



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA**

MARGARIDA DE JESUS

**TECNOLOGIA PARA INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA COMERCIAL
FINANCEIRA**

ACARAPE - CE

2018

MARGARIDA DE JESUS

TECNOLOGIAS PARA INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA COMERCIAL E
FINANCEIRA

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduada em Ciências da Natureza e Matemática com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral

ACARAPE - CE

2018

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Jesus, Margarida de.

J56t

Tecnologia para introdução à matemática comercial financeira /
Margarida de Jesus. - Redenção, 2018.
52f: il.

Monografia - Curso de Ciências da Natureza e Matemática,
Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da
Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção,
2018.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral.

1. Matemática financeira. 2. Matemática financeira - Programas
de computador. 3. Excel (Programa de computador). 4. Softwares.
I. Título

CE/UF/BSP

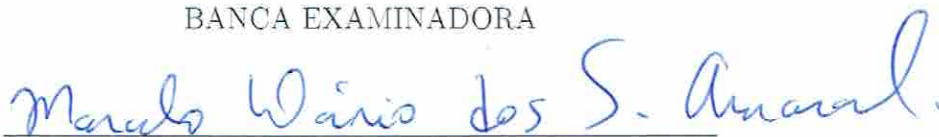
CDD 511.8

TECNOLOGIA PARA INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA COMERCIAL
FINANCEIRA

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduada em Ciências da Natureza e Matemática com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 22/05/2018

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico, primeiramente, este trabalho a Deus cuja força foi dada por sua graça, e a minha família em especial os meus pais Fernando da Cruz e Lucinda da Costa, os meus irmãos e irmãs e a todas que fazem parte da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus Todo-Poderoso pela vida maravilhosa que me deu. Agradeço à minha família, em especial os meus pais Fernando da Cruz e Lucinda da Costa, os meus irmãos e as minhas irmãs, que estão longe de mim, porém sempre dando coragem a mim para conquistar meu sonho.

Meu imenso agradecimento ao Governo timorense por ter oferecido a bolsa de estudo durante toda a trajetória da minha graduação e vivência no Brasil, à UNILAB e ao BRASIL pelo acolhimento durante a estadia para o curso, à todos os professores da UNILAB principalmente do ICEN que me ajudaram muito no processo de aprendizagem e aos meus amigos que sempre estão presente na minha vida acadêmica.

Por fim, agradeço ao meu orientador, Professor. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral, que me orientou com toda a paciência durante o período do desenvolvimento deste trabalho.

“A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela.”
Albert Einstein.

RESUMO

Aqui estamos preocupados com tecnologias as quais podem ser utilizadas em um primeiro curso de Matemática Financeira. Em particular, focamos no programa de computador Microsoft Excel e no aplicativo “Calfi”.

Nosso trabalho é organizado como segue. Primeiro, damos uma breve introdução, definições e propriedades de Matemática Financeiras usuais. Segundo, damos alguns exemplos comparando as citadas tecnologias.

Palavras-chave: Matemática Financeira. Excel. Calfi.

ABSTRACT

Here we are concerned with technologies that can be used in a first course of financial math. In particular, we focus on the program Microsoft Excel and an app called "Calfi".

Our work is organized as follows. First, we give a brief introduction and standard definitions and properties of financial math. Second, we give some examples comparing the use of the cited technologies.

Keywords: Financial Math. Excel. Calfi.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Calcular o valor do Juro simples através do calfi 1.	17
Figura 2 – Calcular o valor do Juro simples através do calfi 2.	17
Figura 3 – Calcular o valor do Juro simples através do calfi 3.	18
Figura 4 – Calcular o valor do Juro composto através do calfi 1	28
Figura 5 – Calcular o valor do Juro composto através do calfi 2	28
Figura 6 – Calcular o valor do Juro composto através do calfi 3	29
Figura 7 – Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 1	41
Figura 8 – Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 2	42
Figura 9 – Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 3	42
Figura 10 – Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 4	43
Figura 11 – Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 5	43
Figura 12 – Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 6	44
Figura 13 – Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 7	44
Figura 14 – Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização através do Calfi 1 .	45
Figura 15 – Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização através do Calfi 2 .	45
Figura 16 – Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização através do Calfi 3 .	46
Figura 17 – Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Mi- crosoft Excel 1	46
Figura 18 – Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Mi- crosoft Excel 2	47
Figura 19 – Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Mi- crosoft Excel 3	47
Figura 20 – Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Mi- crosoft Excel 4	48
Figura 21 – Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Mi- crosoft Excel 5	48
Figura 22 – Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Mi- crosoft Excel 6	49
Figura 23 – Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) através do Calfi 1	49
Figura 24 – Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) através do Calfi 2	50
Figura 25 – Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) através do Calfi 3	50

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Montante para o juro simples	22
Tabela 2 – Montante para juros compostos	27

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

J	Juros
C	Capital
i	A taxa
n	O tempo da aplicação
M	Montante
N	O valor nominal
d	O valor do desconto
d_r	O valor do desconto racional
A	O valor atual ou valor comercial
A_r	Valor atual ou valor desconto racional
N	O valor nominal
T	O valor fixo dos depósitos periódicos
PG	Progressão geométrica
q	Razão
T_K	Parcela
A_K	Amortização
D_K	Saldo devedor
J_K	Amortização

LISTA DE SÍMBOLOS

%	Porcentagem
R\$	Reais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	PRÉ-REQUISITOS	15
2.1	Regime de capitalização	15
2.2	Juro simples	15
2.3	Cálculo do juro simples	15
2.4	Taxas proporcionais	18
2.5	Taxas Equivalentes	19
2.6	Juro comercial e exato	20
2.7	Determinação do número de dias exatas entre duas datas . . .	21
2.8	Montante	21
2.9	Desconto simples	22
2.9.1	<i>Desconto comercial</i>	22
2.9.2	<i>Desconto racional</i>	24
2.10	Taxa efetiva	25
3	JUROS COMPOSTOS	27
3.1	Cálculo do Capital	29
3.2	Desconto composto	30
3.2.1	<i>Desconto comercial</i>	30
3.2.2	<i>Desconto racional</i>	31
3.3	Equivalência de capitais diferidos	31
4	RENDAS	32
4.1	Classificação quanto ao vencimento do primeiro termo	32
4.1.1	<i>Rendas imediatas</i>	32
4.1.2	<i>Rendas antecipadas</i>	34
4.1.3	<i>Rendas diferidas</i>	35
4.2	Amortização	36
4.2.1	<i>Renda imediata</i>	36
4.2.2	<i>Renda antecipada</i>	38
4.2.3	<i>Renda diferida</i>	38
4.3	Empréstimos	39
4.4	Os sistemas de amortização	40
4.4.1	<i>Sistema Francês de Amortização (SFA), também referido como Sistema PRICE</i>	40
4.4.2	<i>Sistema de Amortização Constante (SAC)</i>	41
5	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

Nos dias de hoje, alguns podem até estranhar um mundo sem computadores internet ou até mesmo “smartphones”. No entanto, aqueles não tão jovens ou os sem muito acesso, lembram que não faz tanto tempo assim que estas novas tecnologias fazem parte do cotidiano. Inclusive, a ideia deste trabalho surgiu pelo fato de uma referência da área “parecer” ter preocupação no ensino do manuseio de uma calculadora científica como se fosse uma inovação da época, ou do ensino de tábuas logarítmicas que, sob o nosso ponto de vista, está ultrapassado. Isto nos faz refletir que a tecnologia está avançando muito rápido e o ensino pode se valer muito destes avanços. Sendo assim, é razoável que as novas literaturas acompanhem tal evolução e reservem uma preocupação para tal.

Por outro lado, é preciso observar que pelo menos no caso específico da matemática, a teoria é o próprio objeto de estudo. Não é natural e plausível que as teorias sejam deixadas de lado, pelo fato de um aplicativo poder fazer os cálculos em instantes. Até mesmo pelo fato de a habilidade de se criar algoritmos e programação de tais tecnologias necessitam da teoria.

Este trabalho tem como proposta trazer o uso de novas tecnologias tais como o Microsoft Excel e alguns aplicativos de “smartphone” como o “calfi” para ensinar matemática financeira e visa despertar o interesse dos alunos em relação ao conceito da disciplina de Matemática Financeira.

No início deste trabalho, abordaremos os conceitos básicos de Matemática Financeira. Algumas referências para estes conceitos iniciais são: (CRESPO, 2009), (MATHIAS, 2009), (BARROS, 2010) e (SILVA, 2010) Assim, podemos fazer uma comparação mais eficaz do poder de tais tecnologias. No caso particular de uso do Excel, recomendamos como leitura auxiliar (WAGNER, DE OLIVEIRA MORGADO e ZANI, 2015) Acreditamos que para curso mais aplicados onde a teoria matemática não seja tão vital, estes conhecimentos possam ser valiosos. Inclusive, durante a efetivação do trabalho aplicado.

2 PRÉ-REQUISITOS

Nesta seção, abordar-se como utilizar o programa Microsoft Excel em matemática comercial financeira e os seus conceitos básicos necessários para boa compreensão do conteúdo e das suas aplicações.

Definição 2.1 *Capital é qualquer quantidade do dinheiro, que esteja disponível em certa data, para ser aplicado numa operação financeira. As notações que será indicar o capital é C ou PV (present value = valor presente).*

Definição 2.2 *De uma bem coloquial, o juro é uma compensação financeira pelo empréstimo de uma quantia. Uma compensação por não se poder usar o capital por um determinado período de tempo.*

Definição 2.3 *A taxa de juros é a taxa sobre a qual cobraremos os juros.*

A taxa de juros pode ser representada na sua forma percentual ou nominal. Por exemplo, uma taxa de juros percentual de 12% será representada pela taxa nominal 0,12. Podemos obter a taxa percentual multiplicando a taxa nominal por 100 ou a taxa nominal à partir da percentual dividindo por 100.

2.1 Regime de capitalização

Regime de capitalização é um processo de formação do juro. Há dois regimes de capitalização, a saber a juro simples e a juro composto.

No regime de capitalização a juro composto é quando o juro no primeiro período tempo é incorporado ao montante, fazendo com que o juro do segundo incide sobre esse novo capital e assim sucessivamente.

No regime de capitalização o juro simples é quando a taxa de juro incide somente sobre o capital independente de período do tempo aplicado.

2.2 Juro simples

Definição 2.4 *No regime de capitalização juro simples é formado no fim de cada período com o juro sempre incidindo no capital inicial.*

2.3 Cálculo do juro simples

Por definição, o juro simples é diretamente proporcional ao capital inicial e ao tempo de aplicação, sendo a taxa por período o fator de proporcionalidade. Assim, sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} \text{ o capital inicial ou principal} \\ \mathbf{j} \text{ o juro simples} \\ \mathbf{n} \text{ o tempo de aplicação} \\ \mathbf{i} \text{ a taxa de juro unitário.} \end{array} \right.$$

Assim, sendo :

$$j = C \times i \times n$$

Ou

$$j = \frac{C \cdot i \cdot n}{100}$$

Observação 2.1 *Muitos texto, utiliza a variável tempo denotada significativamente por t , tomando a fórmula acima,*

$$j = C \times i \times t$$

Observação 2.2 *A variável tempo tem que está de acordo com a taxa i , isto é, se i , é o ano, n é o número de anos e assim por diante.*

É importante observar que essa fórmula só pode ser aplicada se o prazo de aplicação (n) é expresso na mesma unidade de tempo a que se refere a taxa (i) considerada.

Exemplo 2.1

Tomou-se emprestada a importante de R\$ 1.200,00, pelo prazo de 2 anos, á taxa de 30 % ao ano. Qual o valor será o valor do juro a ser pago?

Solução:

Temos:

$$C = 1.200,00$$

$$n = 2 \text{ a}$$

$$i = 30 \% \text{ a.a} = 0,3 \text{ a.a}$$

$$j = \dots?$$

Como:

$$j = C \times i \times n$$

Então:

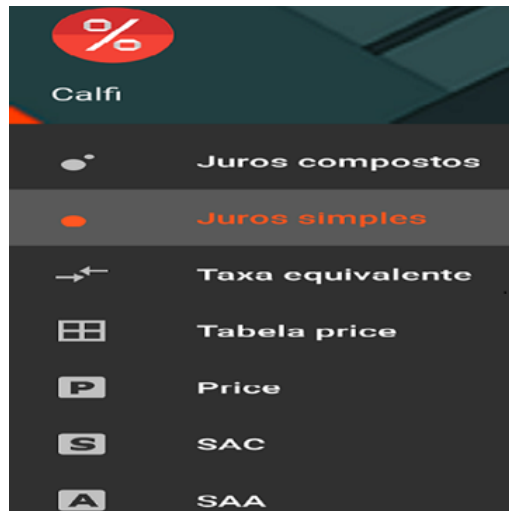
$$j = 1.200,00 \times 0,3 \times 2$$

$$j = 720,00.$$

Logo, o juro a ser pago é de: R\$ 720,00.

O exemplo acima pode ser feito utilizando o aplicativo “**Calfi**”. Primeiro, abra o aplicativo e selecione “**juros simples**”;

Figura 1: Calcular o valor do Juro simples através do calfi 1.



Fonte: Próprio autor

Segundo, preencha o valor presente ou valor capital (PV) = 1.200,00, o tempo (n) = 2 a e valor da taxa (i) = 30 a.a.

Figura 2: Calcular o valor do Juro simples através do calfi 2.



Fonte: Próprio autor

Por último, clique “OK” para mostrar os resultados.

Figura 3: Calcular o valor do Juro simples através do calfi 3.

Juros simples

J Juros

FV 1920

PV 1200.00

n 2 anos

i 30 a.a.

$j = PV * (i/100) * n$
 $j = 1200.00 * 0.3 * 2$
 $j = 1200.00 * 0.3 * 2$
 $j = 720$

Fonte: Próprio autor

2.4 Taxas proporcionais

Definição 2.5 Duas taxas de juro i e i' são proporcionais, se são “diretamente proporcionais” em relação ao tempo traduzidos a mesma unidade, isto é,

$$\frac{i}{i'} = \frac{n}{n'}. \quad (1)$$

Exemplo 2.2 18% ao ano e 1,5 ao mês são diretamente proporcionais. De fato, um ano é 12 meses, assim,

$$\frac{18}{1,5} = \frac{18}{15} 10 = \frac{18 \times 10}{15} = 6 \times 2 = 12 = \frac{12}{1}.$$

Em particular, para facilitar, vamos obter uma fórmula onde i e i_k são taxas de juros proporcionais, com i_k correspondendo a $\frac{1}{k}$ do tempo da taxa i .

Segue-se de (1), que

$$\frac{i}{i_k} = \frac{1}{1} k = k.$$

Logo, temos

$$i_k = \frac{i}{k},$$

ou

$$i = k \cdot i_k.$$

Observação 2.3 Observe que i é taxa relativa “ao maior período tempo”, pois i_k refere-se

a uma fração e $\frac{i}{k}$ (≤ 1) do tempo de i .

Observação 2.4 Observe que as mesmas fórmulas estão de acordo com o nosso exemplo.

De fato, 1 mês $\frac{1}{12}$ do ano. E $18 = 12 \times 1,5$ ou $1,5 = \frac{18}{12}$

Exemplo 2.3 Calcule a taxa mensal proporcional à

a) 9% a.t

b) 24% a.s

c) 0,04 a.d

Resoluções: a)

$$\begin{aligned} 1 \text{ trimestre} &= 3 \text{ meses} \\ 1 \text{ mês} &= \frac{1}{3} \text{ trimestre} \\ i_k &= \frac{i}{k} \\ i_k &= \frac{9\%}{3} \\ i_k &= 3\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 1 \text{ semestre} &= 6 \text{ meses} \\ 1 \text{ mês} &= \frac{1}{6} \text{ semestre} \\ i_k &= \frac{i}{k} \\ i_k &= \frac{24}{6} \\ i_k &= 4\% \text{ a.m.} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 1 \text{ mês} &= 30 \text{ dias} \\ 1 \text{ dia} &= \frac{1}{30} \text{ mês} \\ i_k &= \frac{i}{k} \\ 0,04 &= \frac{i}{30} \\ i &= 0,04 \times 30 \\ i &= 1,2. \end{aligned}$$

2.5 Taxas Equivalentes

Definição 2.6 Duas taxas são ditas equivalentes se rendam o mesmo juro sobre o mesmo capital no mesmo intervalo de tempo.

Exemplo 2.4 18% a.a e 1,5% a.m são taxas equivalentes. De fato sobre um capital C , durante 1 ano elas rendam.

$$J_1 = C \times 18 \times 1 = C \times 18$$

$$J_2 = C \times 1,5 \times 12 = C \times 18$$

Logo,

$$J_1 = J_2.$$

Teorema 2.1 Duas taxas a juro simples são proporcionais se somente se elas são equivalentes.

Dadas duas taxas i e i' uma delas é maior ou igual a outra.

Suponha seu perda $i' \leq i$.

Então

$$i' = \frac{i}{k}; k > 1.$$

Pelo que vimos então

$$i_k = \frac{i}{k}.$$

Assim, i e i' o juro rendido sob um capital C em uma unidade de tempo i é

$$J_1 = Ci \times 1$$

$$J_2 = C \times i_k \times k$$

$$J_2 = C \times \frac{i}{k} \times k$$

$$J_2 = Ci = J_1.$$

Então eles rendem ao mesmo juro, isto é, se as taxas são proporcionais elas são equivalentes. Reciprocamente, se as taxas são equivalentes

$$J_i = J_{i_k}$$

$$Ci = C \times i_k \times k$$

$$i = i_k \times k \text{ ou } i_k = \frac{i}{k}$$

Exemplo 2.5 Calcule o juro de 52.500,00 a taxa de 18% a.a durante 3 meses

solução:

Precisamos de uma taxa equivalente á 18% a.a em meses, pelo teorema anterior basta procurar sua taxa proporcionais

$$1\text{ano} = 12\text{meses}$$

$$18 = 12 \times i_k$$

$$i_k = \frac{18\%}{12}$$

$$i_k = 1,5\%.$$

2.6 Juro comercial e exato

Em nossas preliminares consideramos 1 mês = 30 dias, conseqüentemente, 1 ano = 360 dias para efeito de taxas equivalentes. Quando fazemos isto estamos obtendo o **juro**

simples comercial. Caso contrário estamos considerando o **juro simples exato.**

Então vimos que o número de dias é uma variável importante na determinação de juro. Sendo assim definimos o tempo aproximado quando considerando o mês igual á 30 dias, e, conseqüentemente, o ano igual 360 dias e etc. Quando consideramos o número exato de dias, de acordo com o calendário, estamos considerando **tempo exato.**

Observação 2.5 *Tanto na obtenção do juro simples comercial quanto no juro simples exato, podemos considerar o **tempo aproximado** ou o **tempo exato.***

Observação 2.6 *O mais usado é o regime de juro simples comercial com o tempo exato, isto gera o juro máximo.*

2.7 Determinação do número de dias exatas entre duas datas

Quando aproximamos os meses sempre com 30 dias estamos utilizando o **juro simples comercial.** Quando utilizamos o número exato de dias entre duas datas, o que pode implica o mês com 28, 29, 30 ou 31 dias estamos considerando o **juro simples exato.** Podemos obter o número exato de dias entre duas datas de três maneiras diferentes:

1ª) Contar no calendário, observando que só precisamos contar uma das datas extremas (a data inicial ou final). Aqui no Brasil.

2ª) Lembra que o meses de abril, junho setembro e novembro possuem 30 dias, fevereiro tem 28 dias caso não seja ano bissexto e 29 dias caso contrário. Os meses complementares janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro e dezembro possuem 31 dias.

3ª) Pelo uso de contagem de dias.

Exemplo 2.6 *Calcule o número exato de dias entre as datas:*

a) 25/03 á 30/05.

Solução:

a) Pelo método 2, como o mês do março (03) possui 31 dias, temos 31 dias entre as datas 25/03 á 25/04, abril possui 30 dias, temos 30 dias entre 25/04 á 25/05 temos

Agora, entre as datas 25/05 á 30/05

temos:

$$30 - 25 = 5 \text{ dias.}$$

Conseqüentemente o número de dias é

$$31 + 30 + 5 = 66.$$

2.8 Montante

Definição 2.7 *Montante é a soma do juro mais o capital inicial ou a soma do valor atual mais o juro.*

Tabela 1: Montante para o juro simples

<i>Tempo</i>	Juros	Montante
1	Ci	C(1+i)
2	Ci	C(1+2i)
3	Ci	C(1+3i)
4	Ci	C(1+4i)
⋮	⋮	⋮
n	Ci	C(1+ni)

Fonte: Próprio autor

Exemplo 2.7 *Que montante receberá um aplicador que tenha investido R\$ 28.000,00 durante 15 meses, á taxa de 3 % ao mês?*

Resoluções:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C} = 28.000,00 \\ \mathbf{n} = 15 \text{ meses} \\ \mathbf{i} = 3 \% \text{ a.m.} = 0,03\% \text{ a .m.} \\ \mathbf{M} = ? \end{array} \right.$$

Lembrando que

$$M = C(1 + in),$$

temos

$$M = 28.000,00(1 + 0,03 \times 15)$$

$$M = 28.000,00(1 + 0,45)$$

$$M = 28.000,00 \times 1,45.$$

Logo

$$M = \text{R\$ } 40.6000,00.$$

2.9 Desconto simples

O desconto simples pode ser feito considerando como capital o valor nominal ou o valor atual, no primeiro caso , chamamos de desconto comercial e no segundo, desconto racional.

2.9.1 Desconto comercial

O desconto comercial, também chamado desconto bancário ou desconto por fora, é calculado sobre o valor nominal do título no período de tempo correspondente, sobre uma taxa fixada, chamada taxa de desconto.

Chamando de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N} \text{ valor nominal (é o valor que deve ser pago ou) valor de fatura} \\ \mathbf{A} \text{ valor atual ou valor comercial é o valor pago efetuando-se o desconto} \\ \mathbf{d} \text{ o valor de desconto} \\ \mathbf{n} \text{ o tempo que você antecipou o pagamento} \\ \mathbf{i} \text{ a taxa de desconto} \end{array} \right.$$

Então

$$A = N - d. \quad (2)$$

é o valor atual. Quando o desconto incide sobre o valor nominal ele é dado por

$$d = N \times i \times n \quad (3)$$

que é o **valor do desconto comercial**. Logo substituindo **d** obtido em (3) pelo seu valor obtido em (2), tem-se

$$\begin{aligned} A &= N - d \\ A &= N - N \times i \times n \end{aligned}$$

Daí:

$$A = N(1 - i \times n) \quad (4)$$

que é o **valor atual comercial**.

Exemplo 2.8 *Um título de R\$ 6.000,00 vai ser descontado á taxa 2,1 % ao mês. Faltando 45 dias para o vencimento do título, determine:*

- a) *o valor do desconto comercial*
- b) *o valor atual comercial*

Resolução:

Temos:

$$\begin{aligned} N &= 6.000,00 \\ n &= 45 \text{ d} \\ i &= 2,1 \text{ a.m.} = 0,021 \text{ a.m.} = 0,0007 \text{ a.d} \\ \text{a) } d &= \dots? \\ \text{b) } A &= \dots? \end{aligned}$$

a) Sabemos que

$$d = N \times i \times n$$

Logo

$$d = 6.000,00 \times 0,0007 \times 45$$

$$d = 189,00.$$

Isto é, o desconto comercial é de R\$ 189,00.

b) como:

$$A = N - d$$

$$A = 6.000,00 - 189,00$$

$$A = R\$5.811,00,$$

isto é, o valor atual comercial é de R\$ 5.811,00

2.9.2 Desconto racional

O desconto racional, também chamado desconto real ou por dentro é o desconto calculado sobre o valor atual do título numa taxa fixada (a taxa de desconto) e durante o tempo correspondente. Chamando:

$$\begin{cases} d_r & \text{o valor do desconto racional} \\ A_r & \text{valor atual ou valor desconto racional.} \end{cases}$$

Temos, pela definição

$$d_r = A_r \times i \times n. \quad (5)$$

Observação 2.7 Na prática, não é possível calcular o desconto racional com essa fórmula, uma vez que o valor atual A_r só é conhecido após o cálculo do desconto.

Então substituindo A_r pelo valor dado em (2), tem-se

$$d_r = (N - d_r)in.$$

Como

$$A_r = N - d_r, \quad (6)$$

substituindo (6) em (5), temos

$$\begin{aligned}d_r &= (N - d_r) \times i \times n \\d_r &= N \times i \times n - d_r \times i \times n \\d_r + d_r \times i \times n &= N \times i \times n \\d_r(1 + i \times n) &= N \times i \times n.\end{aligned}$$

Daí

$$d_r = \frac{N \times i \times n}{1 + i \times n}, \quad (7)$$

que é o **valor desconto racional em função do valor nominal** do título.

Uma vez descontado racionalmente o título, pode-se determinar seu valor atual A_r pela diferença

$$A_r = N - d_r$$

substituindo d_r pelo seu valor, obtido em (7), vem:

$$\begin{aligned}A_r &= N - \frac{N \times i \times n}{1 + i \times n} \\A_r &= \frac{N(1 + i \times n) - N \times i \times n}{1 + i \times n} \\A_r &= \frac{N + N \times i \times n - N \times i \times n}{1 + i \times n}.\end{aligned}$$

Daí

$$A_r = \frac{N}{1 + i \times n}. \quad (8)$$

2.10 Taxa efetiva

É a taxa que transforma o valor atual no valor nominal durante o período de antecipação. Note que o juro transforma o capital no montante por um “ n ” período pela formula:

$$\begin{aligned}M &= C \times i \times n + C \\&= C(1 + in).\end{aligned}$$

Fazendo,

$$C = A \quad \text{e} \quad M = N ,$$

temos

$$\begin{aligned} M &= C(1 + in) \\ N &= A(1 + i_f n) \\ 1 + i_f n &= \frac{N}{A} \\ i_f n &= \frac{N}{A} - 1 \\ i_f &= \frac{1}{n} \left(\frac{N - A}{A} \right). \end{aligned}$$

Lembrando que

$$d = N - A$$

substituindo, obtemos:

$$i_f = \frac{d}{A \cdot N} \quad (9)$$

Exemplo 2.9 *Um título de 6000,00 foi descontado a taxa 2,1% a.m faltando 40 dias para os seus vencimentos. Sabendo que o desconto foi de 18, calcule a taxa de juro efetiva?*

Solução:

$$\begin{aligned} d &= 189 \\ n &= 45 \text{ dias} = 1,5 \text{ mês} \\ N &= 6000,00 \\ A &= N - d = 6000,00 - 189 = 5811 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} i_f &= \frac{d}{n \cdot A} \\ i_f &= \frac{189}{1,5 \times 5811} \\ i_f &= 0,021168 = 2,168 \% \text{ a.m} \end{aligned}$$

Observação 2.8 *Note que a taxa efetiva 2,168% a.m foi maior que a taxa de desconto 2,1% a.m. Isto em geral ocorre.*

3 JUROS COMPOSTOS

Vimos que no regime de capitalização simples, o juro em cada período de tempo é mesmo, pois ele é sempre formado com base no capital inicial.

O novo regime de capitalização que estudaremos o juro formado, a partir do segundo período de tempo, será formado com o capital sendo o montante do período anterior.

Fórmula :

$$M = C(1 + i)^n \quad (10)$$

Tabela 2: Montante para juros compostos

Tempo	Juros	Montante
1	Ci	$C(1 + i)$
2	$Ci(1 + i)$	$C(1 + i)^2$
3	$Ci(1 + i)^2$	$C(1 + i)^3$
4	$Ci(1 + i)^3$	$C(1 + i)^4$
\vdots	\vdots	\vdots
n	$Ci(1 + i)^n$	$C(1 + i)^n$

Fonte: Próprio autor

Exemplo 3.1 *Aplicou-se R\$ 300,00 em um investimento que rende 2% ao mês, a juro composto. Qual é o montante ao final de 3 meses?*

Soluções:

$$C = 300,00$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

$$i = 2\% \text{ Ao mês} = 0,02 \% \text{ Ao mês}$$

$$M = \dots?$$

Sabemos que:

$$M = C(1 + i)^n$$

$$M = 300(1 + 0,02)^3$$

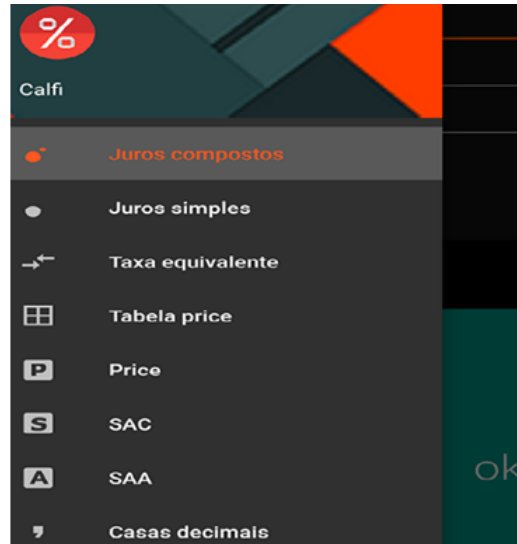
$$M = 300(1,02)^3$$

$$M = 300(1,061208)$$

$$M = 318,36$$

O exemplo acima pode ser feita com o aplicativo “Calfi”.
Primeiro, abra o aplicativo e selecione “**Juro composto**”;

Figura 4: Calcular o valor do Juro composto através do calfi 1



Fonte: Próprio autor

segundo, preencha o valor presente ou capital (PV) = 300,00, o tempo (n) = 3 a.m e o valor da ta (i) = 2 a.m.

Figura 5: Calcular o valor do Juro composto através do calfi 2



Fonte: Próprio autor

E por último, clique “ok” para mostrar os resultados.

Figura 6: Calcular o valor do Juro composto através do calfi 3



Fonte: Próprio autor

3.1 Cálculo do Capital

A fórmula do montante em regime de juros compostos (10) pode ser escrita assim, como

$$C(1 + i)^n = M_n,$$

temos

$$C = M_n \times \frac{1}{(1 + i)^n}$$

Como

$$\frac{1}{(1 + i)^n} = (1 + i)^{-n},$$

podemos escrever

$$C = M_n(1 + i)^{-n}, \quad (11)$$

que nos dá o valor do capital inicial ou principal.

O fator $(1 + i)^n$ é denominado fator de capitalização.

Observação 3.1 A dificuldade está em se calcular $(1 + i)^{-n}$, que pode ser determinado por meio de uma “calculadora científica”

Exemplo 3.2 Calcule o capital inicial que, no prazo de 5 meses, a 3% ao mês, produzido o montante de R\$ 4.058,00.

Solução:

temos

$$\left\{ \begin{array}{l} M_5 = 4.058,00 \\ n = 5 \text{ meses} \\ i = 3 \% \text{ a.m.} = 0,03\% \text{ a .m.} \\ C = ? \end{array} \right.$$

Substituindo esses valores em (11), obtem-se

$$C = 4.058,00(1 + 0,03)^{-5}$$

$$C = 4.058,00 \times 0,86261$$

$$C = 3.500,40.$$

Isto é, o capital inicial é R\$ 3.500,00.

3.2 Desconto composto

No sistema capitalização composto também podem ser definidos os dois tipos de descontos que foram definidos para o regime de capitalização simples, isto é, o desconto comercial e o desconto racional.

3.2.1 *Desconto comercial*

O desconto comercial, bancário ou por fora, é calculado sobre o valor nominal do título.

Suponha-se que um título de valor nominal N vai ser descontado com desconto comercial composto n períodos antes do vencimento com taxa de desconto i . Seu valor atual A_c poderá ser calculado como se o seu valor nominal sofresse n descontos comerciais sucessivos, um para cada período que falta para seu vencimento, todos de taxa i . Chamando de A_1, A_2, \dots, A_n os valores atuais obtidos 1, 2, ..., n períodos antes de vencimento, tem-se,

$$A_1 = N(1 - i)$$

$$A_2 = A_1(1 - i) = N(1 - i)^2$$

$$\vdots$$

$$A_n = A_{n-1}(1 - i) = N(1 - i)^n$$

O valor atual n períodos antes do vencimento será $A_c = A_n$ e será dado pela expressão

$$A_c = N(1 - i)^n$$

para o desconto d_c , a expressão será

$$d_c = N - N(1 - i)^n.$$

3.2.2 Desconto racional

O desconto racional por dentro é calculado sobre o valor atual do título. Suponha-se que um título de valor nominal N que vai ser descontado com desconto composto racional n períodos antes do vencimento com a taxa i . Seu valor atual A_r poderá ser calculado com tendo sofrido n desconto racionais sucessivos de taxa i . Então, os valores atuais A_1, A_2, \dots, A_n , obtidos 1, 2, ..., n períodos antes do vencimento

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{N}{1+i} \\ A_2 &= \frac{A_1}{1+i} = \frac{N}{(1+i)^2} \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{A_{n-1}}{1+i} = \frac{N}{(1+i)^n}. \end{aligned}$$

O valor atual final será $A_r = A_n$. Então

$$A_r = \frac{N}{(1+i)^n}$$

ou

$$a_r = N(1+i)^n$$

Logo, a fórmula para o desconto racional composto será:

$$d_r = N - \frac{N}{(1+i)^n}$$

ou

$$d_r = N\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right).$$

3.3 Equivalência de capitais diferidos

Definição 3.1 *Dois capitais são ditos equivalentes em determinada data, chamada data de comparação, se os valores atuais em relação a data de comparação são iguais. Em regime de capitalização simples essa data deve coincidir com a data zero. **Em regime de capitalização composto, a data de comparação pode ser qualquer uma., por que os juros compostos são equivalentes aos descontos compostos.***

4 RENDAS

Definição 4.1 *São depósitos ou abatimentos sucessivos no intuito de fazer um capital ou amortizar uma dívida. Os valores dos depósitos ou abatimentos são chamados termos da renda.*

Podemos classificar as rendas dependendo do intervalo de tempo entre dois depósitos ou abatimentos sucessivos. Se este intervalo de tempo chamado período for constante a renda é dita periódica.

Exemplo 4.1 *Se o período for mês, a renda é dita periódica mensal. Analogamente, ela poderá ser bimestral, trimestral, semestral, anual e etc. Um contra-exemplo para este caso, é o de aportes para uma previdência privada, a qual não precisa de período determinado.*

As rendas classificam-se em dois tipos: **as certas e as aleatórias**

Definição 4.2 (Rendas Certas) *São aquelas cujos pagamentos têm vencimento, termos e número de termos preestabelecidos e a taxa de juros fixadas. Por exemplo, nos contratos de aluguel imóveis.*

Definição 4.3 (Rendas aleatórias) *São aquelas cujos pagamentos têm vencimentos, valores e números aleatórios ou a taxa variável. Por exemplo, nos contratos de seguro, embora o valor da indenização até possa ser conhecido, a data do pagamento é incerta, pois depende de acontecimento futuros.*

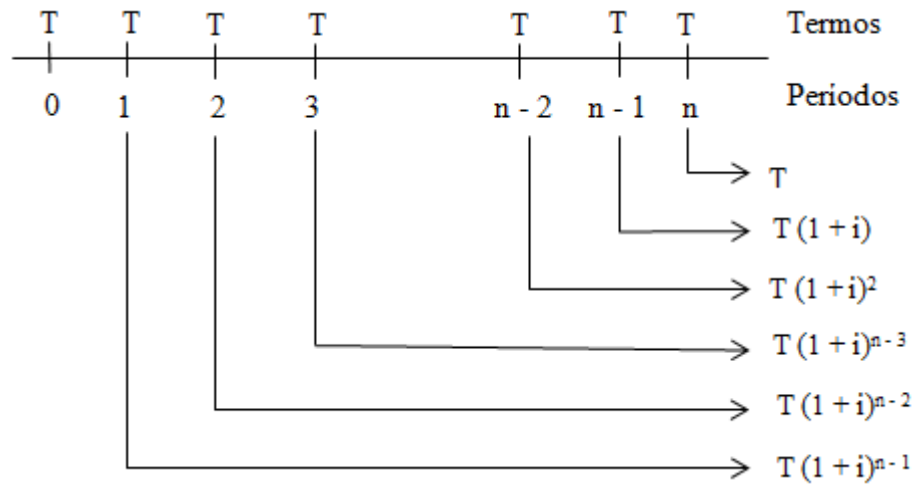
Quanto aos valores dos termos, as rendas podem ser constantes ou uniformes, quando os termos são iguais. Exemplo é a série de prestações devidas por um objeto comprado o prazo (supondo prestações iguais). Caso contrário, é variável quando os termos são diferentes. Exemplo, são os rendimentos mensais de uma capital aplicado na caderneta de poupança.

4.1 Classificação quanto ao vencimento do primeiro termo

Quanto á data do vencimento do primeiro termo, uma renda certa pode ser **imediate**, **antecipada** ou **diferida**.

4.1.1 Rendas imediatas

Uma renda é dita imediata quando o vencimento do primeiro termo se dá no fim do primeiro período a contar a data zero. O diagrama a seguir representa uma renda imediata de n termos:



Assim, o vencimento do último termo T_n ocorre no fim do período n onde

$$\begin{cases} \mathbf{T} & \text{O valor fixo dos depósitos periódicos} \\ \mathbf{n} & \text{O número do períodos} \\ \mathbf{i} & \text{A taxa de juro} \end{cases}$$

$$S_{n,i} = T + T(1+i) + T(1+i)^2 + \dots + T(1+i)^{n-2} + T(1+i)^{n-1}$$

$$S_{n,i} = T [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + T(1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

A expressão que se encontra dentro de colchetes corresponde à soma dos termos de uma PG, com n termos, sendo o primeiro termo igual a 1 e a razão igual a $(1+i)$. Aplicando a fórmula da soma dos “ n ” primeiros termos de uma PG a qual relembramos aqui,

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (12)$$

Podemos escrever

$$S_{n,i} = T \left[\frac{1(1 - (1+i)^n)}{1 - (1+i)} \right].$$

$$S_n = T \left[\frac{1 - (1+i)^n}{-i} \right].$$

Daí

$$S_n = \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right].$$

Finalmente, temos:

$$S_{n,i} = T \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]. \quad (13)$$

O fator

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad (14)$$

é um fator de capitalização, indicado por $s_{n,i}$. Assim,

$$S_{n,i} = T \times s_{n,i}. \quad (15)$$

Esta fórmula nos dá o montante de uma renda imediata.

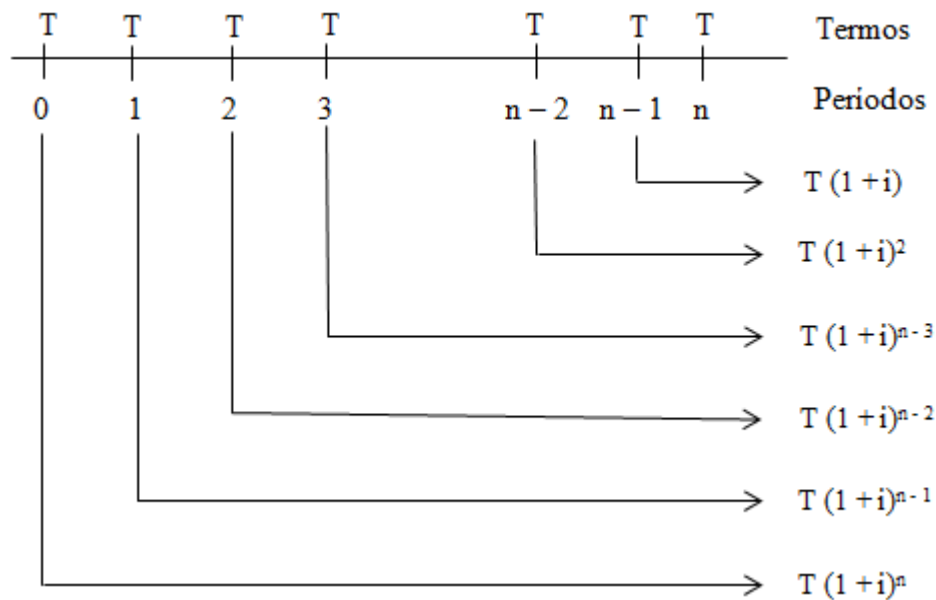
Exemplo 4.2 Na renda imediata os exemplos mais comuns são o empréstimo que o devedor paga em parcelas periódicas, com a primeira vencendo no fim do primeiro período, o aluguel que o inquilino quita no fim de cada mês a partir da data em que alugou o imóvel, o salário que o trabalhador recebe no fim cada mês a partir da data em que foi contratado, e muitos outras.

4.1.2 Rendas antecipadas

As rendas antecipadas ocorrem quando o vencimento do primeiro termo se dá na data zero.

Exemplo 4.3 Como exemplo de rendas antecipadas podem ser citadas na compras em prestações quando a primeira prestação é paga no ato de compra, os aluguéis pagos antecipadamente, as séries depósitos iguais feitas no início de cada período com a finalidade de poupança (supõe-se taxa fixa) etc.

O diagrama a seguir representa uma renda imediata de n termos:



Sendo assim, teremos após n períodos o capital representado por $\bar{S}_{n,i}$ dado por

$$\bar{S}_{n,i} = T(1+i) + T(1+i)^2 + \dots + T(1+i)^n. \quad (16)$$

Observe que já obtivemos (ver fórmula) (15)

$$S_{n,i} = T + T(1+i) + T(1+i)^2 + \dots + T(1+i)^{n-1}. \quad (17)$$

Por (17), se somamos T em ambos os membros de (16), teremos

$$\bar{S}_{n,i} + T = T + T(1+i) + T(1+i)^2 + \dots + T(1+i)^n.$$

Isto implica

$$\bar{S}_{n,i} = T \times s_{n+1,i} - T.$$

Logo, a fórmula para renda antecipada é

$$\bar{S}_{n,i} = T \times (s_{n+1,i} - 1).$$

Lembrando que o fator de capitalização é

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Assim,

$$s_{n+1,i} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}.$$

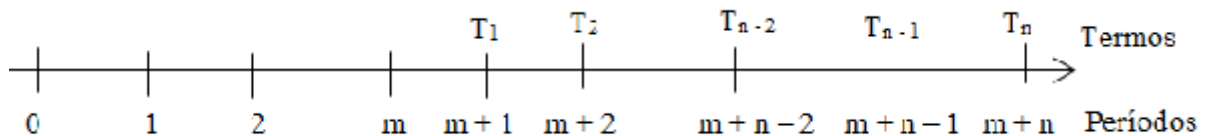
Logo,

$$S_{n,i} = T \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right].$$

4.1.3 Rendas diferidas

As rendas diferidas ocorrem quando o vencimento do primeiro termo se dá no fim de um determinado número de períodos, a contar da data zero. Este intervalo de tempo para se pagar a primeira prestação é chamado carência.

O diagrama a seguir representa uma renda diferida de n termos



O vencimento do último termo ocorre, portanto, no fim de $m + n$ períodos.

Exemplo 4.4 *Compra de um bem à prazo, em prestações mensais, pagando a primeira prestação no fim de um determinado número de meses. Por exemplo, algumas compras de carros e sapatos na “casa Pio”.*

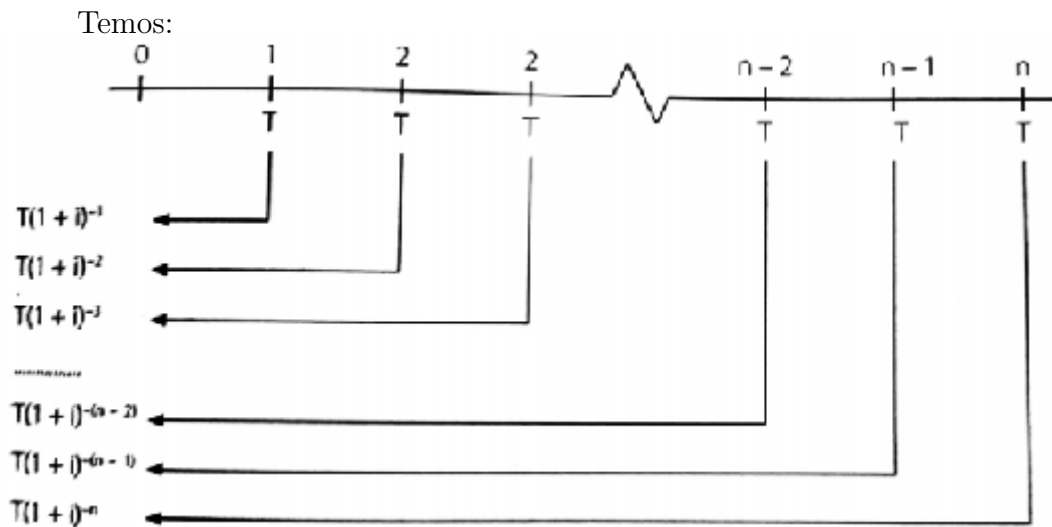
4.2 Amortização

4.2.1 Renda imediata

Com argumentos semelhantes aos expostos quando da determinação do montante de uma renda, vamos obter uma fórmula para o cálculo de valor atual de uma renda à soma dos valores atuais de cada um de seus termos, calculados com referência à data zero.

Sendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} T \text{ O valor fixo dos depósitos periódicos} \\ n \text{ O número de períodos} \\ i \text{ A taxa de juro} \end{array} \right.$$



logo:

$$A_n, i = T(1+i)^{-1} + T(1+i)^{-2} + T(1+i)^{-3} + \dots + T(1+i)^{-n-2} + T(1+i)^{-n-1} + T(1+i)^{-n}.$$

Colocando T em evidência, obtemos:

$$A_n, i = T \left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n-2} + (1+i)^{-n-1} + (1+i)^{-n} \right]$$

ou

$$A_n, i = T \left[(1+i)^{-n} + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-(n-2)} + \dots + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-1} \right].$$

A expressão que se encontra dentro dos colchetes é a soma dos termos de um PG na qual:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = (1+i)^{-n} \\ a_n = (1+i)^{-1} \\ q = 1+i \end{array} \right.$$

Lembrando que a fórmula da soma dos termos de uma PG é

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1},$$

Temos

$$\begin{aligned} A_{n,i} &= T \left[\frac{(1+i)^{-1}(1+i) - (1+i)^{-n}}{1+i-1} \right] \\ &= T \left[\frac{(1+i)^{-1+1} - (1+i)^{-n}}{i} \right] \\ &= T \left[\frac{(1+i)^0 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \\ &= T \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando o termo dentro dos colchetes por $\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}$, obtemos

$$\begin{aligned} A_{n,i} &= T \left[\frac{1(1+i)^n - (1+i)^{-n}(1+i)}{i(1+i)^n} \right] \\ &= T \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]. \end{aligned}$$

Isto é

$$A_{n,i} = T \times \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]. \quad (18)$$

Em rendas definimos o fator de amortização como

$$a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}. \quad (19)$$

Deste modo a equação (19) se transforma em

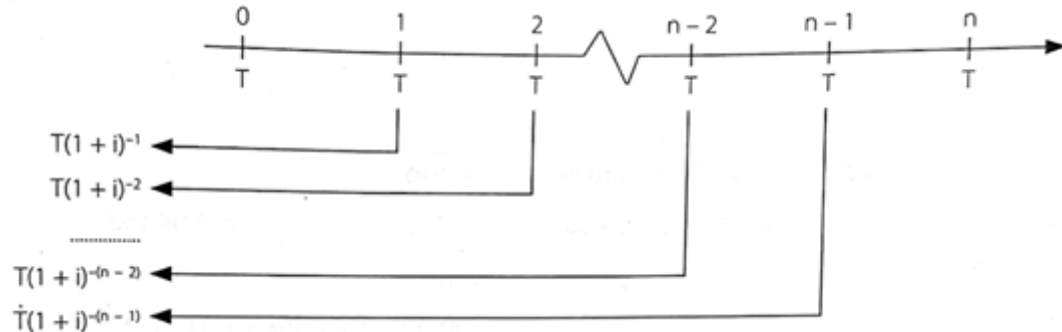
$$A_{n,i} = T \times a_{n,i}. \quad (20)$$

Observação 4.1 Note que existe a seguinte relação entre o fator de capitalização (19) e o fator de capitalização (14)

$$a_{n,i} = \frac{S_{n,i}}{(1+i)^n}$$

4.2.2 Renda antecipada

No caso de renda antecipada, como a primeira prestação é paga na assinatura do contrato data zero, seu valor atual é \mathbf{T} . Assim:



Indicando o valor atual de uma renda antecipada por $\bar{A}_{n,i}$ temos,

$$\bar{A}_{n,i} = T + T(1+i)^{-1} + T(1+i)^{-2} + \dots + T(1+i)^{-(n-2)} + T(1+i)^{-(n-1)}.$$

Logo subtraindo T de ambos lados, vem:

$$\bar{A}_{n,i} - T = T + T(1+i)^{-1} + T(1+i)^{-2} + \dots + T(1+i)^{-(n-2)} + T(1+i)^{-(n-1)}.$$

Examinando o segundo membro dessa igualdade, vemos que o valor de uma renda imediata de \mathbf{n} termos.

Logo:

$$\bar{A}_{n,i} - T = T \times \bar{A}_{n-1,i}$$

ou

$$\bar{A}_{n,i} = T \times \bar{A}_{n-1,i} + T.$$

Daí

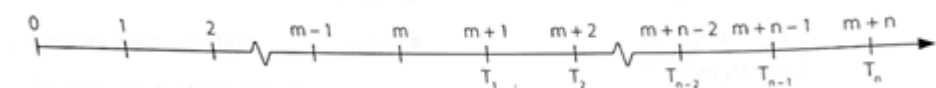
$$\bar{A}_{n,i} = T \times (\bar{A}_{n-1,i} + 1) \quad (21)$$

Esta fórmula nos dá o **valor atual de uma renda antecipada de n termos**.

4.2.3 Renda diferida

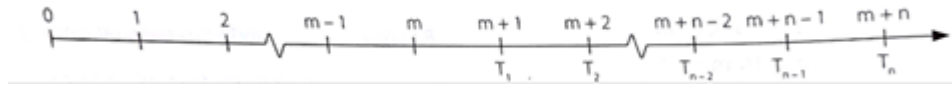
As rendas diferidas são aquelas em que o primeiro termo é exigível a partir de um certo período, chamado de carência.

Assim, uma renda imediata com \mathbf{n} termos com um período de carência igual a \mathbf{m} tem o seguinte diagrama:



Para efeito de raciocínio, vamos considerar pagamentos imediatos hipotéticos desde o período $\mathbf{1}$ até o período $\mathbf{m+n}$. Assim, a renda em questão passa se formada de $(\mathbf{m} + \mathbf{n})$

termos:



Se fosse assim o valor atual, na época zero, seria

$$A_{m+n,i} = T \times a_{m+n,i}.$$

Se desse valor subtrairmos o valor atual da renda hipotética, que é, evidentemente

$$A_{m,i} = T \times a_{m,i}$$

ficaremos com o valor atual da renda diferida. Indicando o valor atual de uma renda diferida com o período de carência igual a m pelo símbolo m/A_n , podemos escrever:

$$m/A_n = T \times A_{m+n,i} - T \times a_{m,i}. \quad (22)$$

Colocando T em evidência no segundo membro, vem:

$$m/A_n = T(a_{m+n,i} - a_{m,i}). \quad (23)$$

que é a fórmula que nos dá o **valor atual de uma renda diferida**.

4.3 Empréstimos

As prestações de um empréstimo ou financiamento são compostas de duas parcelas:

- a) A amortização, que corresponde à devolução do principal emprestado.
- b) O juro, que corresponde à renumeração do capital.

Desta forma,

$$\text{Prestação} = \text{amortização} + \text{juro}.$$

No sistema de amortização estudados as seguir, os juros são sempre calculados sobre o último saldo devedor.

Em relação a teoria de rendas vista acima, tais rendas podem ser mais facilmente calculada com a ajuda da tecnologia. Por exemplo, sabemos que:

$$A_n = T \times a_{n,i} \quad (24)$$

onde

$$a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}. \quad (25)$$

Note que as variáveis desta equação são n, T, i e $a_{n,i}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n} \text{ Tempo} \\ \mathbf{T} \text{ Valor da Parcela} \\ \mathbf{i} \text{ Taxa} \\ a_{n,i} \text{ Valor financiado} \end{array} \right.$$

As equações básicas sobre empréstimos e amortização que podem ser inferidas de maneira natural pela lógica são

$$T_k = A_k + J_k \quad (26)$$

$$J_k = iD_{k-1} \quad (27)$$

$$D_k = D_{k-1} - A_k \quad (28)$$

$$A_k = T - J_k. \quad (29)$$

4.4 Os sistemas de amortização

Os sistemas de amortização são desenvolvidos basicamente para operações de empréstimos, envolvendo pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação corresponde a soma do reembolso do capital ou dos juros do saldo devedor, podendo ser o reembolso de ambos, sendo que os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor.

A seguir, são descritos alguns sistemas de amortização, seguido de exemplos, para quais são calculados os valores dos pagamentos e, nos casos de parcelamento.

4.4.1 *Sistema Francês de Amortização (SFA), também referido como Sistema PRICE*

É a amortização que aprendemos em renda. Então o saldo devedor no período “k” será por D_k . Assim o saldo devedor inicial será D_0 , dado por n pago e as prestações iguais, periódicas como a renda.

$$D_0 = A_n = T \times a_{n,i},$$

onde

$$a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}.$$

Logo no sistema francês de amortização, a prestação é constante igual à

$$T = \frac{D_0}{a_{n,i}}. \quad (30)$$

4.4.2 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Por este sistema, o devedor paga o empréstimo em prestação que incluem, cada uma, com parcela constante amortização e os juros sobre o saldo devedor. Enquanto no sistema “price” as prestações são iguais, no SAC são iguais as amortização incluídas em cada parcela. Como n amortizações iguais devem saldar a dívida, para calcular cada um basta dividir o total do empréstimo pelo número n das de parcelas.

Assim, a amortização que é constante dada pela simples fórmula

$$A = \frac{D_0}{n}. \quad (31)$$

Note que podemos construir a tabela com apenas as equações básicas (26) e a sua componente constante. Isto é, no sistema francês, a componente constante é a parcela. Pela equação (30) podemos obter tal constante, Já no SAC a componente constante é amortização dada pela fórmula (31).

Exemplo 4.5 Criaremos uma tabela de Sistema Francês de Amortização de uma dívida de R\$ 100.000,00 à taxa de 1,5% ao mês em 5 meses.

O primeiro passo, construir uma planilha colocando os termos D_k, T_k, J_k e A_k .

Figura 7: Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 1

	A	B	C	D	E
1	Período	Saldo devedor	Prestação	Juro	Amortização
2	K	D_k	T_k	j_k	A_k
3	0				
4	1				
5	2				
6	3				
7	4				
8	5				
9					

Fonte: Próprio autor

O segundo passo é, calcular o valor da parcela via PGTO, que pode ser calculado digitando-se =PGTO ((note que ao fazer isto aparece a sintaxe (taxa;nper; vp;)).

Figura 8: Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 2

	A	B	C	D	E
1	Período	saldo devedor	prestação	Juro	Amortização
2	K	Dk	Tk	Jk	Ak
3	0				
4	1		=PGTO(
5	2		PGTO(taxa; nper; vp; [vf]; [tipo])		
6	3				
7	4				
8	5				

Fonte: Próprio autor

O **terceiro passo** é calcular o valor da prestação $T = T_k$. Este passo pode ser subdividido: primeiro, clicar em **fórmulas**, segundo, após este clique, abrirá ícones e deve-se clicar em **financeira**, então utilize a função **PGTO**. Para calcular o valor da prestação, na célula C4, usa-se o valor da taxa, o valor do número de prestações em **Nper** e use o saldo devedor inicial em **Vp**. O valor do saldo devedor deve ser inserido com sinal negativo, isto é, indicando uma dívida.

Figura 9: Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 3

	A	B	C	D	E	F
1	Período	saldo devedor	prestação	Juro	Amortização	
2	K	Dk	Tk	Jk	Ak	
3	0	R\$ 100.000,00				
4	1		=PGTO()			
5	2					

Argumentos da função

PGTO

Taxa = número

Nper = número

Vp = número

Vf = número

Tipo = número

Calcula o pagamento de um empréstimo com base em pagamentos e em uma taxa de juros constantes.

Taxa é a taxa de juros por período de um empréstimo. Por exemplo, use 6%/4 para pagamentos trimestrais a uma taxa de 6% TPA.

Resultado da fórmula =

[Ajuda sobre esta função](#)

OK Cancelar

Fonte: Próprio autor

O quarto passo é encontrar o valor do juro J_k . Clique na célula apropriada, coloque =, o valor da taxa i e digite o sinal asterisco antes da função na célula B3 e depois aperte enter. Isto fará com que sigamos a fórmula (27).

Figura 10: Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 4

	A	B	C	D	E
1	Período	Saldo devedor	Prestação	Juro	Amortização
2	K	D_k	T_k	j_k	A_k
3	0	R\$ 100.000,00			
4	1		R\$ 20.908,93	=1,5%*B3	
5	2				
6	3				
7	4				
8	5				
9					

Fonte: Próprio autor

O quinto passo é encontrar o valor da amortização A_k . Clique na célula E4 (célula apropriada), coloque "=", clique no saldo devedor inicial e digite o sinal menos antes do valor do juro j_k depois aperte enter. Isto fará com que sigamos a fórmula (29).

Figura 11: Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 5

	A	B	C	D	E
1	Período	Saldo devedor	Prestação	Juro	Amortização
2	K	D_k	T_k	j_k	A_k
3	0	R\$ 100.000,00			
4	1		R\$ 20.908,93	R\$ 1.500,00	=C4-D4
5	2				
6	3				
7	4				
8	5				
9					

Fonte: Próprio autor

O sexto passo é encontrar o saldo devedor D_k na célula B4 (célula apropriada). No intuito de seguir a fórmula (28) subtraímos a amortização do saldo devedor inicial. Então faça “= B3 – E4” na célula apropriada.

Figura 12: Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 6

	A	B	C	D	E
1	Período	Saldo devedor	Prestação	Juro	Amortização
2	K	D_k	T_k	j_k	A_k
3	0	R\$ 100.000,00			
4	1		R\$ 20.908,93	R\$ 1.500,00	=C4-D4
5	2				
6	3				
7	4				
8	5				
9					

Fonte: Próprio autor

O sétimo passo, selecione a linha do primeiro mês, segure e araste para baixo até linha do mês 5.

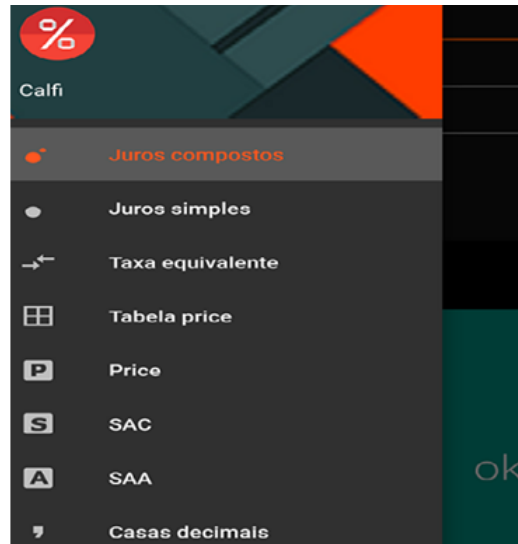
Figura 13: Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização via Microsoft Excel 7

	A	B	C	D	E
1	Período	Saldo devedor	Prestação	Juro	Amortização
2	K	D_k	T_k	j_k	A_k
3	0	R\$ 100.000,00			
4	1	R\$ 80.591,07	R\$ 20.908,93	R\$ 1.500,00	R\$ 19.408,93
5	2	R\$ 60.891,00	R\$ 20.908,93	R\$ 1.208,87	R\$ 19.700,07
6	3	R\$ 40.895,43	R\$ 20.908,93	R\$ 913,37	R\$ 19.995,57
7	4	R\$ 20.599,93	R\$ 20.908,93	R\$ 613,43	R\$ 20.295,50
8	5	R\$ 0,00	R\$ 20.908,93	R\$ 309,00	R\$ 20.599,93
9	TOTAL				R\$ 100.000,00
10					

Fonte: Próprio autor

Note que a mesma tabela, pode ser criada facilmente usando o aplicativo **Calfi**. Primeiro selecione a opção “PRICE”.

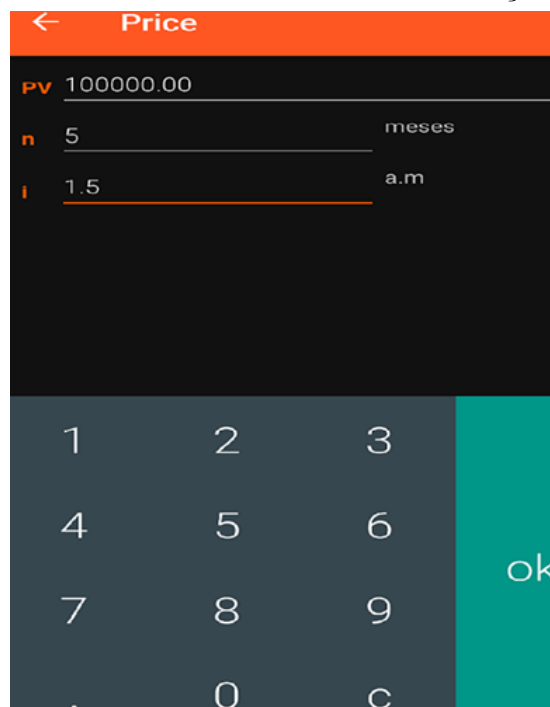
Figura 14: Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização através do Calfi 1



Fonte: Próprio autor

Em seguida, insere os valores do Pv (Valor presente ou saldo devedor), n (Tempo) e i (Taxa).

Figura 15: Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização através do Calfi 2



Fonte: Próprio autor

Observação 4.2 Note que você precisará colocar a taxa na forma percentual e não nominal

Depois clique “Ok” para ver o resultado.

Figura 16: Calcular o valor do Sistema Francês de Amortização através do Calfi 3

Sistema de Amortização Francês				
N	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0	-	-	-	100000.00
1	20908.93	1500.00	19408.93	80591.07
2	20908.93	1208.87	19700.06	60891.01
3	20908.93	913.37	19995.56	40895.45
4	20908.93	613.43	20295.50	20599.95
5	20908.93	309.00	20599.93	0.02
Total	104544.65	4544.67	99999.98	

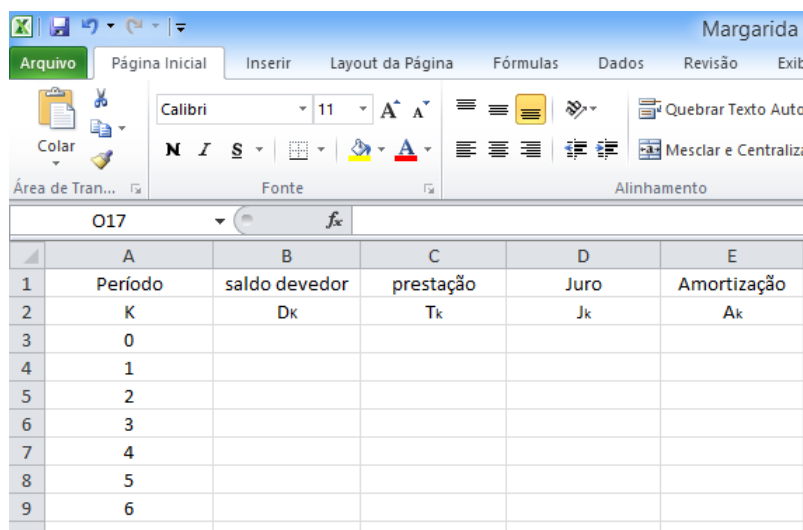
Fonte: Próprio autor

Observação 4.3 Note que o saldo devedor não zerou, isto se deve ao fato de ter-se usado uma aproximação em duas casas decimais. O que está de acordo com nosso sistema monetário que enxerga somente centavos. Pode-se cobrar os 0,02 centavos do saldo devedor na última parcela. Assim, todas as prestações seriam de 20908.93 exceto pela última que ficaria 20908,95.

Exemplo 4.6 Um empréstimo de R\$ 120.000,00 em 6 vezes à taxa de 2 % ao mês pelo Sistema de Amortização Constante (SAC) e crie a tabela.

Primeiro passo. Construa uma tabela colocando D_k , T_k , J_k e A_k em cada coluna. Veja a figura seguinte.

Figura 17: Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Microsoft Excel 1

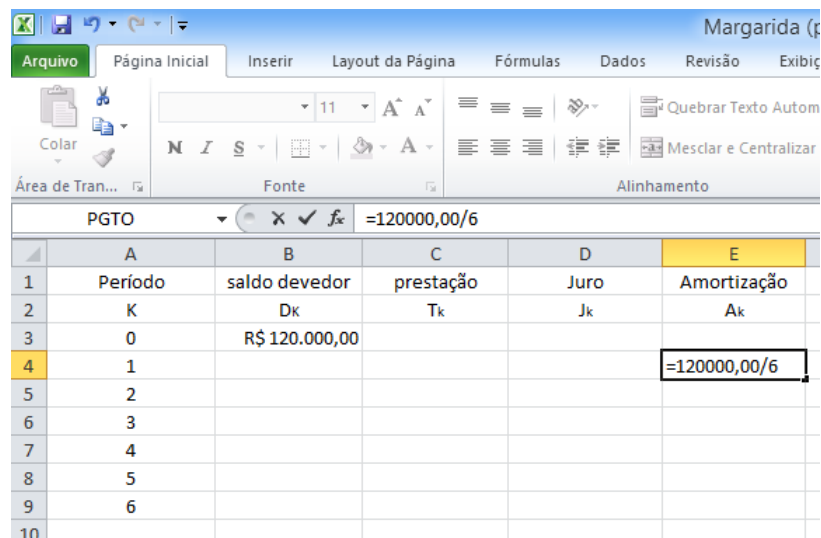


	A	B	C	D	E
1	Período	saldo devedor	prestação	Juro	Amortização
2	K	D_k	T_k	J_k	A_k
3	0				
4	1				
5	2				
6	3				
7	4				
8	5				
9	6				

Fonte: Próprio autor

Segundo passo é calcular o valor da amortização. No caso da tabela SAC sabemos que a amortização é constante, portanto, clique na E4 (celular apropriada) = e, logo em seguida, o saldo devedor inicial D_0 é dividido pelo número total das parcelas. Isto fará com que sigamos a fórmula (31)

Figura 18: Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Microsoft Excel 2

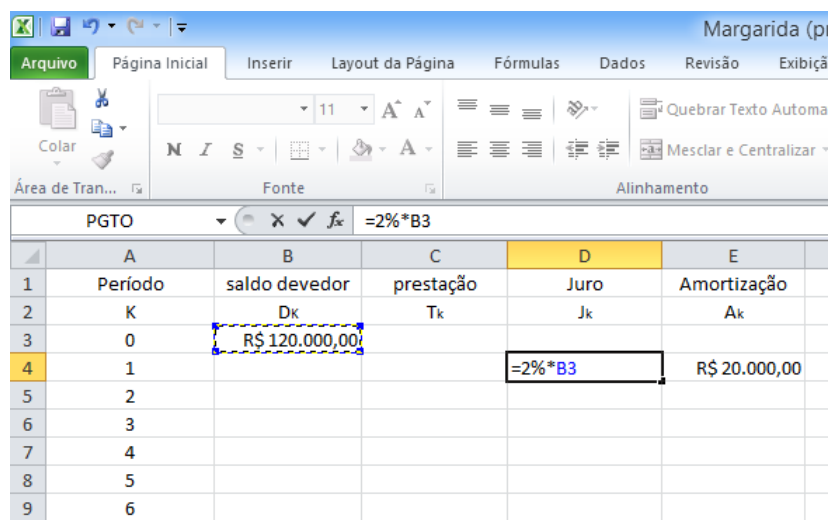


PGTO					
	A	B	C	D	E
1	Período	saldo devedor	prestação	Juro	Amortização
2	K	D_k	T_k	J_k	A_k
3	0	R\$ 120.000,00			
4	1				=120000,00/6
5	2				
6	3				
7	4				
8	5				
9	6				
10					

Fonte: Próprio autor

Terceiro passo é calcular o valor do juro de cada período J_k , clique na célula D4 (célula apropriada), digite =, o valor da taxa i e o sinal asterisco antes o saldo devedor, isto fará com que sigamos a formula (27).

Figura 19: Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Microsoft Excel 3



PGTO					
	A	B	C	D	E
1	Período	saldo devedor	prestação	Juro	Amortização
2	K	D_k	T_k	J_k	A_k
3	0	R\$ 120.000,00			
4	1			=2%*B3	R\$ 20.000,00
5	2				
6	3				
7	4				
8	5				
9	6				

Fonte: Próprio autor

Quarto passo é calcular o valor da prestação de cada período T_k , clique na célula C4 (celular apropriada), digite “=”, o valor da soma da amortização mais o juros pagos no período. Isso fará com que sigamos a fórmula (26).

Figura 20: Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Microsoft Excel 4

	A	B	C	D	E
1	Período	saldo devedor	prestação	Juro	Amortização
2	K	D_k	T_k	J_k	A_k
3	0	R\$ 120.000,00			
4	1		=E4+D4	R\$ 2.400,00	R\$ 20.000,00
5	2				
6	3				
7	4				
8	5				
9	6				
10					

Fonte: Próprio autor

Quinto passo é calcular o saldo devedor do primeiro mês. Para isto, clique na célula B4 (celular apropriada), digite =, o saldo devedor do mês anterior (no caso do primeiro mês, o anterior é o saldo devedor inicial) subtraindo do valor amortização no primeiro mês. Isso fará com que sigamos a fórmula (28).

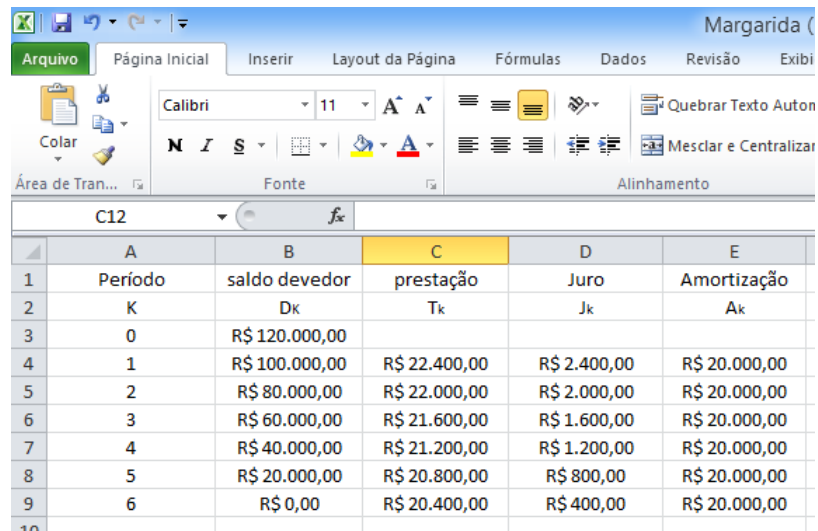
Figura 21: Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Microsoft Excel 5

	A	B	C	D	E
1	Período	saldo devedor	prestação	Juro	Amortização
2	K	D_k	T_k	J_k	A_k
3	0	R\$ 120.000,00			
4	1	=B3-E4	R\$ 22.400,00	R\$ 2.400,00	R\$ 20.000,00
5	2				
6	3				
7	4				
8	5				
9	6				

Fonte: Próprio autor

Sexto passo, selecione a linha do primeiro mês, segure e arraste para baixo até linha do mês 6.

Figura 22: Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) Via Microsoft Excel 6

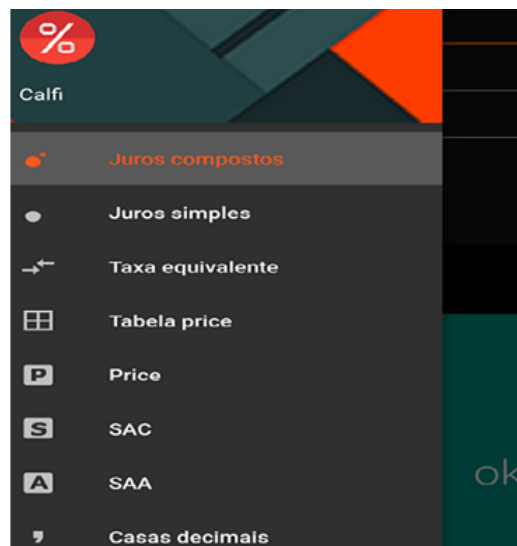


	A	B	C	D	E
1	Período	saldo devedor	prestação	Juro	Amortização
2	K	D _k	T _k	J _k	A _k
3	0	R\$ 120.000,00			
4	1	R\$ 100.000,00	R\$ 22.400,00	R\$ 2.400,00	R\$ 20.000,00
5	2	R\$ 80.000,00	R\$ 22.000,00	R\$ 2.000,00	R\$ 20.000,00
6	3	R\$ 60.000,00	R\$ 21.600,00	R\$ 1.600,00	R\$ 20.000,00
7	4	R\$ 40.000,00	R\$ 21.200,00	R\$ 1.200,00	R\$ 20.000,00
8	5	R\$ 20.000,00	R\$ 20.800,00	R\$ 800,00	R\$ 20.000,00
9	6	R\$ 0,00	R\$ 20.400,00	R\$ 400,00	R\$ 20.000,00

Fonte: Próprio autor

Note que a mesma tabela, pode ser criada facilmente usando o aplicativo **Calfi**. Primeiro, selecione a opção “SAC”. como mostra na figura.

Figura 23: Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) através do Calfi 1



Fonte: Próprio autor

Próximo passo, coloque os valores do Pv (Valor presente), n (Tempo) e i (Taxa).

Figura 24: Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) através do Calfi 2

The screenshot shows a mobile application interface for calculating the SAC. At the top, there is a back arrow and the title 'SAC'. Below the title, there are three input fields: 'PV' with the value '120000.00', 'n' with the value '6' and the unit 'meses', and 'i' with the value '2' and the unit 'a.m.'. Below the input fields is a numeric keypad with digits 1-9, 0, and a 'C' key. To the right of the keypad is a green 'ok' button.

Fonte: Próprio autor

Depois clique “Ok” para ver os resultados.

Figura 25: Calcular o valor do Sistema de Amortização Constante (SAC) através do Calfi 3

Sistema de Amortização Constante				
N	Prestação	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0	-	-	-	120000.00
1	22400.00	2400.00	20000.00	100000.00
2	22000.00	2000.00	20000.00	80000.00
3	21600.00	1600.00	20000.00	60000.00
4	21200.00	1200.00	20000.00	40000.00
5	20800.00	800.00	20000.00	20000.00
6	20400.00	400.00	20000.00	0.00
Total	128400.00	8400.00	120000.00	

Fonte: Próprio autor

5 CONCLUSÃO

Com base nos estudos e pesquisas desenvolvidos durante este trabalho, pudemos concluir que a tecnologia é uma ferramenta poderosa e deve ser contínuo objeto de estudo. De fato, é o que proporciona velocidade de cálculo para que diversos campos da nossa sociedade fluam.

Além disso, o rápido avanço de tais tecnologias, sobretudo em programas de computador e aplicativos de tablets e smartphones requer que bibliografias estejam em constante atualização.

Finalmente, terminamos com a orientação que, sobretudo em áreas mais aplicadas, estudos de tecnologias mais recentes devem ser estimulados.

REFERÊNCIAS

CRESPO, Antônio Arnot. **Matemática Financeira Fácil**. 14 ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matemática Financeira**. 6. ed. São Paulo: Atlas S.A, 2011.

BARROS, Dimas Monteiro de. **Matemática Financeira para concursos**. 3. ed. Araçatuba, Sp: Mb, 2010.

SILVA, André Luiz Carvalhal da. **Matemática Financeira Aplicada**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

WAGNER, Eduardo ; DE OLIVEIRA MORGADO, Augusto Cezar; ZANI, Sheila . **Progressões e Matemática Financeira**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 149 p