



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA  
AFRO-BRASILEIRA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
CURSO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA

JANAÍNA DA SILVA ARRUDA

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E O PROBLEMA DE PLATEAU

ACARAPE

2018

JANAÍNA DA SILVA ARRUDA

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E O PROBLEMA DE PLATEAU

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduada em Ciências da Natureza e matemática com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

ACARAPE - CE

2018

Aqui ficará a ficha que será feita pela biblioteca

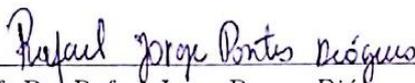
JANAÍNA DA SILVA ARRUDA

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E O PROBLEMA DE PLATEAU

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduada em Ciências da Natureza e matemática com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 03 / 01 / 2018.

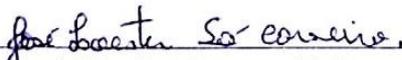
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Ms. José Loester Sá Carneiro  
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

## AGRADECIMENTOS

À Deus, por me fortalecer e me fazer superar as dificuldades.

Aos meus familiares, em especial minha mãe Lúcia que não mediu esforços para me apoiar sempre que precisei.

Ao meu namorado, que sempre me apoiou em todos os momentos.

Aos meus amigos, em especial da graduação, Marcia Rodrigues, Tiago Silveira, Bruno Roberto, Emanuela Ingrid, Emanuely Martins, Janiele Lima, Karina Andrade, Joel Lopes, Rodolfo Oliveira e Ricardo Pereira, pelo companheirismo e amizade.

Ao Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes, pela excelente orientação, agradeço as cobranças, exigências, paciência e dedicação com tal trabalho.

Aos meus professores da graduação, em especial, Kelma Gomes, Danila Tavares, Joserlan Perote, Aristeu Rosendo, Damião Araújo e Wesley Lozorio pelo valioso conhecimento que me forneceram.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira e Prof. Ms. Jos Loester Sá Carneiro pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

À Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, pela oportunidade de fazer o curso. Sou grata à cada membro do corpo docente, à direção e a administração dessa instituição de ensino.

“O senhor é o pastor que me conduz; não me falta coisa alguma.”

Salmo 22(23)

## RESUMO

Neste trabalho iremos estudar a teoria das superfícies mínimas e as relações existentes com as películas de sabão, que originou o problema de Plateau. Uma superfície é dita mínima se sua curvatura média é identicamente nula. Lagrange, foi o primeiro a definir uma superfície mínima, obtendo uma equação diferencial parcial que descrevia as superfícies mínimas que são gráficos de funções diferenciáveis. Mesmo sendo de uma disciplina considerada básica, as superfícies mínimas ainda estão sendo investigadas, pois há ligações profundas com funções analíticas de variáveis complexas e com equações diferenciais parciais. Os resultados dessa teoria, em geral, são de fácil visualização e de difíceis provas. As superfícies mínimas são geralmente associadas às películas de sabão, que podem ser obtidas mergulhando uma moldura formada por um arame em uma solução de sabão e retirando-a em seguida com cuidado. Tal superfície, em seus pontos regulares, tem a curvatura média nula. A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau, que, a grosso modo, pode ser descrito da seguinte maneira: provar que para cada curva fechada  $C$  existe uma superfície  $S$  de área mínima tendo  $C$  como fronteira. Nesse sentido, com o objetivo de compreender essa relação entre superfícies mínimas e películas de sabão, realizou-se alguns experimentos com películas de sabão, afim de obter representações de superfícies mínimas. Os resultados dos experimentos foram explicados fisicamente.

**Palavras-chave:** Superfícies mínimas. Bolhas de sabão. Problema de Plateau.

## ABSTRACT

In this work we will study the theory of minimal surfaces and your connections with the soap bubble, which originated the Plateau's problem. A surface is said to be minimal if its mean curvature is identically null. Lagrange, was the first to define a minimum surface, obtaining a partial differential equation that described the minimal surfaces that are graphs of differentiable functions. Even though it is a basic discipline, the minimal surfaces are still being investigated, because there are deep connections with analytical functions of complex variables and with partial differential equations. The results of this theory in general are easy to see and difficult to prove. Minimal surfaces are generally associated with soap bubble, which can be obtained by dipping a wire-forming frame into a soap solution and then carefully withdrawing it. Such a surface, at its regular points, has a zero mean curvature. The connection between minimal surfaces and soap bubble has motivated the famous Plateau Problem, which, roughly speaking, can be described as follows: To prove that for every closed curve  $C$  there exists a surface  $S$  of minimal area having  $C$  as border. In this sense, in order to understand this relationship between minimal surfaces and soap bubble, some experiments were carried out with soap bubble in order to obtain representations of minimal surfaces. The results of the experiments were explained physically

**Keywords:** Minimal surfaces. Soap Bubbles. Plateau Problem.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Parametrização de superfície . . . . .	13
Figura 2 – Esfera . . . . .	15
Figura 3 – Parabolóide hiperbólico . . . . .	16
Figura 4 – Catenóide . . . . .	46
Figura 5 – Superfície de película de sabão . . . . .	47
Figura 6 – Superfície de película de sabão . . . . .	47
Figura 7 – Superfície de película de sabão . . . . .	47
Figura 8 – Película de sabão diminuindo a área devido a tensão superficial . . . . .	48

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	SUPERFÍCIES . . . . .	13
2.1	Superfícies Regulares . . . . .	13
2.2	Primeira forma fundamental . . . . .	16
2.3	Segunda forma fundamental . . . . .	18
2.4	Curvaturas . . . . .	22
3	SUPERFÍCIES MINÍMAS . . . . .	25
3.1	Caso Particular: O gráfico . . . . .	34
4	O PROBLEMA DE PLATEAU . . . . .	45
4.1	Experimentos de Plateau . . . . .	46
5	CONCLUSÃO . . . . .	49
	REFERÊNCIAS . . . . .	50

## 1 INTRODUÇÃO

As superfícies mínimas são casos especiais de superfícies e é um tema clássico da geometria diferencial. Neste trabalho iremos estudar a teoria das superfícies mínimas e as relações existentes com as películas de sabão, que originou o problema de Plateau.

Uma superfície é dita mínima se sua curvatura média é identicamente nula. Os estudos das superfícies mínimas foi iniciado por Euler em 1740, onde descobriu uma superfície que apresentava para um dado volume a menor área superficial possível a partir da rotação da catenária em relação ao eixo central, a qual chamou de *alysseide*, atualmente conhecida como catenoide.

Dando continuidade aos estudos de Euler, Lagrange em 1760, propôs o seguinte problema: dada uma curva fechada  $C$  sem autointerseções, achar uma superfície com a menor área dentre todas as que tem esta curva como fronteira. Lagrange apresentou esse problema como exemplo de um método desenvolvido, por ele, para achar curvas ou superfícies que minimizassem certas quantidades, como área, energia, comprimento, etc. Em seus estudos, obteve uma equação diferencial parcial que descrevia as superfícies mínimas que são gráficos de funções diferenciáveis, dada por

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0 \quad (1)$$

Ou seja, para determinar se superfícies, que são gráficos de funções, são mínimas devem satisfazer a equação (1). Apesar das suas descobertas, Lagrange não apresentou exemplos não-triviais de superfícies mínimas, apenas o plano.

Em 1776 o matemático francês J. B. M. C. Meusnier de la Place, descobriu outro exemplo de superfície mínima, o helicóide. Meusnier interpretou geometricamente a equação desenvolvida por Lagrange, percebendo que para cada ponto de uma superfície mínima as curvaturas principais, possuem módulos iguais e sentidos diferentes, anulando assim a curvatura média.

No entanto, o desenvolvimento do estudo das superfícies mínimas se deu quando se observou sua conexão com as bolhas de sabão. Um contorno feito de arame quando mergulhado numa solução de sabão e retirado cuidadosamente forma uma superfície e, por meio de explicações físicas, pode-se provar que tal superfície é mínima.

A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau, um físico belga que se dedicou em realizar experimentos com películas de sabão em meados de 1850. No entanto, os resultados dos experimentos de Plateau foram explicados fisicamente. Assim, surgiu o problema de Plateau, dando continuidade aos estudos de Lagrange: provar que, para cada curva fechada  $C \subset \mathbb{R}^3$ , existe uma superfície  $S$  de área mínima tendo  $C$  como fronteira. Isto é, queremos minimizar a área dentre todas as superfícies do  $\mathbb{R}^3$  com fronteira dada  $C$ .

Neste trabalho nosso objetivo é entender algumas propriedades importantes das superfícies mínimas e relacioná-las com as películas de sabão, realizando alguns experimentos, como os realizados por Plateau.

No capítulo 2 apresentamos uma revisão de geometria diferencial, definição de superfícies regulares e suas principais estruturas. No capítulo 3 damos início à teoria das superfícies mínimas, calculando exemplos e desmostrando resultados importantes. No capítulo 4 trazemos um breve histórico sobre Plateau e alguns experimentos com películas de sabão.

## 2 SUPERFÍCIES

Neste capítulo iremos tratar do estudo das propriedades locais das superfícies no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Iniciaremos com a definição de superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ , demonstrando alguns resultados e exemplos. Após, introduziremos algumas propriedades importantes relacionadas à superfícies regulares: a primeira e a segunda forma fundamental.

### 2.1 Superfícies Regulares

**Definição 2.1** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular, se para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\mathbf{X} : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  em  $V \cap S$  tal que:

- i)  $\mathbf{X}$  é diferenciável ( $C^\infty$ );
- ii)  $\mathbf{X}$  é um homeomorfismo;
- iii) para todo  $q \in U$ , a diferencial  $d\mathbf{X}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

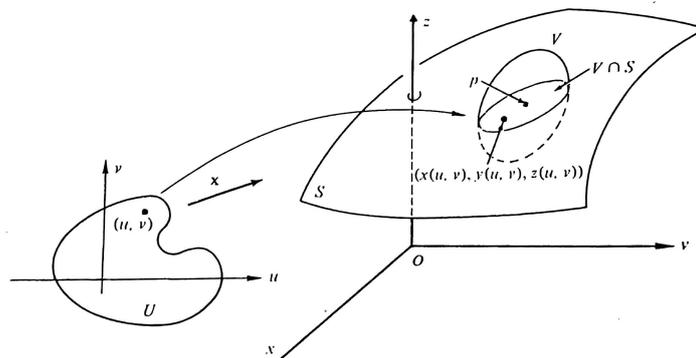


Figura 1 – Parametrização de superfície  
Fonte: Carmo, 2008, p. 62.

Onde  $\mathbf{X}$  é uma parametrização e a vizinhança  $V \cap S$  coordenada de  $p$  em  $S$ .

Note que o item i) da Definição 2.1 uma aplicação diferenciável significará que todas as funções coordenadas tem derivadas parciais contínuas de todas ordens em seu domínio. Já o item ii)  $X$  possui inversa  $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  contínua. No item iii) temos a condição de regularidade que vai garantir a existência de plano tangente ( $T_p S$ ) em cada ponto da superfície.

Antes de falarmos sobre o plano tangente, iremos definir o vetor tangente à superfície como sendo o vetor tangente a uma curva da superfície.

**Definição 2.2** Seja  $S$  é uma superfície parametrizada regular. Dizemos que um vetor  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  é um vetor tangente a  $S$  em  $p \in S$  se  $w = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  é uma curva

parametrizada diferenciável, com  $\alpha(0) = p$ .

Os vetores  $\mathbf{X}_u(u_0, v_0)$  e  $\mathbf{X}_v(u_0, v_0)$  são vetores tangentes a  $S$  em  $p = \mathbf{X}(u_0, v_0)$ , já que são tangentes às curvas coordenadas  $\mathbf{X}(u, v_0)$  e  $\mathbf{X}(u_0, v)$ .

**Definição 2.3** O plano tangente a  $S$  em  $p$  é o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $p$ , que denotamos por  $T_p S$ .

A matriz associada a  $d\mathbf{X}_q$  nas bases canônicas é a matriz jacobiana nas bases canônicas  $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas  $(u, v)$  e  $\{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas  $(x, y, z)$ . Para cada ponto  $q = (u_0, v_0) \in U$  escrevemos

$$\mathbf{J}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Onde,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} = d\mathbf{X}_p(e_1),$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = d\mathbf{X}_p(e_2).$$

Note que as seguintes informações são equivalentes.

- i)  $d\mathbf{X}_p$  é injetora;
- ii) a matriz  $\mathbf{J}(u_0, v_0)$  tem posto 2;
- iii) os vetores  $\mathbf{X}_u(u_0, v_0)$ ,  $\mathbf{X}_v(u_0, v_0)$  são linearmente independentes;
- iv)  $\mathbf{X}_u(u_0, v_0) \wedge \mathbf{X}_v(u_0, v_0) \neq 0$ .

Logo, para verificarmos o item iii) da Definição 2.1, basta provarmos algum dos itens acima. Vejamos um exemplo de superfície regular.

**Exemplo 2.1** A esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície regular.

**Demonstração:** A esfera unitária  $S^2$  possui a seguinte parametrização para o hemisfério superior positivo  $z$

$$\mathbf{X}_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dadas por

$$\mathbf{X}_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}), \quad (u, v) \in U.$$

Onde  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$  e  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

A condição 1 é satisfeita, pois como  $u^2 + v^2 < 1$ , a função  $\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}$  possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Observamos que  $\mathbf{X}_1$  é bijetiva, pois  $\mathbf{X}_1$  é injetiva e portanto é bijetiva sobre sua imagem  $\mathbf{X}_1(U)$ . Note ainda que  $\mathbf{X}_1^{-1}(x, y, z) = (x, y)$  é a inversa de  $\mathbf{X}_1$  restrita a  $\mathbf{X}_1(U)$ .

Para verificarmos a condição 3, vamos mostrar que o jacobiano tem posto 2. De fato, considere o determinante da submatriz do jacobiano  $\mathbf{J}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Assim, a condição 3 é satisfeita.

Para cobrirmos toda a esfera utilizamos parametrizações similares (veja figura 2). Para o hemisfério superior negativo  $z$ , temos a parametrização

$$\mathbf{X}_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}).$$

Para os planos  $xz$  e  $zy$ , temos as parametrizações

$$\mathbf{X}_3(x, z) = (x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z),$$

$$\mathbf{X}_4(x, z) = (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z)$$

$$\mathbf{X}_5(y, z) = (+\sqrt{1 - (z^2 + y^2)}, y, z)$$

$$\mathbf{X}_6(y, z) = (-\sqrt{1 - (z^2 + y^2)}, y, z)$$

□

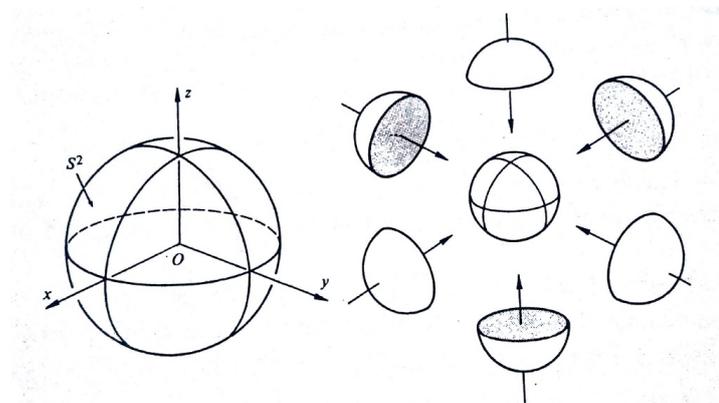


Figura 2 – Esfera  
Fonte: Carmo, 2008, p. 66.

O Exemplo 2.1 mostra que para determinarmos se um dado subconjunto do  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície regular pela definição, pode ser cansativo. A proposição a seguir nos permite determinar se o gráfico de uma função  $z = f(x, y)$  é um superfície regular.

**Proposição 2.1** *Se  $f(u, v)$  é uma função real diferenciável, onde  $(u, v) \in U$ , aberto de  $\mathbb{R}^2$ , então a aplicação  $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  é uma superfície parametrizada regular, que descreve o gráfico da função  $f$ .*

**Demonstração:** Como  $f$  é diferenciável, então basta provar que a matriz jacobiana de  $\mathbf{X}$  tem posto 2. De fato, o Jacobiano é dada por

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$$

e claramente tem posto 2. □

**Exemplo 2.2** *A aplicação dada por*

$$\mathbf{X}(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right) \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

*é uma superfície regular, cujo traço é o parabolóide hiperbólico.*

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right\}.$$

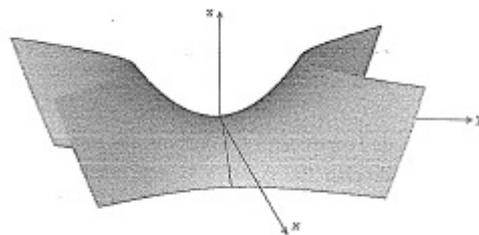


Figura 3 – Parabolóide hiperbólico  
Fonte: Tenenblat, 2008, p. 115 .

## 2.2 Primeira forma fundamental

A primeira forma fundamental é uma forma quadrática importante na estrutura geométrica associada a uma superfície. Ela permite realizar medidas sobre uma superfície, como comprimentos de curvas, ângulos entre vetores tangentes e áreas de regiões.

**Definição 2.4** A primeira forma fundamental da superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é a aplicação  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0.$$

Vamos expressar a primeira forma fundamental em coordenadas locais. Sejam  $S$  uma superfície regular dada por  $\mathbf{X}(u, v)$  e  $p$  um ponto de  $S$ . Seja o vetor  $w \in T_p S$  e considere a curva parametrizada  $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$   $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , com  $p = \alpha(0) = \mathbf{X}(u_0, v_0)$  e  $\alpha'(0) = w$ . Calculando a forma quadrática  $I_p$ , obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{X}_u u' + \mathbf{X}_v v', \mathbf{X}_u u' + \mathbf{X}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle_p (u')^2 + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle_p (v')^2 \\ &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle_p (v')^2 \end{aligned}$$

Usando a notação

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle(u_0, v_0) \\ F(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle(u_0, v_0) \\ G(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle(u_0, v_0) \end{aligned}$$

Temos

$$I_p(\alpha'(0)) = E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2.$$

$E$ ,  $F$  e  $G$  são conhecidos como os coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$  de  $T_p S$ . Variando  $p$  temos as funções diferenciáveis  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  e  $G(u, v)$ .

Vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental de algumas superfícies.

**Exemplo 2.3** Considere o cilindro reto sobre o círculo  $x^2 + y^2 = 1$  com parametrização  $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(u, v) &= (\cos u, \sin u, v), \\ U &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ \mathbf{X}_v &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \text{sen}^2 u + \text{cos}^2 v = 1, \\ F &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = 1. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.4** *Seja o Helicoide parametrizado por*

$$\mathbf{X}(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), au).$$

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u &= (-v \sin(u), v \cos(u), a) \\ \mathbf{X}_v &= (\cos(u), \sin(u), 0). \end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = v^2 \text{sen}^2(u) + v^2 \text{cos}^2(u) + a^2 \\ &= v^2 + a^2, \\ F &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = -v \sin(u) \cos(u) + v \sin(u) \cos(u) \\ &= 0, \\ G &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = \text{cos}^2(u) + \text{sen}^2(u) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

### 2.3 Segunda forma fundamental

Antes de falarmos sobre a segunda forma fundamental, iremos introduzir o conceito de vetor normal unitário. Dado um ponto  $p$  de uma superfície regular  $S$ , existem dois vetores unitários em  $\mathbb{R}^3$  que são normais ao plano tangente  $T_p S$ , chamados de vetores normais unitários em  $p$ . Fixada uma parametrização  $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  em  $p \in S$ , podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto  $q \in \mathbf{X}(U)$ , pela seguinte regra

$$N(q) = \frac{\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|}(q), \quad q \in \mathbf{X}(U).$$

Assim temos a aplicação diferenciável  $N : \mathbf{X}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $q \in \mathbf{X}(U)$  um vetor normal unitário  $N(q)$ .

Lembramos que se  $V$  é um conjunto aberto em  $S$  e  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável que associa a cada  $q \in U$  um vetor unitário em  $q$ , dizemos que  $N$  é um campo diferenciável de vetores normais unitários. Assim, a aplicação  $N : \mathbf{X}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que definimos acima é um campo diferenciável de vetores.

**Definição 2.5** *Uma superfície regular é orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda superfície e, a escolha de um tal campo é chamada uma orientação de  $S$ .*

No entanto, nem sempre é possível estender essa aplicação, de maneira diferenciável à superfície  $S$ , ou seja, nem toda superfície admite um campo diferenciável de vetores unitários definidos sobre toda superfície. Por exemplo, a faixa de Möbius não é orientável, para mais detalhes veja (CARMO, 2008).

Iremos, portanto, tratar apenas de superfícies orientáveis. No que segue,  $S$  denotará uma superfície regular orientável. Pelas observações acima, podemos definir a aplicação de Gauss.

**Definição 2.6** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$ , assim definida, é chamada aplicação de Gauss de  $S$ .

A diferencial  $dN_p$  de  $N$  em  $p$  é uma aplicação linear de  $T_p S$  em  $T_{N(p)} S^2$ . Como  $T_p S$  e  $T_{N(p)} S$  são os mesmos espaços vetoriais,  $dN_p$  pode ser vista como uma aplicação linear em  $T_p S$ .

**Proposição 2.2** *A diferencial  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

**Demonstração:** Como  $dN_p$  é linear, então basta verificar que  $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$  para uma base  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_p S$ . Seja  $\mathbf{X}(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  e  $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$  a base associada de  $T_p S$ . Se  $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$  é uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(\mathbf{X}_u u'(0) + \mathbf{X}_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0). \end{aligned}$$

Em particular,

$$dN_p(\mathbf{X}_u) = N_u,$$

$$dN_p(\mathbf{X}_v) = N_v.$$

Logo, devemos mostrar que

$$\langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle = \langle \mathbf{X}_u, N_v \rangle.$$

Derivando  $\langle N, \mathbf{X}_u \rangle = 0$  e  $\langle N, \mathbf{X}_v \rangle = 0$  em relação a  $v$  e  $u$ , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle + \langle N, \mathbf{X}_{uv} \rangle &= 0 \\ \langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle + \langle N, \mathbf{X}_{vu} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle &= -\langle N, \mathbf{X}_{uv} \rangle, \\ \langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle &= -\langle N, \mathbf{X}_{vu} \rangle. \end{aligned}$$

E portanto

$$\langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle.$$

□

Como  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  é uma aplicação auto-ajunta podemos associar a  $dN_p$  uma forma quadrática  $Q$  em  $T_p S$ , dada por  $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$ ,  $v \in T_p S$ .

**Definição 2.7** A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_p S$  por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), (v) \rangle$  é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

Para calcular os coeficientes da segunda forma fundamental considere  $\mathbf{X}(u, v)$  uma parametrização em um ponto  $p \in S$  de uma superfície  $S$  e seja  $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ . O vetor tangente a  $\alpha(t)$  é  $\alpha'(t) = \mathbf{X}_u u' + \mathbf{X}_v v'$ . Restringindo o vetor normal  $N$  a curva  $\alpha(t)$ , temos

$$N(t) = N(\alpha(t)) = N(u(t), v(t))$$

Como o vetor tangente  $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$  temos

$$\begin{aligned} N'(t) &= dN_p(\alpha'(t)) \\ dN(\alpha'(t)) &= N_u u' + N_v v' \end{aligned} \tag{2}$$

Como  $N_u$  e  $N_v$  pertencem a  $T_pS$ , podemos escrevê-los como combinação linear

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{X}_u + a_{21}\mathbf{X}_v \\ N_v &= a_{12}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v \end{aligned}$$

Substituindo em (2), temos

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= (a_{11}\mathbf{X}_u + a_{21}\mathbf{X}_v)u' + (a_{12}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v)v' \\ &= a_{11}\mathbf{X}_u u' + a_{21}\mathbf{X}_v u' + a_{12}\mathbf{X}_u v' + a_{22}\mathbf{X}_v v' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{X}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{X}_v. \end{aligned}$$

Isto é

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que na base  $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ ,  $dN$  é dada pela matriz  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base  $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$  é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{X}_u u' + \mathbf{X}_v v' \rangle \\ &= -(u'^2 \langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle + u'v' \langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle + v'u' \langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle + v'^2 \langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle). \end{aligned}$$

No entanto,  $\langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle = \langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle$  então

$$II_p(\alpha') = -(u'^2 \langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle + 2u'v' \langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle + v'^2 \langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle).$$

Vamos denotar

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle \\ f &= -\langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2.$$

$e$ ,  $f$  e  $g$  são chamados os coeficientes da segunda forma fundamental.

## 2.4 Curvaturas

Em curvas a taxa de variação da reta tangente de a uma curva  $C$  determina a curvatura de  $C$ . Nesta sessão iremos estender essa ideia para superfícies regulares, isto é, o quanto uma superfície  $S$  se afasta do plano tangente  $T_pS$ , em uma vizinhança de  $p \in S$ . Isso é equivalente a calcular a taxa de variação dada pela diferencial da aplicação de Gauss.

**Definição 2.8** *Sejam  $p \in S$  e  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a curvatura Gaussiana de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a curvatura média de  $S$  em  $p$ .*

Iremos expressar a curvatura Gaussiana  $K$  e a curvatura média  $H$  em termos da primeira e da segunda formas fundamentais. Como foi visto  $N_u$  e  $N_v$  pertencem a plano tangente  $T_pS$ , assim podemos escrever

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{X}_u + a_{21}\mathbf{X}_v, \\ N_v &= a_{12}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v. \end{aligned} \quad (3)$$

Assim a partir de (3), temos

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle a_{11}\mathbf{X}_u + a_{21}\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle = a_{11}\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + a_{21}\langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle, \\ -f &= \langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle = \langle a_{11}\mathbf{X}_u + a_{21}\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a_{11}\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + a_{21}\langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle = \langle a_{12}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle = a_{12}\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + a_{22}\langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle, \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle = \langle a_{12}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a_{12}\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + a_{22}\langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= a_{12}E + a_{22}F, \\ -g &= a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned} \quad (4)$$

Lembrando que  $E$ ,  $F$  e  $G$  são os coeficientes na primeira forma fundamental na base  $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ . As relações de (4) podem ser expressas em forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}; \quad (5)$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

onde  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$  é a matriz inversa. Logo,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Daí decorrem as seguintes expressões para os coeficientes  $a_{ij}$  da matriz de  $dN$  na base  $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Calculando o determinante, obtemos

$$\begin{aligned} \det(a_{ij}) &= \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \left( \frac{gF - eG}{EG - F^2} \right) - \left( \frac{gF - eG}{EG - F^2} \right) \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{f^2F^2 - fFgE - eGfF + eGgE - geF^2 + gFfE + fGeF - f^2GE}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{f^2F^2 + eGgE - geF^2 - f^2GE}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{eg(GE - F^2) - f^2(GE - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{(GE - F^2)(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2}. \end{aligned}$$

Assim, a partir de (5) obtemos a fórmula da curvatura Guassiana

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Vamos agora calcular a curvatura média. Como, por definição, a curvatura média é o negativo da metade do traço de  $dN_p$ , então,

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}).$$

Logo,

$$H = -\frac{1}{2} \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right).$$

Portanto,

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (6)$$

Note que tanto a curvatura Gaussiana  $K$  quanto a curvatura média  $H$ , não dependem da parametrização  $\mathbf{X}$ . De fato, como  $K$  e  $H$  são respectivamente determinante e traço da matriz  $(a_{ij})$ , uma outra parametrização produzirá uma matriz semelhante a  $(a_{ij})$ .

### 3 SUPERFÍCIES MINÍMAS

Os estudos das superfícies mínimas foi iniciado por Euler e Lagrange em meados do século XVII e é um tema clássico da geometria diferencial. Lagrange não deu exemplos de superfícies mínimas, exceto o exemplo trivial do plano. Os primeiros exemplos não-triviais de superfícies mínimas foram o catenoide e o helicoides, assim, durante muito tempo, o plano, o catenoide e o helicoides foram os únicos exemplos de superfícies mínimas. Apenas em 1835, Scherk obteve um novo exemplo, o qual recebeu o nome de *superfície de Scherk*.

**Definição 3.1** *Uma superfície é chamada mínima quando possui curvatura média igual a zero em todos os seus pontos.*

**Exemplo 3.1** *O Catenoide parametrizado por*

$$\mathbf{X}(u, v) = (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), av)$$

*é uma superfície mínima.*

**Demonstração:** Primeiramente, iremos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u &= (-a \cosh(v) \sin(u), a \cosh(v) \cos(u), 0), \\ \mathbf{X}_v &= (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), a), \\ \mathbf{X}_{uu} &= (-a \cosh(v) \cos(u), -a \cosh(v) \sin(u), 0), \\ \mathbf{X}_{vv} &= (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), 0), \\ \mathbf{X}_{uv} &= (-a \sinh(v) \sin(u), a \sinh(v) \cos(u), 0). \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = a^2 \cosh^2(v) \sin^2(u) + a^2 \cosh^2(v) \cos^2(u) \\ &= a^2 \cosh^2(v) \\ F &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = -a^2 \cosh(v) \sinh(v) \sin(u) \cos(u) + a^2 \cosh(v) \sinh(v) \cos(u) \sin(u) \\ &= 0 \\ G &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a^2 \sinh^2(v) \cos^2(u) + a^2 \sinh^2(v) \sin^2(u) + a^2 \\ &= a^2 \sinh^2(v) + a^2 \\ &= a^2 (\sinh^2(v) + 1) \\ &= a^2 \cosh^2(v). \end{aligned}$$

Para calcular os coeficientes da segunda forma fundamental, lembre que  $\langle V \wedge W, Z \rangle = (V, W, Z)$ , onde este último é determinante da matriz formado pelo vetores  $V, W$ , e  $Z$ . Assim

$$e = \langle N, \mathbf{X}_{uu} \rangle = \frac{1}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|} \langle \mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uu} \rangle = \frac{1}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|} (\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uu}). \quad (7)$$

Mas

$$(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uu}) = \begin{pmatrix} -a \cosh(v) \sin(u) & a \cosh(v) \cos(u) & 0 \\ a \sinh(v) \cos(u) & a \sinh(v) \sin(u) & a \\ -a \cosh(v) \cos(u) & -a \cosh(v) \sin(u) & 0 \end{pmatrix} = -a^3 \cos^2(v) \quad (8)$$

e calculando o módulo, temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v| &= \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(a^2 \cos^2(v) a^2 \sinh^2(v) + 1)} \\ &= \sqrt{a^4 \cosh^2(v) (\sinh^2(v) + 1)} \\ &= a^2 \cosh(v) \sqrt{\sinh^2(v) + 1} \\ &= a^2 \cosh(v) \sqrt{\cosh^2(v)} \\ &= a^2 \cosh^2(v). \end{aligned} \quad (9)$$

Substituindo (8) e (9) em (7) obtemos

$$\begin{aligned} e &= \frac{-a^3 \cosh^2(v)}{a^2 \cosh^2(v)} \\ &= -a. \end{aligned}$$

Analogamente, calculando  $f$  e  $g$ , obtemos

$$f = \langle N, \mathbf{X}_{uv} \rangle. \quad (10)$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uv}) &= \begin{pmatrix} -a \cosh(v) \sin(u) & a \cosh(v) \cos(u) & 0 \\ a \sinh(v) \cos(u) & a \sinh(v) \sin(u) & a \\ -a \sinh(v) \sin(u) & -a \sinh(v) \cos(u) & 0 \end{pmatrix} \\ &= -a^3 \cosh(v) \cos(u) \sinh(v) \sin(u) + a^3 \cosh(v) \sin(u) \sinh(v) \cos(u) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Substituindo (11) e (9) em (10) obtemos

$$f = 0.$$

Por fim,

$$g = \langle N, \mathbf{X}_{vv} \rangle \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv}) &= \begin{pmatrix} -a \cosh(v) \sen(u) & a \cosh(v) \cos(u) & 0 \\ a \senh(v) \cos(u) & a \senh(v) \sen(u) & a \\ a \cosh(v) \cos(u) & a \cosh(v) \sen(u) & 0 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv}) &= a^3 \cosh^2(v) \cos^2(u) + a^3 \cosh^2(v) \sen^2(u) \\ &= a^3 \cosh^2(v). \end{aligned} \quad (13)$$

Substituindo (9) e (13) em (12), temos

$$g = \frac{a^3 \cosh^2(v)}{a^2 \cosh^2(v)} = a. \quad (14)$$

Substituindo  $e$ ,  $f$  e  $g$  na fórmula da curvatura média, obtemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} a \left( \frac{a^3 \cosh^2(v) - 0 - a^3 \cosh^2(v)}{a^4 \cosh^4(v)} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto o catenoide é uma superfície mínima.  $\square$

**Exemplo 3.2** *O Helicoide dado por*

$$\mathbf{X}(u, v) = (v \cos(u), v \sen(u), au)$$

*é uma superfície mínima.*

**Demonstração:** Temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u &= (-v \sen(u), v \cos(u), a) \\ \mathbf{X}_{uu} &= (-v \cos(u), -v \sen(u), 0) \\ \mathbf{X}_v &= (\cos(u), \sen(u), 0) \\ \mathbf{X}_{vv} &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{X}_{uv} &= (-\cos(u), -\sen(u), 0). \end{aligned}$$

Logo os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = v^2 \text{sen}^2(u) + v^2 \text{cos}^2(u) + a^2 \\
 &= v^2 + a^2, \\
 F &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = -v \text{sen}(u) \text{cos}(u) + v \text{sen}(u) \text{cos}(u) \\
 &= 0, \\
 G &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = \text{cos}^2(u) + \text{sen}^2(u) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Para obter os coeficientes da segunda forma fundamental, temos

$$e = \langle N, \mathbf{X}_{uu} \rangle, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uu}) &= \begin{pmatrix} -v \text{sen}(u) & v \text{cos}(u) & a \\ \text{cos}(u) & \text{sen}(u) & 0 \\ v \text{cos}(u) & v \text{sen}(u) & 0 \end{pmatrix} \\
 &= -av \text{cos}(u) \text{sen}(u) + av \text{cos}(u) \text{sen}(u) = 0.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Calculando o módulo, obtemos

$$|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{v^2 + a^2}. \quad (17)$$

Substituindo (16) e (17) em (15)

$$e = 0.$$

Como,

$$f = \langle N, \mathbf{X}_{uv} \rangle, \quad (18)$$

então,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uv}) &= \begin{pmatrix} -v \text{sen}(u) & v \text{cos}(u) & a \\ \text{cos}(u) & \text{sen}(u) & 0 \\ -\text{cos}(u) & -\text{sen}(u) & 0 \end{pmatrix} \\
 &= -v \text{cos}(u) \text{sen}(u) + a \text{cos}(u) \text{sen}(u) = 0.
 \end{aligned} \quad (19)$$

Substituindo (15) e (19) em (18), temos

$$f = 0.$$

Por fim

$$g = \langle N, x_{vv} \rangle \quad (20)$$

logo,

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv}) &= \begin{pmatrix} -v \operatorname{sen}(u) & v \operatorname{cos}(u) & a \\ \operatorname{cos}(u) & \operatorname{sen}(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Substituindo (15) e (19) em (18), temos

$$g = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} e &= 0, \\ f &= 0, \\ g &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $H = 0$ . Portanto o helicóide é uma superfície mínima.  $\square$

A palavra mínima está relacionada ao problema apresentado por Joseph Louis Lagrange em 1760: Dada uma curva fechada  $C$ , achar a superfície de área mínima que tem esta curva como fronteira. Lagrange apresentou este problema para estudar curvas e superfícies que minimizassem quantidades como comprimento, área, energia, entre outros. O problema acima também contou com o estudos do físico belga Joseph Plateau, iremos falar mais sobre Plateau no capítulo 4. Plateau realizou experimentos e “provou” a existência de superfícies mínimas que minimizam a área para um dado contorno  $C$ . Por isso, tal problema, ficou conhecido como **o problema de Plateau**.

Para mostrarmos a relação entre superfícies mínimas com a área, relembremos a definição de área.

**Definição 3.2** *Seja  $R \subset S$  uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização  $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . O número positivo*

$$A(R) = \int \int_Q |\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v| \, du \, dv \quad Q = \mathbf{X}^{-1}(R)$$

*é chamado área de  $R$ .*

E lembrando da álgebra linear, temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v| &= \sqrt{\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle - \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle^2} \\ &= \sqrt{EG - F^2} \end{aligned}$$

Relembremos ainda a definição de variação normal.

**Definição 3.3** *Seja  $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Escolha um domínio limitado  $D \subset U$  e uma função diferenciável  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $\bar{D}$  é a união do domínio  $D$  e sua fronteira  $\partial D$ . A variação normal  $\mathbf{X}(\bar{D})$  determinada por  $h$  é a aplicação dada por*

$$\begin{aligned} \varphi &= \bar{D} \times (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \varphi(u, v, t) &= x(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in D', t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

Voltemos ao problema de Plateau e suponha que exista uma solução  $S$  para tal problema. Inicialmente consideremos a seguinte proposição.

**Proposição 3.1** *Seja  $S^t$  uma variação normal de  $S$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , dada por  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Seja  $D \subset S$  um domínio limitado de  $S$  e seja*

$$D^t = \{p^t \in S^t; p \in D\}$$

*O domínio correspondente em  $S^t$ . Definimos  $A(t) = \text{área de } \mathbf{X}^t(\bar{D})$ . Então*

$$A'(0) = -2 \int_{\bar{D}} H h dA$$

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a parametrização de  $S$  e  $D$ . Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^t(u, v) &= \varphi(u, v, t), \\ \mathbf{X}_u^t &= \mathbf{X}_u + th_u N + th N_u, \\ \mathbf{X}_v^t &= \mathbf{X}_v + th_v N + th N_v. \end{aligned}$$

Calculando os coeficientes  $E^t$ ,  $F^t$  e  $G^t$  temos

$$\begin{aligned}
E^t &= \langle \mathbf{X}_u^t, \mathbf{X}_u^t \rangle \\
&= \langle \mathbf{X}_u + th_u N + thN_u, \mathbf{X}_u + th_u N + thN_u \rangle \\
&= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + \langle \mathbf{X}_u, th_u N \rangle + \langle \mathbf{X}_u, thN_u \rangle + \langle th_u N, \mathbf{X}_u \rangle + \langle th_u N, th_u N \rangle \\
&\quad + \langle th_u N, thN_u \rangle + \langle thN_u, \mathbf{X}_u \rangle + \langle thN_u, th_u N \rangle + \langle thN_u, thN_u \rangle \\
&= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + th(\langle \mathbf{X}_u, N_u \rangle + \langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle) + th_u(\langle N, \mathbf{X}_u \rangle + \langle \mathbf{X}_u, N \rangle) \\
&\quad + t^2 h_u^2 N^2 + \langle th_u N, thN_u \rangle + \langle thN_u + th_u N \rangle + t^2 h^2 N_u^2 \\
&= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + th(\langle \mathbf{X}_u, N_u \rangle + \langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle) + th(\langle N, \mathbf{X}_u \rangle + \langle \mathbf{X}_u, N \rangle) \\
&\quad + t^2 h_u h_u \langle N, N \rangle + 2\langle th_u, thN_u \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle \\
&= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + th(\langle \mathbf{X}_u, N_u \rangle + \langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle) + \langle th_u N, \mathbf{X}_u \rangle + \langle th_u \mathbf{X}_u, N \rangle \\
&\quad + \langle th_u N, thN_u \rangle + \langle th_u N, thN_u \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u \\
&= E + th(\langle \mathbf{X}_u, N_u \rangle + \langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^t &= \langle \mathbf{X}_u^t, \mathbf{X}_v^t \rangle \\
&= \langle \mathbf{X}_u + th_u N + thN_u, \mathbf{X}_v + th_v N + thN_v \rangle \\
&= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, th_u N \rangle + \langle \mathbf{X}_u, thN_v \rangle + \langle th_u N, \mathbf{X}_v \rangle \\
&\quad + \langle th_u N, th_v N \rangle + \langle th_u N, thN_v \rangle + \langle thN_u, \mathbf{X}_v \rangle + \langle thN_u, th_v N \rangle + \langle thN_u, thN_v \rangle \\
&= \langle \mathbf{X}_u^t, \mathbf{X}_v^t \rangle + th(\langle \mathbf{X}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, N_u \rangle) + \langle th_u N, \mathbf{X}_v \rangle + t^2 h_u h_v \langle N, N \rangle \\
&\quad + \langle th_u N, thN_v \rangle + \langle thN_u, th_v N \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle \\
&= F + th(\langle \mathbf{X}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^t &= \langle \mathbf{X}_v^t, \mathbf{X}_v^t \rangle \\
&= \langle \mathbf{X}_v + thN_v + th_v N, \mathbf{X}_v + thN_v + th_v N \rangle \\
&= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, thN_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, th_v N \rangle + \langle thN_v, \mathbf{X}_v \rangle \\
&\quad + \langle thN_v, thN_v \rangle + \langle th_v N, \mathbf{X}_v \rangle + \langle th_v N, thN_v \rangle + \langle th_v N, th_v N \rangle \\
&= G + th(\langle \mathbf{X}_v, N_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, N_v \rangle) + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_u h_v \langle N, N \rangle \\
&= G + th(\langle \mathbf{X}_v, N_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, N_v \rangle) + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_u h_v.
\end{aligned}$$

Como,

$$\langle \mathbf{X}_u, N_u \rangle = -e, \langle \mathbf{X}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, N_u \rangle = -2f, \langle \mathbf{X}_v, N_v \rangle = -g.$$

Temos,

$$\begin{aligned} E^t &= E - 2eth + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u, \\ F^t &= F - 2fth + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v, \\ G^t &= G - 2gth + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v. \end{aligned}$$

E como curvatura média  $H$  é dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}.$$

Calculamos o termo  $E^t G^t - (F^t)^2$ , temos

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= (E - 2eth + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u)(G - 2gth + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v) \\ &\quad - (F - 2fth + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v)^2. \end{aligned}$$

Fazendo  $R$  igual os termos com  $t^2$  e  $t^3$ , temos

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R(t) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R(t), \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0.$$

Assim, para  $t > 0$  suficientemente pequeno,  $\mathbf{X}^t$  é uma superfície parametrizada regular, pois  $E^t G^t - (F^t)^2$  é diferente de zero. Utilizando a Definição 3.2, temos que a área  $A(t)$  de  $x^t(D')$  é

$$A(t) = \int_D dA = \int_{\bar{D}} |\mathbf{X}_u^t \wedge \mathbf{X}_v^t| dudv.$$

Logo

$$\begin{aligned} A'(t) &= \int_{\bar{D}} \frac{d}{dt} |\mathbf{X}_u^t \wedge \mathbf{X}_v^t| dudv \\ A'(0) &= \int_{\bar{D}} \frac{d}{dt} |\mathbf{X}_u^t \wedge \mathbf{X}_v^t|_{|t=0} dudv. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}_u^t \wedge \mathbf{X}_v^t|^2 &= E^t G^t - (F^t)^2 \\
\frac{d}{dt} |\mathbf{X}_u^t \wedge \mathbf{X}_v^t|^2 &= \frac{d}{dt} (E^t G^t - (F^t)^2) \\
2|\mathbf{X}_u^t \wedge \mathbf{X}_v^t| \frac{d}{dt} |\mathbf{X}_u^t \wedge \mathbf{X}_v^t| &= -2h(Eg - 2Ff + Ge) \\
\sqrt{EG - F^2} \frac{d}{dt} |\mathbf{X}_u^t \wedge \mathbf{X}_v^t|_{|t=0} &= -h(Eg + Ge - 2Ff) \\
\frac{d}{dt} |\mathbf{X}_u^t \wedge \mathbf{X}_v^t|_{|t=0} &= \frac{-h(Eg + Ge - 2Ff)}{EF - F^2} \\
&= -h \frac{(Eg + Ge - 2Ff)}{EG - F^2} \sqrt{EG - F^2} \\
&= -2hH \sqrt{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
A'(0) &= \int_D -2hH \sqrt{EG - F^2} dudv, \\
&= -2 \int_D HhdA.
\end{aligned}$$

□

Portanto, se  $S$  é uma solução para o Problema de Plateau, pela Proposição 3.1 conclui-se que  $H = 0$ . De fato, é o que mostra a seguinte proposição.

**Proposição 3.2** *Seja  $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e seja  $D \subset U$  um domínio limitado em  $U$ . Então  $\mathbf{X}$  é mínima se e somente se  $A'(0) = 0$  para todo tal  $D$  e toda variação normal de  $\mathbf{X}(\bar{D})$ .*

**Demonstração:**  $\mathbf{X}$  ser mínima equivale a  $H = 0$ , logo a condição é satisfeita  $A'(0) = 0$ . Reciprocamente, suponha que a condição é satisfeita e que  $H(q) \neq 0$  para algum  $q \in D$ . Escolha  $h : D' \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(q) = H(q)$  logo  $hH > 0$  e que  $h$  seja identicamente nula fora de uma pequena vizinhança de  $q$ . Então  $A'(0) < 0$  para a variação determinada por essa função  $h$ , o que é uma contradição. □

A proposição mostra a relação existente entre a superfície mínima, no sentido da definição, e a superfície mínima, que minimiza a área, ou seja, toda superfície que minimiza a área é uma superfície mínima, na nossa definição de curvatura média nula. Porém, toda superfície mínima com curvatura média nula não necessariamente minimiza a área, pois a proposição mostra que ela é apenas um ponto crítico.

### 3.1 Caso Particular: O gráfico de uma função diferenciável

Lagrange, juntamente com matemático suíço Leonhard Euler, obteve uma equação diferencial parcial, que ficou conhecida como **Equação de Euler-Lagrange** que descrevia as superfícies mínimas que são gráficos de funções diferenciáveis, dada por

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0. \quad (22)$$

De fato, a parametrização de um gráfico é dada por  $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , assim

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u &= (1, 0, f_u) \\ \mathbf{X}_v &= (0, 1, f_v) \\ \mathbf{X}_{uu} &= (0, 0, f_{uu}) \\ \mathbf{X}_{uv} &= (0, 0, f_{uv}) \\ \mathbf{X}_{vv} &= (0, 0, f_{vv}) \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = 1 + f_u^2 \quad F = f_u f_v \quad G = 1 + f_v^2,$$

e portanto,

$$|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v| = \sqrt{1 + f_v^2 + f_u^2}. \quad (23)$$

Calculando os coeficientes da segunda forma fundamental, temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uu}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \\ 0 & 0 & f_{uu} \end{pmatrix} \\ &= f_{uu}. \end{aligned} \quad (24)$$

Logo, substituindo (23) e (24) em  $e = \langle N, \mathbf{X}_{uu} \rangle$ , obtemos

$$e = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_v^2 + f_u^2}}.$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{uv}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \\ 0 & 0 & f_{uv} \end{pmatrix} \\
&= f_{uv}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Logo, substituindo (23) e (25) em  $f = \langle N, \mathbf{X}_{uv} \rangle$ , obtemos

$$f = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_v^2 + f_u^2}}.$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \\ 0 & 0 & f_{vv} \end{pmatrix} \\
&= f_{vv}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Logo, substituindo (23) e (26) em  $g = \langle N, \mathbf{X}_{vv} \rangle$ , obtemos

$$g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_v^2 + f_u^2}}.$$

Então, como  $H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$  fazendo  $\sqrt{1 + f_v^2 + f_u^2} = A$ , temos

$$H = \frac{(1 + f_u^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2)f_{vv}}{A^3}$$

Portanto,  $H = 0$ , se e somente se,  $(1 + f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2)f_{uu} = 0$ .

**Exemplo 3.3** *Superfície de Scherk parametrizada por*

$$\mathbf{X}(u, v) = \left( u, v, \ln \left( \frac{\cos u}{\cos v} \right) \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

*é uma superfície mínima.*

**Demonstração:** Vamos verificar a equação de Lagrange para  $f(u, v) = \ln \frac{\cos u}{\cos v}$

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{-\operatorname{sen} u \cos v}{\cos v \cos u} = \frac{-\operatorname{sen} u}{\cos u} = -\operatorname{tg} u \\ f_v &= \frac{\cos u \operatorname{sen} v \cos v}{\cos^2 v \cos u} = \frac{\operatorname{sen} v}{\cos v} = \operatorname{tg} v \\ f_{uu} &= -\sec^2 u \\ f_{uv} &= 0 \\ f_{vv} &= \sec^2 v \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula de Lagrange

$$(1 + f_u^2) f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2) f_{uu},$$

obtemos

$$\begin{aligned} (1 + \operatorname{tg}^2 u)(\sec^2 v) + 2\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \cdot 0 + (1 + \operatorname{tg}^2 v)(-\sec^2 u) &= \sec^2 u \sec^2 v - \sec^2 v \sec^2 u \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a superfície de Scherk é mínima.  $\square$

A partir da seguinte definição podemos determinar, facilmente, se uma superfície é mínima.

**Definição 3.4** *Uma superfície parametrizada regular  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$  é chamada isotérmica se  $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle$  e  $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0$*

**Proposição 3.3** *Seja  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e suponha que  $\mathbf{X}$  é isotérmica. Então*

$$\mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv} = 2\lambda^2 H \mathbf{N},$$

onde

$$\lambda^2 = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle$$

**Demonstração:** Como  $\mathbf{X}$  é isotérmica, então  $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle$  e  $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0$ . Derivando  $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle$  em relação a  $\mathbf{X}_u$ , temos

$$\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uu} \rangle = 2\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uu} \rangle.$$

Derivando  $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle$  em relação a  $\mathbf{X}_u$ , temos

$$\langle \mathbf{X}_{vu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vu} \rangle = 2\langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vu} \rangle.$$

Como

$$\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle,$$

temos,

$$\begin{aligned} 2\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uu} \rangle &= 2\langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vu} \rangle, \\ \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uu} \rangle &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vu} \rangle. \end{aligned}$$

Derivando  $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0$  em relação a  $\mathbf{X}_v$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle &= -\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uu} \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vu} \rangle$$

então

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uu} \rangle &= -\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle \\ \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uu} \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uu} \rangle + \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, derivando  $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle$  em relação a  $\mathbf{X}_v$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_u \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uv} \rangle &= 2\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uv} \rangle \\ 2\langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv} \rangle &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vu} \rangle \\ \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vu} \rangle. \end{aligned}$$

Derivando  $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0$  em relação a  $u$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vu} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_{vv} \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Como  $\langle N, \mathbf{X}_u \rangle = \langle N, \mathbf{X}_v \rangle = 0$  então  $\mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}$  é paralelo a  $N$ .

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, N \rangle &= c \\ \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv} &= cN\end{aligned}$$

Como  $H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$ ,  $E = G$  e  $F = 0$  temos

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} \frac{Eg + Ee}{E^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{g + e}{E} \\ &= \frac{1}{2} \frac{g + e}{G} \\ &= \frac{1}{2} \frac{g + e}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}2\lambda^2 H &= g + e \\ &= \langle N, \mathbf{X}_{vv} \rangle + \langle N, \mathbf{X}_{uu} \rangle \\ &= \langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, N \rangle \\ &= \langle N, \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv} \rangle,\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv} = 2\lambda^2 H$ . □

O Laplaciano  $\Delta f$  de uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ ,  $(u, v) \in U$ . Dizemos que  $f$  é harmônica em  $U$  se  $\Delta f = 0$ . A partir da proposição 2, obtemos

**Corolário 3.1** *Seja  $\mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  uma superfície parametrizada e suponha que  $\mathbf{X}$  é isotérmica. Então  $\mathbf{X}$  é mínima, se e somente se, as suas funções coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são harmônicas.*

**Exemplo 3.4** *Catenoide parametrizado por*

$$\mathbf{X}(u, v) = (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), av)$$

onde  $0 < u < 2\pi$  e  $-\infty < v < \infty$ .

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_u &= (-a \cosh(v) \sin(u), a \cosh(v) \cos(u), 0), \\
 \mathbf{X}_v &= (a \sinh(v) \cos(u), a \sinh(v) \sin(u), a), \\
 \mathbf{X}_{uu} &= (-a \cosh(v) \cos(u), -a \cosh(v) \sin(u), 0), \\
 \mathbf{X}_{vv} &= (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), 0), \\
 \mathbf{X}_{uv} &= (-a \sinh(v) \sin(u), a \sinh(v) \cos(u), 0).
 \end{aligned}$$

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, temos

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = a^2 \cosh^2(v) \sin^2(u) + a^2 \cosh^2(v) \cos^2(u) \\
 &= a^2 \cosh^2(v), \\
 F &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = -a^2 \cosh(v) \sinh(v) \sin(u) \cos(u) + a^2 \cosh(v) \sinh(v) \cos(u) \sin(u) \\
 &= 0, \\
 G &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a^2 \sinh^2(v) \cos^2(u) + a^2 \sinh^2(v) \sin^2(u) + a^2 \\
 &= a^2 \sinh^2(v) + a^2 \\
 &= a^2 (\sinh^2(v) + 1) \\
 &= a^2 \cosh^2(v).
 \end{aligned}$$

Logo,  $E = G$  e  $F = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv} &= (-a \cosh(v) \cos(u), -a \cosh(v) \sin(u), 0) + (a \cosh(v) \cos(u), a \cosh(v) \sin(u), 0) \\
 &= (0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

Portanto, o catenoide é uma superfície mínima, pois suas coordenadas são harmônicas.  $\square$

Meusnier obteve duas soluções não-triviais da equação (22), uma das soluções é uma catenária, sendo que a superfície de rotação gerada pela catenária é o catenoide, assim a menos de translações e dilatações, existe uma única superfície deste tipo e costuma-se dizer que a única superfície mínima de rotação é o catenoide. Assim temos a seguinte proposição,

**Proposição 3.4** *Toda superfície mínima de revolução  $S$  ou é parte de um plano ou, a menos de um movimento rígido, é parte de uma catenóide.*

**Demonstração:** A menos de um movimento rígido podemos assumir que o eixo da superfície  $S$  é o eixo  $z$  e que a curva geradora está no plano  $O_{xz}$ . Uma parametrização de

$S$  é

$$\mathbf{X}(u, v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u))$$

Onde a curvatura geradora é dada por

$$\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$$

Se  $g(u)$  é constante, então  $S$  será um ponto de um plano ortogonal ao eixo  $oz$ . Caso contrário, existe um ponto tal que  $g'(u) \neq 0$  uma vizinhança de  $u_0$ , definimos  $]\alpha, \beta[$  (menor vizinhança). Suponha que  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, daí

$$(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u &= (f'(u)\cos(v), f'(u)\sin(v), g'(u)) \\ \mathbf{X}_{uu} &= (f''(u)\cos(v), f''(u)\sin(v), g''(u)) \\ \mathbf{X}_v &= (-f(u)\sin(v), f(u)\cos(v), 0) \\ \mathbf{X}_{uv} &= (-f'(u)\sin(v), f'(u)\cos(v), 0) \\ \mathbf{X}_{vv} &= (-f(u)\cos(v), -f(u)\sin(v), 0) \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são

$$\begin{aligned} E &= f'^2(u)\cos^2(v) + f'^2(u)\sin^2(v) + g'^2(u) \\ &= f'^2(u) + g'^2(u) \\ &= 1 \\ F &= -f'(u)f(u)\cos(v)\sin(v) + f'(u)f(u)\sin(v)\cos(v) \\ &= 0 \\ G &= f^2(u)\sin^2(v) + f^2(u)\cos^2(v) \\ &= f^2(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= \frac{f'(u)f(u)g''(u)\cos^2(v) - g'(u)f(u)f''(u)\operatorname{sen}^2(v)}{f(u)} \\
&+ \frac{f'(u)f(u)g''(u)\operatorname{sen}^2(v) - g'(u)f(u)f''(u)\cos^2(v)}{f(u)} \\
&= \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{f(u)} \\
&= \frac{f'(u)f(u)g''(u) - g'(u)f(u)f''(u)}{f(u)} \\
&= f'(u)g''(u) - g'(u)f''(u) \\
f &= \frac{-g'(u)f(u)f'(u)\operatorname{sen}(v)\cos(v) + g'(u)f(u)f'(u)\cos(v)\operatorname{sen}(v)}{f(u)} \\
&= 0 \\
g &= \frac{g'(u)f^2(u)\operatorname{sen}^2(v) + g'(u)f^2(u)\cos^2(v)}{f^2(u)} \\
&= g'(u)f(u)
\end{aligned}$$

Calculando a curvatura média, temos

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{g'(u)f(u) + f^2(u)(f'(u)g''(u) - g'(u)f''(u))}{f^2(u)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{f(u)(g'(u) + f(u)(f'(u)g''(u) - g'(u)f''(u)))}{f^2(u)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{g'(u) + f(u)(f'(u)g''(u) - g'(u)f''(u))}{f(u)}
\end{aligned}$$

Como  $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$ , então

$$\begin{aligned}
2f'(u)f'' + 2g'(u)g''(u) &= 0 \\
f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) &= 0 \quad \Rightarrow \quad g'(u) \neq 0 \\
\frac{f'(u)}{g'(u)}f''(u) + g''(u) &= 0 \\
g''(u) &= -\frac{f'(u)f''(u)}{g'(u)},
\end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}
 f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u) &= f'(u) \left( -\frac{f'(u)f''(u)}{g'(u)} \right) - f''(u)g'(u) \\
 &= -\frac{f'(u)^2 f''(u)}{g'(u)} - f''(u)g'(u) \\
 &= -\frac{f''(u)}{g'(u)} (f'(u)^2 + g'(u)^2) \\
 &= -\frac{f''(u)}{g'(u)},
 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{g'(u) + f \left( -\frac{f''(u)}{g'(u)} \right)}{2f(u)} \\
 &= \frac{g'^2(u) - f(u)f''(u)}{2f(u)g'(u)}.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $H \equiv 0$ , se e somente se,  $g'^2(u) - f(u)f''(u) = 0$ , logo

$$g'^2(u) = f(u)f''(u)$$

assim,

$$\begin{aligned}
 f'^2(u) + f(u)f''(u) &= 1 \\
 f(u)f''(u) &= 1 - f'^2(u).
 \end{aligned}$$

Seja  $h = \frac{df}{du} = f'(u)$ , então

$$f''(u) = h'(u) = \frac{dh}{du} = \frac{dh}{df} \frac{df}{du} = h \frac{dh}{df}.$$

Logo,  $f(u)f'(u) = 1 - f'^2(u)$  é equivalente a  $f(u)h(u) \frac{dh}{df} = 1 - h^2(u)$ , note que  $1 - h^2(u) = 1 - f'^2(u) = g'^2(u) > 0$ ,  $g'(u) \neq 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{h}{1-h^2} dh &= \frac{df}{f} \Rightarrow \\
 \int \frac{h}{1-h^2} dh &= \int \frac{df}{f} + C \Rightarrow \\
 \ln \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} &= \ln f + C = \ln(af).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} = af &\Rightarrow 1-h^2 = \frac{1}{a^2 f^2} \\ &\Rightarrow h^2 = 1 - \frac{1}{a^2 f^2} \\ &= \frac{a^2 f^2 - 1}{a^2 f^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$|h| = \frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{af}$$

Note que podemos supor que  $h > 0$ ,

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{af} \Rightarrow \\ \frac{df}{du} &= \frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{af} \Rightarrow \\ \frac{af df}{\sqrt{a^2 f^2 - 1}} &= du \Rightarrow \\ \int \frac{af df}{\sqrt{a^2 f^2 - 1}} &= \int du + c_1 \\ &= u + c_1. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 f^2 - 1} &= u + c_1 \\ a^2 f^2 - 1 &= a^2(u + c_1) \\ f^2 &= \frac{a^2(u + c_1) + 1}{a^2} \\ f &= \frac{\sqrt{a^2(u + c_1)^2 + 1}}{a} \end{aligned}$$

Musando de parametro  $u$  por  $u - c_1$ , podemos assumir que  $c_1 = 0$  logo

$$f = \frac{\sqrt{a^2 u^2 + 1}}{a^2}.$$

Dai

$$\begin{aligned}
 g'^2 &= 1 - f'^2 \\
 &= 1 - h^2 \\
 &= \frac{1}{a^2 f^2} \\
 &= \frac{1}{a^2 u^2 + 1},
 \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 g' &= \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 u^2 + 1}} \\
 \int g' &= \pm \int \frac{1}{\sqrt{a^2 u^2 + 1}} du + c_2 \\
 &= \pm \frac{1}{a} \operatorname{arcsenh}(au) + c_2 \\
 &= \pm \frac{\operatorname{arcsenh}(au) + ac_2}{a},
 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
 \pm \arccos(au) &= a(g - c_2) \Rightarrow \\
 au &= \operatorname{senh}(\pm a(g - c_2)) \\
 &= \pm \operatorname{senh}(a(g - c_2)).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{\sqrt{\operatorname{senh}^2(a(g - c_2)) + 1}}{a} \\
 &= \frac{\sqrt{\operatorname{cosh}^2(a(g - c_2)) + 1}}{a} \\
 &= \frac{1}{a} \operatorname{cosh}(a(g - c_1)).
 \end{aligned}$$

Logo a curva geradora é dada por

$$\alpha(u) = \left( \frac{1}{a} \operatorname{cosh}(a(g - c_2)), 0, g(u) \right).$$

Isto é, no eixo  $O_{XZ}$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{a} \operatorname{cosh}(a(g - c_2)),$$

que é um catenoide. Logo  $S$  é parte de um catenoide. □

## 4 O PROBLEMA DE PLATEAU

A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau. Joseph Antoine Ferdinand Plateau foi um físico belga especialista em persistência retínica. Com o passar do tempo, Plateau ficou cego e acredita-se que a perda da sua visão se deu pelo fato dele olhar diretamente para o sol por alguns segundos. No entanto, mesmo cego realizou experimentos com bolhas de sabão, os quais foram de extrema importância para o estudo das superfícies mínimas.

Plateau realizou experimentos (entre 1843 e 1869) com películas de sabão sob a ação da tensão superficial. Suas experiências mostraram fisicamente a existência de superfícies mínimas para qualquer contorno “razoável”. Os experimentos consistiam em pegar um arame com diferentes configurações, mergulhar em uma solução com sabão e retirar cuidadosamente, formava-se, então, uma película em equilíbrio que por razões físicas é o que se espera que seja a solução do problema de Plateau. Como a película é muito fina, a configuração de equilíbrio tem que ser aquela onde o gasto de energia é o menor possível, ou seja, aquela que minimiza a área.

Pode ser mostrar, fisicamente, como a película de sabão com um contorno fixo minimiza a área. Num sistema de películas de sabão, a equação da energia total é dada por

$$E = E_G + E_A + E_S, \quad (27)$$

onde  $E_G$  é a energia potencial gravitacional,  $E_A$  a energia contida entre duas superfícies e  $E_S$  a energia superficial e temos que

$$E_S = \lambda A, \quad (28)$$

onde  $\lambda$  é o coeficiente da tensão superficial. Ou seja, a energia superficial de uma película de sabão é proporcional à sua área. Como a massa das películas é muito pequena, pode-se desprezar a energia potencial gravitacional, e (27) torna-se

$$E = E_A + E_S. \quad (29)$$

E se um sistema não contém bolhas  $E_A = 0$ , (29) torna-se

$$E = E_S \quad (30)$$

Por (28), temos

$$E = \lambda A. \quad (31)$$

Da equação (31) conclui-se que a energia total é diretamente proporcional a área, assim minimizando a energia, minimizamos a área. Ao mergulhar um contorno de arame em

uma solução de água e sabão e retirá-lo a película formada, uma vez que esteja em repouso, terá a menor energia possível e conseqüentemente representará a superfície de menor área limitada. Este método pode ser aplicado a qualquer contorno.

#### 4.1 Experimentos de Plateau

Nessa sessão iremos apresentar alguns experimentos realizados para ilustrar as superfícies formadas pelas películas de sabão. Foram utilizados os seguintes materiais:

1. Água;
2. Detergente;
3. Arames;
4. Glicerina;

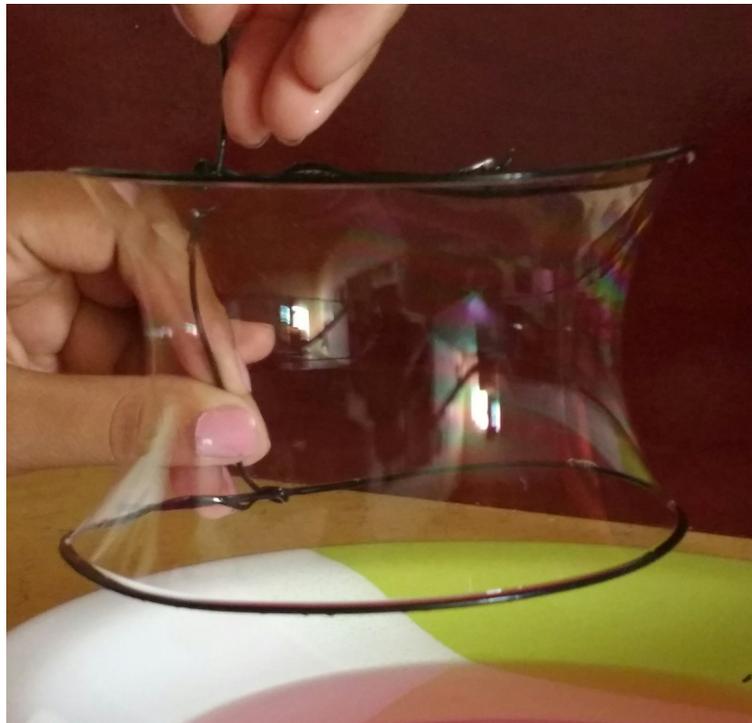


Figura 4 – Catenoide  
Fonte do autor



Figura 5 – Superfície de película de sabão  
Fonte do autor



Figura 6 – Superfície de película de sabão  
Fonte do autor



Figura 7 – Superfície de película de sabão  
Fonte do autor



Figura 8 – Película de sabão diminuindo a área devido a tensão superficial  
Fonte: Loureiro, 2014, p. 34.

Quando a película não cerca o ar formando câmaras fechadas, ela tem a propriedade de minimizar área. Assim qualquer forma próxima que tenha o mesmo contorno necessariamente terá área maior.

Como foi visto, as películas de sabão são superfícies mínimas, pois em repouso minimizam a energia e consequentemente a área. Por outro lado, as películas de sabão sofrem a ação da tensão superficial, que é a força que faz com que as moléculas de sabão se atraiam, reduzindo, assim, a área da superfície da bolha de sabão, como mostra o experimento da figura 8.

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos uma caso especial de superfícies, as superfícies mínimas. Um assunto bastantes rico, que despertou o interesse de muitos matemáticos. Nosso estudo foi voltado as principais propriedades e resultados das superfícies mínimas, importantes para a geometria. Muito já se sabe sobre as superfícies mínimas, no entanto, ainda estão sendo investigadas, pois há ligações profundas com funções analíticas de variáveis complexas e com equações diferenciais parciais.

Realizamos, também, um estudo sobre o problema de Plateau, em especial, os experimentos com películas de sabão. Existem na literatura vários problemas de Plateau, e alguns casos especiais foram resolvidos, como a solução de J. Douglas, para mais detalhes ver (CARMO, 2011).

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, L.A. Superfícies Mínimas e Bolhas de Sabão no Ensino Médio. Fortaleza: 2016.
- CARMO, M. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Rio de Janeiro: SBM, 2008.
- CARMO, M. Superfícies Mínimas. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- LOUREIRO, R. Experimentando a matemática através das bolhas de sabão. Belém: 2014.
- JUNIOR, E.M; ELIA, M. F. Películas de Sabão e seu Teor Didático. Rio de Janeiro: 1987.
- TENENBLAT, K. Introdução a Geometria Diferencial. São Paulo: Bkucher, 2008.