecimento de sub-áreas deste grande campo de conhecimento que é a Física, como por exemplo, a Mecânica, a Termologia, a Ondulatória, a Acústica, a Ótica, o Eletromagnetismo (Magnetismo, Eletricidade), a Relatividade (Restrita e Geral), a Mecânica Quântica, a Mecânica Estatística, entre outros. O objetivo deste trabalho é resgatar as histórias e as teorias das duas áreas da Física, o Eletromagnetismo e a Relatividade Restrita, evidenciando suas conexões.

Essa aventura começou com o TALES de Mileto (624 a.C.-550 a.C.) no século VI a.C. quando realizou primeiros estudos do eletromagnetismo numa região da Grécia antiga chamada magnésia [3]. Ele estava observando a capacidade estranha que pedrinhas conhecidas hoje como magnetitas¹ ou tetróxido de triferros tinham de atraírem umas às outras e também ao ferro. E uma das primeiras aplicações do magnetismo no dia-a-dia registrada na história foi feita pelos chineses no século I a.C., na agulha da bússola que eles usavam para navegar [3]. A agulha da bússola que era imã se orientava com o campo magnético da Terra e permitia a eles conhecer as direções.

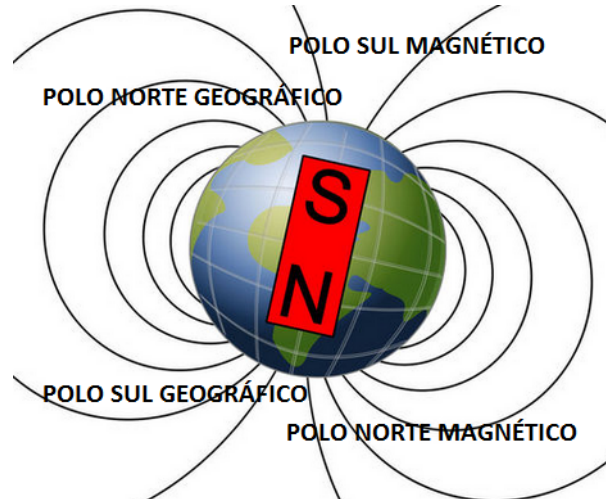
Passado muito tempo, os estudiosos começaram a apresentar resultados sobre as outras peculiaridades dos imãs se baseando em fatos experimentais, e as explicações só começaram aparecer em 1269, quando um obscuro autor medieval chamado Petrus PEREGRINUS (em latim) ou Pierre de MARICOURT (seu provável nome em francês) escreveu uma importante carta sobre os imãs [4]. Nessa carta, ele foi capaz de mostrar e descrever que cada imã tinha dois polos que os denominou de polo sul e polo norte. E ainda conseguiu mostrar que os polos semelhantes se repelem e polos opostos se atraem, que é outra característica importante dos imãs. No entanto, não conseguiu explicar porque

¹A Magnetita é um mineral magnético formado pelos óxidos de ferro II e III (FeO e Fe_2O_3), cuja fórmula química é Fe_3O_4

os imãs se orientavam com o campo magnético terrestre.

Tal explicação só veio em 1600, quando William GILBERT (1544-1603) conseguiu mostrar que a razão da agulha de uma bússola se orientar nas direções certas da Terra, é porque a Terra é também um imã permanente [4], Figura 1.

Figura 1: Campo magnético terrestre



Fonte: <http://www.imaeneodimio.com.br/imas-permanentes/imas-e-campo-magnetico/>
Acesso em 13 de Abril de 2018

Em 1729, um histórico físico experimental inglês de nome Stephen GRAY (1696-1736) realizou uma série de experimentos que o levaram a muitas descobertas interessantes. Descobriu que tinha dois tipos de substâncias, os condutores e os isolantes, e mostrou que esses condutores tinham propriedades de atrair alguns corpos colocados em suas proximidades, fato conhecido hoje como indução elétrica, e também mostrou que a eletricidade podia se deslocar de um corpo para outro se unimos esses corpos por um fio [5].

Quase uma década depois, em 1737, o Charles François de Cisternay DU FAY (1698-1739) introduziu o termo atração e repulsão no eletromagnetismo para descrever as propriedades que alguns corpos tinham, e foi também ele que constatou que tinha dois tipos de eletricidades: eletricidade resinosa² e eletricidade vítrea³[5].

Em 1750, Benjamin FRANKLIN (1706-1790) propôs uma teoria de que a carga era um fluido contínuo. Baseado nessa teoria, ele convencionou pela primeira vez os termos carga positiva (próton) e carga negativa (elétron), na eletricidade [5]. Convenção utilizada até hoje.

A partir daí, Franklin realizou alguns experimentos elétricos onde foi possível observar que as cargas de mesmo sinal se repelem e de sinal oposto se atraem, e através desse estudos ele chegou á conclusão de que as cargas se conservam, e que foi comprovado tanto macroscopicamente quanto microscopicamente, e passou a ser conhecida como lei

²A eletricidade resinosa é aquela eletricidade produzida pelo atrito de substância como âmbar, borracha, etc...

³A eletricidade vítrea é aquela eletricidade produzida pelo atrito de substância como vidro ou mica.

da conservação das cargas, que pode ser enunciado da seguinte forma: **a carga elétrica total num sistema isolado se conserva, isto é, a soma algébrica das cargas positivas e negativas, em qualquer momento deve ser a mesma.** [6]

A ideia de *fluido contínuo* proposto por Franklin perdurou muito tempo até que Robert MILLIKAN (1868-1953) descobriu que na realidade o fluido elétrico não era contínuo, mas sim, um múltiplo inteiro de uma carga fundamental e [6],

$$q = ne, \tag{1.0.1}$$

onde $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, e e é a carga elementar, com o valor constante de $1,60 \times 10^{-19} C$, sendo uma das constantes mais importantes da natureza.

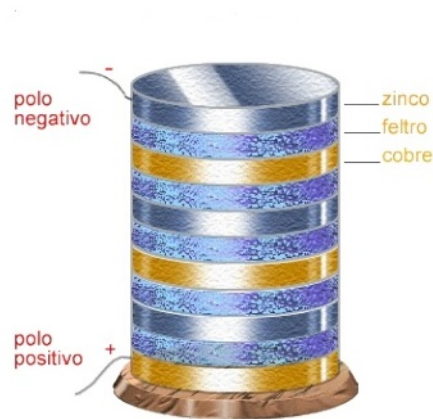
No mesmo ano das descobertas de Franklin, um físico inglês chamado Jonh MICHAEL (1724-1793), um dos cientistas mais esquecidos da História, propôs pela primeira vez a lei inversa do quadrado da distância para a força entre os pólos magnéticos, e depois dessa publicação surgiram várias teorias tentando explicar esse fluido, e tem até algumas que tentaram comparar com os fluidos elétricos. A comprovação experimental só foi feita, em 1785, por Charles Augustin COULOMB (1736-1806) usando a balança de torção, ele conseguiu formulando assim a lei de inverso do quadrado, conhecida como a *Lei de Coulomb* em homenagem ao seu trabalho [5].

Os experimento do eletromagnetismo não ficaram só nos objetos carregados, mas também foram feitos nos seres vivos. O primeiro a realizar experimentos elétricos nos animais foi um físico italiano chamado Luigi GALVANI (1737-1798), em 1780. Ele tinha deixado um rã dessecada na mesa onde estava realizando um experimento de gerador eletrostático, ao verificar o outro experimento, um dos seus ajudantes sem saber tocou a ponta de um bisturi nos nervos internos da rã, e observaram que as patas da rã se contraía. Galvani repetiu o mesmos experimento com as condições mais rígoras, e conclui que *os músculos e células nervosas são capazes de produzir eletricidade*, e este estudo bioeletricidade passou a ser chamado de galvanismo [7].

No mesmo ano da descoberta de Galvani, o outro físico italiano de nome Alessandro Count VOLTA (1745-1827) inventou uma bateria elétrica conhecida como *pilha voltaica*, que foi primeiro dispositivo gerador de eletricidade através de reação químicas entre zinco e cobre. Volta queria mostrar que não era necessário músculos de animais para produzir eletricidade, por isso, realizou experimento para demonstrar que na realidade a corrente aparecia devido a interação entre metais. O experimento de Volta consistia no seguinte: colocar uns sobre os outros, um disco de prata, um disco de zinco e um disco de papelão molhado em uma solução de água saturada de sal. Ele fez esse processo sucessivamente até ficar bem alto, por isso o nome de pilha. Em seguida, ligou a extremidade da pilha em um condutor externo, conseguindo assim transformar energia química em energia elétrica, gerando a corrente [7]. Esse foi um dos experimento que mais impulsionou

o mundo científico, pois pela primeira vez na história o homem conseguiu controlar as condições para que se gere uma certa corrente elétrica.

Figura 2: Esquema de pilha de Volta



Fonte: <https://pt.slideshare.net/larissacindra54/pilhas-prof-thiago-mendonca>
Acesso em 5 de Maio de 2018

A partir daí levou muito tempo para que a eletromagnetismo voltasse a ter novas descobertas, que aconteceu só em 1819-1820 quando um cientista Dinamarquês Hans Christian OERSTED (1777-1851) que na época lecionava a eletricidade e magnetismo na Universidade de Copenhague desejava fazer um experimento na sala de aula. Ele fez passar uma corrente galvânica sobre um fio localizado sobre agulha magnética perpendicular à corrente e não observou nenhum efeito [8], depois de terminar a aula, ele passou a corrente galvânica paralelamente à agulha e observou uma coisa estranha: a agulha desviou para um lado e ao inverter a corrente ela desviou para outro lado.

A partir disso, deu-se início a uma era bombástica de experimentos relacionados ao eletromagnetismo. Pois a eletricidade era considerada um campo muito diferente do magnetismo, mas com esse experimento de Oersted, começou a se pensar nas suas interações.

Depois da publicação dos resultados de experimentos de Oersted em julho de 1820, sobre a relação entre eletricidade e magnetismo, Jean-Baptiste BIOT (1774-1862) e Félix SAVART (1791-1841) conseguiram descrever e encontrar a equação que explicaria o experimento de Oersted [9], pois o experimento de Oersted não fornecia o campo magnético produzido pelo correntes elétricos matematicamente.

Algum tempo depois, André-Marie AMPÈRE (1775-1836) descobriu que dois fios condutores atravessados por uma corrente elétrica exercem ações recíprocas um sobre o outro [8].

Em 1832, Michael FARADAY (1791-1867) e Joseph HENRY (1797-1878) independentemente descobriram que quando campo magnético varia no tempo induz um campo elétrico [6]. Alguns anos depois, o James Clerk MAXWELL (1831-1879) mostrou que o recíproca também é verdadeira, isto é, o campo elétrico variando no tempo induz

um campo magnético, formulando assim a teoria clássica completa do eletromagnetismo [8].

A teoria do eletromagnetismo de Maxwell foi toda construída sobre a hipótese de um fluido imaginário e absoluto chamado éter em que todos os fenômenos físicos o tinha como referencial estático.

Mas antes do eletromagnetismo, GALILEU Galilei (1564-1642) já tinha afirmado que era impossível perceber um movimento retilíneo uniforme de um referencial em relação ao outro referencial inercial, isto é, um experimento feito em um referencial que está em movimento retilíneo uniforme, não difere do mesmo experimento feito num referencial parado, isto foi conhecida com princípio de relatividade da mecânica.

Com os avanços nas pesquisas, alguns estudiosos começaram a descobrir que eletromagnetismo não concordava com a mecânica newtoniana em alguns aspectos. Um dos primeiros estudiosos que descobriram essa discordância foi Hendrik Antoon LORENTZ (1853-1928) ao tentar explicar a existência de éter como um meio onde a luz se propaga [5].

As discordância entre o princípio de relatividade da mecânica, o eletromagnetismo e as leis da mecânica newtoniana levava os cientistas a entender que uma das três teorias tinha que ser corrigida, isto é, existiam três hipóteses [10]:

I) A mecânica newtoniana e as equações de Maxwell são válidas, mas o princípio da relatividade não se aplica a todas as leis físicas.

II) A mecânica newtoniana é válida e o princípio da relatividade se aplica a todas as leis físicas, nesse caso, as equações de Maxwell devem ser modificadas.

III) O princípio da relatividade se aplica a todas as leis físicas e equações de Maxwell é válida, nesse caso, a mecânica newtoniana deve ser modificadas.

Os experimentos feitos na época comprovava que o último item era o correto. Na tentativa de explicar essas discordâncias apareceu a teoria da relatividade restrita também conhecida como relatividade especial que foi formulada por Albert EINSTEIN (1879-1955) no início do século XX, exatamente no ano 1905, mas que conta com as contribuições de muitos outros autores antes dele.

Pegando a discordância entre eletromagnetismo com mecânica newtoniana, e a refutação da existência de éter pelo experimento de Albert Abraham MICHELSON (1852-1931) e Edward Williams MORLEY (1838-1923), Einstein formulou a teoria da relatividade baseando nos dois postulados, o princípio da relatividade restrita e princípio de constância da velocidade da luz. Esta formulação está apresentada em um de seus artigos intitulado *eletrodinâmica dos corpos em movimentos* publicada em 1905 na revista alemã *Annalen der Physik*, solucionando assim um dos maiores problemas dos físicos no século XIX.

Motivado pela escassez de estudos realizados sobre as relações entre teoria da relatividade restrita e teoria do eletromagnetismo e das suas poucas discussões realizadas

sobre essa temática na graduação, neste trabalho propomos a estudar as relações entre essas duas teorias para que possamos entender que relatividade restrita não é uma teoria desligada do eletromagnetismo e vice-versa.

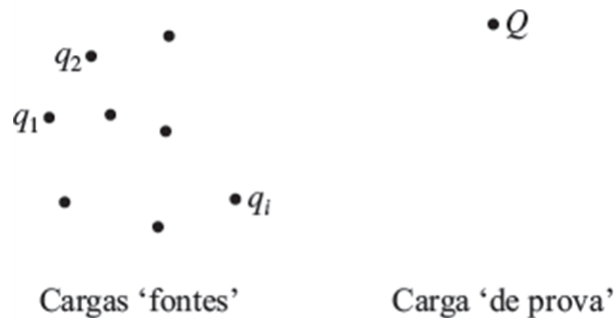
Desse modo, no próximo capítulo, propomos discutir os assuntos relacionados à eletrostática e a magnetostática para podermos escrever as quatro equações de Maxwell. No capítulo 3, será abordado a revisão sobre a relatividade, onde abordaremos as suas geometrias e algumas correções da mecânica newtoniana. Por fim, o capítulo 4, será dedicado ao objetivo do trabalho, isto é, estudar as conexões entre a teoria do eletromagnetismo e a teoria da relatividade restrita em forma de aplicações.

2 ELETRODIÂMICA CLÁSSICA

2.1 Eletrostática

Imagine que temos um conjunto de **cargas fontes** q_1, q_2, \dots, q_n estacionárias, como estão dispostas na Figura 3, e em seguida foi aproximada a elas uma **carga prova** Q . O problema fundamental da eletrostática é saber qual será a força que as cargas fontes (cargas estacionárias) exercem sobre uma carga prova [11].

Figura 3: Interação entre cargas fontes e carga de prova



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

Para calcular essa força usa-se o **princípio da superposição e a lei de Coulomb**. O princípio da superposição diz o seguinte: *a interação entre duas cargas não é influenciada pela presença de uma terceira*, isto é, a força resultante que age sobre a carga Q é a soma das forças que a carga q_1 exerce sobre Q mais a força de carga q_2 sobre Q , assim sucessivamente até a última carga q_n , de tal modo que

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (2.1.1)$$

Mas como podemos calcular cada uma das forças do lado direito da equação (2.1.1)? Para isso, vamos usar uma lei experimental conhecida como a **lei de Coulomb** para determinar separadamente cada uma das forças.

2.1.1 Lei de Coulomb

Essa lei diz o seguinte: *a força que age sobre a carga Q devido a uma das cargas, em repouso, é diretamente proporcional ao produto das duas cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas* [11]. Matematicamente temos

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.1.2)$$

onde ε_0 é a constante de proporcionalidade conhecida como permissividade elétrica do meio, e r é a distância entre as duas cargas. Onde o valor numerico de ε_0 é

$$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} C^2 / Nm^2.$$

A equação (2.1.2) é chamada lei de Coulomb em homenagem a Charles-Augustin de Coulomb, que a propôs em 1785, com base em experimentos que o mesmo realizou.

2.1.2 Campo Elétrico

Desta vez, vamos considerar várias cargas pontuais q_1, q_2, \dots, q_n , que estão às distâncias r_1, r_2, \dots, r_n da carga prova Q [11]. De acordo com o princípio da superposição mais a lei de Coulomb, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \vec{F}_r &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2 Q}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_n Q}{r_n^2} \hat{r}_n \\ \vec{F}_r &= Q \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_n}{r_n^2} \hat{r}_n \right). \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

E por definição, temos

$$\vec{F}_r \equiv Q\vec{E}. \quad (2.1.4)$$

Comparando as equações (2.1.3) e (2.1.4), então pode-se observar que \vec{E} é

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots + \frac{q_n}{r_n^2} \hat{r}_n \right), \quad (2.1.5)$$

onde \vec{E} é o **campo elétrico** gerado pelas cargas fontes. Ele depende da posição onde se encontra o observador, isto é, ele é uma função de \vec{r} , contudo não depende da carga de prova.

Se no lugar de um conjunto de cargas fontes, tivéssemos somente uma carga pontual q na origem, então o campo elétrico ficaria

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (2.1.6)$$

Por outro lado, se tivéssemos um conjunto de cargas fontes muito próximas, podemos considerar como se fosse uma distribuição de cargas contínua, e para essa condição usa-se outra abordagem. De fato, podemos encontrar três tipos de distribuição contínuas de cargas.

1. **Distribuição linear de carga:** aqui a densidade linear de cargas $\lambda(\vec{r})$ pode variar de um ponto para outro ponto ao longo de uma curva ou linha, e o campo será

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}')}{r^2} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\vec{l}', \quad (2.1.7)$$

onde dl' é um elemento de comprimento ao longo de uma curva ou linha.

2. **Distribuição superficial:** neste caso, a densidade superficial de cargas $\sigma(\vec{r})$, pode variar de um ponto para outro ao longo de uma superfície, e o campo será

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{r^2} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\vec{a}', \quad (2.1.8)$$

onde da' é um elemento de área da superfície.

3. **Distribuição volumétrica:** aqui, a densidade volumétrica de cargas $\rho(\vec{r})$, pode variar de um ponto para outro ponto no espaço, e o campo será

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r^2} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\tau', \quad (2.1.9)$$

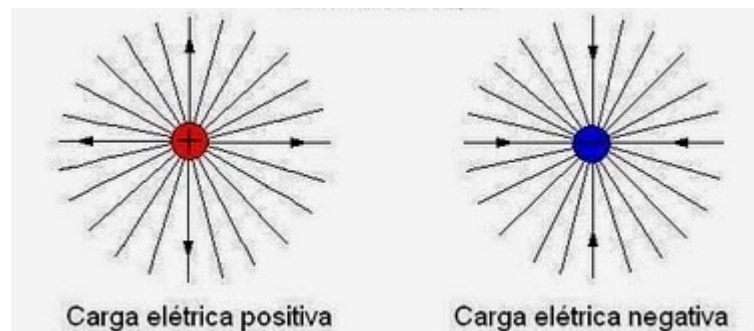
onde $d\tau'$ é um elemento de volume. Essa é o caso mais geral, as outras duas distribuições são casos particulares dela.

Essas são as três formas de achar o campo elétrico quando temos uma distribuição contínua de carga.

2.1.3 Linha de Campo, Fluxo e lei de Gauss

A ideia de campo elétrico foi introduzida no século XIX, por Michael Faraday. Ele imaginava que próximo de um corpo carregado encontravam-se linhas de força [6], Figura 4, que hoje são conhecidas como *linhas do campo elétrico*.

Figura 4: Linhas de Campos



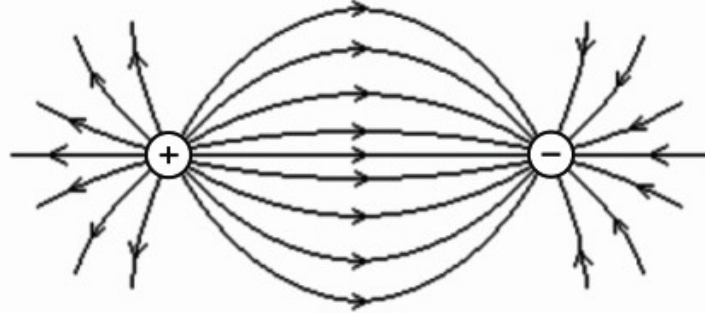
Fonte: <http://superteslas.blogspot.com.br/2014/07/campo-eletrico-linhas-de-campo.html>
Acesso em 13 de Abril de 2018.

As linhas do campo entram na carga negativa e saem na cargas positivas. Isso fica de maneira mais observável na Figura 5, neste caso, as linhas do campo começam nas cargas positivas, e termina nas cargas negativas.

Para medir o número de linhas que atravessam uma superfície fechada, usa-se a seguinte equação:

$$\Phi \equiv \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a}, \quad (2.1.10)$$

Figura 5: Linhas de Campo saindo da carga positiva e chegando na carga negativa



Fonte: <http://educacao.globo.com/fisica/assunto/eletromagnetismo/forca-eletrica-e-campo-eletrico.html>
Acesso em 13 de Abril de 2018.

onde Φ é chamado de **fluxo**, e serve para medir linhas de campo que atravessam uma superfície fechada.

Agora, considere uma superfície esférica de raio r com uma carga pontual q no centro. De acordo com a equação (2.1.10), o fluxo que passa através dessa esfera será

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{r}) = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.1.11)$$

Curiosamente o resultado (equação (2.1.11)), não depende do raio da esfera, mas será que isso faz sentido? Faz sim, porque a área aumenta com r^2 e o campo elétrico diminui com $1/r^2$, deste modo, o produto entre os dois dará sempre constante, e em qualquer superfície, o fluxo que atravessa essa superfície será sempre $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Se no lugar de uma carga pontual na origem tivermos uma porção de cargas espalhadas em torno da origem. E segundo o princípio da superposição o campo elétrico total será a soma vetorial de todos os campos elétricos individuais. Desse modo,

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (2.1.12)$$

Da equação do fluxo temos que,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^n \left(\int \vec{E}_i \cdot d\vec{a} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0}, \quad (2.1.13)$$

que pode ser reescrita como

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}. \quad (2.1.14)$$

Esta é a forma **integral da lei de Gauss**, onde Q_{enc} é a carga total encerrada pela superfície, e também é conhecida como divergente de campo elétrico. A equação (2.1.14) pode ser também escrita na sua forma diferencial, basta aplicamos o teorema do

divergente,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau . \quad (2.1.15)$$

Sabe-se que a carga encerrada Q_{enc} pode ser escrita em termos da densidade de carga ρ em um volume, da seguinte forma:

$$Q_{enc} = \int_V \rho d\tau . \quad (2.1.16)$$

Dessa forma, a lei de Gauss fica,

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau . \quad (2.1.17)$$

Da equação (2.1.17) observa-se que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (2.1.18)$$

Esta última equação é a *lei de Gauss na forma diferencial*. A lei de Gauss sempre será válida, mas nem sempre útil. Se ρ não for uniforme, a simetria terá grande importância, pois de acordo com a lei de Gauss na sua forma integral, se não existe a simetria, você não teria certeza se \vec{E} está na mesma direção com $d\vec{a}$. Essa lei é uma forma mais sofisticada da lei de Coulomb.

2.1.4 Divergente e Rotacional de \vec{E}

Como já encontramos o divergente de campo elétrico, equação (2.1.14), então vamos preocupar á encontrar uma expressão para o rotacional de \vec{E} , vamos considerar uma carga pontual que está centrada na origem, e como ilustra a Figura 6. O nosso problema aqui é saber qual será a integral de linha do campo elétrico de a até b , ou seja, queremos calcular,

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (2.1.19)$$

Em coordenadas esféricas, temos

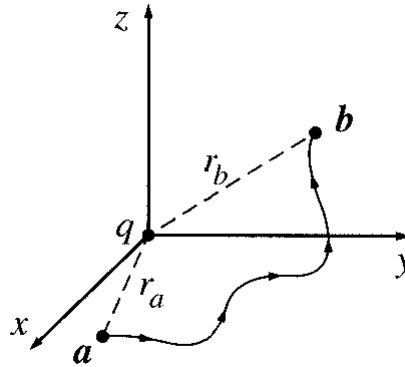
$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\varphi} . \quad (2.1.20)$$

Substituindo as equações (2.1.6) e (2.1.21) na equação (2.1.20), encontramos

$$\int_a^b \vec{E} \cdot \vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right) ,$$

onde r_a é a distância da origem ao ponto a , e r_b é a distância da origem ao ponto b . E a

Figura 6: Linha de campos entre dois pontos



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

integral em torno de um caminho fechado é zero, pois $r_a = r_b$, neste caso,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (2.1.21)$$

Usando teorema de Stokes, ficamos com

$$\oint_c \vec{E} \cdot \vec{l} = \oint_s (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{a} = 0.$$

Então, daqui pode-se concluir que,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (2.1.22)$$

Aqui só foi feita a demonstração para uma carga pontual centrada na origem, mas o resultado não faz qualquer referência a essa carga. Sendo assim, você pode escolher qualquer que seja coordenada o resultado será sempre o mesmo, de modo que não importa onde a carga está localizada.

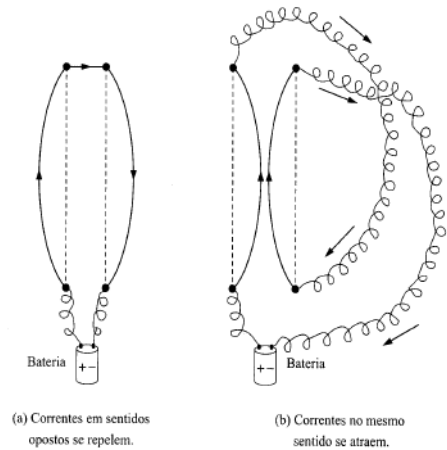
2.2 Magnetostática

2.2.1 Campo Magnético

Lembrando, de novo, que o problema básico da eletrodinâmica é quando temos um conjunto de cargas fontes q_1, q_2, \dots, q_n [11], e queremos saber qual é a força que eles exercem sobre uma carga prova Q . Caso as cargas fontes estejam em repouso, usa-se para isso a lei de Coulomb e princípio da superposição. Mas o que vai acontecer se as cargas estiverem em movimento? As abordagens serão as mesmas? Essas questões serão respondidas mais a frente.

Agora suponha que existem dois fios próximos um do outro, como mostra a Figura 7. Quando ligamos a corrente, ela sobe num dos fios e desce no outro, Figura 7 (a), os fios se afastam, ou seja, se repelem,

Figura 7: Fios pendurados no teto, ligados a uma bateria.



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

Entretanto, a força que age nestes dois fios não é de natureza elétrica já que os fios são eletricamente neutros. Para testar esta afirmação você pode colocar uma carga prova Q fixa, entre esses fios e vai observar que não vai ser atraído e nem repelido.

Mas se a corrente subisse pelos dois fios ao mesmo tempo Figura 7 (b), vai haver uma atração entre os fios, a força que age nestes dois fios não será de atração.

Na realidade a força responsável pela atração, figura 7 (b), ou repulsão, figura 7 (a), dos fios não é de natureza elétrica, mas sim de natureza magnética. A atração ou repulsão entre os fios é devido ao **campo magnético** gerado por dois fios, e as forças que estão agindo nos dois fios são **forças magnéticas**.

2.2.2 Força Magnética

Suponhamos que exista uma região com campo magnético uniforme, e passamos por ela uma carga Q com uma velocidade \vec{v} [11]. A pergunta é: Qual é a força que vai agir sobre essa carga Q ? A força que vai agir sobre esta carga será:

$$\vec{F}_{mag} = Q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.2.1)$$

A equação (2.2.1) é conhecida com a Lei de Lorentz, ela é um axioma⁴. Mas se existe o campo elétrico na mesma região onde existe campo magnético, a força líquida será

$$\vec{F} = \vec{F}_{ele} + \vec{F}_{mag} \quad (2.2.2)$$

$$\vec{F} = Q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]. \quad (2.2.3)$$

⁴Um axioma é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada verdade inquestionável e universalmente válida ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria.

Neste caso, será a soma vetorial algébrica de forças elétrica e magnética. Em uma região onde existe o campo magnético, qual será o trabalho exercida pela força magnética sobre uma carga Q que percorre uma quantidade $d\vec{l} = \vec{v}dt$? E de acordo com teorema de trabalho, temos

$$dW_{mag} = \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{l} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}dt = Q(\vec{v} \times \vec{v}) \cdot \vec{B}dt = 0. \quad (2.2.4)$$

De acordo com essa demonstração as forças magnéticas não realizam trabalho, a única coisa que ela pode fazer é alterar a direção da velocidade da partícula, sem mudar seu módulo.

2.2.3 Correntes Estacionárias

A *corrente* em um fio é a carga por unidade de tempo que passa por um determinado ponto. Matematicamente

$$\vec{I} = \lambda\vec{v}. \quad (2.2.5)$$

Mas o problema é, que carga está movendo? Benjamin Franklin acreditava que as duas cargas se moviam. Segundo ele as cargas positivas se moviam para direita, e as cargas negativas se moviam no sentido contrário (esquerda). Nesse caso, considera-se que a corrente será para direita, convenção utilizada até hoje. Mas na realidade as únicas cargas que movem são as cargas negativas, as cargas positivas não se movimentam em um fio metálico.

Quando esta carga flui por uma superfície, ela é descrita pela densidade superficial de corrente K

$$\vec{K} = \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}}. \quad (2.2.6)$$

E quando flui por uma região tridimensional, ela é descrita pela densidade volumétrica de corrente J

$$\vec{J} = \frac{d\vec{I}}{da_{\perp}}. \quad (2.2.7)$$

E para achar a corrente que flui nesta região tridimensional, basta manipular a equação (2.2.7) ficando com

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) d\tau. \quad (2.2.8)$$

Na equação (2.2.8), foi usado teorema de Gauss, e como a corrente em um fio é a carga por unidade de tempo que passa por um determinado ponto, e a carga é dada

por $q = \int \rho d\tau$, então

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) d\tau = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau. \quad (2.2.9)$$

O sinal negativo mostra que a carga flui para fora da superfície. E ao observar os dois membros da equação (2.2.9), podemos concluir que,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.2.10)$$

Esta é uma expressão matemática que descreve a conservação local de carga e essa equação é conhecida como **equação de continuidade**.

Da mesma forma que a **eletrostática** estuda as propriedades e o comportamento de **cargas estacionárias** que produzem campos elétricos constantes no tempo, a **magnetostática** estuda as propriedades e o comportamento de **correntes estacionárias** que produzem campos magnéticos constantes no tempo.

Na realidade, esse nome de corrente estacionária é um pouco complicado e infeliz, pois a corrente estacionária é produzida por carga em movimento e que muda de posição constantemente e, em algumas literaturas para, evitar esse nome são chamada de **fluxo contínuo** em vez de corrente estacionária.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (2.2.11)$$

O nome *estacionária* é devido a não mudança na sua magnitude com o tempo.

2.2.4 Lei de Biot-Savart

Depois da publicação dos resultados de experimentos de Hans Christian Oersted em julho de 1820, sobre a relação entre eletricidade e magnetismo, muitos cientistas começaram a procurar a forma de descrever esse fenômeno matematicamente, porque a pesquisa de Oersted se limitava uma descrição qualitativa dessa relação.

Os primeiros a conseguir descrever matematicamente esse fenômeno foram dois cientistas franceses, Jean-Baptiste Biot e Félix Savart [9]. A relação era da seguinte forma:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{I} \int \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.2.12)$$

Esta equação (2.2.12) passou a ser chamada de **Lei de Biot-Savart**. Ela descreve um campo magnético de uma linha de corrente estacionária e a sua integração é feita na direção do fluxo ao longo do caminho da corrente. A constante μ_0 e conhecida como *permeabilidade de espaço livre* e $d\vec{l}'$ é comprimento ao longo do fio.

A lei de Biot-Savart para correntes superficiais é dada por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da'. \quad (2.2.13)$$

E enquanto para correntes volumétricas é dada por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'. \quad (2.2.14)$$

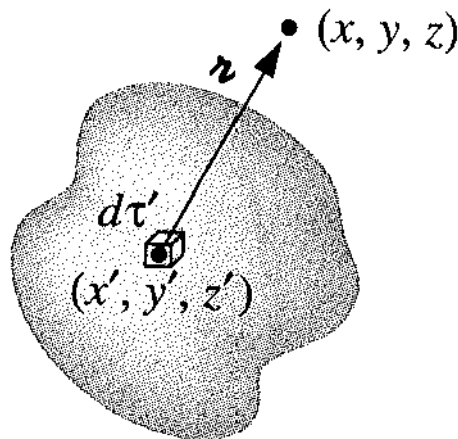
A lei de Biot-Savart tem a mesma importância para magnetostática como a lei de Coulomb tem para eletrostática.

2.2.5 Divergente e Rotacional de \vec{B}

A Figura 8, mostra campo magnético de uma distribuição volumétrica [11]. E de acordo com a lei de Biot-Savart vem

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'.$$

Figura 8: Distribuição volumétrica de correntes.



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

O \vec{B} é uma função de (x, y, z) , \vec{J} é uma função de (x', y', z') , $d\tau' = dx'dy'dz'$ e por ultimo $\vec{r} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}$.

A integral é sobre coordenadas com linhas e o divergente é nas coordenadas sem linhas, e aplicando o divergente na equação (2.2.14) fica,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} \right) d\tau'. \quad (2.2.15)$$

Aplicando a regra de produto no lado direito da equação (2.2.15), fica

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{\hat{r}}{r^2} (\vec{\nabla} \times \vec{J}) - \vec{J} \left(\vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right). \quad (2.2.16)$$

No primeiro membro do lado direito da equação (2.2.16) o $\vec{\nabla} \times \vec{J} = 0$, pois \vec{J} só depende das coordenadas com linhas, e o segundo termo também é $\vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = 0$.

Então pode-se concluir que,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.2.17)$$

É evidente que o $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, pois as linhas dos campos magnéticos não começam e nem terminam em lugar algum, logo o seu **divergente tem que ser nulo**.

Agora aplicando o rotacional na equação (2.2.14), temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} \right) d\tau'. \quad (2.2.18)$$

De novo, aplicando a regra de produto no lado direito da equação (2.2.18), encontramos

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \vec{J} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) - (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{r}}{r^2}.$$

A integral do segundo termo do segundo membro dará zero e o primeiro termo do segundo membro⁵ dará $4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$, então

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') 4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d\tau' = \mu_0 \vec{J}(r). \quad (2.2.19)$$

Esta equação nos fornece o rotacional do campo magnético, e também conhecida como **a lei de Ampère**, na sua forma diferencial. Usando o teorema de Stokes temos

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a}. \quad (2.2.20)$$

Usando a equação (2.2.8) da densidade volumétrica de corrente, temos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}. \quad (2.2.21)$$

Aqui, da mesma forma que a lei de Gauss é para a eletrostática a lei de Ampère é para magnetostática. Como a lei de Gauss era sempre válida e nem sempre útil, a lei de Ampère também o é. A aplicação da lei de Gauss era mais simples em determinadas simetrias (configuração de cargas), a lei de Ampère também fica mais fácil em certas

⁵Pode ver na página 36 do livro Eletrodinâmica de David J. Griffiths (2011), na seção 1.5.3.

configurações de correntes [11].

As simetrias que facilitam a lei de Ampère são:

1. Linhas retas infinitas;
2. Planos infinitos;
3. Solenóides infinitos;
4. Toróides.

Da mesma forma que a lei de Gauss era uma sofisticação da lei de Coulomb, a lei de Ampère é também a sofisticação da lei de Biot-Savart.

2.2.6 Força Eletromotriz (fem)

A *força eletromotriz* (fem) de um gerador em dispositivo tem a função de realizar o trabalho sobre as cargas elétricas que passam através deles com objetivo de reestabelecer a voltagem nos seus terminais. Matematicamente é definida como,

$$\varepsilon \equiv -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.2.22)$$

Esta equação é conhecida como **regra fluxo**, e o fluxo do campo magnético é definido como

$$\Phi \equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{a}. \quad (2.2.23)$$

A *força eletromotriz* pode ser utilizada para calcular o fluxo de diferentes tipos de espiras com direções arbitrárias.

2.2.7 Lei de Faraday

Em 1831, Michael Faraday relatou uma série de experimentos sobre fluxo e aqui vamos destacar somente três deles [11], e não da forma exatamente ordeira como ele relatou.

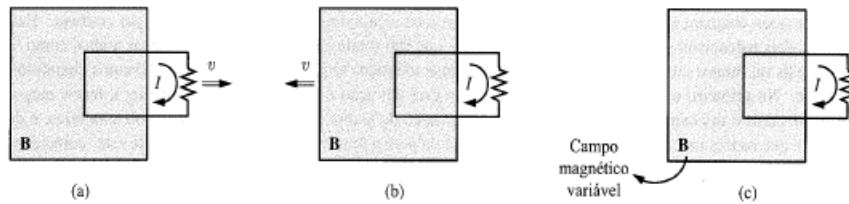
No **primeiro experimento** ele puxou a espira de fio para direita, Figura 9 (a), e ao passar numa região onde existe campo magnético uniforme e deixando imã parado ele observou uma corrente passando na espira [11]. E de acordo com a regra do fluxo a força eletromotriz é dada por,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

No **segundo experimento** ele puxou o imã para esquerda, Figura 9 (b), deixando espira fixa e campo magnético continua uniforme, e ele observou, novamente, uma corrente passando na espira [11]. Que pela regra do fluxo a força eletromotriz é dada por

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Figura 9: Ilustração do experimento de Michael Faraday.



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

Desta vez deixou tanto a espira como o imã parados, Figura 9 (c), e mudou a intensidade de campo magnético e ele observou, de novo, uma corrente passando na espira. Mas o Faraday não sabia explicar o porque desse ocorrido, porque não tinha conhecimento da relatividade na época [11], ele e outros cientistas da época encaravam esse resultado como uma simples coincidência, mas ele já sabia que a força magnética era responsável pela *fem*. No entanto, nesse último experimento não há cargas em movimento, então não há força magnética, mas há *fem*, por quê? *Qual é a força responsável pela essa fem?*

Normalmente quando a carga está em repouso a força que atua ali é a força elétrica. Nessa observação o Faraday obteve uma inspiração engenhosa:

Um campo magnético que varia no tempo induz um campo elétrico

Com esta afirmação ele foi capaz de explicar o terceiro resultado. Matematicamente,

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.2.24)$$

Lembrando que o fluxo é,

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}.$$

Derivando a equação (2.2.23), fica

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}. \quad (2.2.25)$$

Comparando as equações (2.2.24) e (2.2.25), fica

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}. \quad (2.2.26)$$

Esta equação é a **Lei de Faraday** na sua forma integral, e para escrever na

sua forma diferencial vamos aplicar teorema de Stokes, então temos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{a}. \quad (2.2.27)$$

Daí, fica

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}. \quad (2.2.28)$$

Daqui podemos concluir que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.2.29)$$

Da equação (2.1.23) foi visto que rotacional do campo elétrico era zero, mas aqui foi visto que o rotacional de campo elétrico (Lei de Faraday) é diferente de zero $\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$. Na realidade, a lei de Faraday se reduz à equação do rotacional do campo elétrico, equação (2.1.23), quando o campo magnético, \vec{B} , for constante.

2.2.8 Equações de Maxwell

Na eletrodinâmica antes de Maxwell eram conhecidas as seguintes equações [11]:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (I) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{(Lei de Gauss)} \\ (II) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(Sem Nome)} \\ (III) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(Lei de Faraday)} \\ (IV) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} & \text{(Lei de Ampère)} \end{array} \right. \quad (2.2.30)$$

Estas equações apresentam características bem compactas, mas na realidade apresentam uma incoerência fatal. Por exemplo, aplicando o divergente na terceira equação, (III), observa-se que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}).$$

O primeiro membro dará zero de acordo com a *regra de divergente de rotacional*, e o segundo membro é zero pela segunda equação, (II). Agora aplicando o divergente na quarta equação, fica

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{J}).$$

O primeiro membro é zero, de novo, pela regra de divergente de rotacional, mas o segundo membro não é. É aqui que aparece incoerência, pois uma coisa que é zero e é igual a outro que não é igual á zero, isso é absurdo.

Esta foi incoerência que o Maxwell encontrou. E para resolver essa incoerência,

Maxwell isolou a densidade de carga da equação (I), lei de Gauss, e substituiu na equação da continuidade (2.2.10), logo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho) = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) .$$

Ele usou o termo do lado direito para eliminar incoerência na quarta equação.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.2.31)$$

A equação (2.2.31) é conhecida como **equação de Ampère-Maxwell**. Na realidade, esta correção não alterou nada a magnetostática, porque quando o campo elétrico for constante, a equação de Ampère-Maxwell se reduz, simplesmente, a equação de Ampère.

O termo da correção, o Maxwell chamou-o de **Corrente de deslocamento**,

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \quad (2.2.32)$$

Agora com a respectiva correção a equação (2.2.30) fica

$$\left\{ \begin{array}{ll} (I) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(Lei de Gauss)} \\ (II) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(Sem Nome)} \\ (III) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(Lei de Faraday)} \\ (IV) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{(Lei de Ampère com a correção de Maxwell)} \end{array} \right. \quad (2.2.33)$$

Estas equações são conhecidas como **equações de Maxwell** em homenagem ao trabalho de James Clerk Maxwell na eletrodinâmica.

As equações de Maxwell, juntamente com a equação (2.2.3) resumem toda a teoria da eletrodinâmica clássica.

3 RELATIVIDADE RESTRITA

3.1 Invariância de Galileu

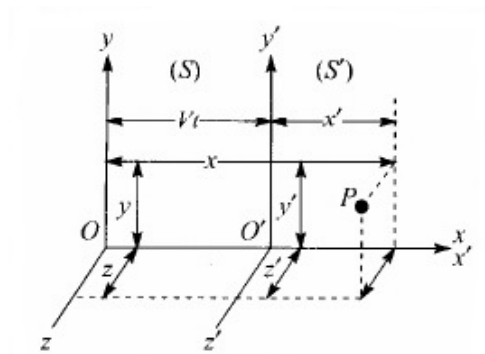
No nosso cotidiano sempre lidamos com aspectos ligados aos referenciais inerciais⁶ como também os não-inerciais. A relatividade restrita se restringe a estudar os referenciais inerciais.

Imagine que queremos descrever a trajetória de uma partícula que está em movimento retilíneo uniforme em relação a um dado referencial S e que está parada em outro referencial S' . Surge as seguintes perguntas: Quais leis serão aplicadas para descrever a partícula que está em movimento? Será que podemos usar as mesmas leis nos dois referenciais?

Galileu acreditava que sim, pois para ele *as leis da mecânica deve ser as mesmas para qualquer referencial inercial*, ou seja, as leis não podem depender de quem está a observar e nem de onde está observando [12]. Esta invariância das leis em relação aos observadores foi conhecida como *invariância de Galileu*.

Agora considere a Figura 10, onde o referencial S' é um referencial que está movimento retilíneo uniforme com velocidade V na direção x em relação ao referencial S [13].

Figura 10: Mudança de referencial



Fonte: Curso de Física Básica. Herch Moysés Nussenzveig (2013).

O nosso problema é saber qual a relação entre as coordenadas de referencial S' e referencial S num determinado instante t , e observando a Figura 10, veremos que a transformação de S' para S em qualquer instante t será

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (3.1.1)$$

⁶É dito referencial inercial quando a primeira lei de Newton é válida nesse referencial.

A equação (3.1.1) é conhecida como transformação de Galileu. E nessa transformação foi feita a translação espacial somente na direção x por uma distância Vt , de modo que as direções y e z permanecem as mesmas nos dois referenciais [13]. Além disso, os tempos medidos nos dois referenciais também são iguais, ou seja, $t' = t$ que significa dizer que os relógios sempre estão sincronizados.

Para conseguirmos as velocidade em cada coordenada, vamos derivar a equação (3.1.1), em relação ao tempo t , na passagem de uma partícula de referencial S a S' , daí vem

$$\begin{cases} v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} = v_x - V \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = v_y \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} = v_z \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Para aceleração, vamos derivar a equação (3.1.1) duas vezes em relação ao tempo t ou simplesmente derivar a equação (3.1.2) uma vez, em relação ao tempo t , assim vem

$$\begin{cases} a'_x = \frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = a_x \\ a'_y = \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = a_y \\ a'_z = \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = a_z \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Se observarmos a equação (3.1.3) verificamos que as acelerações são as mesmas em ambos os referenciais.

3.2 Experimento de Michelson e Morley

De 1881 à 1887 Albert Michelson e Edward Morley realizaram uma série de experimentos, que tinham como objetivo detectar o movimento relativo de um fluido imaginário chamado **éter**.

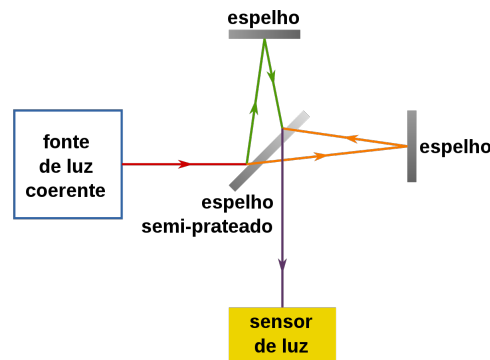
Depois do experimentos feitos por Thomas Young no século XVIII, que mostrava o comportamento ondulatória da luz, surgiu um outro problema. **Se a luz é a onda, então em que meio ela se propaga?** Porque as outras ondas têm os meios onde se propagam. Por exemplo, a **onda do mar** propaga na *água do mar*, a **onde sonora** propaga no *ar*, e a luz? Na época muitos se pensava que a luz propagava num meio invisível. A maioria dos físicos do século XIX, acreditavam nisso, um deles era Maxwell que construiu a teoria do eletromagnetismo toda baseado na existência do éter.

Nesse contexto, Michelson e Morley montaram um aparato, como mostra a Figura 11, para comprovar a existencia de éter.

O aparato era constituído por uma fonte de luz coerente, um espelho parcialmente refletor, dois espelhos refletores e um sensor de luz.

Nesse experimento, devido a diferença do caminho ótico entre os diferentes percursos da luz, deviam existir a diferença entre as velocidades, mas para a surpresa deles, a diferença era muito pequeno para comprovar a existência da velocidade relativamente ao

Figura 11: Aparato de Michelson e Morley



Fonte: <http://www.datuopinion.com/experimento-de-michelson-y-morley>
Acesso em 15 de Abril de 2018.

éter. Depois, melhoraram a experimento e, considerando o erro experimental, o resultado de novo foi, aproximadamente, zero. A experiência que tinha como objetivo, detectar o movimento relativo ao éter, na verdade comprovou o contrário, a inexistência do éter e ficou conhecida como o mais famoso experimento falho⁷ da história.

3.3 Postulados de Einstein

O resultado do experimento de Michelson e Morley foi considerado pela maioria dos cientistas no final do século XIX, dentre eles Lorentz e Poincaré, e até para Michelson e Morley como uma falha, por não demonstrar a existência de éter. Mas em 1905, um jovem, com apenas 26 anos de idade, pouco conhecido no mundo das ciências de nome Albert Einstein publicou três artigos na revista alemã *Annalen der Physik* desvendando o mistério. O primeiro artigo era para explicar o efeito fotoelétrico, o segundo artigo era sobre o movimento browniano e o terceiro era sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento que solucionou os problemas que os físicos estavam defrontando no século XIX, a partir de dois postulados. Corajosamente, ele postulou o seguinte [11]:

1. **O princípio da relatividade:** As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.
2. **A velocidade universal da luz:** A velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores inerciais, independentemente do movimento da fonte.

Estes dois postulados que formam a base da teoria especial da relatividade não são compatíveis com a mecânica newtoniana. O primeiro postulados é uma extensão da afirmação de Galileu, quando ele diz que a lei da mecânica se aplica a todos os referenciais inerciais, já Einstein, ousadamente, não colocou somente a mecânica, mas toda a Física. O segundo postulados vem mais na tentativa de explicar a não detecção do éter por parte de Michelson e Morley nas suas experiências, afirmando que o experimento não era uma

⁷Este falho não significa que os resultados estavam errado, mas falho na perspectiva da conclusão dos experimentadores

falha com os próprios experimentadores afirmaram, mas sim que o éter não existe, ou seja, a velocidade da luz é sempre c ($c = 3 \times 10^8 m/s$) em qualquer referencial no vácuo.

Agora considere um trem correndo com uma velocidade constante V_T e uma pessoa andando dentro do trem A , com velocidade constante V_D . Segundo a **regra de adição de velocidades de Galileu** a velocidade da pessoa que está dentro do trem em relação a pessoa que está no solo B será,

$$V_S = V_T + V_D. \quad (3.3.1)$$

E se no caso, A fosse um sinal luminoso qual seria a sua velocidade em relação a B ? Einstein acreditava que a velocidade seria sempre c em qualquer direção. E neste caso, a velocidade A em relação a solo ou em relação ao trem, seria sempre c ,

$$V_S = V_D = c. \quad (3.3.2)$$

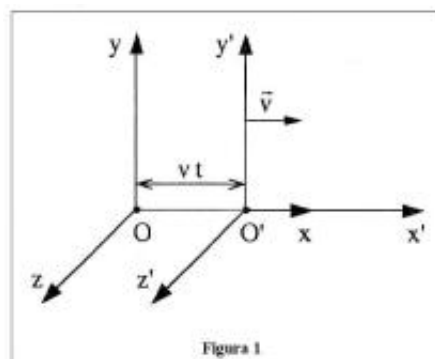
Esta é uma afirmação interessante, pois ele reafirma a não existência do éter, reforçando que a luz se propaga em todas as direções com a mesma velocidade c .

3.4 A transformação de Lorentz

A transformação de Galileu tinha algumas discordâncias com a teoria do eletromagnetismo e precisava ser corrigida. Para encontrar a transformação que pode substituí-la foram feitas várias tentativas até que em 1904, Hendrik Antoon Lorentz conseguiu encontrar estas correções [11]. Essas transformações passaram a ser chamadas de **transformações de Lorentz** em homenagem ao seu trabalho.

O trabalho de Lorentz consiste no seguinte: ele considerava dois referenciais inerciais, S e S' , e fazia a suposição que S' estava movendo com uma velocidade constante V em relação a S , e escolheu o eixo x como a direção do movimento.

Figura 12: Referenciais S e S'



Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAet54AF/15-relatividade-restrita-usp>
Acesso em 15 de Abril de 2018.

Conforme ilustra a Figura 12, o referencial S tem coordenadas (x, y, z, t) e o

referencial S' com coordenadas (x', y', z', t') . O **objetivo de Lorentz era encontrar a transformação que o levava de um evento em (x, y, z, t) para 0 mesmo evento em (x', y', z', t')** . Para isso, a transformação de $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$, devia satisfazer as seguintes condições [10]:

1) Um movimento retilíneo e uniforme em relação a S , também deve ser retilíneo e uniforme em relação a S' .

2) Para $v = 0$ a transformação deve-se reduzir á identidade.

3) Como a frente onda de um sinal luminoso se propaga com a mesma velocidade c , supondo que ele é enviado quando as origens coincidem ($t = t' = 0$), então

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c'^2t'^2 = 0. \quad (3.4.1)$$

De acordo com a Figura 12, o movimento nas direções transversais à x são:

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Mas isso não se aplica à direção x , ou seja, à direção paralela ao movimento. Neste caso, vai ser necessário usar uma transformação linear para descrever a transformação de coordenadas nesta direção. Assim, das coordenadas x e t para um novo referencial x' e t' que se move com velocidade V serão:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ t' = \delta x + \varepsilon t \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Agora o nosso problema se resume a encontrar, γ , δ e ε . Para isso, vamos substituir as equações (3.4.3) na equação (3.4.1), de modo que

$$(\gamma(x - Vt))^2 + y'^2 + z'^2 - c'^2(\delta x + \varepsilon t)^2 = 0.$$

Da equação (3.4.2), temos que

$$\gamma^2(x^2 - 2Vxt + V^2t^2) + y^2 + z^2 - c^2\delta^2x^2 - 2c^2\delta\varepsilon xt - c^2\varepsilon^2t^2 = 0.$$

Usando $y^2 + z^2 = c^2t^2 + x^2$, então

$$\gamma^2(x^2 - 2Vxt + V^2t^2) + c^2t^2 - x^2 - c^2\delta^2x^2 - 2c^2\delta\varepsilon xt - c^2\varepsilon^2t^2 = 0$$

$$(\gamma^2 - 1 - c^2\delta^2)x^2 - 2(\gamma^2V + 2c^2\delta\varepsilon)xt + (\gamma^2V^2 + c^2 - c^2\varepsilon^2)t^2 = 0.$$

Para que estas equações sejam sempre válidas para quaisquer x e t , isso só será possível se os coeficientes forem nulos, então isto resulta em

$$\begin{cases} \gamma^2 - 1 - c^2\delta^2 = 0 \\ \gamma^2V + c^2\delta\varepsilon = 0 \\ \gamma^2V^2 + c^2 - c^2\varepsilon^2 = 0 \end{cases} \quad (3.4.4)$$

Com algumas algébras vamos obter

$$\gamma^2 = -\frac{c^2 \delta(-\frac{c^2 \delta}{V})}{V} = \varepsilon^2. \quad (3.4.5)$$

Substituindo na terceira equação da (3.4.4), temos

$$\gamma^2 V^2 + c^2 - c^2 \gamma^2 = 0 \rightarrow \gamma^2 (c^2 - V^2) = c^2 \rightarrow \gamma^2 (1 - \frac{V^2}{c^2}) = 1.$$

Finalmente, definindo $\beta \equiv \frac{V}{c}$, encontramos

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.4.6)$$

A equação (3.4.6) é conhecida como **fator de Lorentz**. Isso nos leva a **transformação de Lorentz** que é dada por

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{V}{c^2}x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Na sua forma matricial é

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.4.8)$$

Estas são as transformações de Lorentz, elas contêm todas as informações geométricas na teoria especial, com as quais Einstein substituiu as transformações de Galileu. Observe que quando a velocidade V é muito pequena β também será muito pequeno, logo neste caso, a Transformação de Lorentz se aproxima de a Transformação de Galileu.

3.5 A Geometria da Relatividade

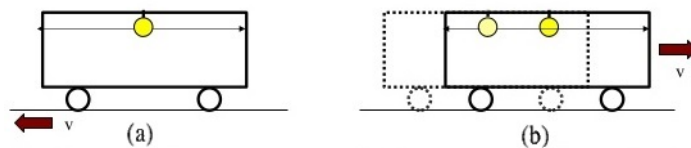
3.5.1 A Relatividade da Simultaneidade

A geometria relativística foi dividida em três: simultaneidade, dilatação do tempo e contração de Lorentz [11]. Estes resultados serão obtidos usando a Transformação

de Lorentz. Primeiramente vamos estudar a simultaneidade e depois as outras geometria da relatividade.

Considere um trem que viaja com velocidade v constante sobre um trilho, e dentro, exatamente, no centro do trem é pendurada uma lâmpada. Quando a lâmpada é ligada, o observador⁸ que está dentro do trem observará os raios luminosos atingirem a traseira e a dianteira do trem ao mesmo tempo, Figura 13 (a) [11]. para o observador fora do trem, isso não acontece, ele observa os raios atingirem o lado traseiro antes de atingir o lado dianteiro de trem, Figura 13 (b).

Figura 13: Simultaneidade dos eventos



Fonte: <https://pt.slideshare.net/gremio94/eletro-relat-brett>
Acesso em 15 de Abril de 2018

Deste modo pode-se concluir que:

Dois eventos que são simultâneos em um sistema inercial não são, em geral, simultâneos em outro.

Mas não costumamos observar isso no cotidiano. Para que isso possa ser detetável no nosso mundo seria necessário uma velocidade maior ou igual a 10% da velocidade da luz.

Mas se alguém te pergunta qual dos dois observadores está certo? A resposta é bem simples, os dois observadores estão certos, porque como foi mostrado pela transformação de Lorentz os *tempos não são iguais*. Já para Newton:

O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por sua própria natureza, sem relação a nada externo, permanece sempre semelhante e imutável.

Esta afirmação mostra que na Mecânica newtoniana tempo o era considerado absoluto, e agora na relatividade o tempo é relativo. Isso foi a diferença mais brutal entre a Mecânica newtoniana e a Relatividade especial.

A simultaneidade é um dos pilares fundamentais da Relatividade, mas que muitos físicos não entendem, ou demoram muito para entender. Para facilitar a nossa percepção Einstein afirmou o seguinte: dois eventos são simultâneos, ou seja, os tempos nos dois eventos são iguais ($t_1 = t_2$) quando o ponto de encontro entre os dois sinais luminosos é o ponto de médio do segmento $(\overline{P_1P_2})$ [10]. E para ele as grandezas espaço e o tempo são grandezas intrinsecamente ligadas denominando-os espaço-tempo.

⁸Um **observador** é a pessoa que tem bom senso de fazer a correção, e uma **observação** é aquilo que um observador registra depois fazer a correção

3.5.2 A Dilatação do Tempo

Agora vamos estudar a segunda geometria da relatividade. Para isso, vamos tentar saber quanto tempo a luz leva para atingir o chão do trem em dois referenciais. Primeiramente, para o observador que está no trem, suponhamos h é a altura do chão à lâmpada [11], e seguindo a Figura 14 (a), o seu tempo será

$$\Delta\bar{t} = \frac{h}{c}, \quad (3.5.1)$$

onde $\Delta\bar{t}$ é o tempo no referencial trem. E para observador que está no solo, Figura 14 (b), o tempo será

$$\Delta t = \frac{\sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2}}{c} \rightarrow \Delta t = \frac{h}{\sqrt{c^2 - v^2}} \rightarrow \Delta t = \frac{h}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.5.2)$$

onde Δt é o tempo no referencial solo. Substituindo a equação (3.4.10), fator de Lorentz na equação (3.5.2), vem

$$\Delta t = \frac{h}{c}\gamma. \quad (3.5.3)$$

Comparando as equações (3.5.1) e (3.5.3), fica

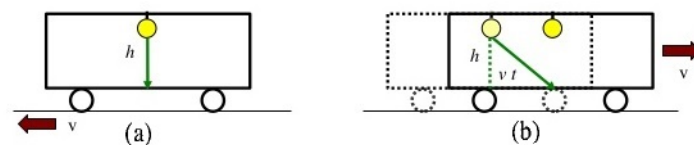
$$\Delta t = \gamma\Delta\bar{t}. \quad (3.5.4)$$

O tempo que a luz leva para atingir o chão do trem nos dois referenciais é diferente, o observador no trem mediu o tempo mais curto do que o observador no solo, e que nos leva a concluir que:

Os relógios em movimento andam mais lentamente.

Isso não tem nada haver com a mecânica dos relógios, isso é devido a natureza do tempo e se aplica a todos os relógios adequadamente funcionando.

Figura 14: Diferenças de tempo nos dois referenciais



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

3.5.3 A Contração de Lorentz

Desta vez, imaginemos que foram montadas uma lâmpada na extremidade de um trem e o espelho na outra extremidade, assim o sinal luminoso enviado vai poder voltar, Figura 15. Para o observador que está dentro do trem [11], Figura 15 (a), o tempo de ida e volta será:

$$\Delta\bar{t} = 2\frac{\Delta\bar{x}}{c}, \quad (3.5.5)$$

onde $\Delta\bar{x}$ é a distância no referencial trem. Para o observador que está no solo, Figura 15 (b), a descrição será mais complicada, pois vai ter dois tempos distintos, um de ida e outro de volta. Se Δt_1 for o tempo de ida e Δt_2 foi o tempo de volta, então

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x + v\Delta t_1}{c}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x - v\Delta t_2}{c}.$$

Resolvendo, obtém-se

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x}{c - v}, \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{c + v}.$$

O tempo total Δt será a soma dos dois tempos, então

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\frac{\Delta x}{c} \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})}, \quad (3.5.6)$$

onde Δx é a distância no referencial solo. Lembrando da equação (3.5.4), dilatação do tempo, $\Delta t = \gamma\Delta\bar{t}$, e substituindo nas equações (3.5.5) e (3.5.6), fica

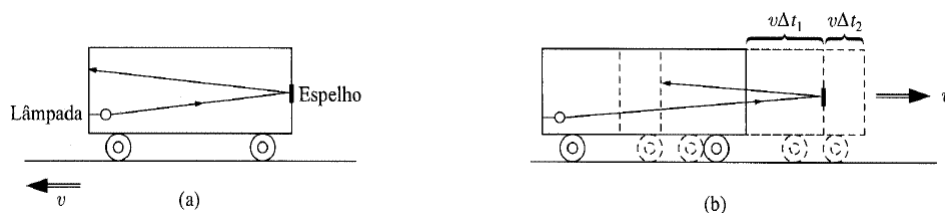
$$\Delta\bar{x} = \gamma\Delta x. \quad (3.5.7)$$

Da equação (3.5.7), observa-se que o comprimento nos dois referenciais não são iguais, ou seja, o observador que está no solo observou que o comprimento do vagão do trem é menor. Daí pode concluir-se que:

Os objetos em movimentos são encurtados

A equação (3.5.7) é conhecida com **contração de Lorentz**. Isso era de se esperar, já que os relógios em movimento andam mais lentos, os objetos onde se encontram esses objetos deveriam se encurtar para que possamos sempre preservar $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Figura 15: Contração de Lorentz



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

3.6 A Mecânica Relativística

3.6.1 A lei relativística de composição de velocidades

Considere uma partícula em movimento arbitrário em relação a referencial S' , onde

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t'), \quad (3.6.1)$$

E a sua *velocidade instântanea* $\vec{v}'(t')$ em termos de componentes são

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (3.6.2)$$

Também as componentes da *velocidade instântanea* $\vec{v}(t)$ no S são

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (3.6.3)$$

Usando a transformação de Lorentz, equação (3.4.12), para relacionar $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ com $x' = x'(t')$, $y' = y'(t')$, $z' = z'(t')$, obtém-se que

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - V dt) \\ dt' = \gamma(dt - \frac{V}{c^2} dx) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (3.6.4)$$

Substituindo as equações (3.6.2) e (3.6.3) na equação (3.6.4), obtemos:

$$\begin{cases} v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{(v_x - V)}{(1 - \frac{v_x V}{c^2})} \\ v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v_x V}{c^2})} \\ v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{v_x V}{c^2})} \end{cases} \quad (3.6.5)$$

A equação (3.6.5) fornece a **lei da relativística de composição de velocidades**, isto é, se você está em um referencial e quer saber a sua velocidade em relação ao outro referencial que está em movimento com velocidade constante V em relação ao seu referencial, usa-se esta equação.

3.6.2 Momento relativístico

Na mecânica newtoniana considera-se a massa independente da velocidade, logo o momento linear é definido como

$$\vec{P} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{x}}{dt} \quad (3.6.6)$$

Na mecânica relativística, já foi visto que o objeto em movimento, o seu comprimento diminui, sendo assim, não tem problema se a massa relativística depende da velocidade $m(v)$, já que o comprimento do objeto é encurtado. Nesse caso, o momento linear relativístico pode ser definido como

$$\vec{P} = m(v)\vec{v} \quad (3.6.7)$$

Ora, o objetivo é descobrir essa massa $m(v)$, para assim poder escrever o momento relativístico desta forma, equação (3.6.7). Para isso, suponhamos que exista duas partículas a e b idênticas⁹ em um referencial S' , onde o momento total de colisão se anula antes e depois da colisão, e a sua velocidade seja

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2}. \quad (3.6.8)$$

As componentes das velocidades no referencial S' são descritas na Tabela 1 [10].

Tabela 1: Componentes da velocidade no referencial S'

componentes	x'	y'	x'	y'
antes	v'_x	v'_y	$-v'_x$	$-v'_y$
depois	v'_x	$-v'_y$	$-v'_x$	v'_y
	Partícula a		Partícula b	

Descrevendo o mesmo movimento no referencial S , que está em movimento com velocidade $-V$ em relação a a referencial S' , e usando o *Princípio da Relatividade*, levando em conta que o momento se anula antes e depois no referencial S' , concluímos que o mesmo deve valer para referencial S , pois os dois são referenciais inerciais. Desta forma, usando a Transformação de Lorentz inversa ($V \rightarrow -V$), rescrevendo a Tabela 1 para o referencial S , obtemos os resultados descritos pela Tabela 2.

A velocidade da partícula a v_a , é diferente da velocidade da partícula b v_b , ($\vec{v}_a \neq \vec{v}_b$), mas o módulo da velocidade da partícula a é o mesmo antes e depois da colisão, isso também é válida para partícula b . Usando conservação do momento linear

⁹Na física, dizer partículas idênticas em um sistema, significa dizer que elas têm mesmas propriedades físicas.

Tabela 2: Componentes da velocidade no referencial S

componentes	x'	y'	x'	y'
antes	$\frac{(v'_x + V)}{(1 + \frac{v'_x V}{c^2})}$	$\frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{v'_x V}{c^2})}$	$\frac{-(v'_x - V)}{(1 - \frac{v'_x V}{c^2})}$	$-\frac{v'_y}{\gamma(1 - \frac{v'_x V}{c^2})}$
depois	$\frac{(v'_x + V)}{(1 + \frac{v'_x V}{c^2})}$	$-\frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{v'_x V}{c^2})}$	$\frac{-(v'_x - V)}{(1 - \frac{v'_x V}{c^2})}$	$\frac{v'_y}{\gamma(1 - \frac{v'_x V}{c^2})}$
	Partícula <i>a</i>		Partícula <i>b</i>	

em S em relação ao componente x obtemos

$$[m(v_a)\vec{v}_a + m(v_b)\vec{v}_b] = [m(v_a)\vec{v}_a + m(v_a)\vec{v}_a]. \quad (3.6.9)$$

E de acordo com a Tabela 2, a conservação do momento linear em S em relação ao componente y , fica

$$m(v_a)\frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{v'_x V}{c^2})} - m(v_b)\frac{v'_y}{\gamma(1 - \frac{v'_x V}{c^2})} = -m(v_a)\frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{v'_x V}{c^2})} + m(v_b)\frac{v'_y}{\gamma(1 - \frac{v'_x V}{c^2})}. \quad (3.6.10)$$

Esta igualdade será sempre sempre válida para quaisquer valores de v'_x e v'_y se ambos os membros forem identicamente nulos, e isto se resulta em

$$\frac{m(v_a)}{m(v_b)} = \frac{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (3.6.11)$$

Note que podemos escrever

$$\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (3.6.12)$$

e

$$\sqrt{1 - \frac{v_b^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}} \sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}}. \quad (3.6.13)$$

Assim, dividindo a equação (3.6.13) por (3.6.12)

$$\frac{\sqrt{1 - \frac{v_b^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}{1 - \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (3.6.14)$$

Comparando a equação (3.6.14) com a equação (3.6.11), vem

$$m(v_b)\sqrt{1 - \frac{v_b^2}{c^2}} = m(v_a)\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}. \quad (3.6.15)$$

Note que para $((v_a \neq v_b))$, a massa da partícula a , $m(v_a)$, não é a mesma da partícula b , $m(v_b)$, isto implica que $m(v)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ é independente da magnitude de v , logo

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.6.16)$$

onde $m_0 = m(0)$ é **chamada massa de repouso**, ela é obtido quando a velocidade da partícula é nula. Agora podemos escrever o momento da seguinte forma:

$$\vec{P} = m(v)\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0\vec{v}. \quad (3.6.17)$$

Observa-se que quando a $v \ll c$, isto é velocidades baixas, o momento relativístico se aproxima do momento clássico.

3.6.3 Energia relativística

Na mecânica clássica, o trabalho realizado por uma força externa para acelerar a partícula do repouso até uma velocidade v é dado por

$$W = \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (3.6.18)$$

Em uma dimensão

$$W = \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot dx = \int_0^{\vec{r}} m \frac{dv}{dt} dx = m \int_0^{\vec{r}} v dv = \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.6.19)$$

E sabe-se que o trabalho é a variação da energia cinética ($W = \Delta K = K_f - K_i$), e como a partícula começa em repouso $K_i = 0$, então a equação (3.6.18) fica

$$K = \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (3.6.20)$$

E a lei fundamental da dinâmica, na forma que foi enunciada por Newton é

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (3.6.21)$$

Pela equação (3.6.21) a equação (3.6.20) fica

$$K = \int_0^{\vec{r}} \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int_0^v d\vec{P} \cdot \vec{v}. \quad (3.6.22)$$

Na mecânica relativística o momento é $\vec{P} = (\gamma m_0\vec{v})$, substituindo na equação

(3.6.22), fica

$$K = \int_0^v d(\gamma m_0 \vec{v}) \cdot \vec{v} = m_0 \int_0^v d(\gamma \vec{v}) \cdot \vec{v}. \quad (3.6.23)$$

Usando integral por partes¹⁰ para resolver a integral da equação (3.6.23)

$$K = m_0 \left[\vec{v} \cdot \gamma \vec{v} \Big|_0^v - \int_0^v \gamma \vec{v} \cdot d\vec{v} \right] = m_0 \left[\gamma v^2 \Big|_0^v - \int_0^v \gamma \vec{v} d\vec{v} \right]. \quad (3.6.24)$$

Agora calculado a integral de segundo termo do segundo membro vem

$$\int_0^v \gamma \vec{v} d\vec{v} = \int_0^v \gamma \vec{v} d\vec{v} = -c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.6.25)$$

Em cima foi usando a regra da substituição¹¹ [14] a equação (3.6.25), fica

$$K = m_0 \left[\gamma v^2 + \frac{c^2}{\gamma} \right]_0^v = m_0 \gamma v^2 + m_0 \frac{c^2}{\gamma} - m_0 c^2. \quad (3.6.26)$$

Isso implica que

$$K + m_0 c^2 = m_0 \gamma v^2 + m_0 \frac{c^2}{\gamma}.$$

Trabalhando o segundo membro

$$m_0 \gamma v^2 + m_0 \frac{c^2}{\gamma} = m_0 c^2 \gamma.$$

Então a equação (3.6.26) fica

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \quad (3.6.27)$$

Para velocidades muito baixas, podemos usar a expansão de Taylor, daí vem

$$K = m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - m_0 c^2 \simeq \frac{1}{2} m_0 v^2. \quad (3.6.28)$$

Desprezando o as correções do ordem superior, cai-se na energia cinética clássica.

E da equação (3.6.27) obtém

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = K + m_0 c^2, \quad (3.6.29)$$

onde $m_0 c^2$ é chamado **energia de repouso**, e o o outro termo é a energia total, pois é a soma de duas energias, e é denominada **energia relativística**

¹⁰Consulte o livro de Cálculo volume 1 de James Stewart 7ª edição de página 420 até 423.

¹¹Consulte o livro de Cálculo volume 1 de James Stewart 7ª edição de página 369 até 374.

$$E \equiv \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 c^2. \quad (3.6.30)$$

Para velocidade muito baixas $v \ll c$, isto nos leva

$$E = m c^2 \quad (3.6.31)$$

onde m é a massa inercial associada a energia E . Esta última equação é dada pela celebre relação de Einstein, e é um dos resultados mais importantes da **teoria da relatividade restrita**.

3.7 A Dinâmica Relativística

Na dinâmica newtoniana a força é definida como

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (3.7.1)$$

onde P é um momento linear clássico. Na dinâmica relativística a força é definida como

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{P}'}{dt} \quad (3.7.2)$$

onde P' é um momento linear relativístico. E se queremos escrever a força relativística o que faremos? Usaremos a expressão do momento relativística, equação (3.6.17), já conhecida e substituindo na equação (3.7.2), logo teremos

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{P}'}{dt} = \frac{m}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})^3}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m\vec{a}}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})^3}} \quad (3.7.3)$$

onde o P' é o nosso momento relativístico. Então comparando as equações (3.7.1) e (3.7.3) temos

$$F = \sqrt{1 - u^2/c^2} F' \quad (3.7.4)$$

Esta é a equação que descreve a transformação da força nos dois referenciais diferente, onde S' está movendo com velocidade v constante em relação a S .

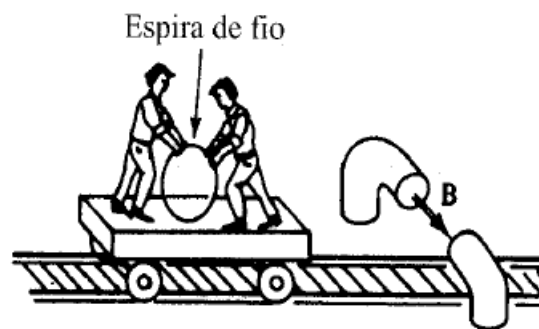
4 ELETRODINÂMICA RELATIVÍSTICA E APLICAÇÕES

4.1 O Magnetismo como um fenômeno relativístico

O objetivo deste capítulo é conhecer e compreender os fundamentos da estrutura eletrodinâmica do ponto vista relativístico e mostrar que as leis antes faladas são coerentes com a relatividade, para isso segue o exemplo a seguir.

Considere uma espira, como mostra a figura 16, em um vagão que passa entre polos de um imã gigante [11].

Figura 16: Espira de fio em um vagão.



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

Ao passar pelo campo magnético \vec{B} , aparece uma *fem* na espira, devido ao movimento, dada por

$$\varepsilon \equiv -\frac{d\Phi}{dt}$$

Esta *fem* é devido a força magnética que age sobre as cargas da espira que estão movendo com o Vagão, e é encontrada por observador que está fora do vagão. Já para o observador que está no vagão, sabe-se que não há força magnética, porque a espira está em repouso em relação ao Vagão, e de acordo com a lei de Faraday a *fem* é dada por

$$\varepsilon \equiv -\frac{d\Phi}{dt}$$

Aqui o que acontece é o seguinte, para um observador no trem em movimento o campo magnético varia no tempo, e sabe-se que campo magnético variando com o tempo induz um campo elétrico \vec{E} , e conseqüentemente existe uma força elétrica resultante, gerando uma *fem* na espira.

Os observadores, tanto do trem quanto do solo, obtiveram o mesmo resultado, mas com interpretações físicas diferentes, isso deve-se ao fato de que a lei de Faraday e a regra do fluxo preveem a mesma *fem*.

Neste exemplo, observa-se que um observador interpreta um movimento da partícula como um processo elétrico e o outro observador interpreta o mesmo movimento como processo magnético, mas quem está certo? Os dois estão certos, pois cada um

descreve o mesmo processo em referenciais diferentes. Esta dependência de referencial não foi bem compreendida por muitos físicos no século XIX, um dos quais Lorentz, porque não usaram a eletrodinâmica, mas sim mecânica não-relativística.

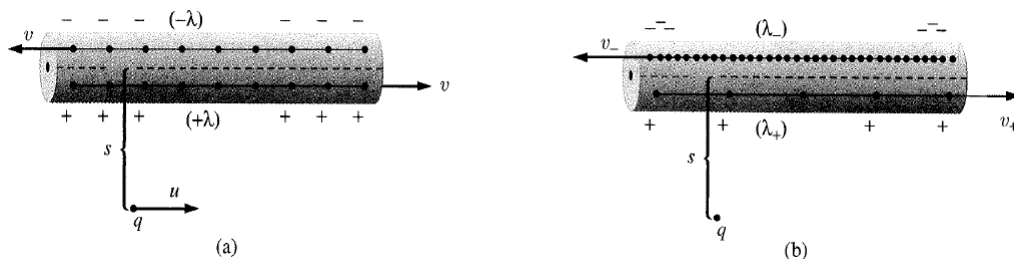
A eletrodinâmica clássica já está em sincronia com a relatividade restrita, por exemplo, as equações de Maxwell e a lei de força de Lorentz podem ser aplicadas a qualquer sistema inercial sem problema.

Com esse propósito atingir o objetivo do capítulo vamos supor que exista uma série de cargas positivas, que estão muito próximas uma das outras, tão próximas que possamos considera-las como uma linha contínua de cargas, e movendo com velocidade v para direita com densidade λ . Além disso, movendo-se no sentido contrário com a mesma velocidade v há outras cargas negativas com densidade $-\lambda$. E agora considere que exista uma carga q que se move com velocidade u ($u < v$) está a uma distância s do fio, como ilustra a Figura 17 (a). De modo que a corrente líquida para direita tem a seguinte magnitude

$$\vec{I} = 2\lambda\vec{v} \quad (4.1.1)$$

No sistema S (referencial no fio), não há força elétrica sobre carga q , pois as duas linhas de cargas se cancelam.

Figura 17: Séries de cargas positivas e negativas.



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

Do ponto de vista do sistema \bar{S} (referencial na carga q), que está movendo-se com velocidade u para direita, isto é, neste sistema a carga q está em repouso, se aplicarmos a regra de adição de velocidades de Einstein, as velocidades das linhas positivas e negativas serão:

$$v_{\pm} = \frac{v \mp u}{1 \mp uv/c^2}. \quad (4.1.2)$$

De acordo com a equação (4.1.2), v_- é menor do que v_+ , logo a contração de Lorentz é mais acentuada entre as cargas negativas do que entre as cargas positivas, Figura 17 (b), então o fio terá uma carga líquida negativa. Neste caso, pode-se considerar a densidade de linha da passagem de um referencial para outro de é

$$\lambda_{\pm} = \pm(\gamma_{\pm})\lambda_0, \quad (4.1.3)$$

onde o *fator de Lorentz* é

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\pm}^2/c^2}}, \quad (4.1.4)$$

e λ_0 é a densidade linear de carga positiva no seu próprio sistema em repouso, então

$$\lambda = \gamma \lambda_0, \quad (4.1.5)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.1.6)$$

Substituindo a equação (4.1.2) em (4.1.4), obtemos

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v \mp u}{1 \mp uv/c^2} \right)^2 / c^2}} = \frac{c^2 \mp uv}{\sqrt{(c^2 \mp uv)^2 - c^2(v \mp u)^2}} = \frac{c^2 \mp uv}{\sqrt{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}}. \\ \gamma_{\pm} &= \gamma \frac{1 \mp uv/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

A densidade linear total em \bar{S} será:

$$\lambda_{tot} = \lambda_+ + \lambda_- = \lambda_0(\gamma_+ - \gamma_-) = \frac{-2\lambda uv}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (4.1.8)$$

Nesta equação foi visto que a contração de Lorentz entre linhas positivas e negativas são diferentes, e o fio onde passa a corrente pode ser eletricamente neutro em um sistema e carregado em outro. Assim, o campo elétrico estabelecido por λ_{tot} será

$$E = \frac{\lambda_{tot}}{2\pi\epsilon_0 s} = \frac{-\lambda uv}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{1}{\pi\epsilon_0 s}, \quad (4.1.9)$$

e a força elétrica sobre a carga q em \bar{S} será

$$\bar{F} = qE = \frac{-\lambda v}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{qu}{\pi\epsilon_0 s}. \quad (4.1.10)$$

Portanto, como tivemos força em \bar{S} temos que ter outra força em S . E para achar essa força, vamos usar a *regra de transformação para forças*, equação (3.7.4), e também lembrando que \bar{F} é perpendicular u , e q neste referencial está em repouso, logo

$$F = \sqrt{1 - u^2/c^2} \bar{F} = -\frac{\lambda v}{\pi c^2 \epsilon_0} \frac{qu}{s}. \quad (4.1.11)$$

Desse modo, no referencial \bar{S} a carga é atraída por uma força elétrica. Já no referencial S não há força elétrica, porque o fio é neutro neste referencial, no entanto a carga está em movimento, então deve haver uma força magnética devido a esse deslocamento.

Lembrando que a velocidade da luz no vácuo é

$$c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0. \quad (4.1.12)$$

Das equações (4.1.1), (4.1.11) e (4.1.12), vem

$$F = -qu \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right). \quad (4.1.13)$$

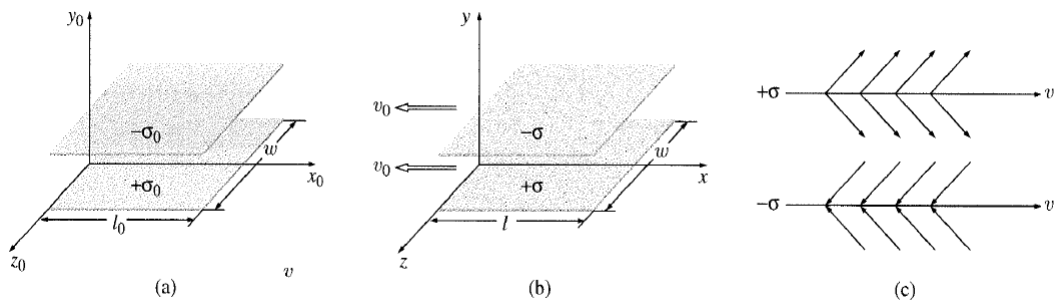
O termo dentro de parênteses é o campo magnético de um fio longo e reto e o sinal negativo vem da carga líquida. Esta força magnética, equação (4.1.13), é o que íamos encontrar se tivemos usada a *Lei de Lorentz*.

4.2 Como os campos se transformam

Como nós tínhamos visto anteriormente, um observador interpreta um movimento de uma partícula como um processo elétrico e o outro observador interpreta o mesmo movimento como processo magnético. Agora vamos considerar um dado referencial S , onde já conhecemos todos os campos, e queremos saber quais são os campos em \bar{S} . De acordo com a interpretação dos observador feito antes, isso seria bem fácil, é só transformar todos os campos elétricos em campos magnéticos e todos os magnéticos em elétricos. Mas na realidade, não é bem assim, é mais complicado [11].

Vamos imaginar um grande capacitor de placas paralelas, e entre as placas exista um campo elétrico uniforme, que é um dos campos elétricos mais simples, Figura 18. Vamos supor que o capacitor esteja em repouso em S_0 e tem uma carga superficial $\pm\sigma$.

Figura 18: Capacitor de placas paralelas alinhado com o plano xz .



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

De acordo com a Figura 18 (a), o campo elétrico em S será

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{y}. \quad (4.2.1)$$

Agora imagine que existe outro sistema S , movendo com velocidade v_0 para direita, onde você quer examinar o mesmo capacitor, Figura 18 (b). Observando desse sistema, veremos que as placas vão estar movendo para esquerda, e o campo elétrico será

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \hat{y}, \quad (4.2.2)$$

a única diferença entre essas duas equações (4.2.1) e (4.2.2) é o valor da carga superficial σ . O resultado da equação (4.2.2), vem da Lei de Gauss, equação (2.1.14), e a Lei de Gauss é perfeitamente válida para cargas em movimentos e também depende da simetria [11]. Mas não há certeza de que o campo vai continuar perpendicular às placas.

E o que acontece se o campo de uma placa em movimento inclina-se? Mesmo que o campo devido a uma das placas se inclinasse, o campo entre as placas ficaria perpendicular pela superposição de campos $-\sigma$ e $+\sigma$, Figura 18 (c), pois o campo de $-\sigma$ vai mudar o sinal da carga e mudar direção do campo, e a soma vetorial anula os componentes paralelos.

A carga total de cada placa permanece inalterada, e a largura w também, mas o comprimento l vai sofrer uma contração de Lorentz por um fator de

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0}{c}}}, \quad (4.2.3)$$

e a carga aumenta por um fator de

$$\sigma = \gamma_0 \sigma_0. \quad (4.2.4)$$

Deste modo, como a soma vetorial anula os componentes paralelos, então o campo é

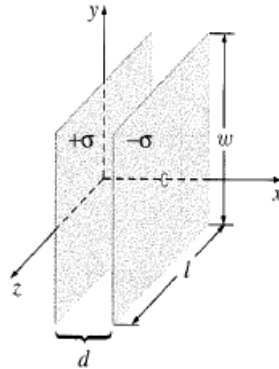
$$\vec{E}^\perp = \gamma_0 \vec{E}_0^\perp. \quad (4.2.5)$$

Encontramos a equação (4.2.5), pois a regra que aplicamos para chegar até essa equação se aplica só aos componentes perpendiculares a direção do movimento do referencial S . Para conseguir uma regra para os componentes paralelos vamos mudar a posição de capacitor, considerando que o mesmo está alinhado com o plano yz , Figura 19. Na Figura 19 a distância entre as placas é d (que também sofre uma contração de Lorentz), e l e w são os mesmos em ambos os sistemas. Mas o nosso campo não depende de d , então

$$\vec{E}^\parallel = \vec{E}_0^\parallel. \quad (4.2.6)$$

As transformações feitas para chegar as equações (4.2.5) e (4.2.6) não são as mais gerais, pois durante a nossa argumentação afirmamos que no referencial S_0 as cargas

Figura 19: Capacitor de placas paralelas alinhado com o plano yz .



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

estavam em repouso, conseqüentemente, não há campo magnético nesse referencial. Para conseguir uma transformação mais geral será necessário considerar tanto o campo elétrico quanto magnético. Por exemplo, no referencial S não há esse problema, pois além de campo elétrico

$$E_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (4.2.7)$$

também existe um campo magnético que é gerado as correntes superficiais

$$\vec{K}_{\pm} = \pm \sigma v_0 \hat{x}. \quad (4.2.8)$$

Usando a regra da mão direita,¹² este campo está no sentido negativo de z , e a sua magnetude é dada pela Lei de Ampère, equação (2.2.21). Então

$$B_x = -\mu_0 \sigma v_0. \quad (4.2.9)$$

Agora considere mais um sistema \bar{S} , que está movendo com velocidade v par direita em relação a S e com velocidade \bar{v} em relação a S_0 , Figura 20. **O objetivo é descobrir quais são os campos de \bar{S} em relação a S_0 .** Sabendo que em \bar{S}

$$\bar{E}_y = \frac{\bar{\sigma}}{\epsilon_0}, \quad \bar{B}_z = -\mu_0 \bar{\sigma} \bar{v}, \quad (4.2.10)$$

onde

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2}, \quad (4.2.11)$$

e o fator de Lorentz será

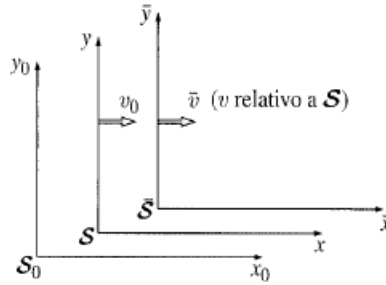
¹²Regra da mão direita é usada para determinar o sentido do campo magnético ao redor de um fio que transporta corrente. O polegar é apontado no sentido da corrente elétrica do fio condutor, e os outros quatro dedos envolvem o fio formando uma circunferência que representa as linhas do campo magnético.

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}}, \quad (4.2.12)$$

e

$$\bar{\sigma} = \bar{\gamma}\sigma_0. \quad (4.2.13)$$

Figura 20: Sistema de três referenciais, S_0 , S , \bar{S} .



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

Agora o problema é expressar \vec{E} e \vec{B} , em termos de \vec{E} e \vec{B} . Substituindo as equação (4.2.4) e (4.2.13) na equação (4.2.10), vem

$$\bar{E}_y = \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} \right) \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \bar{B}_z = - \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} \right) \mu_0 \sigma \bar{v}. \quad (4.2.14)$$

Com algumas manipulações matemáticas temos

$$\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}} = \frac{1 + vv_0/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2} \right). \quad (4.2.15)$$

Substituindo a equação (4.2.15) na equação (4.2.14), temos

$$\bar{E}_y = \gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2} \right) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \gamma \left(E_y - \frac{v}{\mu_0 \varepsilon_0 c^2} B_z \right),$$

e

$$\bar{B}_z = -\gamma \left(1 + \frac{vv_0}{c^2} \right) \mu_0 \sigma \left(\frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2} \right) = \gamma (B_z - \mu_0 \varepsilon_0 v E_y).$$

Lembrando que $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$, então

$$\begin{cases} \bar{E}_y = \gamma (E_y - v B_z) \\ \bar{B}_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \end{cases} \quad (4.2.16)$$

Essa equação nos mostra como E_y e B_z se transforma. E se queremos calcular E_z e B_y alinhamos o mesmo capacitor paralelamente ao plano xz , Figura 21. Dessa forma,

$$E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad B_y = \mu_0 \varepsilon_0 v_0, \quad (4.2.17)$$

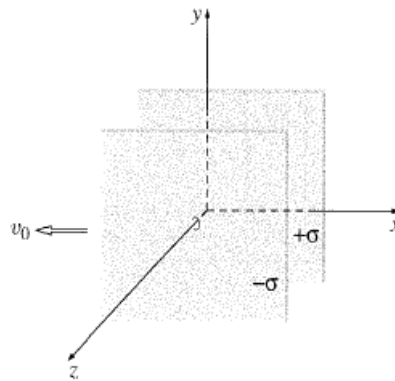
e para saber o sinal de B_y , usamos a regra da mão direita. Os restantes procedimentos serão os mesmos, E_y será substituído por E_z e B_z será substituído por $-B_y$, isso nos leva a

$$\begin{cases} \bar{E}_z = \gamma (E_z + vB_y) \\ \bar{B}_y = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \end{cases} \quad (4.2.18)$$

Para componente x , como ele ser paralelo ao movimento. Então

$$\bar{E}_x = E_x \quad (4.2.19)$$

Figura 21: Capacitor de placas paralelas alinhado com o plano xy .



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

Mas aqui não há campo magnético coincidente para componente x , B_x , logo não podemos deduzí-lo e por isso, vamos considerar outra configuração. Considere um *solenóide* longo que está alinhado paralelamente ao eixo x , Figura 22, e em repouso em S . O campo magnético dentro da bobina é

$$B_x = \mu_0 n I, \quad (4.2.20)$$

onde I é a corrente que passa no fio e n é o número de voltas por unidade de comprimento. O n se aumenta no sistema \bar{S} , então

$$\bar{n} = \gamma n \quad (4.2.21)$$

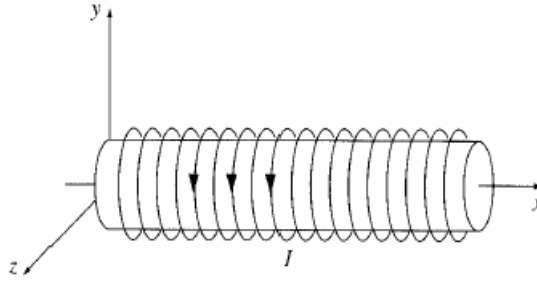
O relógio em S , que acompanha o solenoide fica mais lento e corrente por unidade de carga em \bar{S} é dada por

$$\bar{I} = \frac{1}{\gamma} I. \quad (4.2.22)$$

Substituindo as equações (4.2.21) e (4.2.22) na equação (4.2.20), temos

$$\bar{B}_x = B_x \quad (4.2.23)$$

Figura 22: Um solenóide longo.



Fonte: Eletrodinâmica. David J. Griffiths (2011).

Desta forma o conjunto completo de transformação fica

$$\begin{cases} \bar{E}_x = E_x, & \bar{E}_y = \gamma(E_y - vB_z), & \bar{E}_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ \bar{B}_x = B_x, & \bar{B}_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), & \bar{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{cases} \quad (4.2.24)$$

Agora para alguns casos especiais:

2) Imagine que num dado referencial S $v \approx c$, então

$$\begin{cases} \bar{E}_x = E_x, & \bar{E}_y \approx \infty, & \bar{E}_z \approx \infty \\ \bar{B}_x = B_x, & \bar{B}_y \approx \infty, & \bar{B}_z \approx \infty \end{cases} \quad (4.2.25)$$

Aqui vimos que quando $v \approx c$ os nossos campos nas direções z e y se aproximam ao infinito, ou seja, em altas velocidades as nossas linhas de campos nestas direções ficam tão próximas e fazendo com que as intensidade de campos aumentar brucalmente, e o campo na direção x fica inalterado.

2) Imagine que num dado referencial S o campo magnético é nulo, $\vec{B} = 0$, isto é, $\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z} = 0$. E como os componentes são linearmente independente, então

$$B_x = B_y = B_z = 0. \quad (4.2.26)$$

Para referencial \bar{S} , temos

$$\vec{\bar{B}} = B_x\hat{x} + \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)\hat{y} + \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)\hat{z} = \frac{\gamma v}{c^2}(E_z\hat{y} - E_y\hat{z}). \quad (4.2.27)$$

Da equação (4.2.24) vem

$$\vec{\bar{B}} = \frac{\gamma v}{c^2}(\bar{E}_z\hat{y} - \bar{E}_y\hat{z}). \quad (4.2.28)$$

e como a velocidade é na direção x , isto é, $\vec{v} = v\hat{x}$, então

$$\vec{\bar{B}} = -\frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{\bar{E}}). \quad (4.2.29)$$

3) Agora imagine que no referencial S o em vez de campo magnético, o campo elétrico que é nulo, $\vec{E} = 0$, isto é, $\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k} = 0$. Como os componentes são linearmente independente, então

$$E_x = E_y = E_z = 0. \quad (4.2.30)$$

Para referencial \bar{S} , temos

$$\vec{E} = E_x + \gamma(E_y - vB_z) + \gamma(E_z + vB_y) = -\gamma v(B_z\hat{y} - B_y\hat{z}). \quad (4.2.31)$$

Da equação (4.2.24) vem

$$\vec{E} = -\gamma v(\bar{B}_z\hat{y} - \bar{B}_y\hat{z}). \quad (4.2.32)$$

e como a velocidade é na direção x , isto é, $\vec{v} = v\hat{x}$, então

$$\vec{E} = (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.2.33)$$

Das equações (4.2.28) e (4.2.32) observa-se que em um determinado ponto (referencial) os campos podem ser nulos, mas do outro ponto não serão.

4.3 Aplicações

Conforme realizado por Ramos et. al. (2017), nas duas aplicações que faremos a seguir vamos considerar uma partícula de carga q positiva movendo-se livremente na região $x < 0$ com velocidades \vec{v} na direção x em relação a um referencial S fixo na origem, ou seja, $\vec{v} = v_0\hat{x}$ com v_0 constante. Inicialmente, vamos considerar que na região $x \geq 0$ existe um campo magnético uniforme e em seguida um campo elétrico uniforme. Por outro lado, essa mesma carga está inicialmente fixa em um referencial S' , o qual move-se também com velocidade v_0 na direção x em relação a S . O nosso problema é encontrar as forças na região de transição para $x \geq 0$. Em cada caso, vamos analisar problemas para baixas e altas velocidades [9].

4.3.1 Para região $x \geq 0$ onde existe campo magnético uniforme na direção \hat{k} ($\vec{B} = B_0\hat{k}$)

Caso 1: Baixas velocidades, isto é, $v_0 \ll c$.

O campo magnético que estamos nos referindo pode ser gerado pelos polos de dois ímãs permanentes colocados em paralelos ou na região central de uma bobina de Helmholtz [9].

Antes de penetrar na região $x \geq 0$, não vai existir nenhuma força sobre a

partícula, pois na região $x < 0$ os campos tanto magnético como elétrico são nulos, isto é, $\vec{B} = \vec{E} = 0$. Contudo, como a partícula está em movimento em relação no referencial S , na região $x > 0$ e $x = 0$ (interface), o observador observará a existência de uma força magnética dada por

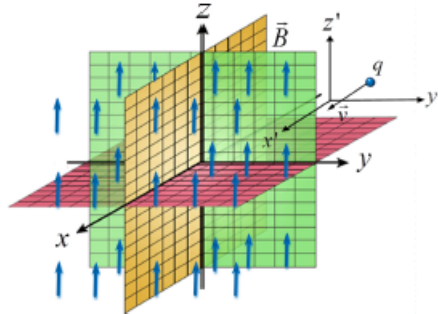
$$\vec{F}^S = \vec{F}_{mag}^S = qv_0B_0(-\hat{j}). \quad (4.3.1)$$

Para o observador no referencial S' onde a partícula se encontra em repouso não haverá força magnética, mas ao penetrar, imediatamente, na região $x = 0$ vai existir um campo magnético variando com o tempo, e de acordo com a *lei de Faraday*, equação (2.2.29), esse campo irá induzir um campo elétrico dado

$$\vec{\nabla}' \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}, \quad (4.3.2)$$

onde \vec{E}' é o campo elétrico induzido no referencial S' e é dado por $\vec{E}' = \vec{E}'_x \hat{i} + \vec{E}'_y \hat{j} + \vec{E}'_z \hat{k}$. Lembrando que a *lei de Faraday* nos diz que o campo magnético variando com o tempo induz o um campo elétrico que rotaciona em torno dessa região onde campo magnético varia.

Figura 23: Sistema de coordenadas contendo um campo magnético uniforme na direção z para $x \geq 0$.



Fonte: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v39n2/1806-1117-rbef-39-02-e2306.pdf>
Acesso em 9 de Maio de 2018.

Do lado esquerdo da equação (4.3.2) temos rotacional de campo elétrico, e sabendo que o rotacional de um vetor é dado, em coordenadas cartesianas por,

$$\vec{\nabla}' \times \vec{E}' = \left(\frac{\partial \vec{E}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \vec{E}'_y}{\partial z'} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial \vec{E}'_x}{\partial z'} - \frac{\partial \vec{E}'_z}{\partial x'} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial \vec{E}'_y}{\partial x'} - \frac{\partial \vec{E}'_x}{\partial y'} \right) \hat{k}. \quad (4.3.3)$$

De acordo com a nossas considerações (baixas velocidades), os efeitos relativísticos são desprezíveis e os campos serão invariantes, logo podemos considerar $\vec{B}' = \vec{B}$. E no referencial S' , inicialmente não temos campo magnético antes da partícula passar por $x = 0$, mas quando ela passa nesta região vai induzir um campo elétrico relacionado

com a variação do campo magnético dado por

$$\Delta \vec{B}' = \vec{B}'_f - \vec{B}'_i = B_0 \hat{k} - 0 = B_0 \hat{k}. \quad (4.3.4)$$

Assim, de acordo com a lei de Lenz (*a corrente induzida em uma espira tem um sentido tal que o campo magnético produzido pela corrente se opõe ao campo magnético que induz a corrente*) o campo elétrico induzido estará no plano xy , isto é, $\vec{E}'_z = 0$. Desta forma, a equação (4.3.2) fica

$$-\frac{\partial \vec{E}'_y}{\partial z'} \hat{i} + \frac{\partial \vec{E}'_x}{\partial z'} \hat{j} + \left(\frac{\partial \vec{E}'_y}{\partial x'} - \frac{\partial \vec{E}'_x}{\partial y'} \right) \hat{k} = -\frac{dB_0 \hat{k}}{dt'}. \quad (4.3.5)$$

Aqui podemos utilizar as equações de Maxwell para calcular o campo elétrico induzido na região de transição, mas também podemos fazer uma aproximação de que nesta região o campo varia linearmente no $x = 0$, então

$$\frac{d\vec{B}'}{dt'} \approx \frac{\Delta \vec{B}'}{\Delta t'}. \quad (4.3.6)$$

E como o nosso interesse que o fenômenos físicos só ocorrem na fronteira, então podemos ampliar a nossa generalização anterior, considerando que no $x = 0$ o campo elétrico induzido \vec{E}' terá somente componente y , então

$$\frac{\partial \vec{E}'_y}{\partial x'} = \frac{d\vec{E}'_y}{dx'} \approx \frac{\Delta \vec{E}'_y}{\Delta x'}. \quad (4.3.7)$$

Considerando as suposições feitas nas equações (4.3.6) e (4.3.7), então podemos reescrever as equação (4.3.5) da seguinte forma

$$\frac{\Delta \vec{E}'_y}{\Delta x'} = -\frac{\Delta \vec{B}'}{\Delta t'} \rightarrow \Delta \vec{E}'_y = -\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \Delta \vec{B}' = -v' \Delta \vec{B}'. \quad (4.3.8)$$

Na interface $\Delta \vec{E}'_y = \vec{E}'_y$, $\Delta \vec{B}' = B_0$ e a velocidade $v_0 = -v'$, logo o campo elétrico induzido pela variação de campo magnético visto do referencial S' será

$$\vec{E} = \vec{E}'_y(-\hat{j}) = v_0 B_0(-\hat{j}). \quad (4.3.9)$$

E a força que age sobre uma partícula que move como referencial S' é simplesmente elétrica. Logo teremos

$$\vec{F}^{S'} = \vec{F}_{el}^{S'} = q\vec{E} = qv_0 B_0(-\hat{j}). \quad (4.3.10)$$

Comparando as equações (4.3.1) e (4.3.10) veremos que

$$\vec{F}_{mag}^S = \vec{F}_{el}^{S'}. \quad (4.3.11)$$

Em suma, no referencial S' a força é gerada por um campo elétrico induzido e no referencial S a força é gerada por um campo magnético.

Caso 2: Altas velocidades, isto é, $v_0 \approx c$.

Nesta condição não podemos desprezar os efeitos relativísticos, pois devemos levar em conta a transformação dos campos e também não podemos considerar o campo elétrico ou o campo magnético separadamente, mas sim um campo eletromagnético, pois nas transformação os componentes do campo elétrico combina com os componentes de campos magnéticos e vice-versa. Considerando novamente que o referencial S' está movendo com velocidade $\vec{v} = v_0 \hat{i}$ em relação ao referencial S , e os componentes do campo eletromagnético nesses referenciais são dados pela equações (4.2.24)

$$\begin{cases} \bar{E}_x = E_x, & \bar{E}_y = \gamma(E_y - v_0 B_z), & \bar{E}_z = \gamma(E_z + v_0 B_y) \\ \bar{B}_x = B_x, & \bar{B}_y = \gamma\left(B_y + \frac{v_0}{c^2} E_z\right), & \bar{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{v_0}{c^2} E_y\right) \end{cases} \quad (4.3.12)$$

onde $v = v_0$ e o fator de Lorentz será $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$. E para observador que está no referencial S a equações (4.3.12) se tornam

$$\begin{cases} \vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (0, 0, 0) \\ \vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, B_0) \end{cases} \quad (4.3.13)$$

E para observador que está no referencial S' vem

$$\begin{cases} \vec{E}' = (E'_x, E'_y, E'_z) = (0, -\gamma v_0 B_0, 0) \\ \vec{B}' = (B'_x, B'_y, B'_z) = (0, 0, \gamma B_0) \end{cases} \quad (4.3.14)$$

No referencial S a força que atua sobre a partícula será força magnética, pois a partícula estará em movimento em relação a esse referencial, logo

$$\vec{F}^S = \vec{F}_{mag}^S = qv_0 B_0 (-\hat{j}). \quad (4.3.15)$$

E no referencial S' a força que atua sobre a partícula será força elétrica devido a variação do campo magnético. Esta força é obtida na transformação do campo eletromagnético devido a alta velocidade da partícula. Então

$$\vec{F}^{S'} = \vec{F}_{el}^{S'} = q\vec{E}' = \gamma qv_0 B_0 (-\hat{j}). \quad (4.3.16)$$

Comparando as equações (4.3.15) e (4.3.16) veremos que

$$\vec{F}^{S'} = \gamma \vec{F}^S. \quad (4.3.17)$$

As linhas de força ficam mais próximas nas direções transversais ao movimento, logo, a intensidade de campo aumenta com fator γ [9].

4.3.2 Para região $x \geq 0$ onde existe campo elétrico uniforme na direção \hat{j} ($\vec{E} = E_0 \hat{j}$)

Caso 1: Baixas velocidades, isto é, $v_0 \ll c$.

Lembrando que a partícula antes de penetrar na região $x \geq 0$, não existia nenhuma força, pois na região $x < 0$ os campos tanto magnético como elétrico são nulos, isto é, $\vec{B} = \vec{E} = 0$. Em relação ao referencial S a partícula está em movimento com velocidade $v = v_0 \hat{j}$ e ela está sujeita a um campo elétrico $\vec{E} = E_0 \hat{j}$. Este campo elétrico que mencionamos aqui pode ser gerado por um capacitor entre as placas [9]. Então a força que age sobre a partícula neste referencial será puramente elétrica dada por

$$\vec{F}^S = \vec{F}_{el}^S = qE_0 \hat{j}. \quad (4.3.18)$$

Para o observador no referencial S' onde a partícula se encontra em repouso o observador observará o campo elétrico variando com o tempo quando penetra na região $x = 0$. E de acordo com a lei de Ampère como o campo elétrico está variando vai induzir um campo magnético, equação (2.2.29), dado por

$$\nabla' \times \vec{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}. \quad (4.3.19)$$

A equação (4.3.19) diz que *a variação do campo elétrico no tempo induz um campo magnético que rotaciona em torno da região onde o campo elétrico variou*. Desprezando os efeitos relativísticos podemos considerar que o campo elétrico é invariante em baixas velocidades e podemos escrever o campo da seguinte maneira $\vec{E}' = \vec{E}$. E usando a mesma definição do rotacional feito na equação (4.3.3) temos

$$\vec{B}' = \frac{E_0 v_0}{c^2} (-\hat{k}), \quad (4.3.20)$$

onde \vec{B}' é o campo magnético induzido no referencial S' e é dado por $\vec{B}' = \vec{B}'_x \hat{i} + \vec{B}'_y \hat{j} + \vec{B}'_z \hat{k}$. Aconte um fato curioso aqui. *Mesmo havendo um campo magnético não haverá uma força magnética aplicada no referencial S' , pois a partícula está em repouso em relação a esse referencial, e a força será puramente elétrica*, então

$$\vec{F}^{S'} = \vec{F}_{el}^{S'} = qE_0 \hat{j}. \quad (4.3.21)$$

Comparando as equações (4.3.18) e (4.3.21) teremos

$$\vec{F}^S = \vec{F}^{S'} = qE_0\hat{j}. \quad (4.3.22)$$

Isto mostra que mesmo que os dois estiveram em referenciais diferentes eles descreveram o mesmo processo com os mesmo campo e força.

Caso 2: Altas velocidades, isto é, $v_0 \approx c$.

Como foi falado anteriormente, neste caso (altas velocidades) temos que considerar campo eletromagnético em vez de campos separados, e lembrando que o campo elétrico era dado por $\vec{E} = \vec{E}_0\hat{j}$ substituindo nas equações (4.3.12) para observador no referencial S , teremos

$$\begin{cases} \vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (0, \vec{E}_0, 0) \\ \vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad (4.3.23)$$

E para observador que está no referencial S' vem

$$\begin{cases} \vec{E}' = (E'_x, E'_y, E'_z) = (0, \gamma\vec{E}_0, 0) \\ \vec{B}' = (B'_x, B'_y, B'_z) = (0, 0, -\frac{\gamma v_0}{c^2}\vec{E}_0) \end{cases} \quad (4.3.24)$$

Então a força que age sobre a partícula no referencial S será

$$\vec{F}^S = \vec{F}_{el}^S = qE_0\hat{j}. \quad (4.3.25)$$

A força será puramente elétrica pois partícula está em repouso neste referencial e é obtida na transformação do campo eletromagnético devido a alta velocidade da partícula. Então

$$\vec{F}^{S'} = \vec{F}_{el}^{S'} = q\vec{E}'_y\hat{j} = \gamma q_0 E_0(\hat{j}). \quad (4.3.26)$$

Comparando as equações (4.3.25) e (4.3.26) veremos que

$$\vec{F}^{S'} = \gamma\vec{F}^S. \quad (4.3.27)$$

Da mesma forma que acontece no exemplo anterior aqui também as linhas de força ficam mais próximas nas direções transversais ao movimento, logo, a intensidade de campo aumenta com fator γ .

5 CONCLUSÕES

Ao longo deste estudo buscamos apresentar as conexões entre as duas áreas da Física, a Teoria do Eletromagnetismo e a Teoria da Relatividade Restrita. Esta conexão começou desde que Hendrik Lorentz descobriu a discordância de Eletromagnetismo com a Mecânica Newtoniana. E motivado pela descoberta de Lorentz e experimento de Michelson e Morley, Einstein conseguiu através de dois postulados formalizar a Teoria da Relatividade Restrita.

O nosso interesse pelo tema surgiu quando percebemos qão poucas abordagens bibliográficas são dedicadas as conexões desta duas áreas na Graduação, tanto pelas abordagens históricas como pelas abordagens teóricas ou aplicações, esquecendo muitas vezes que historicamente a Teoria da Relatividade Restrita surgiu na tentativa de resolver um problema da Teoria do Eletromagnetismo.

A buscar por compreender tais conexões nos levou a dividir esse trabalho em três partes fundamentais. Logo pela primeira parte, preocupado com a compreensão mais didática começamos com o primeiro capítulo a realçar essa conexão de forma primordialmente possível para que o capítulo posterior o leitor já conhece onde iniciou essa relação. Neste caso, abordagem histórica feita nesse capítulo nos mostra que as duas teorias sempre estiveram conectadas entre si, mas pela nossa surpresa essa conexão é raramente faladas nos livros para que os alunos possam conhecer onde começa esta ponte.

No capítulo 2 era necessário conhecer o formalismo da Eletrodinâmica clássica, isto é, as quatro equações de Maxwell para isso fomos movidos a dividir o capítulo em dois sub-capítulos, ou seja, seção para melhor entendimento. A primeira seção eram Eletrostática onde destacamos a lei de Coulomb mais o princípio da superposição que resumem toda a Eletrostática. Usando a definição do campo elétrico foi possível encontrar a Divergente e o Rotacional do mesmo campo. Em seguida, na seção dois, era fundamental encontrar o campo magnético e equação de Biot-Savart para escrever a Divergente e o Rotacional do campo magnético. Da mesma forma que a lei de Coulomb e o princípio da superposição que resumem toda a Eletrostática, também a lei de Biot-Savart mais o princípio da superposição que resumem toda a Magnetostática.

Neste capítulo, o foco era escrever as quatro equações de Maxwell. Pois, conhecendo essas equações nos facilitaria a conhecer mais profundamente o conteúdo antes de entender as conexões. E não nada melhor comparar duas coisas que você já conhece. O capítulo 3 era reservado para Relatividade Restrita, pois era muito importante conhecer a segunda parte da nossa conexão, para isso foi necessário conhecer a Invariância de Galileu que é o primórdio das Transformações de Lorentz. Depois obtermos as Transformações de Lorentz conseguimos obter as Geometrias da Relatividade e com isso, fazer algumas correções na Mecânica Newtoniana.

E como o objetivo principal desse trabalho é conhecer as relações entre as duas

áreas, Teoria do Eletromagnetismo e a Teoria da Relatividade Restrita, fomos instigados a falar do capítulo 4 que é sobre Eletrodinâmica Relativística e Aplicações. Na parte da Eletrodinâmica Relativística foi falado dos campos em dois referencias e como podemos transformar. E como a base de toda a teoria e a demonstração, isso nos levou a fazer duas aplicações de altas e baixas velocidades para mais familiarização do assunto. Assuntos de extrema importância para esse trabalho e para o leitor, pois vai facilitar muito na compreensão desta conexão. De modo geral foi possível mostrar que na realidade o eletromagnetismo é relativístico.

E no que refere a produção do conhecimento acho que esse trabalho irá contribuir muito nas aulas de Física, principalmente na Teoria de Relatividade restrita, onde o professor pode aproveitar para mostrar aos estudantes que a relatividade restrita não é só a contração do espaço, dilatação temporal ou simultaneidade, mais sim, uma teoria com bastantes aplicações relacionadas as outras áreas de Física, principalmente, Teoria do Eletromagnetismo, ou seja, esse trabalho de Conclusão de Curso pode suprimir uma carência formativa de diversos estudantes de Graduação em Física.

Como estudante este trabalho me deu maior segurança e fortalecimentos em muitos dos conceitos que para mim eram abstratos por não sabia de suas aplicações e também me proporciona novos conhecimentos e mais bagagens para a minha futura vida profissional, que é a carreira docente. No início era um tema bastante desafiador, mas pensando agora, apesar de muitas dificuldades, aprendi muito. E como tudo e qualquer atividade humana requer esforço creio que vale a pena.

REFERÊNCIAS

- [1] História da física. In: **Wikipédia: a enciclopédia livre**. Disponível em <[https://pt.wikipedia.org/wiki/HistC3B3ria-da-fC3ADsica](https://pt.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B3ria-da-f%C3%ADsica)>. Acesso em 17 de Abril de 2018.
- [2] ARAGÃO, M. J. **História da Física**. Interciência, 1ª Edição., 2006.
- [3] Magnetismo. In: **Mundo da Escola**. Disponível em <<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/magnetismo.htm>>. Acesso em 17 de Abril de 2018.
- [4] MARTINS, R. A. **O estudo experimental sobre o magnetismo na Idade Média, com uma tradução da carta sobre o magneto de Petrus Peregrinus**. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 39, n^o1, e1601 (2017). Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v39n1/1806-1117-rbef-39-01-e1601.pdf>. Acesso em: 23 de Abril de 2018.
- [5] PIRES, A. S. T.. **Evolução das ideias da Física**. Livraria da Física, 2ª Edição., 2011.
- [6] RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; JEARL, W. **Fundamentos de Física**. Eletromagnetismo. v. 3, 9ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [7] RAFAEL, P. Luigi Galvani. In: **Física e Cidadania**, n^o 2, São Paulo, .2017. Disponível em < <http://www.ufjf.br/fisicaecidadania/ciencia-uma-construcao-humana/mentes-brilantes/luigi-galvani/>>. Acesso em: 23 de Abril de 2018.
- [8] PURCELL, E. M. **Curso de Física de Berkeley**. Eletricidade e Magnetismo. v. 2, 4ª Edição. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1970.
- [9] RAMOS, R. O. et al. Sobre a indução do campo eletromagnético em referenciais inerciais mediante transformações de Galileu e Lorentz. Eletromagnetismo. In: **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, n^o 2, São Paulo, .2017.
- [10] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. Volume 4 - Ótica, Relatividade, Física Quântica. Editora Edgard Blucher. 4ª Edição, 2002.
- [11] GRIFFITHS, David J. **Eletrodinâmica**. Tradução: Heloísa Coimbra de Souza; revisão técnica Antônio Manuel Mansanares. 3ª Edição. São Paulo: Pearson Addison

Wesley, 2011.

[12] WATARI, K. **Mecânica Clássica**. v. 1, 2^a Edição. São Paulo. Editora Livraria de Física. 2003.

[13] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. Mecânica. v. 1, 5^a Edição. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2013.

[14] STEWART, J. **Cálculo** - Volume 1, 7^a Edição. São Paulo: Cengage Learning, 2011.