UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL
DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA – UNILAB
INSTITUTO DE ENGENHARIAS E DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL
BACHARELADO EM ENGENHARIA DE ENERGIAS

FRANCISCO BENÍCIO TORRES BRITO

TRANSFORMADA DE LAPLACE: CONCEITOS E APLICAÇÕES EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

REDENÇÃO/CE
2020

FRANCISCO BENÍCIO TORRES BRITO

TRANSFORMADA DE LAPLACE: CONCEITOS E APLICAÇÕES EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

Monografia apresentada como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Energias, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.

Orientadora: Profa. Dra. Sílvia Helena Lima dos Santos.

REDENÇÃO/CE

2020

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Brito, Francisco Benício Torres.

B862t

Transformada de Laplace: conceitos e aplicações em circuitos elétricos / Francisco Benício Torres Brito. - Redenção, 2020.
36f: il.

Monografia - Curso de Engenharia de Energias, Instituto de Engenharias e Desenvolvimento Sustentável, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Profa. Dra. Sílvia Helena Lima dos Santos.

1. Circuitos elétricos. 2. Equações diferenciais. 3. Laplace,Transformadas de. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 621.319

FRANCISCO BENÍCIO TORRES BRITO

TRANSFORMADA DE LAPLACE: CONCEITOS E APLICAÇÕES EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

Monografia apresentada como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Energias, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.

Aprovada em: 28 / 10 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Sílvia Helena Lima dos Santos (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Profa. Dra. Rejane Félix Pereira
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Profa. Dra. Maria Patrícia Sales de Castro
Universidade Federal do Ceará – UFC

RESUMO

Muitos sistemas físicos são modelados matematicamente por meio de equações diferenciais, como é o caso dos circuitos elétricos. Existem muitos métodos de solução específicos de acordo com as classificações da equação diferencial. Entretanto, existe um método alternativo que altera o domínio da função e transforma a equação diferencial em uma equação algébrica análoga, conhecido por Transformada de Laplace. O objetivo deste trabalho é apresentar as vantagens da Transformada de Laplace como método de solução para equações diferenciais que modelam matematicamente sistemas físicos, usando os diferentes tipos de circuitos elétricos como exemplo de aplicação. Durante a pesquisa, foram reunidos e organizados os conhecimentos básicos e necessários sobre a circuitos elétricos, sob um contexto de equações diferenciais, e também os principais conceitos, definições e propriedades da Transformada de Laplace. Os resultados foram obtidos facilmente e com solução completa, constatando as vantagens no uso deste método; e se mostraram coerentes com o comportamento esperado, a partir da análise dos gráficos das curvas de carga, corrente ou tensão de cada circuito, comprovando a sua eficácia.

Palavras-chave: Circuitos elétricos. Equações diferenciais. Transformada de Laplace

ABSTRACT

Many physical systems are modeled mathematically using differential equations, as is the case with electrical circuits. There are many specific solution methods according to the differential equation classifications. However, there is an alternative method that alters the domain of the function and transforms the differential equation into an analogous algebraic equation, known as the Laplace Transform. The objective of this work is to present the advantages of the Laplace Transform as a solution method for differential equations that mathematically model physical systems, using different types of electrical circuits as an application example. During the research, basic and necessary knowledge about electrical circuits was gathered and organized, under a context of differential equations, as well as the main concepts, definitions and properties of the Laplace Transform. The results were obtained easily and with a complete solution, confirming the advantages of using this method; and were shown to be consistent with the expected behavior, from the analysis of the graphs of the load, current or voltage curves of each circuit, proving its effectiveness.

Keywords: Electrical circuits. Differential equations. Laplace transform.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Muitos problemas de engenharia, física e das ciências em geral são solucionados através de modelagem matemática, isto é, um sistema é descrito em termos matemáticos a fim de criar um modelo que simule, com certa precisão, o seu comportamento. Não existe uma receita ou fórmula padrão para a elaboração de um modelo, tendo em vista que cada problema tem suas particularidades; entretanto, uma das etapas iniciais e intrínsecas à análise é identificar as principais variáveis que caracterizam o sistema e que alterações elas provocam quando variam. Em grande parte dos sistemas físicos, o tempo é uma das principais variáveis, ou seja, conhecendo o estado do sistema em um determinado instante de tempo é acompanhar a evolução desses estados a partir da variação deste parâmetro.

As equações diferenciais são muito utilizadas na modelagem de sistemas físicos, porque expressa essas variações na forma de derivadas e as incorpora ao modelo, de forma que é possível perceber a influência de cada variação sobre o sistema. Essas equações diferenciais podem ser classificadas de acordo com a sua estrutura, isto é, de quantas variáveis o sistema depende, se os seus coeficientes variam ou são constantes, qual a derivada de maior grau envolvida e se a soma dessas n-ésimas derivadas é nula ou não.

E dependendo desta classificação é que se escolhe o método mais conveniente para determinar a solução da equação diferencial, visto que, algumas manipulações matemáticas apontadas pela literatura se aplicam apenas em equações que se encaixem em determinada classificação. Além disso, a grande maioria desses métodos não apresenta a solução de imediato, mas sim uma solução genérica ou uma família de soluções, que ainda possui alguns valores desconhecidos e para, enfim, determinar a solução particular, existe uma outra etapa na resolução, em que as condições iniciais do problema são consideradas.

A Transformada de Laplace é um método de solução alternativo, mais direto e muito interessante, pois consiste em transformar as equações diferenciais no domínio do tempo em equações algébricas no domínio da frequência. Uma vez que a solução é facilmente determinada no domínio da frequência, basta fazer o processo inverso de transformação para encontrar a solução análoga no domínio do tempo. Para fazer essas transformações entre os domínios, existem várias tabelas disponíveis que relacionando as equações diferenciais em função do tempo (na variável t) com as equações algébricas correspondentes em função da frequência (na variável s). Como as condições inicias do sistema são incorporadas na resolução, a solução obtida é completa e específica para o problema.

Uma das aplicações da Transformada de Laplace é nos circuitos elétricos, que são sistemas físicos modelados matematicamente por meio de equações diferenciais. Dependendo dos componentes presente no circuito, a equação que modela pode se apresentar em diferentes estruturas.

1.1 OBJETIVOS

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo apresentar as vantagens da Transformada de Laplace como método para determinar a solução de equações diferenciais que modelam sistemas físicos, tomando como exemplo circuitos elétricos.

Para tal, os objetivos específicos são:

- Discutir sobre modelagem matemática de sistemas físicos;
- Estabelecer as equações diferenciais como ferramenta para modelagem, além de especificar as suas principais classificações;
- Apontar os circuitos elétricos como exemplos de sistemas modelados por equações diferenciais, bem como seus componentes e combinações;
- Apresentar a Transformada de Laplace como um método simples e direto na solução de equações diferenciais, por meio de definições e propriedades; e
- Aplicar a Transformada de Laplace nos circuitos elétricos e analisar os resultados encontrados.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo serão abordados, de forma objetiva, os conhecimentos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, são feitas considerações sobre a modelagem matemática na descrição do comportamento de fenômenos ou sistemas físicos. Como ferramenta para esta modelagem, são apresentadas as equações diferenciais, bem como suas principais classificações. Por fim, destacam-se os circuitos elétricos como exemplo de sistemas físicos modelados matematicamente a partir de equações diferenciais.

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Quando se está analisando um sistema físico, descrever matematicamente o seu funcionamento é um dos primeiros passos que deve ser feito. Segundo Boyce e Diprima (2005), ao elaborar um modelo matemático é preciso reconhecer que cada problema possui suas particularidades e que modelar é uma arte que não pode ser reduzida a uma lista de regras, mas ainda assim é possível listar alguns passos que fazem parte do processo. Os passos a seguir são baseados nesta lista:

(1) Identificar as variáveis independente e dependentes, isto é, quais são os fatores que alteram a configuração do sistema quando variam e quais são os fatores alterados por essa variação. O tempo, muitas das vezes, é um desses fatores.

(2) Estabelecer uma relação entre a variação dos fatores e as alterações provocadas, por meio de um princípio ou lei que rege o problema. Este passo requer conhecimentos mais profundos sobre a natureza do sistema.

(3) Fazer as considerações e simplificações necessárias, adicionando ou desprezando fatores de acordo com sua influência no comportamento do sistema, a fim de fazer uma modelagem mais objetiva e coerente com o problema a ser solucionado.

Para exemplificar esse processo, dois sistemas serão analisados e modelados na próxima seção, um corpo em queda livre e um sistema massa-mola, apresentando as equações diferenciais como ferramenta para esta modelagem.

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais, como o próprio nome sugere, são equações que relacionam uma função incógnita com seus diferenciais e derivadas. Justamente por estabelecer esta relação, as equações diferenciais são amplamente utilizadas para modelar diversos sistemas. Segundo Stewart (2007), as equações diferenciais talvez sejam a aplicação mais importante do cálculo. Dois exemplos comumente apresentados na literatura são descritos a seguir.

A modelagem de um corpo em queda livre é feita por uma equação diferencial de segunda ordem, com um resultado que é bem conhecido dos anos iniciais do estudo de Física. Um corpo caindo verticalmente próximo à superfície da Terra sofre influência da aceleração da gravidade, denotada pela constante g. A aceleração $a(t)$ desenvolvida pelo corpo é a derivada da velocidade $v(t)$; que, por sua vez, é a derivada da posição $s(t)$. Desprezando o atrito do ar, a equação pode ser escrita como:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = -g, \tag{2.1}$$

em que o sinal negativo que acompanha a constante aparece para indicar que o sentido do movimento é contrário à orientação "para cima" do eixo vertical. Considerando, como condições iniciais do sistema, que a posição inicial do corpo seja $s(0) = s_0$ e que a velocidade inicial seja $v(0) = s'(0) = v_0$, a solução encontrada é a equação horária da posição:

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2.2}$$

Outra modelagem feita utilizando equações diferenciais é para o sistema massa-mola, combinando a Lei de Hooke, $F = -kx(t)$, com a Segunda Lei de Newton para o movimento, $F = ma = mx''(t)$, novamente considerando a aceleração como uma derivada segunda, desta vez do deslocamento $x(t)$. Dessa forma, a equação pode ser escrita como:

$$\begin{gathered} mx''(t) = -kx(t) \implies mx''(t) + kx(t) = 0, \\ x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \end{gathered} \tag{2.3}$$

Nesta última equação, todos os termos foram divididos pelo coeficiente m que acompanha a derivada e foi feita a substituição $\omega^2 = k/m$. Como essas oscilações não amortecidas são idealizações de um movimento sem atrito, pode-se acrescentar um termo referente ao amortecimento, que atua contra o movimento do corpo e é proporcional a taxa de variação do deslocamento $x'(t)$ e sendo β a constante de proporcionalidade:

$$mx''(t) = -k\,x(t) - \beta x'(t) \implies mx''(t) + \beta x'(t) + kx(t) = 0,$$
$$x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega^2\,x(t) = 0, \tag{2.4}$$

Nesta última equação foram feitas manipulações semelhantes àquelas feitas anteriormente, em que $\omega^2 = k/m$ e $2\lambda = \beta/m$.

A substituição por 2λ é conveniente, pois uma estratégia comum na literatura é considerar a resposta exponencial e fazer $x(t) = e^{rx}$, de modo que a equação auxiliar e as raízes sejam dadas por:

$$e^{rx}(r^2 + 2\lambda\,r + \omega^2) = 0$$
$$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}. \tag{2.5}$$

Daqui surgem três classificações para o sistema de acordo com $\lambda^2 - \omega^2$:

- Se $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, superamortecido;
- Se $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, criticamente amortecido; e
- Se $\lambda^2 - \omega^2 < 0$, subamortecido.

O caminho para a resolução depende de qual classificação que o sistema se encaixa, mas cada caso só será discutido na seção que trata sobre a solução de uma equação diferencial de segunda ordem, pois o desenvolvimento feito até aqui já é suficiente para exemplificar a modelagem matemática do sistema massa-mola.

Além destes dois exemplos existem tantos outros que podem ser modelados por meio de equações diferenciais, como os circuitos elétricos, que serão a principal aplicação apresentada neste trabalho. Entretanto, antes de prosseguir na modelagem dos circuitos elétricos propriamente ditos, é importante entender algumas classificações que uma equação diferencial pode ter.

2.2.1 Classificação das equações diferenciais

Segundo Zill e Cullen (2001) uma equação diferencial é classificada inicialmente de acordo com seu tipo, linearidade e ordem:

- Quanto ao tipo, a equação diferencial é classificada de acordo com o número de variáveis que a função incógnita depende: se a função incógnita depende de apenas uma variável e somente derivadas ordinárias aparecem na equação, a equação diferencial é dita ordinária; mas se a função depende de duas ou mais variáveis, de modo que aparecem derivadas parciais na equação diferencial, a equação diferencial é dita parcial. Essas Equações Diferenciais

Parciais (EDP) demandam técnicas de solução mais complexas justamente por envolverem a derivadas parciais da função incógnita, como a Equação da Onda e a Equação do Calor. Sendo assim, este trabalho irá se limitar aos problemas modelados por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

- A linearidade de uma equação diferencial está sujeita à duas propriedades: (1) a potência da variável dependente $y(x)$ e todas as suas derivadas é de primeiro grau; e (2) os coeficientes a_n de cada termo são dados apenas em função da variável independente x. Uma simplificação prática e comum para a segunda propriedade, e que também será utilizada neste trabalho, é considerar os coeficientes constantes.
- E a ordem de uma equação diferencial é determinada pela derivada de maior grau. Portanto, uma equação diferencial é dita de "ordem n" quando este é o grau da derivada de maior ordem envolvida, isto é, a n-ésima derivada.

Ainda é válido destacar uma outra classificação além das três citadas anteriormente: a homogeneidade. Uma equação da forma $f(x, y, y', y'', \ldots y^n) = g(x)$ é dita homogênea se o lado direito da equação é nulo, isto é, $g(x) = 0$.

A próxima seção trata dos circuitos elétricos, apresentando tanto seus elementos quanto as diferentes estruturas que podem ser obtidas através das combinações, a fim de modelar cada uma destas estruturas elementares. Essas modelagens serão feitas por meio de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's); a linearidade é garantida pelos coeficientes constantes, simplificação bastante comum neste caso; e a ordem dependerá de quais elementos integram o circuito.

2.3 CIRCUITOS ELÉTRICOS

Uma definição bastante simplificada para circuitos elétricos fornecida por Sadiku, Musa e Alexander (2014) é uma interconexão de elementos elétricos, para comunicar ou transmitir energia de um ponto para outro. Estes circuitos podem ser dos mais básicos aos mais complexos, dependendo dos elementos utilizados. Alguns destes elementos serão apresentados nesta seção.

A força eletromotriz (fem) cria uma diferença de potencial, uma tensão, que é responsável por gerar uma corrente elétrica, isto é, por mover as cargas através do circuito. Esta corrente gerada pode ser contínua ou alternada: a Corrente Contínua (CC) é aquela gerada por uma fonte de tensão constante, tipicamente representada por uma a bateria; e a Corrente Alternada (CA) é gerada por uma fonte que inverte sua polaridade, de forma que sua curva tenha um comportamento senoidal.

No entanto, existem alguns materiais que podem se opor a este fluxo de cargas elétricas, dissipando energia (efeito joule). Esta característica de se opor e resistir à corrente elétrica então conhecida por resistência e o elemento elétrico, por resistor. A Lei de Ohm estabelece que a tensão $v(t)$ sobre um resistor é diretamente proporcional à corrente $i(t)$ que flui através dele, definindo a resistência R como a constante responsável pela proporcionalidade. Matematicamente:

$$v(t) = R\ i(t) \tag{2.6}$$

Ao contrário do resistor, o capacitor é um elemento projetado para armazenar energia em seu campo elétrico e consiste em duas placas condutoras separadas por um isolante. Quando conectado a uma fonte de tensão, o capacitor começa a acumular cargas positivas em uma placa e cargas negativas na outra, criando uma diferença de potencial entre as placas. A quantidade de cargas $q(t)$ acumulada é diretamente proporcional à tensão aplicada $v(t)$, definindo a capacitância C como a constante de proporcionalidade:

$$q(t) = C\ v(t) \tag{2.7}$$

Sabendo que a corrente elétrica $i(t)$ dada pela taxa de variação da carga $q(t)$ em função do tempo t, deriva-se a equação 2.7 para obter a relação de corrente e tensão para o capacitor:

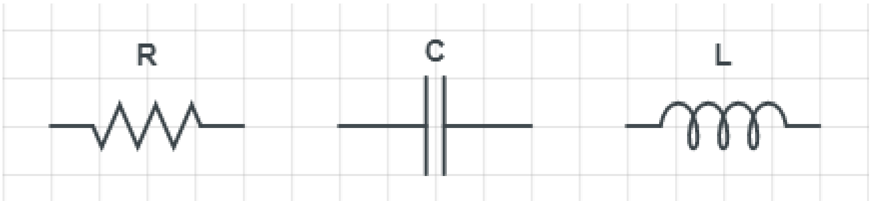
$$q'(t) = i(t) = C\ \frac{dv(t)}{dt} \tag{2.8}$$

Semelhante ao capacitor, o indutor também é um elemento que armazena energia, porém na forma magnética, e consiste em uma bobina de fio condutor. Um fluxo magnético que passa através de uma bobina gera uma corrente elétrica no fio condutor e induz uma tensão nos terminais do indutor, fenômeno conhecido por indução eletromagnética. A Lei de Lenz afirma que a corrente induzida cria um fluxo oposto àquele que a produziu; e a Lei de Faraday afirma que a tensão induzida é proporcional à variação do fluxo magnético. Portanto, se uma corrente flui através de um indutor, a tensão induzida é diretamente proporcional à taxa de variação da corrente.

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad (2.9)$$

Estes três últimos elementos apresentados são conhecidos como componentes passivos porque, diferente das fontes, não geram energia para o circuito, apenas interagem dissipando ou armazenando. A Figura 1 mostra a representação de cada um.

Figura 01 – Elementos passivos de circuitos elétricos: resistor, capacitor e indutor.



Fonte: Próprio autor.

A força eletromotriz $E(t)$ juntamente com os componentes passivos apresentados são a base necessária para a construção dos circuitos elétricos que serão abordados aqui. Entretanto, para a análise destes circuitos construídos, é necessário apresentar uma das leis de Kirchhoff, mais precisamente a lei das tensões, que analisa as quedas de tensão em uma malha do circuito.

A Lei de Kirchhoff para Tensões, baseada no princípio de conservação de energia, estabelece que a soma algébrica das tensões ao longo de uma malha, ou seja, um caminho fechado no circuito, é igual a zero. Isto significa que as contribuições dos componentes ativos e passivos, que fornecem, armazenam ou dissipam energia no circuito, se interagem de modo que a energia seja conservada. Matematicamente:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0 \qquad (2.10)$$

2.3.1 Tipos de circuitos elétricos

O **circuito elétrico LR** (Figura 02) é formado por um indutor L e um resistor R conectados em série com uma fonte de tensão $E(t)$. Pela Lei de Kirchhoff para Tensões:

$$V_L + V_R = E(t) \tag{2.11}$$

Sendo $V_L = L\, di/dt$ a queda de tensão no indutor e $V_R = Ri$ a queda no resistor, a equação diferencial que modela o circuito elétrico LR:

$$L\ \frac{di(t)}{dt} + R\ i(t) = E(t) \tag{2.12}$$

O **circuito elétrico RC** (Figura 02) é formado por um resistor R e um capacitor C conectados em série com uma fonte de tensão $E(t)$. Pela Lei de Kirchhoff para Tensões:

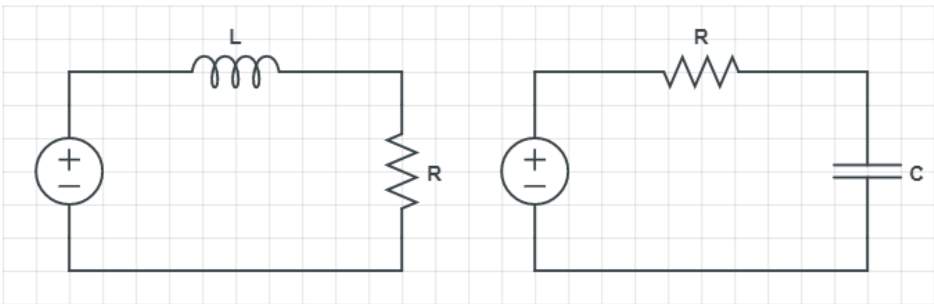
$$V_R + V_C = E(t) \tag{2.13}$$

Sendo $V_R = R\ dq/dt$ a queda de tensão no resistor e $V_C = q/C$ a queda no capacitor, a equação diferencial que modela o circuito elétrico RC:

$$R\ \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}\ q(t) = E(t) \tag{2.14}$$

Estes dois circuitos são de primeira ordem, pois foi possível colocar todos os termos de cada equação em função da mesma variável e a derivada de maior ordem foi a de primeiro grau. Em cada circuito existe um resistor, elemento que dissipa energia, combinado a um outro elemento que armazena energia, seja na forma magnética pelo indutor no circuito LR ou na forma elétrica pelo capacitor no circuito RC. Se a fonte for desconectada, $E(t) = 0$, o circuito continuará funcionando enquanto houver energia para ser descarregada.

Figura 02 – Circuitos elétricos: LR e RC



Fonte: Próprio autor.

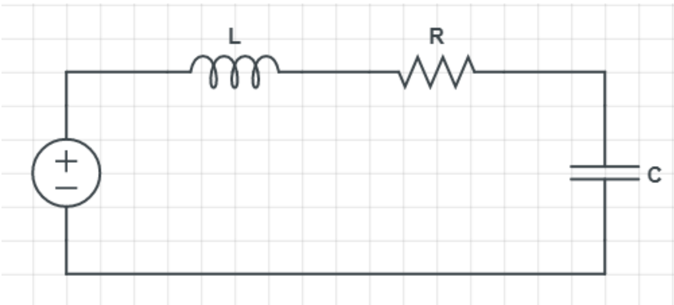
O **circuito elétrico LRC** (Figura 03), diferente dos já apresentados, não será modelado por uma equação diferencial de primeira ordem porque, desta vez, não envolverá somente a primeira derivada da função incógnita. Formado por um indutor, um resistor e um capacitor conectados em série com uma fonte de tensão, as quedas são todas colocadas em função da carga: $V_L = L\,q''(t)$ para o indutor; $V_R = R\,q'(t)$ para o resistor; e $V_C = q(t)/C$. De acordo com a Lei de Kirchhoff para Tensões:

$$V_L + V_R + V_C = E(t) \tag{2.15}$$

Portanto, a equação diferencial do circuito elétrico LRC:

$$L\,\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\,\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,q(t) = E(t) \tag{2.16}$$

Figura 03 – Circuito elétrico LRC



Fonte: Próprio autor.

A Equação 2.16 na forma homogênea, isto é, com $E(t) = 0$, representa um circuito com vibrações elétricas livres. Fazendo $q(t) = e^{xt}$ é possível determinar a equação auxiliar s suas raízes, semelhante ao que foi feito na modelagem do sistema massa-mola:

$$\begin{gathered} e^{xt}(Lx^2 + Rx + 1/C) = 0 \\ x = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \end{gathered} \tag{2.17}$$

E assim como no sistema massa-mola, daqui surgem três possíveis casos, de acordo com o valor do discriminante $\Delta = R^2 - 4L/C$ da equação auxiliar, que é o termo dentro da raiz quadrada. O circuito será classificado como:

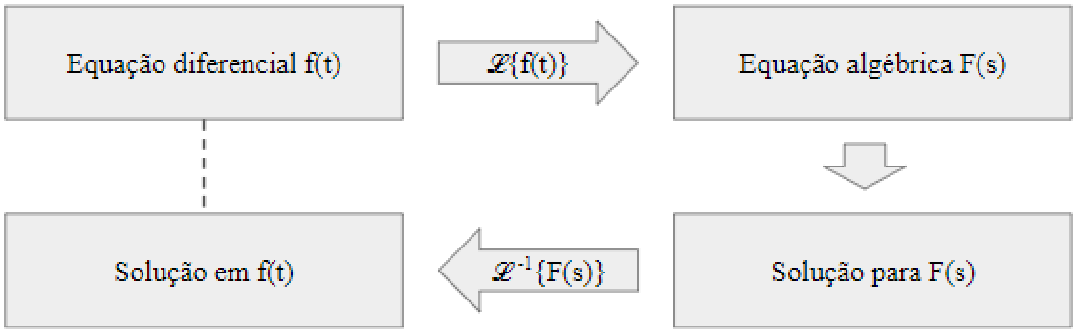
- Se $R^2 - 4L/C > 0$, superamortecido,
- Se $R^2 - 4L/C = 0$, criticamente amortecido, e
- Se $R^2 - 4L/C < 0$, subamortecido.

2.4 TRANSFORMADA DE LAPLACE

A Transformada de Laplace é um método interessante para a solução de EDO's lineares com coeficientes constantes e com condições iniciais conhecidas, como é o caso dos circuitos elétricos. Kreyszig (1986) descreve este método em três etapas: (1) a equação diferencial que modela o problema é transformada em uma equação algébrica, denominada equação subsidiária; (2) resolve-se a equação subsidiária; e (3) a solução da equação subsidiária é transformada novamente para obter a solução do problema.

Para demonstrar visualmente o processo, ao invés de partir diretamente da equação diferencial para a solução, por métodos mais difíceis, existe um caminho alternativo mostrado pelo fluxograma (Figura 04) em que a equação diferencial, inicialmente no domínio do tempo, é transformada em uma equação algébrica análoga no domínio da frequência. Por meio de manipulações matemáticas, a solução no novo domínio é facilmente determinada e então transformada, pelo processo inverso, na solução da equação no domínio original.

Figura 04 – Fluxograma da Transformada de Laplace



Fonte: adaptado de Butkov (1978).

As etapas de transformação são resolvidas facilmente com o auxílio de tabelas. Ainda assim, o procedimento matemático utilizado para determinar a Transformada de Laplace de uma função será descrito nesta seção. Já para a Transformada Inversa, o procedimento mais prático é tomar simplesmente como a operação inversa da Transformada de Laplace.

2.4.1 Definição da Transformada de Laplace

Seja $f(t)$ uma função real definida para $t > 0$. Então, a Transformada de Laplace da função $f(t)$, denotada $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, é definida por:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \qquad (2.18)$$

se esta integral converge, isto é, se o limite da integral imprópria existe e é finito.

Existência. As condições suficientes para a existência da Transformada de Laplace de uma função são duas: a função ser (1) seccionalmente contínua e (2) de ordem exponencial. Se as duas condições não forem satisfeitas, ainda assim a transformada pode existir ou não, pois as condições não são necessárias para garantir a existência, mas sim suficientes.

2.4.2 Definição da Transformada Inversa de Laplace

Se $F(s)$ é a Transformada de Laplace de uma função $f(t)$, isto é, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então $f(t)$ é chamada Transformada Inversa de Laplace de $F(s)$. Definida por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \qquad (2.19)$$

Unicidade. A Transformada Inversa de Laplace só faz sentido se houver garantia da unicidade da operação, isto é, se a Transformada $F(s)$ da função $f(t)$ é única. Isto significa que se duas funções $f(t)$ e $g(t)$ têm a mesma Transformada, então $f(t) = g(t)$. Dessa forma, é possível garantir que a solução encontrada para a equação análoga é também solução para a equação original.

Para facilitar o processo, como já mencionado, tabelas como a apresentada na próxima seção são construídas a partir da definição apresentada, que servirão para consulta na resolução dos problemas.

2.4.3 Tabela das Transformadas de Laplace

A Tabela a seguir foi construída partindo das funções mais elementares, como as funções potência da variável t, e segue fazendo combinações destas funções.

Tabela 1 – Transformadas de Laplace elementares

	$f(t)$	$F(s)$
01.	1	$\frac{1}{s}$
02.	t	$\frac{1}{s^2}$
03.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
04.	e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
05.	$t\, e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
06.	$t^n\, e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
07.	$sen\, bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
08.	$cos\, bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
09.	$e^{at}\, sen\, bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
10.	$e^{at}\, cos\, bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
11.	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
12.	$\frac{a\, e^{at}-b\, e^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$

Fonte: Adaptada de Spiegel (1976).

2.4.4 Propriedades da Transformada de Laplace

Algumas das principais propriedades da Transformada de Laplace, que também serão utilizadas na resolução dos problemas são:

- Propriedades de linearidade

$$\mathcal{L}\{c_1\, f_1(t) + \ldots + c_n\, f(t)\} = c_1\, F_1(s) + \ldots + c_n F_n(s) \tag{2.20}$$

- Propriedade de mudança de escala

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{2.21}$$

- Primeira propriedade de deslocamento

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s-a) \tag{2.22}$$

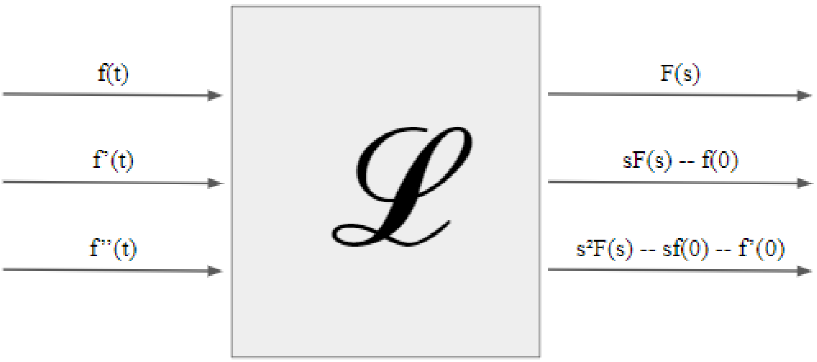
- Segunda propriedade de deslocamento

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as} F(s) \tag{2.23}$$

- Transformada de Laplace de derivadas

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n)}(0) \tag{2.24}$$

Figura 05 – Transformada da Laplace de derivadas



Fonte: Adaptado de Figueiredo e Neves (1997)

3 METODOLOGIA

A Transformada de Laplace é útil para determinar a solução de equações diferenciais ordinárias lineares, principalmente aquelas com coeficientes constantes. Seja a equação:

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = g(t) \tag{3.1}$$

E sob condições iniciais:

$$y(0) = y_0 \quad y'(0) = y_1 \quad \ldots \quad y^{(n)}(0) = y_n \tag{3.2}$$

Sendo a_n e y_n constantes de valor conhecido. Tomando a Transformada de Laplace de ambos os lados, a equação diferencial de $y(t)$ se torna uma equação algébrica de $Y(s)$. Para determinar a solução no novo domínio, basta isolar a nova função incógnita. Tomando a Transformada Inversa de Laplace, com o auxílio de tabelas, a solução finalmente é determinada, análoga àquela, agora no domínio do tempo.

Este processo aqui descrito está generalizado para qualquer equação diferencial de ordem n. Nas próximas seções, este processo será aprofundado e aplicado na resolução de equações diferenciais de primeira e segunda ordem. Inicialmente, serão utilizadas as respectivas equações homogêneas, com $g(t) = 0$; com base nestes resultados, serão feitas as considerações para as equação não homogêneas, com $g(t) \neq 0$.

3.1 EDO LINEAR HOMOGÊNEA DE PRIMEIRA ORDEM

A forma geral de uma EDO linear homogênea de primeira ordem (n = 1) é:

$$a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = 0, \text{ com } a_1 \neq 0 \tag{3.3}$$

E $y(0) = C$ a sua condição inicial.

Tomando a Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{a_1\, y'(t) + a_0\, y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \tag{3.4}$$

Pela propriedade de linearidade:

$$a_1\, \mathcal{L}\{y'(t)\} + a_0\, \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \tag{3.5}$$

Pela Transformada da derivada:

$$a_1[sY(s) - y(0)] + a_0[Y(s)] = 0 \tag{3.6}$$

Explicitando a solução no domínio da frequência, $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{a_1 C}{a_1 s + a_0}$$
$$Y(s) = \frac{C}{[s + (a_0/a_1)]} \tag{3.7}$$

Tomando a Transformada Inversa de Laplace:

$$y(t) = Ce^{-(a_0/a_1)t} \tag{3.8}$$

Assim, determina-se a solução no domínio do tempo, $y(t)$.

3.2 EDO LINEAR HOMOGÊNEA DE SEGUNDA ORDEM

A forma geral de uma EDO linear homogênea de segunda ordem (n = 2) é:

$$a_2\, y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = 0, \text{ com } a_2 \neq 0 \tag{3.9}$$

Sendo $y(0) = C$ e $y'(0) = C_1$ as suas condições iniciais.

Tomando a Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{a_2\, y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \tag{3.10}$$

Pela propriedade de linearidade:

$$a_2\, \mathcal{L}\{y''(t)\} + a_1\, \mathcal{L}\{y'(t)\} + a_0\, \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} \tag{3.11}$$

Pela Transformada da derivada:

$$a_2[s^2Y(s) - s\, y(0) - y'(0)] + a_1[sY(s) + y(0)] + a_0[Y(s)] = 0 \tag{3.12}$$

Explicitando a solução no domínio da frequência, $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{a_2 sC + a_2 C_1 + a_1 C}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$
$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + (a_1/a_2)C}{s^2 + (a_1/a_2)s + (a_0/a_2)} \tag{3.13}$$

No denominador, a equação quadrática na variável s pode ser manipulada, de modo que a solução no domínio da frequência e pode ser reescrita desta forma:

$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + (a_1/a_2)C}{[s - (\omega - \alpha)][s - (\omega + \alpha)]} \tag{3.14}$$

Em que: $\omega = -(a_1/2a_2)$ e $\alpha = \sqrt{(a_1/2a_2)^2 - (a_0/a_2)}$

- **Caso 1:** Nulo. $(a_1/2a_2)^2 - (a_0/a_2) = 0$

Neste caso$\alpha = 0$ e a solução no domínio da frequência se resume em:

$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + (a_1/a_2)C}{[s-\omega]^2} \tag{3.15}$$

Utilizando o termo ωC para somar e subtrair, a equação pode ser reorganizada:

$$Y(s) = \frac{sC - \omega C}{[s-\omega]^2} + \frac{\omega C + C_1 + (a_1/a_2)C}{[s-\omega]^2}$$
$$Y(s) = C\frac{1}{[s-\omega]^2} + [C_1 + C(\omega + a_1/a_2)]\frac{1}{[s-\omega]^2} \tag{3.16}$$

De acordo com as Transformadas Inversas da Tabela X:

$$y(t) = k_1 e^{\omega t} + k_2 t e^{\omega t} \tag{3.17}$$

em que: $k_1 = C$ e $k_2 = [C_1 + C(\omega + a_1/a_2)]$

- **Caso 2:** Positivo. $(a_1/2a_2)^2 - (a_0/a_2) > 0$

Separando o numerador, a solução no domínio da frequência se torna:

$$Y(s) = C\frac{s}{[s-(\omega-\alpha)][s-(\omega+\alpha)]}$$
$$+ [C_1 + C(a_1/a_2)]\frac{1}{[s-(\omega-\alpha)][s-(\omega+\alpha)]} \tag{3.18}$$

Tomando a Transformada Inversa de Laplace:

$$y(t) = C\frac{e^{(\omega+\alpha)t} - e^{(\omega-\alpha)t}}{(\omega+\alpha)-(\omega-\alpha)}$$
$$+ [C_1 + C(a_1/a_2)]\frac{(\omega+\alpha)e^{(\omega+\alpha)t} - (\omega-\alpha)e^{(\omega-\alpha)t}}{(\omega+\alpha)-(\omega-\alpha)} \tag{3.19}$$

Separando os termos de acordo com as exponenciais:

$$y(t) = k_1 e^{(\omega+\alpha)t} + k_2 e^{(\omega-\alpha)t} \tag{3.20}$$

em que $k_{1,2} = \pm[C + [C_1 + C(a_1/a_2)](\omega \pm a)]/2\alpha$

- **Caso 3:** Negativo. $(a_1/2a_2)^2 - (a_0/a_2) < 0$

Neste último caso, como o radicando é negativo, as raízes da equação terão uma parte real e outra imaginária, sendo $(\omega + ai)$ e $(\omega - ai)$. A solução no domínio da frequência fica:

$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + (a_1/a_2)C}{[s - (\omega - \alpha i)][s - (\omega + \alpha i)]}$$
$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + (a_1/a_2)C}{s^2 - 2\omega s + (\omega^2 + \alpha^2)} \tag{3.21}$$

Utilizando o termo ωC para somar e subtrair e reorganizando o denominador:

$$Y(s) = \frac{sC - \omega C}{(s-\omega)^2 + \alpha^2} + \frac{\omega C + C_1 + (a_1/a_2)C}{(s-\omega)^2 + \alpha^2}$$
$$Y(s) = C\frac{s - \omega}{(s-\omega)^2 + \alpha^2} + [\omega C + C_1 + (a_1/a_2)C]\frac{1}{(s-\omega)^2 + \alpha^2} \tag{3.22}$$

De acordo com as Transformadas Inversas da Tabela X:

$$y(t) = k_1 e^{\omega t} cos\,(\alpha t) + k_2 e^{\omega t} sin\,(\alpha t) \tag{3.23}$$

em que: $k_1 = C$ e $k_2 = [C_1 + C(\omega + a_1/a_2)]/\alpha$

3.3 EDO LINEAR NÃO HOMOGÊNEA

A simplificação feita no início da seção não se aplica a muitos dos problemas reais, pois quando modelados por equações diferenciais, o “lado direito” da igualdade é diferente de zero, $g(t) = 0$. É preciso revogar esta simplificação para comentar sobre os casos em que a equação diferencial é não homogênea.

Pegando como exemplo os circuitos elétricos, geralmente existe uma fonte de tensão que fornece energia aos demais elementos. Esta fonte pode ser de valor constante (CC) ou periodicamente variável (CA). Neste caso, a função que modela a fonte também deve ser transformada, levada do domínio do tempo para o domínio da frequência, para que se possa levar em consideração a sua influência no comportamento do sistema.

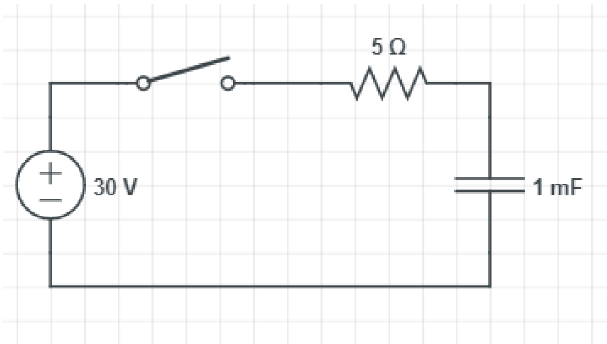
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Tendo em vista tudo o que foi apresentado, pretende-se determinar a solução de circuitos elétricos modelados por equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes e condições iniciais conhecidas. Serão feitas três aplicações, um para cada tipo de circuito apresentado, alterando as condições de alimentação pela fonte. Os circuitos de primeira ordem serão em Corrente Contínua: a carga de um capacitor no circuito RC e a descarga do indutor no circuito RL. O circuito de segunda ordem será em Corrente Alternada, alimentado por uma fonte de tensão senoidal.

4.1 CIRCUITOS ELÉTRICOS DE PRIMEIRA ORDEM

No instante $t = 0$, a chave do circuito a seguir (Figura 06) é fechada, conectando uma bateria de $E = 30\ V$ com um resistor de $R = 5\ \Omega$ e um capacitor de $C = 1\ mF$ em série. Se o capacitor está sem carga inicialmente, qual a carga e corrente no circuito para $t > 0$?

Figura 06 – Exemplo de circuito elétrico RC



Fonte: Próprio autor

Substituindo os valores na equação que modela um circuito RC (Equação 2.12):

$$5\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{10^{-3}}q(t) = 30$$
$$\frac{dq(t)}{dt} + 200\,q(t) = 6 \qquad (4.01)$$

Tomando a Transformada de Laplace, com $q(0) = 0$:

$$[sQ(s) - 0] + 200[Q(s)] = \frac{6}{s} \qquad (4.02)$$

Explicitando a solução no domínio da frequência:

$$Q(s) = \frac{6s}{s + 200}$$
$$Q(s) = \frac{3/100}{s} - \frac{3/100}{s + 200} \tag{4.03}$$

Tomando a Transformada Inversa de Laplace, a carga $q(t)$:

$$q(t) = \frac{3}{100} - \frac{3}{100} e^{-200t} \tag{4.04}$$

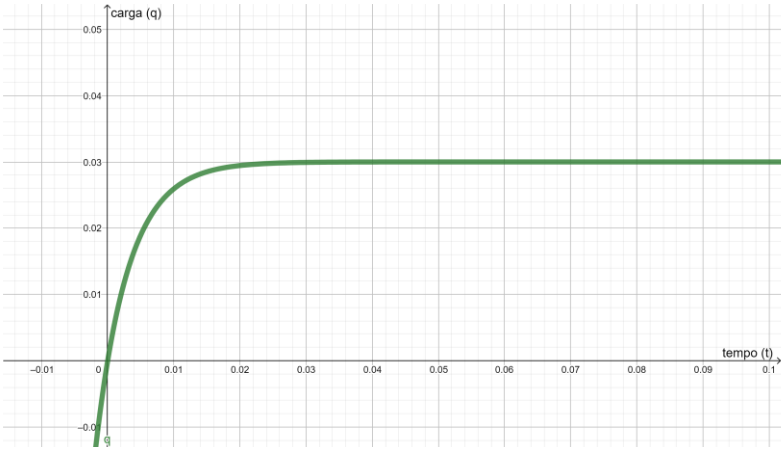
E derivando esta equação, a corrente $i(t)$:

$$i(t) = 6\, e^{-200t} \tag{4.05}$$

Os resultados para carga e corrente obtidos são conhecidos na literatura por equações da carga do capacitor. O propósito desta resolução, no entanto, não era apenas obter esta equação, mas sim perceber como o processo de obtenção por meio da Transformada de Laplace é simples. Ainda assim, é válido analisar o resultado encontrado.

A equação da carga (Equação 4.04) pode ser dividida em dois termos: um exponencial, que representa o crescimento do número de cargas acumuladas no capacitor; e um termo constante, que é uma assíntota e representa carga máxima que será acumulada quando o circuito estiver em regime permanente. Este comportamento pode ser observado no gráfico a seguir (Figura 07). O gráfico da tensão tem o mesmo comportamento, visto que se relaciona com a carga de forma proporcional.

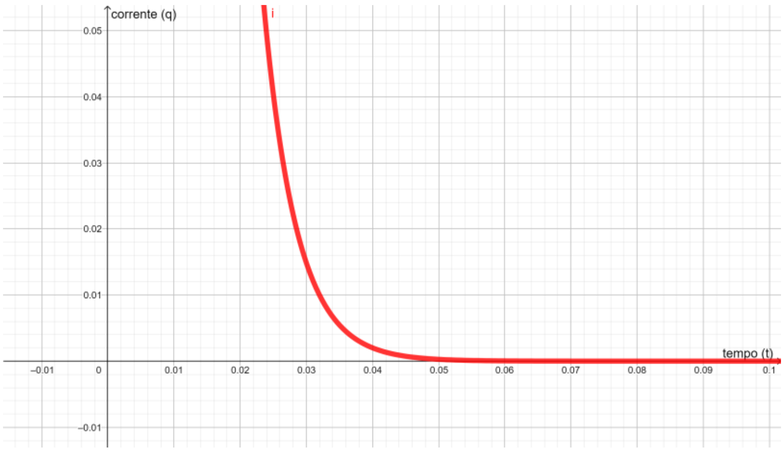
Figura 07 – Curva da carga de um circuito elétrico RC



Fonte: Próprio autor

E a equação da corrente (Equação 4.05) é composta apenas de um termo exponencial, que representa a queda da corrente no circuito a medida que o capacitor vai sendo carregado. O gráfico da curva da corrente (Figura 08) tende a zero porque quando o circuito estiver em regime permanente, a diferença de potencial entre as placas do capacitor será a mesma fornecida pela fonte e não haverá mais corrente.

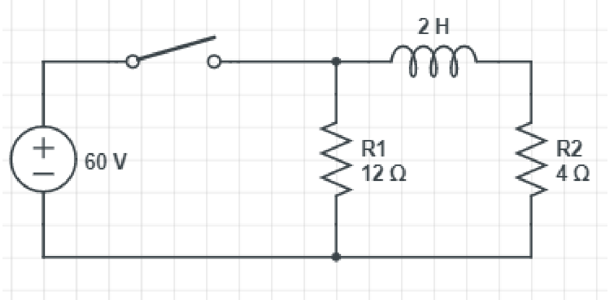
Figura 08 – Curva da corrente de um circuito elétrico RC



Fonte: Próprio autor.

Em outro circuito, um indutor de $L = 2\ H$ e um resistor de $R2 = 4\ \Omega$ estão conectados em série entre si e em paralelo com um outro resistor de $R1 = 12\ \Omega$, alimentados por uma bateria de $E = 60\ V$. A chave, que estava fechada por um longo tempo, de modo que o circuito entrou em regime permanente, é enfim aberta, desconectando a bateria do restante do circuito. Sabendo que a corrente que fluía pelo indutor instantes antes da chave abrir era de $15\ A$, qual é a corrente para qualquer instante $t > 0$?

Figura 09 – Exemplo de circuito elétrico LR



Fonte: Próprio autor.

Como bateria foi desconectada, assume-se que $E(t) = 0$. Dessa forma, o circuito passa a ter somente uma malha e os resistores se somam para exercer uma resistência equivalente de $R_{eq} = 16$. Substituindo os valores na equação que modela um circuito elétrico LR (Equação 2.12):

$$2\frac{di(t)}{dt} + 16\,i(t) = 0$$
$$\frac{di(t)}{dt} + 8\,i(t) = 0 \quad (4.05)$$

Tomando a Transformada de Laplace, com i(0)=15 A:

$$[sI(s) - 15] + 8[I(s)] = 0 \quad (4.05)$$

Explicitando a solução no domínio da frequência:

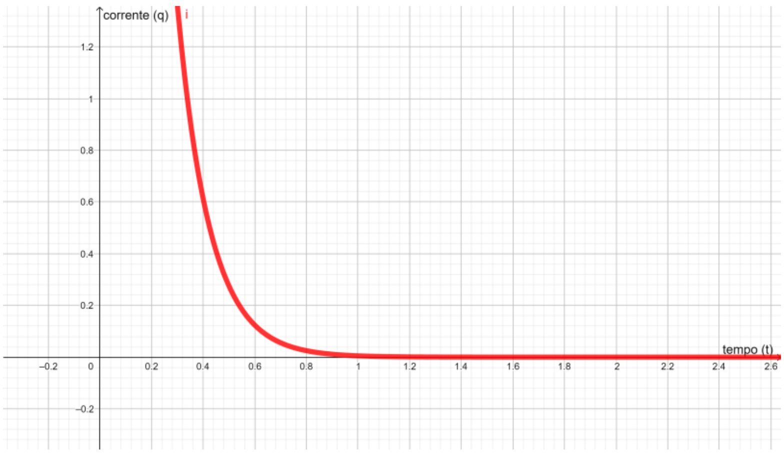
$$I(s) = \frac{15}{s+8} \quad (4.05)$$

Tomando a Transformada Inversa de Laplace, a corrente i(t):

$$i(t) = 15\,e^{-8t} \quad (4.05)$$

Este resultado é a equação da corrente para a descarga do indutor, também conhecida na literatura. Assim como no problema anterior, fazendo a análise, percebe-se que esta equação é uma exponencial negativa e representa a queda da corrente no indutor a medida que a energia armazenada no seu campo magnético também diminui. O gráfico a seguir (Figura 10) mostra esse comportamento.

Figura 10 – Curva da corrente de um circuito LR



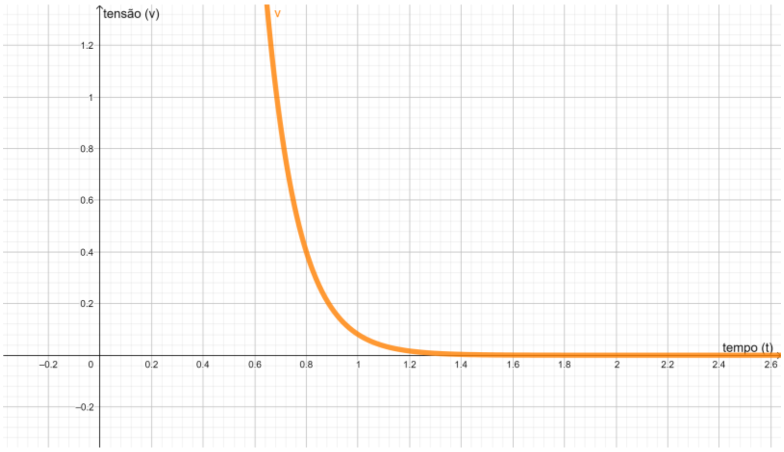
Fonte: Próprio autor

Para completar a análise, é preciso obter a equação da tensão sobre o indutor:

$$v(t) = -240\ e^{-8t} \tag{4.05}$$

Como se trata de um processo de descarga, isto é, sem a presença de uma fonte, a tensão sobre o indutor também cai exponencialmente, como mostra o gráfico (Figura 11):

Figura 11 – Curva da tensão de um circuito LR

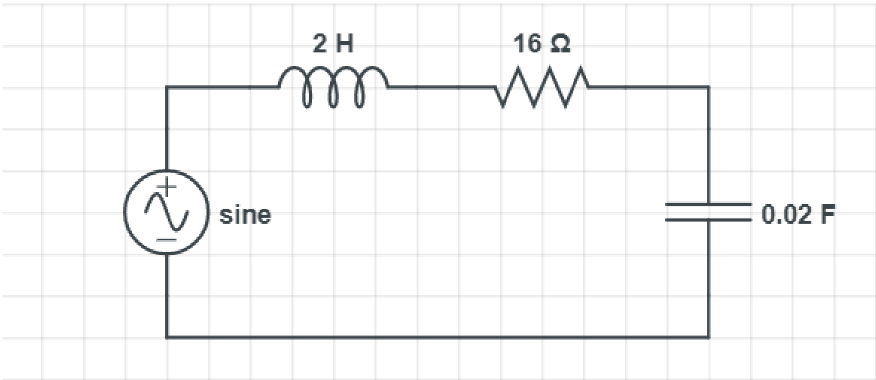


Fonte: Próprio autor.

4.2 CIRCUITOS ELÉTRICOS DE SEGUNDA ORDEM

Um indutor de $L = 2\ H$, um resistor de $R = 16\ \Omega$ e um capacitor de $C = 0{,}02\ F$ são conectado em série com uma fonte de tensão senoidal (Figura 12). Em $t = 0$ a carga no capacitor e a corrente no circuito são nulas. Encontre a carga e a corrente no tempo $t > 0$, se $E(t) = 100\ \ sin\ 3t$.

Figura 12 – Exemplo de circuito elétrico LRC



Fonte: Próprio autor.

Substituindo na equação que modela um circuito LRC (Equação 2.16):

$$2\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 16\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{0{,}02} = 100\ \ sin\ 3t$$
$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + 8\ \frac{dq(t)}{dt} + 25q(t) = 50\ \ sin\ 3t \tag{4.6}$$

E as condições iniciais sendo $q(0) = 0$ e $i(0) = q'(0) = 0$.

Tomando a Transformada de Laplace:

$$[s^2Q(s) - sq(0) - q'(0)] + 8\,[sQ(s) - q(0)] + 25\,[Q(s)] = 50\frac{3}{[s^2 + 3^2]} \tag{4.7}$$

Explicitando a solução no domínio da frequência:

$$Q(s) = \frac{150}{[(s^2 + 9)(s^2 + 8s + 25)]} \tag{4.8}$$

Pelo método de Frações Parciais:

$$Q(s) = \frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9} + \frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9} \tag{4.9}$$

Tomando a Transformada Inversa de Laplace, a carga $q(t)$:

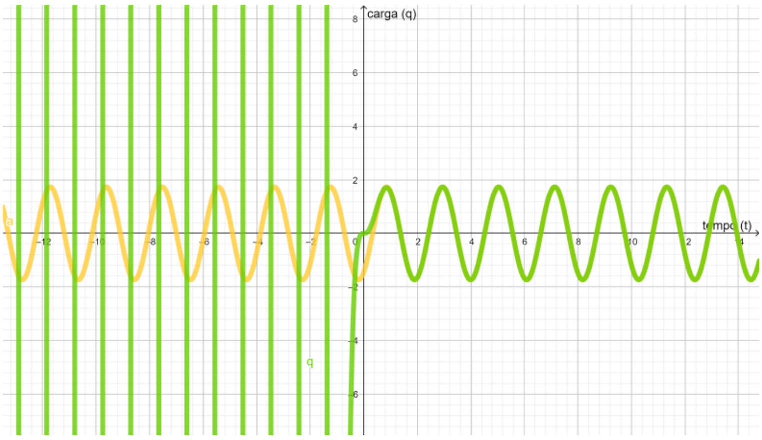
$$q(t) = \frac{25}{26} sin\ 3t\ - \frac{75}{52} cos\ 3t + \frac{25}{26} e^{-4t}\ sin\ 3t + \frac{75}{52} e^{-4t}\ cos\ 3t$$
$$q(t) = \frac{25}{52}(2\ sin\ 3t - 3\ cos\ 3t) + \frac{25}{52} e^{-4t}(2\ sin\ 3t + 3\ cos\ 3t) \tag{4.10}$$

E a corrente $i(t) = q'(t)$:

$$i(t) = \frac{25}{52}(6\ sin\ 3t - 9\ cos\ 3t) - \frac{25}{52} e^{-4t}(17\ sin\ 3t + 6\ cos\ 3t) \tag{4.11}$$

Para $t \gg 0$, os termos acompanhado da exponencial e^{-4t} tendem a zero e portanto são desprezíveis, representando a parte transitória da solução. Os outros termos, em que não há uma exponencial negativa, representam o regime permanente. Na figura a seguir (Figura 13), o gráfico em verde é a curva da carga deste circuito LRC; removendo a parte transitória da equação, resta apenas a curva laranja da parte permanente da solução, que é praticamente igual a curva da solução completa para $t > 0$. O gráfico para a curva da corrente é semelhante ao da carga, mudando apenas a amplitude das funções sen x e cos x.

Figura 13 – Curva da carga de um circuito elétrico LRC



Fonte: Próprio autor

5 CONCLUSÃO

As discussões iniciais mostraram a importância de conhecer e entender a natureza do sistema, para que o modelo elaborado leve em consideração todos os parâmetros que exercem alguma influência significativa sobre ele. As equações diferenciais se mostraram ferramentas satisfatórias para esta modelagem e suas várias classificações indicam o quão abrangentes essas equações podem ser.

Os circuitos elétricos tiveram seus componentes apresentados separadamente, depois combinados e por fim, foram aplicados sob diversas condições iniciais. Em cada uma das aplicações, foi utilizado o método da Transformada de Laplace e os resultados obtidos foram coerente com o esperado. No primeiro problema, a bateria que alimentava o circuito RC estava carregando o capacitor, resultando nos gráficos encontrados para a curva da carga e da corrente. Já no segundo problema, o circuito LR que estava em regime permanente, teve sua bateria desconectada, fazendo com que o indutor descarregasse, como mostraram os gráficos, também coerentes. O terceiro problema trouxe uma fonte variável e teve como resposta curvas na forma de oscilações amortecidas. Nos três exemplos, a Transformada foi utilizada e obteve os resultados de forma simples, como se propôs.

Diante disto, a Transformada de Laplace tem como primeira grande vantagem transformar as equações diferenciais em equações algébricas, em que é muito mais fácil determinar a solução, como foi enfatizado. A Transformada também se destaca ao determinar diretamente a solução particular do problema, ao invés de encontrar primeiro uma solução geral que ainda precisa ser particularizada de acordo com as condições iniciais, como acontece nos métodos convencionais. Mesmo restrita a apenas um sistema, foi possível perceber sua utilidade, visto que a Transformada não se limita a apenas estes casos, mas se aplica também a outros mais completos e complexos.

REFERÊNCIAS

SADIKU, M. MUSA, S. ALEXSANDER, C. **Análise de Circuitos Elétricos com Aplicações.** 1ª Ed. [S.L.]: AMGH, 2014.

BOYCE, William E., DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 8ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BUTKOV, E. **Física matemática**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 1978.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações diferenciais aplicada**s; coleção matemática universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

KREYSZIG, E. **Matemática Superior 1**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 1986.

ZILL, Dennis G. CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**, Vol. 1. 3 Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

SPIEGEL, Murray R. **Transformada de Laplace**; Coleção Schaum. Editora McGraw-Hill, 1976.

STEWART, J. **Cálculo. Vol. 2**. 5ed, São Paulo: Thomson Learning, 2007.

UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO BRASILEIRA. Sistema de Bibliotecas da Unilab. Manual **de normalização de trabalhos acadêmicos da Unilab**. Acarape/CE, 2020.