UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA

ODETE ELANA SOUSA PEREIRA

RAÍZES DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

ACARAPE - CE
2017

ODETE ELANA SOUSA PEREIRA

RAÍZES DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

ACARAPE - CE

2017

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro- Brasileira

Sistema de Bibliotecas da UNILAB (SIBIUNI)
Biblioteca da Unidade Acadêmica dos Palmares
Catalogação na fonte

Bibliotecária Mônica Cordulina da Silva – CRB 927/03

P436r

Pereira, Odete Elana Sousa.

Raízes de equações do terceiro grau./ Odete Elana Sousa Pereira. Acarape, 2017.
34 f.

Monografia (Graduação) do Curso de Ciências da Natureza e Matemática da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. Matemática (Superior). 2. Equações. 3. Polinômios. 3. Raízes númericas. I. Título.

CDD 510

ODETE ELANA SOUSA PEREIRA

RAÍZES DE EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 04 de Agosto de 2017.

BANCA EXAMINADORA

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

DFTavares

Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Edvalter da Silva Sena Filho

Prof. Dr. Edvalter da Silva Sena Filho
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por estar sempre iluminando meus caminhos e projetos, dando força e coragem para superar todas as dificuldades, especialmente neste período da graduação.

Aos meus pais, Luiz Felipe Pereira e Maria Eliane de Sousa Pereira (*in memoriam*), por estarem sempre dando bons conselhos e ao mesmo tempo colocando a educação em primeiro lugar. Especialmente à minha mãe Maria Eliane, mesmo tendo pouco conhecimento a leitura e a escrita foi a minha primeira educadora de vida, mostrando que nunca podemos desanimar e desistir diante da primeira dificuldade.

Minha irmã Eluisa Kelly Sousa Pereira, pelo seu apoio, carinho, atenção e suas palavras sinceras. Além do mais, por ter suportado minhas chatices, choros e muitas vezes o meu silêncio.

Ao meu amigo, orientador e professor Dr. João Francisco da Silva Filho pelos valiosos ensinamentos e paciência que teve durante esses últimos anos. Mesmo passando por algumas dificuldades, nunca desistiu ou descreditou do meu potencial. E aos docentes que estiveram neste percurso da graduação por qual tenho uma imensa admiração.

Ao querido professor Gustavo Oliveira Lima Junior, que desde o Ensino Médio esteve sempre à disposição para conversar e esclarecer minhas indagações. E a todos os professores da minha educação básica, pela importância que tiveram durante essa caminhada, pois sem eles não seria possível obter essa conquista.

Aos meus familiares e técnicos administrativos que foram atenciosos e queridos, sempre dispostos a ajudar, desde uma xícara de café a uma valiosa xerox-impressão. E não se esquecendo dos meus colegas de jornada, pelos conhecimentos adquiridos e debatidos, que por muitas vezes viravam frustações ou motivo de risadas.

Aos professores da banca examinadora, Danila Fernandes Tavares e Edvalter da Silva Sena Filho por terem se disponibilizado em colaborar com as suas valiosas correções e sugestões deste momento tão esperado e especial.

E por fim, agradeço à Universidade da Integração da Lusofonia Afro-Brasileira - Unilab e aos programas, PIBID-UNILAB e PIBIC-UNILAB, pelas experiências adquiridas durante toda minha graduação, pois foram de fundamental importância para meu aprendizado e sendo agraciada por vivências únicas e valiosas.

“Se cheguei até aqui foi porque me apoiei nos ombros dos gigantes” (Isaac Newton)

RESUMO

Sabe-se que as raízes de equações polinomiais do terceiro grau (ou simplesmente equações polinomiais cúbicas) podem ser obtidas através das fórmulas de Cardano-Tartaglia, publicada por Girolamo Cardano (1501-1576) em seu livro Ars Magna no ano de 1545, no entanto a fórmula de Cardano-Tartaglia não é muito prática e em alguns casos, nos deparamos com radicais de difícil simplificação, o que nos força a usar as funções trigonométricas inversas. Diante disso, costuma-se recorrer aos métodos numéricos iterativos disponíveis na Análise Numérica (métodos da bissecção, da falsa posição, do ponto fixo e de Newton-Raphson) para obter com mais facilidade as aproximações decimais das raízes que se pretende calcular. Por sua vez, os métodos numéricos aplicados às equações do terceiro grau contam com dois incovenientes: o isolamento das raízes e a dificuldade de trabalhar com sequências de números complexos. Nesta perspectiva, obtemos uma fórmula que relaciona as três raízes de uma equação do terceiro grau, permitindo o cálculo de todas as raízes em termos de uma delas e facilitando o uso dos métodos numéricos, sem a necessidade de isolar as raízes ou trabalhar com sequências de números complexos. Por fim, desenvolvemos um método para caracterizar as raízes de uma equação do terceiro grau, identificando quantas são reais e complexas não-reais.

Palavras-chave: Equação do Terceiro Grau. Polinômios do Terceiro Grau. Raízes. Fórmula de Cardano-Tartaglia.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde os tempos antigos, a história da álgebra, ainda que não possuísse tal conhecimento escrito, mas sim prático, podemos supor que o seu "início"se deu a partir do surgimento do Dryopithecus. No entanto, as equações algébricas existem a aproximadamente 4000 a.C. como se comprova nos registros dos antigos egípcios, utilizando-se eles de várias maneiras para a resolução de tais equações, tendo, no período da Babilônia antiga vários problemas de quádricas e cúbicas.

Com a obra de Euclides, *Os elementos* (geometria plana elementar, teoria dos números, incomensuráveis, geometria no espaço), tornou-se possível a resolução de equações do primeiro grau, sendo esta obra a grande influenciadora de toda a produção científica. Por conseguinte, os gregos conseguiram demonstrar os conhecimentos babilônicos de resolver equações do segundo grau (soma e produto), e ainda, obter raízes irracionais por meio de processos geométricos, mesmo numa época em que não tinham conhecimento de números irracionais.

Em 1494, Frei Luca Pacioli (1455 - 1514) abordou em seu livro, "Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita", noções de cálculo aritmético, radicais, problemas envolvendo equações do primeiro e segundo grau, geometria e contabilidade, afirmando, que não podia haver regra geral para a solução de equações cúbicas da forma $x^3 + px = q$, podendo confirmar na fala de Lima (1987, p. 12) "Pacioli afirmava que não podia haver regra geral para a solução de problemas do tipo "cubo e coisas igual ao número", ou seja, $x^3 + px = q$".

Somente em 1545, com o Renascimento italiano, Cardano (1501 - 1576) no livro *Ars Magna* publicou que as raízes de uma equação do terceiro grau (ou simplesmente equação cúbica) podem ser obtidas através das fórmulas de Cardano-Tartaglia, na qual, ficou sendo conhecida apenas por fórmulas de Cardano durante anos, embora ele tenha escrito em seu livro que elas foram descobertas por Dell Ferro (1465 - 1526) e redescobertas por Tartaglia (1500 - 1557).

Diante dos estudos da equação do terceiro grau e percebendo o quão complexo são suas fórmulas de Cardano-Tartaglia, desenvolvemos um método que relaciona diretamente as raízes, nos permitindo calcular todas as raízes a partir de apenas uma delas, contornando assim a diculdade de isola-lás ao usar os métodos númericos. Por fim, apresentamos ainda uma nova estratégia para caracterizar as raízes de um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais, identificando quantas são as reais e as complexas não-reais.

2 PRELIMINARES

No presente capítulo, estaremos admitindo algumas noções básicas de Álgebra Abstrata e Cálculo Diferencial, dentre outros conceitos que serão rapidamente mencionados sem maiores detalhes. Apresentamos aqui as principais notações e elementos que serão usados ao longo do trabalho e abordados especificamente no desenvolvimento dos resultados, incluindo alguns resultados bastante conhecidos na literatura.

2.1 Números complexos

Os números complexos surgiram após inúmeras tentativas de se resolver equações polinomiais do segundo e terceiro graus. Por volta do século XV um pensamento ocorreu entre os matemáticos: "O quadrado de um número positivo, assim como o de um número negativo, é positivo. Não existe raiz quadrada de um número negativo porque um número negativo não é quadrado de nenhum número". Diante disso, os matemáticos passaram a representar as raízes de números negativos usando a letra "i", adotando-se a seguinte notação $i = \sqrt{-1}$.

Os números complexos formam um conjunto numérico, denotado por $\mathbb{C}$, que corresponde a uma extensão dos números reais. Mais comumente, um elemento $z \in \mathbb{C}$ é escrito na forma

$$z = x + iy,$$

onde "i" é chamado de unidade imaginária, x e y representam as partes real e imaginária de z, respectivamente. A parte real de z é denotada por $Re\, z$, enquanto a parte imaginária é denotada por $Im\, z$, ou seja,

$$Re\, z = x \qquad \text{e} \qquad Im\, z = y,$$

daí podemos escrever

$$z = (Re\, z) + (Im\, z)\, i.$$

Apresentamos duas definições básicas sobre números complexos, que serão essenciais ao longo desta seção.

Definição 2.1 Dizemos que dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ são iguais, quando $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Definição 2.2 O conjugado de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ é definido como sendo o número complexo, dado por $\overline{z} = x - iy$.

Podemos definir, sobre os números complexos, operações de soma e produto, que estendem as operações de soma e produto usuais dos reais.

Definição 2.3 A soma e produto de números complexos $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ são definidas por:

(a) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$;

(b) $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$.

Proposição 2.1 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, valem as seguintes propriedades:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

(b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Demonstração: Decorre diretamente da definição de conjugado.

A próxima definição estende a noção de módulo dos números reais para os números complexos.

Definição 2.4 Dado um número complexo $z = x + iy$, definimos seu módulo por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observação 2.1 Diante das notações introduzidas anteriormente, podemos deduzir que:

(a) $z + \overline{z} = 2Re\, z$; (b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Proposição 2.2 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, valem as seguintes propriedades:

(a) $|z + w| \leq |z| + |w|$;

(b) $|z \cdot w| = |z||w|$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Soares (2014).

Sobre o conjunto dos números complexos também é possível estender as definições de simétrico e inverso multiplicativo.

Definição 2.5 Dado um número complexo $z = x + iy$, definimos:

(a) $-z = (-x) + i(-y)$; (b) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ para $z \neq 0$.

A partir da soma e produto de números complexos juntamente com as definições de simétrico e inverso multiplicativo, podemos ainda definir subtração e quociente entre números complexos.

Definição 2.6 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, definimos a subtração e o quociente por:

(a) $z - w = z + (-w)$; (b) $\dfrac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$ para $w \neq 0$.

Os números complexos podem ser representados ainda através da forma trigonométrica (ou forma polar). Mais precisamente, temos que um número $z = x + iy \in \mathbb{C}$ pode ser escrito na forma

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta),$$

onde $0 \leq \theta < 2\pi$ é chamado de argumento de z.

Encerramos esta seção com dois resultados que fornecem expressões para o produto, quociente e potência de números complexos na forma polar.

Proposição 2.3 Dados $z = |z|(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $w = |w|(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$ números complexos na forma trigonométrica e $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, valem as igualdades:

(a) $z \cdot w = |z||w|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$;

(b) $z^n = |z|^n[\cos(n\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(n\theta_1)]$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Soares (2014).

Observação 2.2 A igualdade do ítem (b) da Proposição 2.3 é conhecida como fórmula de De Moivre.

2.2 Polinômios sobre um Corpo

Nesta seção, vamos introduzir as definições de corpo e polinômios sobre um corpo, incluindo operações e outros elementos associados a estas estruturas algébricas, concluindo com o algoritmo da divisão de polinômios.

Definição 2.7 Um corpo é um conjunto não-vazio $\mathbb{K}$ munido de duas operações fechadas, chamadas de soma e produto

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ (soma)} \qquad \text{e} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ (produto)}$$

as quais satisfazem, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{K}$, as propriedades a seguir:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma);
2. Existe $0 \in \mathbb{K}$, tal que $a + 0 = 0 + a$ (existência do elemento neutro da soma);
3. Existe $-a \in \mathbb{K}$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (existência do inverso aditivo);
4. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma);
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associatividade do produto);

6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributividade à esquerda) e
   $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (distributividade à direita);
7. Existe $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
8. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade do produto);
9. Se $a \neq 0$, então existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$ satisfazendo $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Definição 2.8 Dizemos que um polinômio sobre um corpo $\mathbb{K}$ em uma indeterminada x é a expressão formal

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots ,$$

onde $a_i \in \mathbb{K}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e existe um número $n \in \mathbb{N}$, tal que $a_j = 0$ para todo $j \geq n$.

Observação 2.3 O conjunto de todos os polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ em uma indeterminada x é denotado por $\mathbb{K}[x]$.

Definição 2.9 Dois polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$, expressos por

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k + \cdots ,$$

são ditos iguais, quando $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Observação 2.4 Dizemos que $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ é nulo, quando $a_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definição 2.10 Quando um polinômio sobre um corpo $\mathbb{K}$, dado pela expressão

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots ,$$

admite $n \in \mathbb{N}$, de maneira que $a_n \neq 0$ e $a_j = 0$ para todo $j > n$, então $P(x)$ é dito um polinômio de grau n.

Observação 2.5 O grau de um polinômio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ é denotado por $\partial P(x)$.

Podemos definir duas operações (soma e o produto) entre polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$ em uma indeterminada x, conforme descrevemos a seguir.

Definição 2.11 Dados dois polinômios sobre um corpo $\mathbb{K}$, expressos por

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k + \cdots ,$$

definimos a soma e o produto, respectivamente por

$$\begin{aligned}
\text{(a) } (P_1 + P_2)(x) &= c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m + \cdots, \\
\text{(b) } (P_1 \cdot P_2)(x) &= d_0 + d_1 x + \cdots + d_m x^m + \cdots,
\end{aligned}$$

onde $c_i = a_i + b_i$ e $d_j = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \cdots + a_j b_0$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Observação 2.6 Podemos verificar que para quaisquer polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, obtemos:

(a) $\partial(P_1 + P_2)(x) \leq \partial P_1(x) + \partial P_2(x)$ para $P_1(x) + P_2(x) \neq 0$;

(b) $\partial(P_1 \cdot P_2)(x) = \partial P_1(x) + \partial P_2(x)$ para $P_1(x) \cdot P_2(x) \neq 0$.

Definição 2.12 Dados um polinômio $P(x)$ não-nulo sobre um corpo $\mathbb{K}$ e um elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ que satisfaz $P(\alpha) = 0$, dizemos que α é uma raiz de $P(x)$ em $\mathbb{K}$.

Fazendo uma analogia com a definição de polinômios, definimos função polinomial real em uma variável (ou incógnita).

Definição 2.13 Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ uma função, dizemos que f é polinomial (em uma variável), quando existem constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, satisfazendo

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

para todo $x \in \mathbb{K}$.

Na sequência, apresentamos um importante resultado sobre polinômios, chamado de algoritmo da divisão de polinômios.

Teorema 2.1 (Algoritmo da Divisão) Dados $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ com $P_2(x)$ não-nulo, existem únicos polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ sobre $\mathbb{K}$, satisfazendo

$$P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x) + R(x),$$

onde $R(x)$ é nulo ou $\partial R(x) < \partial P_2(x)$.

Demonstração: Faremos a prova do resultado em duas partes, conforme descrevemos a seguir:

1ª Parte: Existência.

Supondo que $P_1(x)$ é um polinômio nulo, podemos tomar $Q(x)$ e $R(x)$ nulos e esta escolha, garante a existência no caso em questão. No entanto, se tivermos

$$\partial P_1(x) < \partial P_2(x),$$

basta tomar $Q(x)$ nulo e $R(x) = P_1(x)$ e novamente, a existência estará assegurada para este caso particular.

Nestas condições, basta considerar o caso em que $\partial P_1(x) \geq \partial P_2(x)$ e assim, vamos adotar as notações

$$\partial P_1(x) = m \quad \text{e} \quad \partial P_2(x) = n,$$

donde escrevemos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^n \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n,$$

definindo ainda

$$P_3(x) = P_1(x) - a_m b_n^{-1} x^{m-n} P_2(x),$$

que satisfaz $\partial P_3(x) < \partial P_1(x)$.

Agora faremos indução sobre o grau m de $P_1(x)$ e para isso, vamos dividir o procedimento em dois passos:

1º Passo: $m = 0$.

Sendo $m = 0$, vamos ter $n = 0$ e assim

$$P_1(x) = a_0 \quad \text{e} \quad P_2(x) = b_0,$$

logo

$$P_1(x) = a_0 b_0^{-1} P_2(x),$$

então tomamos $Q(x) = a_0 b_0$ e $R(x) = 0$.

2° Passo: $m > 0$.

Supondo que a existência é válida para todo polinômio de grau menor que m, tem-se que

$$P_3(x) = P_1(x) - a_m b_n^{-1} x^{m-n} P_2(x) \tag{1}$$

possui grau menor que m, então existem $\tilde{Q}(x)$ e $\tilde{R}(x)$ que satisfazem

$$P_3(x) = \tilde{Q}(x) \cdot P_2(x) + \tilde{R}(x), \tag{2}$$

com $\tilde{R}(x)$ nulo ou $\partial \tilde{R}(x) < \partial P_2(x)$.

Das igualdades (1) e (2), segue-se que

$$P_1(x) = [a_m b_n^{-1} x^{m-n} + \tilde{Q}(x)] P_2(x) + \tilde{R}(x),$$

bastando tomar

$$Q(x) = a_m b_n^{-1} x^{m-n} + \tilde{Q}(x) \quad \text{e} \quad R(x) = \tilde{R}(x),$$

que estes satisfazem as condições enunciadas.

2ª Parte: Unicidade.

Agora vamos supor que existem $Q_1(x)$, $R_1(x)$, $Q_2(x)$ e $R_2(x)$, tais que

$$P_1(x) = Q_1(x) \cdot P_2(x) + R_1(x) = Q_2(x) \cdot P_2(x) + R_2(x),$$

onde $R_i(x)$ é nulo ou $\partial R_i(x) < \partial P_i(x)$ com $i = 1, 2$. Dessa forma, tem-se que

$$[Q_1(x) - Q_2(x)] \cdot P_2(x) = R_2(x) - R_1(x),$$

portanto $Q_1(x) = Q_2(x)$ e $R_1(x) = R_2(x)$, pois caso contrário, teríamos polinômios de graus diferentes em cada membro. □

2.3 Um pouco sobre Funções Reais

Neste momento, vamos introduzir alguns conceitos básicos sobre Cálculo Diferencial, destacando funções de uma variável real, limite, continuidade, derivada e alguns elementos relacionados.

Definição 2.14 Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real e $r \in X$ um elemento que satisfaz $f(r) = 0$, então dizemos que r é uma raiz (ou zero) de f.

Fazendo uma analogia com a definição de polinômios, definimos função polinomial real em uma variável (ou incógnita).

Definição 2.15 Uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de uma variável é dita ser polinomial, quando existem constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.16 Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida num intervalo aberto é dita *contínua* no ponto $a \in I$, quando para cada $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos obter $\delta > 0$, de maneira que

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Observação 2.7 Se uma função f for contínua em todos os pontos do seu domínio, diremos simplesmente que f é contínua.

Dando continuidade, apresentamos as definições de limite e derivada de funções reais de uma variável real.

Definição 2.17 Dizemos que uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto, possui limite $L \in \mathbb{R}$ com x tendendo a $a \in I$, se para cada $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos obter $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L)| < \epsilon.$$

Observação 2.8 Nas mesmas condições da definição enunciada anteriormente, costuma-se adotar a notação

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Definição 2.18 Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita derivável no ponto $a \in \mathbb{R}$, quando existe o limite

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ denota um intervalo aberto.

Definição 2.19 Se uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é derivável e a função $f' : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de derivada de f.

Observação 2.9 As raízes da derivada de uma função derivável $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são chamadas de pontos críticos.

Concluímos a seção, apresentando um importante resultado sobre funções contínuas e uma aplicação deste resultado em forma de corolário, que estabelece uma condição que garante a existência de raízes reais em polinômios sobre os reais.

Teorema 2.2 (Valor Intermediário) Dada uma função $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, temos que:

(a) Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

(b) Se $f(b) < d < f(a)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Ávila (2006), Lima (2012) e Lima (2013).

O corolário a seguir nos permite deduzir que todo polinômio do terceiro grau sobre os reais admite pelo menos uma raiz real.

Corolário 2.1 Todo polinômio de grau ímpar sobre os reais admite raiz real.

Demonstração:

Dado um polinômo $P(x)$ de grau n sobre os reais, escrito na forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

definimos a função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = P(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nestas condições, tem-se que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right)\right] = \pm\infty,$$

bem como

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right)\right] = \mp\infty,$$

onde os sinais dos limites dependem do sinal do coeficiente a_n.

Podemos afirmar que em ambos os casos, existem $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$f(a) < 0 < f(b),$$

então o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de $c \in \mathbb{R}$, tal que

$$P(c) = f(c) = 0,$$

sendo esta uma raiz real de $P(x)$. $\square$

Observação 2.10 Uma demonstração mais detalhada do Corolário 2.1 pode ser encontrada em Ávila (2006).

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste último capítulo, faremos uma breve revisão sobre raízes de equações do segundo e terceiro graus, enfatizando as fórmulas de Bháskara e de Cardano-Tartáglia. Na sequência, apresentamos os resultados obtidos em parceria com o orientador no trabalho indicado em Pereira e Silva Filho (2016), que trata de raízes de equações do terceiro grau, combinando métodos analíticos e numéricos.

3.1 Polinômios do Segundo e Terceiro Graus

Inicialmente, apresentamos a conhecida Fórmula de Bháskara que nos permite determinar as raízes de um polinômio do segundo grau.

Proposição 3.1 (Fórmula de Bháskara) Sejam $P(x) = ax^2 + bx + c$ um polinômio do segundo grau sobre os reais e $\Delta := b^2 - 4ac$ seu discriminante, então:

(a) Se $\Delta \geq 0$, então as raízes de f são reais, dadas por

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(b) Se $\Delta < 0$, então as raízes de f são complexas conjugadas, dadas por

$$w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}i}{2a}.$$

Demonstração:

Considere a equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

daí dividimos a equação por a, obtendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

então somamos $\dfrac{b^2}{4a^2}$ em cada membro, resultando em

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2},$$

A igualdade acima pode ser escrita na forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2},$$

que nos fornece

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

ou seja,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Supondo que $\Delta=b^2-4ac\geq 0$, então

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

consequentemente

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad r_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

serão as raízes reais de $P(x)$. De modo análogo, tem-se para $\Delta=b^2-4ac<0$ que

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i,$$

portanto

$$w_1=\frac{-b+\sqrt{-\Delta}i}{2a} \quad \text{e} \quad w_2=\frac{-b-\sqrt{-\Delta}i}{2a},$$

são raízes complexas de $P(x)$. $\square$

Deduzimos da fórmula de Bháskara, apresentada anteriormente, as relações de Girard para polinômios do segundo grau:

Corolário 3.1 (Relações de Girard - 1ª Versão) Sejam $P(x)=ax^2+bx+c$ um polinômio do segundo grau sobre os reais e $w_1,w_2\in\mathbb{C}$ suas raízes, então valem as relações:

(a) $w_1+w_2=-\dfrac{b}{a}$; (b) $w_1w_2=\dfrac{c}{a}$.

Demonstração: Basta aplicar diretamente a Fórmula de Bháskara, analisando separadamente para os casos de raízes reais e complexas.

Agora vamos enunciar a chamada Fórmula de Cardano-Tartaglia, aplicada a polinômios (ou equações polinomiais) do terceiro grau na forma reduzida (ou forma deprimida).

Proposição 3.2 (Cardano-Tartáglia) Seja $Q(x) = x^3 + px + q$ um polinômio do terceiro grau sobre os reais, então a expressão

$$w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

nos fornece raízes complexas de $P(x)$.

Demonstração:

Considerando uma raiz $w \in \mathbb{C}$ do polinômio $Q(x)$, temos que

$$w^3 + pw + q = 0,$$

daí escrevemos $w = u + v$ e substituimos na equação acima, obtendo

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u+v) + q = 0,$$

que nos fornece

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0.$$

Observe que $w = u + v$ será raiz de $Q(x)$, caso tenhamos

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{e} \quad uv = -\frac{p}{3},$$

ou ainda,

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{e} \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

que equivale a encontrar as soluções da equação quadrática

$$x^2 + qx - \frac{1}{27}p^3 = 0.$$

Resolvendo a equação acima, concluímos que

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

consequentemente,

$$w = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

será raiz do polinômio $Q(x)$. $\square$

Observação 3.1 Podemos conferir em Gonçalves (2013, p. IX), o argumento usado por Fracois Viète (1540-1603) para garantir que a expressão obtida na Proposição 3.1 determina todas as raízes de $Q(x)$.

Corolário 3.2 Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau sobre os reais, então suas raízes são dadas pela fórmula

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

onde

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \qquad e \qquad q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}.$$

Demonstração:

Primeiramente, observe que

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + p\left(x + \frac{b}{3a}\right) + q\right],$$

onde

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \quad e \quad q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}.$$

Aplicando a translação dada pela mudança de variável

$$y = x + \frac{b}{3a},$$

segue-se que

$$P\left(y - \frac{b}{3a}\right) = a\left(y^3 + py + q\right),$$

por fim, basta usar a fórmula de Cardano-Tartaglia para calcular as raízes do polinômio

$$Q(y) = y^3 + py + q$$

e subtrair "$-b/3a$"de cada uma das raízes obtidas, encontrando as raízes de $P(x)$. $\square$

Observação 3.2 A constante presente na Fórmula de Cardano-Tartaglia, dada por

$$D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

onde

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \qquad e \qquad q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}.$$

é chamada de *discriminante*.

Passamos a apresentar a segunda versão das relações de Girard, desta vez para polinômios do terceiro grau.

Proposição 3.3 (Relações de Girard - 2ª Versão) Sejam $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau sobre os reais e $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ suas raízes, então valem as relações:

a) $w_1 + w_2 + w_3 = -\dfrac{b}{a}$; b) $w_1 w_2 w_3 = -\dfrac{d}{a}$.

Demonstração:

Usando o algoritmo da divisão de polinômios, podemos escrever

$$P(x) = a(x - w_1)(x - w_2)(x - w_3),$$

então desenvolvemos o segundo membro, obtendo

$$P(x) = a[x^3 - (w_1 + w_2 + w_3)x^2 + (w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3)x - w_1 w_2 w_3],$$

por fim, basta comparar a expressão acima com a expressão que define $P(x)$ para concluir as relações enunciadas. $\square$

De acordo com o sinal do discriminante, podemos caracterizar as raízes de um polinômio do terceiro grau com coeficientes reais.

Proposição 3.4 Dado um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ do terceiro grau sobre os reais, temos que:

(a) Se $D < 0$, então $P(x)$ possui três raízes reais.
(b) Se $D = 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real de multiplicidade dois ou três.
(c) Se $D > 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

Demonstração: Pode ser encontrada em Lima (1987) e Rechtschaffen (2009).

3.2 Resultados Obtidos

No primeiro teorema, relacionamos diretamente as três raízes de um polinômio do terceiro grau, escrevendo duas raízes em termos de uma terceira, que por conveniência, escolhemos como sendo real.

Teorema 3.1 Sejam $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau sobre os reais e $r \in \mathbb{R}$ uma raiz de $P(x)$, então as demais raízes de $P(x)$ são dadas por

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a}$$

onde $\Omega := b^2 - 3ac$.

Demonstração:

Por um cálculo direto, temos que

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(r) \\ &= (ax^3 + bx^2 + cx + d) - (ar^3 + br^2 + cr + d) \\ &= a(x^3 - r^3) + b(x^2 - r^2) + c(x - r), \end{aligned}$$

ou ainda

$$P(x) = (x - r)[ax^2 + (ar + b)x + (ar^2 + br + c)],$$

onde usamos o fato de r ser raiz de $P(x)$.

Podemos reescrever $P(x)$ na forma

$$P(x) = (x - r)Q(x),$$

onde $Q(x)$ é o polinômio, dado por

$$Q(x) = ax^2 + (ar + b)x + (ar^2 + br + c),$$

então aplicamos a fórmula de Bháskara a este polinômos, obtendo suas raízes

$$w_1 = -\frac{(ar + b) + \sqrt{\Delta_Q}}{2a} \quad \text{e} \quad w_2 = -\frac{(ar + b) + \sqrt{\Delta_Q}}{2a}, \tag{3}$$

que também são raízes de $P(x)$.

No entanto, observe que

$$\begin{aligned} \Delta_Q &= (ar + b)^2 - 4a(ar^2 + br + c) \\ &= -a(3ar^2 + 2br + c) + b^2 - 3ac, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\Delta_Q = \Omega - aP'(r), \tag{4}$$

onde $\Omega = b^2 - 3ac$ e $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Finalmente, basta substituir a igualdade (4) em (3) e obter a expressão

$$w_1 = -\frac{(ar + b) + \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a} \quad \text{e} \quad w_2 = -\frac{(ar + b) + \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a},$$

ou simplesmente,

$$w_{1,2} = -\frac{(ar + b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(r)}}{2a}, \tag{5}$$

que determina as outras raízes do polinômio $P(x)$ em termos da sua raiz $r \in \mathbb{R}$.

Observação 3.3 Se $P(x)$ possui uma raiz nula, então a expressão (5) nos fornece uma expressão similar à Fórmula de Bháskara.

Exemplo 3.1 Calcular as raízes do polinômio do terceiro grau $P(x) = x^3 + x^2 + x - 3$.

Solução: Sabendo que $r = 1$ é uma raiz real de $P(x)$, então

$$w_{1,2} = -\frac{(a+b) \pm \sqrt{\Omega - aP'(1)}}{2a},$$

determina as demais raízes de $P(x)$. Observe ainda que

$$P'(1) = 6$$

e além disso

$$a = b = c = 1 \quad \text{e} \quad d = -3.$$

Substituindo todos esses valores, obtemos

$$\Omega = b^2 - 3ac = -2,$$

donde concluímos que

$$w_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i$$

são as raízes procuradas.

O primeiro corolário do teorema apresentado nos fornece uma condição que garante a existência de raízes complexas não-reais em um polinômio do terceiro grau. Deve-se ressaltar que esta mesma conclusão pode ser obtida através do Teorema de Rolle, no entanto a nossa demonstração é mais elementar.

Corolário 3.3 Dado um polinômio do terceiro grau $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ com coeficientes reais satisfazendo

$$\Omega := b^2 - 3ac < 0 \qquad \text{ou} \qquad \Lambda := c^2 - 3bd < 0,$$

então $P(x)$ possui duas raízes complexas não-reais.

Demonstração: Faremos a demonstração em dois casos, conforme passamos a descrever:

1° Caso: $\Omega = b^2 - 3ac < 0$

Partindo dos coeficientes de $P(x)$, definimos o polinômio quadrático

$$R(x) = 3a^2x^2 + 2abx - (b^2 - 4ac),$$

cujos coeficientes satisfazem

$$\Delta_R = 16a^2(b^2 - 3ac) < 0,$$

então

$$R(x) = 3a^2x^2 + 2abx - (b^2 - 4ac) > 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \Omega - aP'(r) &= -a(3ar^2 + 2br + c) + (b^2 - 3ac) \\ &= -[3a^2r^2 + 2abr - (b^2 - 4ac)], \end{aligned}$$

ou ainda

$$\Omega - aP'(r) \ = \ -R(r) \ < \ 0,$$

implicando pelo Teorema 3.1 que $P(x)$ possui duas raízes complexas não-reais.

2° Caso: $\Lambda = c^2 - 3bd < 0$

Sabendo que $\Lambda = c^2 - 3bd < 0$, então o termo independente d é não-nulo e obtemos

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3}(dx^3 + cx^2 + bx + a),$$

para todo x não-nulo. Nestas condições, podemos afirmar que as raízes de $P(x)$ coincidem com os inversos multiplicativos das raízes do polinômio

$$S(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a,$$

portanto decorre do caso anterior que $S(x)$ possui duas raízes complexas não-reais e o mesmo ocorre para $P(x)$. $\square$

Exemplo 3.2 A condição apresentada no Corolário 3.3 é suficiente, mas não é necessária para a existência de raízes complexas não-reais. De fato, basta observar que o polinômio $P(x) = x^3 + 1$ possui duas raízes complexas não-reais, no entanto $\Omega = \Lambda = 0$.

O próximo corolário apresenta condições para garantir em que circunstâncias um polinômio possui apenas raízes reais.

Corolário 3.4 Dado polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ do terceiro grau sobre os reais, então $P(x)$ possui apenas raízes reais, se e somente se, ocorre uma das afirmações:

(a) Se $a > 0$ e $P(x)$ admite uma raiz real com derivada não-positiva.

(b) Se $a < 0$ e $P(x)$ admite uma raiz real com derivada não-negativa.

Demonstração: Faremos a demonstração em duas partes, conforme descrevemos na sequência:

1ª Parte: Admita que $P(x)$ possui apenas raízes reais.

Nestas condições, podemos observar que se uma das raízes possui multiplicidade maior que um, então esta raiz possui derivada nula e portanto, deverá satisfazer uma das alternativas (a) ou (b). Supondo que todas as raízes possuem multiplicidade um, basta aplicar o Teorema de Rolle para garantir que a raiz que encontra-se entre a menor e a maior raiz, deverá satisfazer uma das alternativas (a) ou (b).

2ª Parte: Admita que ocorre (a) ou (b).

Caso ocorra (a) ou (b), isso equivale a afirmar que existe raiz $r \in \mathbb{R}$, tal que

$$aP'(r) \leq 0, \tag{6}$$

então os coeficientes do polinômio

$$aP'(x) = 3a^2x^2 + 2abx + ac$$

satisfazem

$$\Delta_{aP'} = 4a^2(b^2 - 3ac) \geq 0.$$

Decorre da última igualdade que

$$\Omega = b^2 - 3ac \geq 0, \tag{7}$$

mas isso implica por (6) e (7) que

$$\Omega - aP'(r) \geq 0,$$

por fim, concluímos do Teorema 3.1 que $P(x)$ possui apenas raízes reais. $\square$

O resultado a seguir estabelece mais uma condição necessária e suficiente para que um polinômio possua apenas raízes reais e além disso, fornece uma estimativa das raízes para polinômios que possuem apenas raízes reais.

Corolário 3.5 Sejam $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau sobre os reais e $r \in \mathbb{R}$ uma raiz de $P(x)$. Suponha que $\Omega := b^2 - 3ac \geq 0$, então

$$-\frac{b}{3a} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2}} \leq r \leq -\frac{b}{3a} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2}},$$

se e somente se, todas as raízes de $P(x)$ são reais.

Demonstração: Primeiramente, observe que os coeficientes do polinômio

$$R(x) = 3a^2x^2 + 2abx - (b^2 - 4ac),$$

satisfazem

$$\Delta_R = 16a^2(b^2 - 3ac) \geq 0,$$

logo $R(x)$ será não-positivo, se e somente se,

$$-\frac{b}{3a} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2}} \leq x \leq -\frac{b}{3a} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2}},$$

Em particular, temos que

$$-\frac{b}{3a} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2}} \leq r \leq -\frac{b}{3a} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2 - 3ac}{a^2}},$$

se e somente se, $R(r)$ é não-positivo, ou seja,

$$\Omega - aP'(r) = -R(r) > 0$$

mas o Teorema 3.1 nos garante que a última desigualdade equivale a afirmar que todas as raízes de $P(x)$ são reais. $\square$

Exemplo 3.3 Aplicando o Corolário 3.5 ao polinômio $P(x) = 8x^3 - 6x + 1$, deduzimos que as raízes devem pertencer ao intervalo $[-1, 1]$. De fato, desde que

$$r_1 \simeq -0,93969, \qquad r_2 \simeq 0,17365 \qquad \text{e} \qquad r_3 \simeq 0,76604$$

são aproximações decimais das raízes de $P(x)$, confirmamos a eficiência do resultado para este exemplo.

Apresentamos ainda, uma aplicação bem simples e bastante interessante do Corolário 3.5.

Corolário 3.6 Dado um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ do terceiro grau com coeficientes reais satisfazendo $\Omega := b^2 - 3ac = 0$, então:

(a) Se $P\left(-\frac{b}{3a}\right) = 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real com multiplicidade três.

(b) Se $P\left(-\frac{b}{3a}\right) \neq 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real e duas complexas.

Demonstração: Supondo $\Omega = 0$ no Corolário 3.5, temos que

$$r = -\frac{b}{3a}$$

será a única raiz de $P(x)$ ou $P(x)$ possui raízes complexas não-reais. $\square$

Dado um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ do terceiro grau e $t \in \mathbb{R}$, escrevemos $P_t(x) = a_t x^3 + b_t x^2 + c_t x + d_t$ e definimos a constante real $\Lambda_t = c_t^2 - 3b_t d_t$, onde $P_t(x) := P(x+t)$. Diante das notações apresentadas, enunciamos o nosso último resultado.

Teorema 3.2 Seja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ um polinômio do terceiro grau sobre os reais com $\Omega := b^2 - 3ac \neq 0$. Suponha que $s \in \mathbb{R}$ é a constante, dada por

$$s = -\frac{1}{2\Omega}(bc - 9ad)$$

então valem as afirmações:

(a) Se $\Omega\Lambda_s > 0$, então $P(x)$ possui três raízes reais distintas.

(b) Se $\Omega\Lambda_s < 0$, então $P(x)$ possui uma raiz real e duas raízes complexas não-reais.

(c) Se $\Omega \neq 0$ e $\Lambda_s = 0$, então $P(x)$ possui duas raízes reais, sendo uma delas de multiplicidade dois.

Demonstração:

Primeiro, observe que

$$\begin{aligned} P_s(x) &= a(x+s)^3 + b(x+s)^2 + c(x+s) + d \\ &= ax^3 + (3as+b)x^2 + (3as^2 + 2bs + c)x + (as^3 + bs^2 + cs + d), \end{aligned}$$

portanto os coeficientes de $P_s(x)$ são dados por

$$a_s = a, \quad b_s = 3as + b, \quad c_s = 3as^2 + 2bs + c \quad \text{e} \quad d_s = as^3 + bs^2 + cs + d,$$

implicando que

$$\begin{aligned} \Lambda_s &= (3as^2 + 2bs + c)^2 - 3(3as+b)(as^3 + bs^2 + cs + d) \\ &= (b^2 - 3ac)s^2 + (bc - 9ad)s + (c^2 - 3bd). \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Lambda_s = \Omega s^2 + (bc - 9ad)s + \Lambda, \tag{8}$$

Decorre da última igualdade que

$$\Omega\Lambda_s = \Omega\Lambda - \left(\frac{bc - 9ad}{2}\right)^2,$$

ou ainda,

$$\Omega\Lambda_s = (b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd) - \left(\frac{bc - 9ad}{2}\right)^2,$$

então desenvolvemos a expressão acima para obter

$$\Omega\Lambda_s = b^2c^2 - 3b^3d - 3ac^3 + 6abcd - \left(\frac{b^2c^2 - 18abcd + 81a^2d^2}{4}\right).$$

A última igualdade ainda nos fornece

$$\Omega\Lambda_s = \frac{4b^2c^2 - 12b^3d - 12ac^3 + 24abcd - b^2c^2 + 18abcd - 81a^2d^2}{4}$$

que torna-se

$$\Omega\Lambda_s = \frac{3b^2c^2 - 12b^3d - 12ac^3 + 42abcd - 81a^2d^2}{4}$$

resultando na identidade

$$\Omega\Lambda_s = -\frac{3}{4}[27a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2 - 18abcd]. \tag{9}$$

Desenvolvendo a expressão do *discriminante*, dada por

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

onde

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3},$$

tem-se a igualdade

$$D = \frac{4(3ac - b^2)^3 + (2b^3 + 27a^2d - 9abc)^2}{2916a^6}, \tag{10}$$

que descreve D em termos dos coeficienetes de $P(x)$.

Expandindo as potências contidas na última igualdade, obtemos

$$(3ac - b^2)^3 = 27a^3c^3 - 27a^2b^2c^2 + 9ab^4c - b^6$$

e também

$$(2b^3 + 27a^2d - 9abc)^2 = 4b^6 + 729a^4d^2 + 81a^2b^2c^2 + 108a^2b^3d - 36ab^4c - 486a^3bcd,$$

portanto substituíndo-as em (10) e organizando os termos, concluímos que

$$D = \frac{27a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2 - 18abcd}{108a^4}. \tag{11}$$

Por fim, basta comparar as identidades (9) e (11) para deduzir que

$$\Omega\Lambda_s = -81a^4D,$$

então aplicamos a Proposição (3.4) à última igualdade obtida, concluindo a prova do Teorema 3.2. □

Para finalizar o trabalho, apresentamos três exemplos que ilustram cada item do Teorema 3.2, anteriormente apresentado.

Exemplo 3.4 O polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ possui constantes

$$\Omega = 22 \qquad \text{e} \qquad \Lambda_s = \frac{1407}{88},$$

logo $\Omega\Lambda_s > 0$ e com isso, podemos afirmar que $P(x)$ possui três raízes reais distintas.

Exemplo 3.5 O polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 1$ possui constantes

$$\Omega = 1 \qquad \text{e} \qquad \Lambda_s = -\frac{69}{4},$$

então $\Omega\Lambda_s < 0$, implicando que $P(x)$ possui uma raiz real e duas complexas não-reais.

Exemplo 3.6 O polinômio $P(x) = x^3 - 3x + 2$ possui constantes

$$\Omega = 3 \qquad \text{e} \qquad \Lambda_s = 0,$$

portanto $P(x)$ possui duas raízes reais, sendo uma delas de multiplicidade dois.

4 CONCLUSÃO

Diante dos estudos da equação do terceiro grau, podemos perceber a dificuldade de calcular as suas raizes, então necessitamos utilizar funções trigonométricas inversas e/ou métodos numéricos iterativos para obter aproximações decimais. Por isso construímos uma fórmula, que consiste em escrever duas raízes em termos de uma terceira, nos possibilitando calcular todas as raízes a partir de uma delas. Por fim, desenvolvemos um novo método para caracterizar as raízes de uma equação do terceiro grau, determinando quantas são as raízes reais e as complexas não-reais.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. *Análise Matemática.* 3 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

GONÇALVES, A. Introdução à Álgebra. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1. 3 ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

LIMA, E. L. Equação do terceiro grau. Matemática Universitária, v. 5, p. 10-23, 1987.

LIMA, E. L. Análise Real - Volume 1. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1. 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

PEREIRA, O.; SILVA Filho, J. Revisitando as Equações do Terceiro Grau. Acarape, 2016 (Artigo Submetido).

PEREIRA, O.; SILVA Filho, J. O Método de Newton-Raphson e as Funções Polinomiais do Terceiro Grau. Matemática e Estatística em Foco, v. 5, n. 1, p. 22-36, 2017.

RECHTSCHAFFEN, E. E. M. Sobre aproximações polinomiais de raízes reais de cúbicas. Matemática Universitária, v. 46, 2009.

SOARES, M. G. Cálculo em uma Variável Complexa, 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.