



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA  
AFRO-BRASILEIRA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
CURSO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA**

**PAULO RICARDO GONÇALVES PEREIRA**

**SUPERFÍCIES MÍNIMAS E A REPRESENTAÇÃO DE WEIERSTRASS**

**ACARAPE**

**2018**

PAULO RICARDO GONÇALVES PEREIRA

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E A REPRESENTAÇÃO DE WEIERSTRASS

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza e Matemática com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Sistema de Bibliotecas da UNILAB  
Catalogação de Publicação na Fonte.

---

Pereira, Paulo Ricardo Goncalves.

P489s

Superfícies mínimas e a representação de Weierstrass / Paulo Ricardo Goncalves Pereira. - Redenção, 2018.  
90f: il.

Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Ciências Da Natureza E Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2018.

Orientador: Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Geometria diferencial. 2. Representação de Weierstrass. 3. Superfície mínima. I. Título

CE/UF/BSCL

CDD 516.36

---

SUPERFÍCIES MÍNIMAS E A REPRESENTAÇÃO DE WEIERSTRASS

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza e Matemática com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 16 / 05 / 2018.

BANCA EXAMINADORA

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

João Francisco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho ao meu pai, por toda a sua superação na luta contra um Câncer e por todo seu apoio durante os momentos mais difíceis.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e pelas oportunidades a mim concedidas.

Ao meu pai, Antônio Airton Pereira, por todos os conselhos.

À minha mãe, Maria Rosileide Gonçalves Pereira, por todo seu amor.

À minha esposa, Maria Alesandra Lucas de Brito, por me apoiar em todos os momentos difíceis.

Ao meu filho, João Filipi de Brito Pereira, por ter me propiciado o prazer de ser pai.

Aos meus irmãos, pelos momentos que vivemos tanto de tristezas como de alegrias.

Aos colegas da turma de graduação, pelas reflexões, críticas e sugestões, em especial a Rodolfo Ferreira de Oliveira e Antônio Isael Paz Pires.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora João Francisco da Silva Filho e Joserlan Perote da Silva pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

A todos os professores do ICEN, que sempre me ajudaram em momentos de dúvidas.

A coordenação do ICEN, pelos serviços prestados.

A todas as pessoas que fizeram e fazem à UNILAB funcionar, pois através desta foi que pude realizar um dos meus maiores sonhos.

“Se deres um peixe a um homem faminto,  
vais alimentá-lo por um dia. Se o ensinares  
a pescar, vais alimentá-lo por toda a vida.”

*Anne Isabella Thackeray Ritchie*

## RESUMO

O presente trabalho trata de conceitos referentes a geometria diferencial e superfície mínima. Tais superfícies possuem curvatura média identicamente nula, elas são um dos principais objetos de estudo da geometria diferencial. As primeiras superfícies mínimas, foram descobertas por Euler e Lagrange. Obter exemplos de tais superfícies, era algo considerado difícil, até mesmo para os casos considerados mais simples, o caso do gráfico de uma função. Após mais de 100 anos da definição de superfície mínima, foi que Weierstrass desenvolveu um método que descrevia todas as superfícies mínimas, tal método é conhecido como representação de Weierstrass, que será o objeto final de estudo deste trabalho. Weierstrass, obteve uma relação entre superfícies mínimas e funções holomorfas, isto é, ele obteve uma relação entre tais superfícies e análise complexa. Através de estudo bibliográfico, mostramos algumas propriedades de superfícies regulares e mínimas, bem como os exemplos mais conhecidos de superfícies mínimas como o plano, catenóide (única superfície mínima de revolução não trivial), superfície de Scherk, superfície de Enneper, além de algumas aplicações das mesmas em nosso cotidiano.

**Palavras-chave:** Superfície mínima. Representação de Weierstrass. Geometria diferencial.



## ABSTRACT

This present work deals with concepts related to differential geometry and minimal surfaces. Such surfaces have identically null mean curvature, they are one of the main objects of study of the differential geometry. The first minimal surfaces were discovered by Euler and Lagrange. Obtaining examples of such surfaces was considered difficult even for the simpler case the case of the graph of a function. After more 100 years later of the definition of minimal surface was that Weierstrass developed to method that described all the minimal surfaces, this method is known the Weierstrass representation that will be the final object of study of this work. Weierstrass, obtained a relation between minimal surfaces and holomorphic functions, this is, obtained the relation between minimal surfaces and complex analysis. Through the literature we have shown some properties of regular and minimal surfaces as well as the most well known examples of minimal surfaces such the plane, catenoide (the only minimal surface of revolution non trivial), Scherk surface, Enneper surface, and some applications of the same in our daily lives.

**Keywords:** Minimal surfaces. Weierstrass representation. Differential geometry.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação da aplicação $X : U \rightarrow S \cap V$ . . . . .	13
Figura 2 – Esboço da aplicação $dX_q$ . . . . .	14
Figura 3 – Cobrimos a esfera com seis parametrizações. . . . .	16
Figura 4 – Gráfico do Parabolóide elíptico $z = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$ . . . . .	17
Figura 5 – $\varphi$ leva os valores de $f^{-1}(a)$ no plano $t = a$ . . . . .	20
Figura 6 – Localmente $V$ é uma superfície regular. . . . .	22
Figura 7 – Representação geométrica da Proposição 2.6. . . . .	25
Figura 8 – $f$ é diferenciável em $p$ se $f \circ X$ for diferenciável em $X^{-1}(p) = q$ . . . . .	26
Figura 9 – Representação da diferenciabilidade entre superfícies. . . . .	27
Figura 10 – O plano tangente $T_p S$ contém todos os vetores tangentes a $S$ em $p$ . . . . .	29
Figura 11 – A diferencial $d\varphi_p$ associa um vetor de $T_p S_1$ a outro vetor em $T_{\varphi(p)} S_2$ . . . . .	30
Figura 12 – A aplicação de Gauss Toma vetores em $S$ e leva na esfera $S^2$ . . . . .	36
Figura 13 – $N(t)$ descreve uma curva sobre $S^2$ . . . . .	37
Figura 14 – Representação geométrica da segunda forma fundamental. . . . .	41
Figura 15 – Numa vizinhança de $p$ , $\alpha$ e $\alpha_n$ possuem a mesma curvatura normal segundo $v$ . . . . .	41
Figura 16 – As curvas normais em $S^2$ são circunferências de raio 1. . . . .	42
Figura 17 – Os vetores $\{e_1, e_2\}$ formam uma base ortonormal de $T_p S$ . . . . .	43
Figura 18 – Os vetores normais $N_1, N_2$ das seções normais definem o sinal de $K$ . . . . .	45
Figura 19 – Exemplo de uma superfície de revolução obtida a partir da rotação de um curva geratriz $\alpha$ em torno do eixo $z$ . . . . .	51
Figura 20 – Superfície mínima de Enneper vista de dois ângulos. . . . .	55
Figura 21 – $X^t$ faz uma pequena perturbação em $X$ na direção de $N$ . . . . .	56
Figura 22 – Superfície de Scherk vista de dois ângulos. . . . .	62
Figura 23 – Catenóide e uma aplicação em nosso cotidiano. . . . .	63
Figura 24 – Helicóide e uma aplicação em nosso cotidiano. . . . .	63
Figura 25 – No ponto $p$ a curvatura Gaussiana é positiva. . . . .	63
Figura 26 – Representação da curva $\alpha$ . . . . .	71
Figura 27 – Superfície mínima de Henneberg vista de dois ângulos. . . . .	84
Figura 28 – Superfície Costa. . . . .	86
Figura 29 – Escultura de gelo da Superfície Costa. . . . .	86
Figura 30 – Superfície de Jorge-Meeks para o caso $n=2$ . . . . .	87

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	Superfície Regulares no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	12
2.1	Superfícies Regulares . . . . .	12
2.2	Mudança de parâmetro . . . . .	22
2.3	Funções diferenciáveis sobre superfícies . . . . .	24
2.4	Aplicações diferenciáveis entre superfícies . . . . .	26
2.5	Plano tangente e diferencial de uma aplicação . . . . .	28
3	Primeira forma fundamental, aplicação de Gauss e segunda forma fundamental . . . . .	32
3.1	Primeira forma fundamental . . . . .	32
3.2	Aplicação normal de Gauss . . . . .	36
3.3	Segunda forma fundamental . . . . .	39
4	Superfícies mínimas . . . . .	54
4.1	Noção intuitiva de superfície mínima . . . . .	54
5	Representação de Weierstrass para superfícies mínimas . . . . .	64
5.1	Um pouco de variáveis complexas . . . . .	64
5.2	A representação de Weierstrass . . . . .	68
6	Superfícies Costa e Jorge-Meeks: Um pouco da história. . . . .	85
6.1	Superfície Costa . . . . .	85
6.2	Superfície de Jorge-Meeks . . . . .	87
7	CONCLUSÃO . . . . .	88
	REFERÊNCIAS . . . . .	89

## 1 INTRODUÇÃO

Em geometria diferencial, um dos assuntos mais estudados são problemas relacionados à superfícies mínimas, este fato não é recente. Tal interesse surgiu no século XVIII com Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), que propôs em 1760 o seguinte problema: Dado uma curva fechada  $C$  (sem auto interseções) qual superfície com  $C$  como bordo tem área mínima? Bem, Lagrange propôs tal problema como uma “necessidade” de um método desenvolvido por ele para minimizar certas quantidades, como área, comprimento e energia, este método hoje em dia é conhecido como Cálculo das variações.

Já em 1740, Euler descobriu uma superfície que, para um certo volume, tinha área mínima, que no caso era a *catenóide*. Desde então foi se desenvolvendo o estudo relacionado a superfícies que minimizassem áreas. Ainda no século XVIII, o matemático francês J. B. M. C. Meusnier de la Place (1754 - 1793) descobriu mais duas superfícies mínimas além do plano, já descoberto por Lagrange, a *helicóide* e o *catenóide* como havia previsto Euler. Posteriormente o matemático alemão Heinrich Ferdinand Scherk (1798 - 1885) descobriu mais uma superfície mínima a *superfície de Scherk*. Por muito tempo ficaram escassos os exemplos de superfícies mínimas, até então apenas o *plano*, *catenóide* e a *helicóide*, pois superfícies mínimas não era algo simples de se obter, só no século XIX o físico belga J. A. F. Plateau (1801 - 1883) começou a conduzir suas pesquisas com bolhas de sabão para obter superfícies mínimas e com isso o problema já conhecido por Euler e Lagrange ficou conhecido como *problema de Plateau* que, sucintamente, consiste em mergulhar um contorno, digamos feito de arame, em um recipiente com água e sabão, de tal modo que ao se retirar o contorno do recipiente, tenha-se formado uma superfície, que por motivos físicos é a superfície de menor área que pode ser formado para tal contorno. O estudo de superfícies mínimas ainda teve colaboração brasileira, por exemplo, em 1982 o matemático Celso José da Costa descobriu uma nova superfície mínima denominada *superfície Costa*. A descoberta feita pelo brasileiro se deu através dos estudos do matemático alemão Karl Weierstrass (1815 - 1897), mais precisamente, o que conhecemos na geometria diferencial por *representação de Weierstrass*, objeto de estudo deste trabalho. Os estudos feitos por Weierstrass utiliza cálculo com variáveis complexas para descrever todas as superfícies mínimas, diminuindo os problemas que se tinham para encontrar tais superfícies. E com isso, abordaremos alguns conceitos de superfícies mínimas e então obter a representação de Weierstrass que possibilita encontrar todas as superfícies mínimas.

A importância dos estudos de superfícies mínimas podem ser vista no nosso próprio cotidiano, pois muitas embalagens de bebidas, alimentos, por exemplo, utilizam o conceito de superfícies mínimas, isto é, para minimizar o custo da produção de recipientes para armazenamento de produtos, e com isso, as pessoas podem comprar tais produtos por um preço mais baixo, devido aos estudos feitos em geometria diferencial, mais especificamente, em superfícies mínimas.

## 2 Superfície Regulares no $\mathbb{R}^3$

Trataremos, inicialmente, de alguns conceitos e definições de superfícies no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , *a priori*, podemos nos indagar: O que é uma superfície? Esta parece uma pergunta simples para um aluno de graduação, pois logo se pensa que a resposta é simplesmente o gráfico de uma função no espaço, e esta resposta está errada, pois toda imagem de uma função de duas variáveis  $f(x, y)$  é uma superfície, mas a recíproca nem sempre é verdadeira, isto é, nem toda superfície é gráfico de uma função. Muitas vezes só podemos representar uma superfície por uma parametrização, que não necessariamente é uma função.

Poderíamos pensar também na superfície como um conjunto de pontos, esta me parece uma resposta mais próxima do correto. De todo modo, trataremos apenas das superfícies regulares, ou seja, que podem ser vistas como a união de inúmeros gráficos de funções, sem pontas, arestas ou auto-interseções, deste modo poderemos trabalhar sem se preocupar com inconveniências.

### 2.1 Superfícies Regulares

**Definição 2.1** *Seja  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , dizemos que  $S$  é regular se para todo  $p \in S$  existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  de um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  tal que as três seguintes condições são satisfeitas:*

1.  $X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ .
2.  $X$  é um homeomorfismo.
3. Para todo ponto  $q \in U$ , a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

A primeira condição significa que se escrevermos

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

as funções  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em  $U$ . A segunda condição significa que, como  $X$  é contínua, por 1, então  $X$  tem inversa  $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que é contínua.

Com isso, diremos que  $u$  e  $v$  são parâmetros da superfície, e o subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  obtido pela imagem de  $X$  é denominado traço de  $X$ , onde  $X$  representa uma parametrização ou um sistema de coordenadas numa vizinhança de  $p$ . A vizinhança  $V \cap S$  de  $p$  em  $S$  é chamado de *vizinhança coordenada*.

A Figura 1 mostra um pequeno esboço geométrico de como se comporta a aplicação  $X$ . Já que mencionamos na condição 3, o fato da diferencial ser injetiva, uma

vez que ela é uma aplicação linear, convém mencionarmos o que ela significa em nossos estudos.

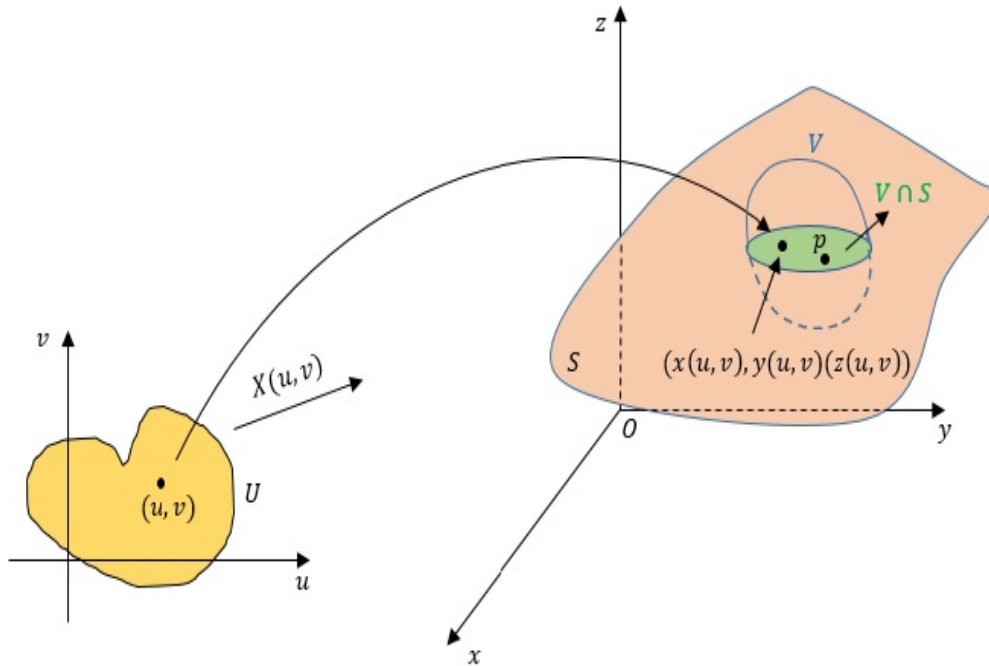


Figura 1: Representação da aplicação  $X : U \rightarrow S \cap V$ .

Fonte: Autor, 2018.

**Definição 2.2** A diferencial de uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  num ponto  $q$  ao longo do vetor  $w \in \mathbb{R}^2$  é dado por

$$dF_q(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(q + tw) - F(q)}{t},$$

quando este limite existir.

Sendo  $\{e_1, e_2\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^2$  e  $\{f_1, f_2, f_3\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^3$ , e  $q = (u_0, v_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$ , podemos calcular a diferencial de  $q$  nas direções  $e_1$  e  $e_2$ . Assim,

$$dF_q(e_1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(q + te_1) - F(q)}{t}.$$

Como  $e_1 = (1, 0)$  e  $q = (u_0, v_0)$  obtemos

$$\begin{aligned} dF_q(e_1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F((u_0, v_0) + t(1, 0)) - F(u_0, v_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u_0 + t, v_0) - F(u_0, v_0)}{t} = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$dF_q(e_2) = \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Como  $X$  é uma aplicação de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , temos que

$$dX_q(e_1) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right) = \frac{\partial X}{\partial u}(q),$$

$$dX_q(e_2) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right) = \frac{\partial X}{\partial v}(q).$$

Sendo  $q = (u_0, v_0)$ , temos que o vetor  $e_1$  é tangente a curva  $u \rightarrow (u, v_0)$ , cuja imagem por  $X$  é chamada de *curva coordenada*  $v = v_0$ :

$$X(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Além disso, essa curva tem como vetor tangente em  $X(q)$  o vetor  $\frac{\partial X}{\partial u}$ . Analogamente, o vetor  $e_2$  é tangente a curva  $v \rightarrow (u_0, v)$  que tem como imagem por  $X$  a curva:

$$X(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)).$$

E no ponto  $X(q)$  esta última curva tem como vetor tangente  $\frac{\partial X}{\partial v}$ , conforme mostrado na Figura 2.

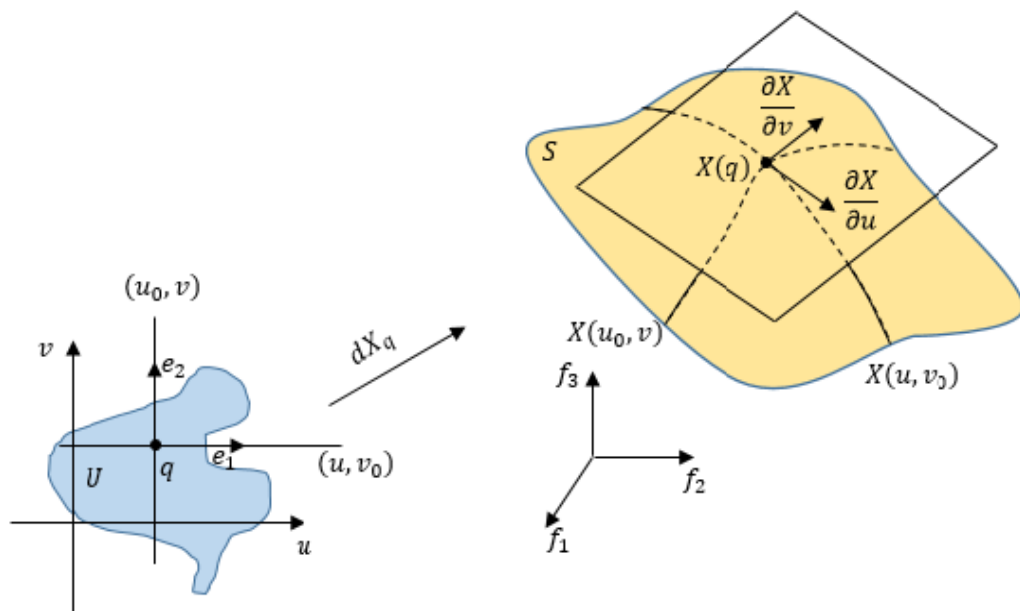


Figura 2: Esboço da aplicação  $dX_q$ .

Fonte: Autor, 2018.

Com isso, podemos representar a matriz associada à aplicação linear  $dX_q$  na base canônica

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}.$$

Essa matriz é chamada de *matriz Jacobiana*. Por conveniência, chamaremos os vetores colunas desta matriz por  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$ , onde

$$X_u(q) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(q), \frac{\partial y}{\partial u}(q), \frac{\partial z}{\partial u}(q) \right)$$

e

$$X_v(q) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(q), \frac{\partial y}{\partial v}(q), \frac{\partial z}{\partial v}(q) \right)$$

A condição 3, da Definição 2.1, nos diz que os vetores  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$  são *linearmente independentes*, uma vez que  $dX_q$  é injetiva, isto é equivalente a dizer que a matriz Jacobiana tem posto 2, ou seja, existe uma submatriz 2x2 da matriz Jacobiana, tal que o seu determinante é diferente de zero. Esses determinantes são chamados de *determinantes Jacobianos*:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Equivalentemente, poderíamos dizer que o produto vetorial entre  $X_u$  e  $X_v$  é diferente de zero

$$X_u \times X_v \neq 0.$$

Para fixar as ideias, tomemos dois exemplos:

**Exemplo 2.1** Mostremos que a esfera unitária centrada na origem é uma superfície regular. Sendo  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  a esfera, tomemos  $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$X_1 = \left( u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right), \quad (u, v) \in U$$

com  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$  e  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$ . É fácil verificar que  $X_1$  é uma aplicação diferenciável em  $U$ , por ter todas as entradas diferenciáveis, além



disso, observe que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1.$$

Logo, verificamos as condições 1 e 3. Para a condição 2, observe que  $X_1$  é bijetiva e sua inversa  $X_1^{-1}$  representa a projeção contínua de  $X_1(U)$  sobre o plano  $xy$ , deste modo,  $X_1^{-1}$  é contínua em  $X_1(U)$ , portanto  $X_1(U)$  representa uma superfície regular.

Observe que  $X_1(U)$  cobre apenas uma parte (aberta) da esfera, acima do plano  $xy$ , para a outra parte, tomemos a parametrização  $X_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$X_2 = \left( u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right), \quad (u, v) \in U$$

com  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$ . De maneira totalmente análoga ao anterior, obtemos que  $X_2(U)$  representa uma superfície regular. Observe ainda que  $X_1(U) \cup X_2(U)$  cobre toda a esfera menos o equador.

$$\{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3; u^2 + v^2 = 1, t = 0\}$$

e portanto precisamos de outras parametrizações que contemplem todos os pontos do equador. Para isso, utilizamos os planos  $xz$  e  $yz$ , tomamos as seguintes parametrizações

$$X_3(u, t) = (u, +\sqrt{1 - (u^2 + t^2)}, t);$$

$$X_4(u, t) = (u, -\sqrt{1 - (u^2 + t^2)}, t);$$

$$X_5(v, t) = (+\sqrt{1 - (v^2 + t^2)}, v, t);$$

$$X_6(v, t) = (-\sqrt{1 - (v^2 + t^2)}, v, t).$$

Com isso, conseguimos cobrir toda a esfera (Figura 3), logo, concluímos que  $S^2$  é uma superfície regular.

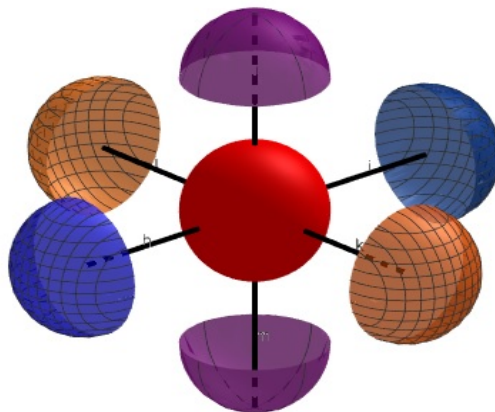


Figura 3: Cobrimos a esfera com seis parametrizações.

Fonte: Autor, 2018.

**Exemplo 2.2** Vamos mostrar que o parabolóide elíptico

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\},$$

com  $a, b \neq 0$ , é uma superfície regular.

De início, observe que a aplicação  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$X(u, v) = \left( u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right)$$

$(u, v) \in U$ , é uma parametrização de  $S$ . É fácil verificar que  $X$  é uma aplicação diferenciável, visto que as entradas são diferenciáveis, e além disso, temos que os vetores  $X_u = \left( 1, 0, \frac{2u}{a^2} \right)$  e  $X_v = \left( 0, 1, \frac{2v}{b^2} \right)$  são L.I para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . De fato, temos que

$$X_u \times X_v = \left( \begin{vmatrix} 0 & \frac{2u}{a^2} \\ 1 & \frac{2v}{b^2} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & \frac{2u}{a^2} \\ 0 & \frac{2v}{b^2} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \left( -\frac{2u}{a^2}, \frac{2v}{b^2}, 1 \right) \neq (0, 0, 0), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, a condição 1 e 3 foram satisfeitas, para a condição 2, observamos que  $X$  é bijetiva, pois dado  $(x, y, z) \in X(U) \subset S$ , se fizermos  $X^{-1}(x, y, z) \rightarrow (u, v)$  vemos que  $u$  e  $v$  estão bem definidos de maneira única por  $x = u$  e  $y = v$ , e além disso,  $X^{-1}$  é a restrição da projeção (contínua) de  $\pi(x, y, z) = (x, y)$  ao conjunto  $X(U)$ , deste modo  $X^{-1}$  é contínua em  $X(U)$ , logo, a condição 2 é verificada. Então, concluímos que  $S$  é uma superfície regular.

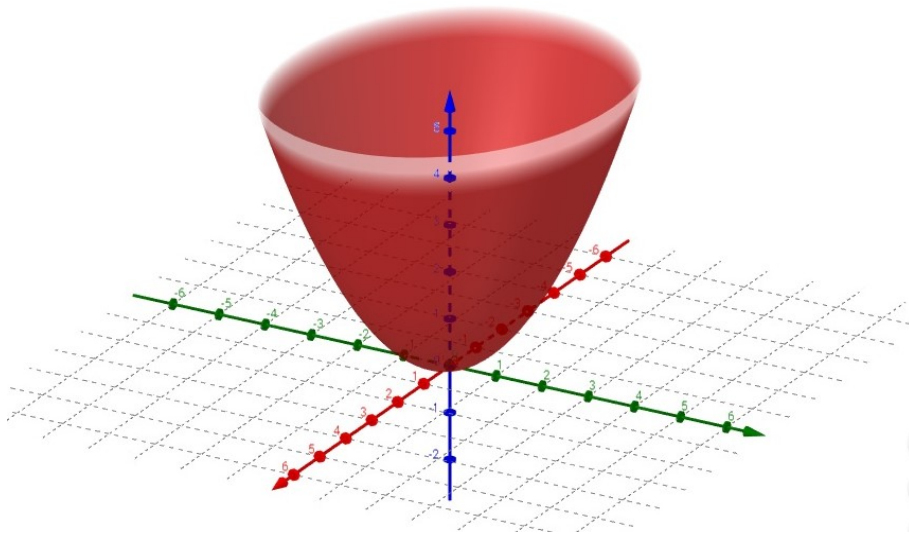


Figura 4: Gráfico do Parabolóide elíptico  $z = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$ .

Fonte: Autor, 2018.

É verdade que a superfície do Exemplo 2.2 poderia ser facilmente identificado

como uma superfície regular segunda a

**Proposição 2.1** *Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , então o gráfico de  $f$ , ou seja, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $(x, y, f(x, y))$  para todo  $(x, y) \in U$ , é uma superfície regular.*

**Demonstração:** Considere a aplicação  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Observe que  $X$  é uma parametrização do gráfico de  $f$ . Como  $f$  é diferenciável, a condição 1 é verificada de imediato. Para a condição 3 basta observar que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Logo,  $dX_q$  é injetiva para todo  $q \in U$ . Como cada ponto  $(x, y, z)$  é a imagem por  $X$  de um único ponto, a saber,  $(x, y) = (u, v) \in U$ , logo,  $X$  é bijetiva, e ainda observe que  $X^{-1}$  é a restrição ao gráfico de  $f$  da projeção, contínua, de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$ , portanto  $X^{-1}$  é contínua, satisfazendo a condição 2. ■

Não é difícil perceber que a verificação da regularidade de uma superfície pela Definição 2.1, as vezes pode ser bem complicado, e portanto, mostraremos resultados que ajudam na identificação, de forma mais simples, se uma superfície é regular ou não, para tanto, precisamos definir alguns conceitos.

**Definição 2.3** *Dada uma aplicação diferenciável  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida em um conjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , dizemos que  $p \in U$  é um ponto crítico (ou singular) de  $F$  se a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não é uma aplicação sobrejetiva. A imagem  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de um ponto crítico é chamado um valor crítico de  $F$ . Um ponto de  $\mathbb{R}^m$  que não é um valor crítico é chamado valor regular de  $F$ .*

Relembramos que um ponto  $x_0 \in U \subset \mathbb{R}$  é um ponto crítico de  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $f'(x_0) = 0$ , que é equivalente a dizer que  $df_{x_0}$  leva todos os vetores de  $\mathbb{R}$  no vetor nulo. Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, então  $df_p$  aplicada ao vetor  $(1, 0, 0)$ , nos fornece:

$$df_p(1, 0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t(1, 0, 0)) - f(p)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(p) = f_x$$

Assim, concluímos que a matriz associada à  $df_p$  na base canônica do  $\mathbb{R}^3$ , isto é,

$$\{e_1, e_2, e_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

é dada por

$$df_p = (f_x, f_y, f_z).$$

Portanto, dizer que  $df_p$  não é sobrejetiva, é equivalente a dizer que

$$f_x = f_y = f_z = 0.$$

Consequentemente, um ponto  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,  $f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 \neq 0$ , ou seja, não se anulam simultaneamente.

Antes de anunciarmos a nossa próxima Proposição, precisamos conhecer o um importante Teorema.

**Teorema 2.1 (Teorema da função inversa)** . *Seja  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável e suponha que em  $p \in U$  a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo. Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $U$  e uma vizinhança  $W$  de  $F(p)$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F : V \rightarrow W$  tem inversa diferenciável  $F^{-1} : W \rightarrow V$ .*

A demonstração deste Teorema pode ser visto em (CARMO, 2014).

Agora podemos anunciar a

**Proposição 2.2** *Se  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e  $a \in f(U)$  é um valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .*

**Demonstração:** Considere o ponto  $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = a\}$ . Como  $f$  é regular em  $a$ , podemos supor  $f_z \neq 0$  em  $p$ . E com isso, definimos a aplicação  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dado por

$$\varphi(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

Assim, temos a matriz associada a  $d\varphi_p$ , tal que

$$d\varphi_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

Logo, temos que  $\det(d\varphi_p) = f_z \neq 0$ , e com isso, podemos usar o Teorema da função inversa (**Teorema 2.1**) que garante a existência de vizinhança  $V$  de  $p$  e  $W$  de  $\varphi(p)$ , donde  $\varphi : V \rightarrow W$  possui inversa  $\varphi^{-1} : W \rightarrow V$  que é diferenciável (Figura 5). Denotando  $(u, v, t)$  as coordenadas de um ponto no  $\mathbb{R}^3$ , temos que as funções coordenadas de  $\varphi^{-1}$ , isto é,

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v, t), \quad (u, v, t) \in W,$$

são diferenciáveis. E tomando  $t = a$ , ou seja,  $z = g(u, v, a) = h(x, y)$ , temos que  $z$  é uma

função diferenciável definida na projeção de  $V$  sobre o plano  $xy$ , e além disso, temos que

$$\varphi(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u, v, t); t = a\},$$

donde concluímos que o gráfico de  $h$  é  $f^{-1}(a) \cap V$ . E pela Proposição 2.1,  $f^{-1}(a) \cap V$  é uma vizinhança coordenada de  $p$ , e conseqüentemente, todo ponto  $p \in f^{-1}(a)$  pode ser coberto por uma vizinhança coordenada, e como tomamos  $p$  arbitrário, podemos concluir que  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular. ■

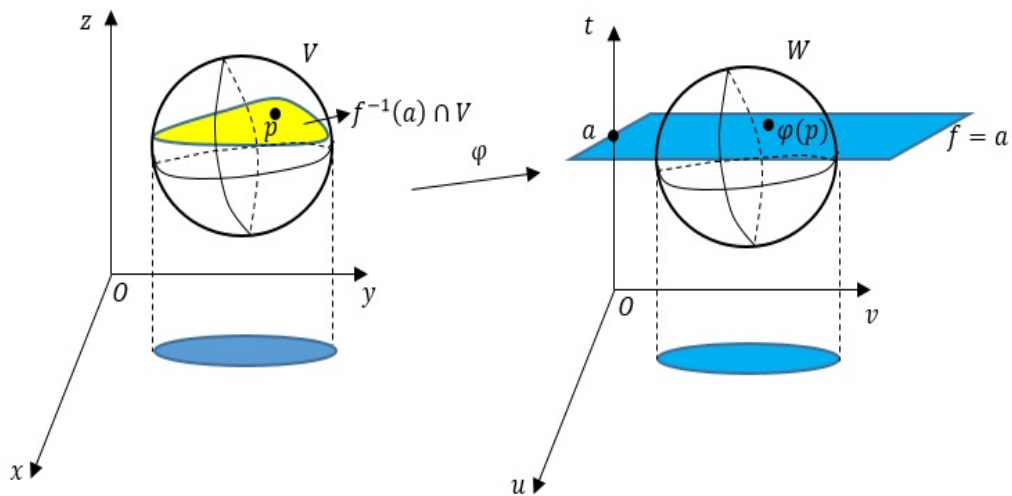


Figura 5:  $\varphi$  leva os valores de  $f^{-1}(a)$  no plano  $t = a$ .

Fonte: Autor, 2018.

Para fixar as ideias, vejamos um exemplo

**Exemplo 2.3** *O elipsóide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é uma superfície regular. Basta observar que, considerando  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ , o elipsóide nada mais é que, o conjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0\}$$

além do mais

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \quad f_y = \frac{2y}{b^2}, \quad f_z = \frac{2z}{c^2}$$

só se anulam simultaneamente no ponto  $(0, 0, 0)$  que não pertence a  $f^{-1}(0)$ . Logo, 0 é um valor regular de  $f$ , e portanto, o elipsóide é uma superfície regular. Observe ainda que se  $a = b = c = 1$  vemos novamente a regularidade da esfera.

Essencialmente, a Proposição 2.2 nos garante que quando pudermos ver uma superfície como uma curva de nível de uma função, então, mesmo que localmente, ela

é uma superfície regular, vale ressaltar ainda que, a mesma Proposição é facilmente verificada a partir do Teorema da função implícita, que é uma consequência do Teorema 2.1.

Na Proposição 2.1, vimos que o gráfico de uma função diferenciável é uma superfície regular, mas podemos nos perguntar se a recíproca é verdadeira, ou seja, se toda superfície regular representa o gráfico de uma função. Pois bem, a Proposição a seguir nos garante que, localmente, a recíproca é verdadeira.

**Proposição 2.3** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular em  $p \in S$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $S$  tal que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas:  $z = f(x, y)$ ,  $y = g(x, z)$ ,  $x = h(y, z)$ .*

**Demonstração:** Considere  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  em  $p$ , tal que  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in U$ . Como  $S$  é regular em  $p$ , um dos determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)},$$

não se anula em  $q = X^{-1}(p)$ . Suponha sem perda de generalidade que  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ . Com isso, considere  $\pi$  como sendo a projeção de  $S$  em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja,  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ , e com isso, faça a composição  $\pi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , logo, podemos aplicar o Teorema da função inversa em  $\pi \circ X(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ , pois  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ , com isso, garantimos a existência de vizinhanças  $R$  de  $q$  e  $W$  de  $\pi \circ X(q)$ . Neste caso, observe que  $\pi \circ X$  deve aplicar difeomorficamente  $R$  sobre  $W$  (Figura 6). Deste modo,  $\pi$  restrita a  $X(R) = V$  é bijetiva e possui inversa diferenciável  $(\pi \circ X)^{-1} : W \rightarrow R$ , e como  $X$  é um homeomorfismo,  $R$  é uma vizinhança de  $p$  em  $S$ . Veja que  $(\pi \circ X)^{-1}$  leva valores de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , e para concluir a demonstração, devemos ter uma aplicação levando em  $S$ . Ora, considere a composição de  $(\pi \circ X)^{-1} : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$  com a função  $\varphi : (u, v) \rightarrow z(u, v)$ , e com isso, fica claro que  $R$  é gráfico de uma função diferenciável  $z = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$ , e para este caso  $\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0\right)$ , concluímos a demonstração. Os outros casos são inteiramente análogos. ■

Vamos utilizar a Proposição 2.3 no seguinte exemplo.

**Exemplo 2.4** *O cone de uma folha  $C$  dado por*

$$(x, y) \rightarrow (x, y, +\sqrt{x^2 + y^2})$$

*não é uma superfície regular. Ora, se fosse  $C$  uma superfície regular, então existiria uma vizinhança  $V$  de  $(0, 0, 0) \in C$  tal que  $V$  seria o gráfico de uma função diferenciável em uma das formas*

$$x = f(y, z), \quad y = g(x, z), \quad z = h(x, y).$$

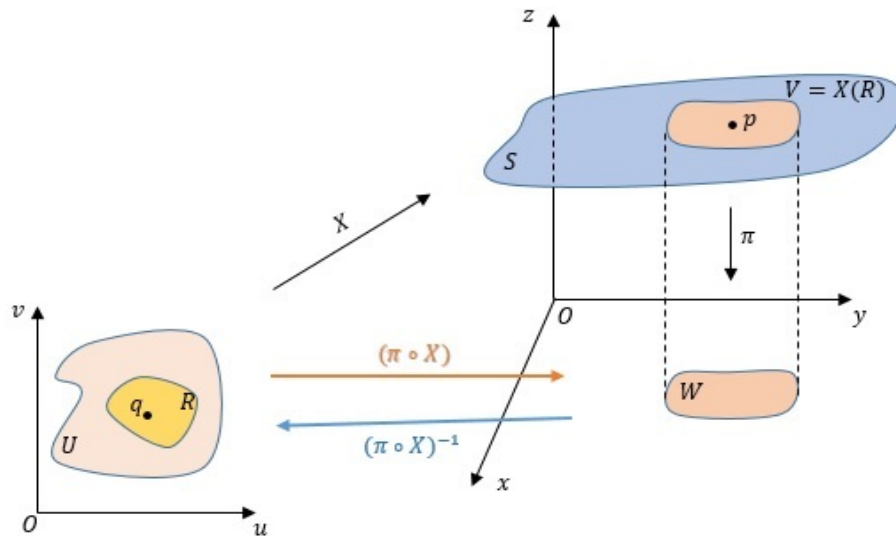


Figura 6: Localmente  $V$  é uma superfície regular.

Fonte: Autor, 2018.

Por outro lado, as projeções do cone  $C$  sobre os planos  $xz$  e  $yz$  são parábolas, que não são injetivas, e portanto as duas primeiras formas não ocorrem. Logo, basta analisar o caso  $z = h(x, y)$ , mas  $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$  não é diferenciável em  $(0, 0, 0)$ , portanto  $C$  não é uma superfície regular.

A próxima Proposição nos diz que se temos uma superfície regular e uma parametrização bijetiva desta superfície, então não precisamos verificar a continuidade de  $X^{-1}$  desde que as condições 1 e 3 da Definição 2.1 sejam satisfeitas.

**Proposição 2.4** *Seja  $p \in S$  um ponto de uma superfície regular  $S$  e seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação com  $p \in X(U)$  tal que as condições 1 e 3 da Definição 2.1 sejam satisfeitas. Suponha que  $X$  seja bijetiva. Então  $X^{-1}$  é contínua.*

A demonstração da Proposição 2.4 é similar a da Proposição 2.3, e pode ser encontrada em (CARMO, 2014).

## 2.2 Mudança de parâmetro

Na seção anterior, vimos que existem várias parametrizações que cobrem toda a superfície. Evidentemente, como pode-se notar, algumas parametrizações são mais simples que outras. Além disso, vale ressaltar que não se pode dizer que uma superfície não é regular porque uma tal parametrização não satisfaz as condições de regularidade de superfície, uma vez que pode existir uma outra parametrização que satisfaz as três condições.

Nesta seção, estudaremos a relação entre diferentes parametrizações de uma

superfície, isto é, sendo  $X(u, v)$  e  $Y(\alpha, \delta)$  duas parametrizações de uma superfície regular  $S$ , veremos como “transformar”  $(u, v)$  em  $(\alpha, \delta)$  e vice-versa. É interessante este assunto pois ele nos dará indícios de que uma superfície independe do sistema de coordenadas que venhamos a escolher.

Antes de começarmos, de fato, o estudo desta seção, precisamos conhecer alguns conceitos básicos.

**Definição 2.4** *Uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua em  $p \in U$  se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que*

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)).$$

Em outras palavras,  $F$  é contínua em  $p$  se pontos próximos de  $p$  possuem imagem por  $F$  suficientemente próximos de  $F(p)$ .

**Proposição 2.5** *Uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua em  $p \in U$  se, e somente se, dada uma vizinhança  $V$  de  $F(p)$  em  $\mathbb{R}^m$  existe uma vizinhança  $W$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $F(W) \subset V$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $F$  seja contínua em  $p \in U$ , logo, existe  $V$  tal que  $B_\varepsilon(F(p)) \subset V$ , uma vez que  $V$  é um conjunto aberto, seja ainda  $W = B_\delta(p)$ , portanto

$$F(W) = F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)) \subset V.$$

Logo provamos que é uma condição necessária.

Suponha agora que existem tais vizinhanças, com isso basta tomar  $V = B_\varepsilon(F(p))$  para algum  $\varepsilon > 0$ , e como, por hipótese, existe uma vizinhança  $W$  de  $p$  com  $F(W) \subset V$ , então existe uma bola  $B_\delta(p) \subset W$  tal que

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\varepsilon(F(p)) \subset V = B_\varepsilon(F(p))$$

com isso, conclui-se a continuidade de  $F$  em  $p$ . ■

Com isso, podemos enunciar a

**Proposição 2.6** *Seja  $p$  um ponto de uma superfície regular  $S$ , e sejam  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  duas parametrizações de  $S$ , tais que  $p \in X(U) \cap Y(V) = W$ . Então a mudança de coordenada  $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$  (Figura 7) é um difeomorfismo; isto é,  $h$  é diferenciável e tem uma inversa diferenciável  $h^{-1}$ .*

**Demonstração:** Uma vez que, pode-se mostrar, a composição de homeomorfismo é um homeomorfismo, temos que  $h = X^{-1} \circ Y$  é um homeomorfismo. Devemos então mostrar a diferenciabilidade de  $h$ , e também de sua inversa. Como  $X$  e  $Y$  são parametrizações de  $S$ , temos que

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$



$$Y(\alpha, \beta) = (x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), z(\alpha, \beta)).$$

Seja  $r \in Y^{-1}(W)$  e defina  $q = h(r)$ , como a superfície é regular, podemos supor, sem perda de generalidade que,  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ . Com isso, defina a aplicação  $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t). \quad (u, v) \in U, \quad t \in \mathbb{R}$$

Podemos visualizar geometricamente esta aplicação, uma vez que estamos tomando pontos num plano paralelo ao plano que contém  $U$ , e tendo como imagem pontos que estão no plano paralelo aos pontos de  $X(U)$ , ou seja, estamos aplicando um cilindro vertical em outro cilindro vertical (Figura 7). Observe ainda que  $F|_{U \times 0} = X$ . Calculando a diferencial de  $F$  em  $q$ , obtemos

$$dF_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,  $\det(dF_q) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ , por hipótese. E com isso podemos aplicar o Teorema da função inversa, que garante a existência de uma vizinhança  $R$  de  $X(q)$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F^{-1}$  existe e é diferenciável em  $R$ .

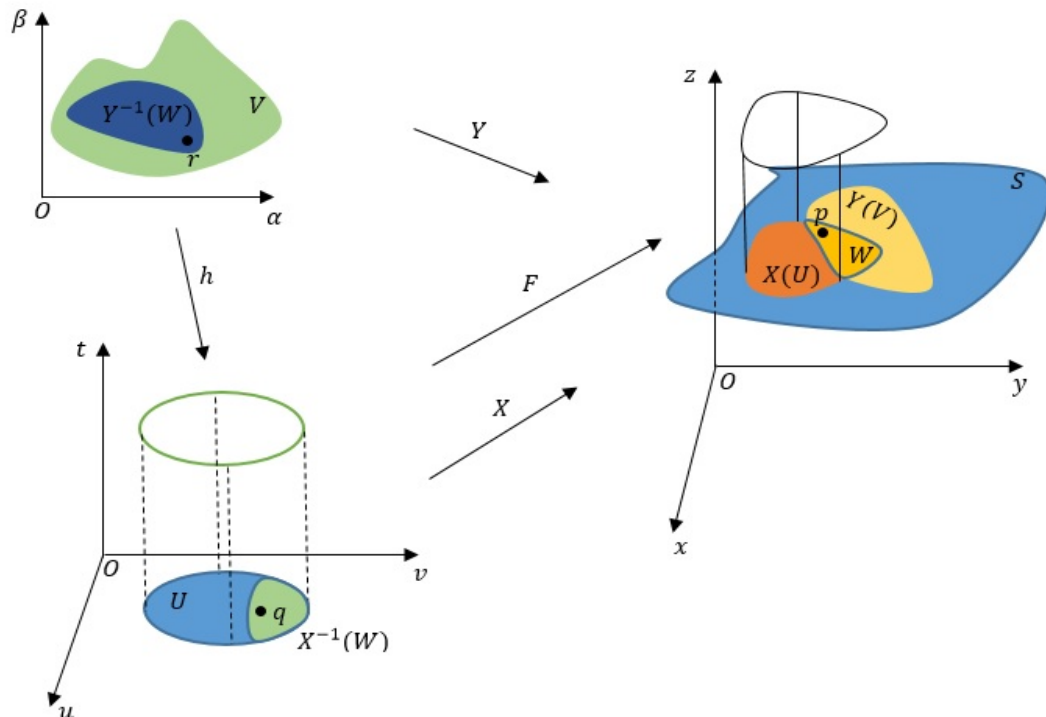


Figura 7: Representação geométrica da Proposição 2.6.

Fonte: Autor, 2018.

Como  $Y$  é contínua, pela Proposição 2.5, existe uma vizinhança  $Q$  de  $r$  em  $V$ , tal que  $Y(Q) \subset R$ . Temos ainda que a restrição de  $h$  à  $Q$ , isto é,  $h|_Q = F^{-1} \circ Y|_Q$  é a composição de aplicações diferenciáveis, logo (pode-se mostrar)  $h|_Q$  é diferenciável em  $r$ , e como tomamos  $r$  arbitrário, concluímos que  $h$  é diferenciável em  $Y^{-1}(W)$ .

Analogamente, pode-se mostrar que a aplicação  $h^{-1}$  é diferenciável, logo,  $h$  é um difeomorfismo. ■

### 2.3 Funções diferenciáveis sobre superfícies

Nesta seção veremos condições para a diferenciabilidade de funções sobre superfícies no  $\mathbb{R}^3$ . Para tanto, comecemos com uma Definição.

**Definição 2.5** *Seja  $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, definida em um subconjunto aberto  $V$  de uma superfície regular  $S$ . Então  $f$  é diferenciável em  $p \in V$  se, para alguma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $p \in X(U) \subset V$ , a composição  $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $X^{-1}(p)$ . A função  $f$  é diferenciável em  $V$  se é diferenciável em todos os pontos de  $V$ .*

Observe que a diferenciabilidade de  $f$  independe da parametrização. Mais claramente, seja  $Y$  outra parametrização de  $S$ , então pela Proposição 2.6 se existe  $h = X^{-1} \circ Y$ . Logo  $f \circ Y = f \circ X \circ h$  que também é diferenciável, uma vez que é composta de diferenciáveis.

Com isso em mente, vejamos um exemplo.

**Exemplo 2.5** *Seja  $f$  a função distância de um ponto  $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ , e um ponto  $p$  de uma superfície  $S$ , isto é*

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto |p - p_0|.$$

Observe que sendo  $p = (x, y, z)$ , temos  $|p - p_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ . Veja que  $f$  não é diferenciável em  $p_0$ , por outro lado, se considerarmos o quadrado da distância, então  $f$  se torna diferenciável  $f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ . Seja  $S$  o cone circular, e  $X = (\cos u, \sin u, v)$ ,  $u \in (0, 2\pi)$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , uma parametrização do cone. Considere o ponto  $p_0 = (0, 1, 1) \in S$ , temos que

$$\begin{aligned} f \circ X &= (\cos u - 0)^2 + (\sin u - 1)^2 + (v - 1)^2 \\ &= \cos^2 u + \sin^2 u + 1 - 2\sin u + v^2 + 1 - 2v. \\ &= 3 - 2\sin u + v^2 - 2v \end{aligned}$$

Veja que  $f \circ X$  é diferenciável para qualquer  $(u, v)$  do domínio de  $X$ .

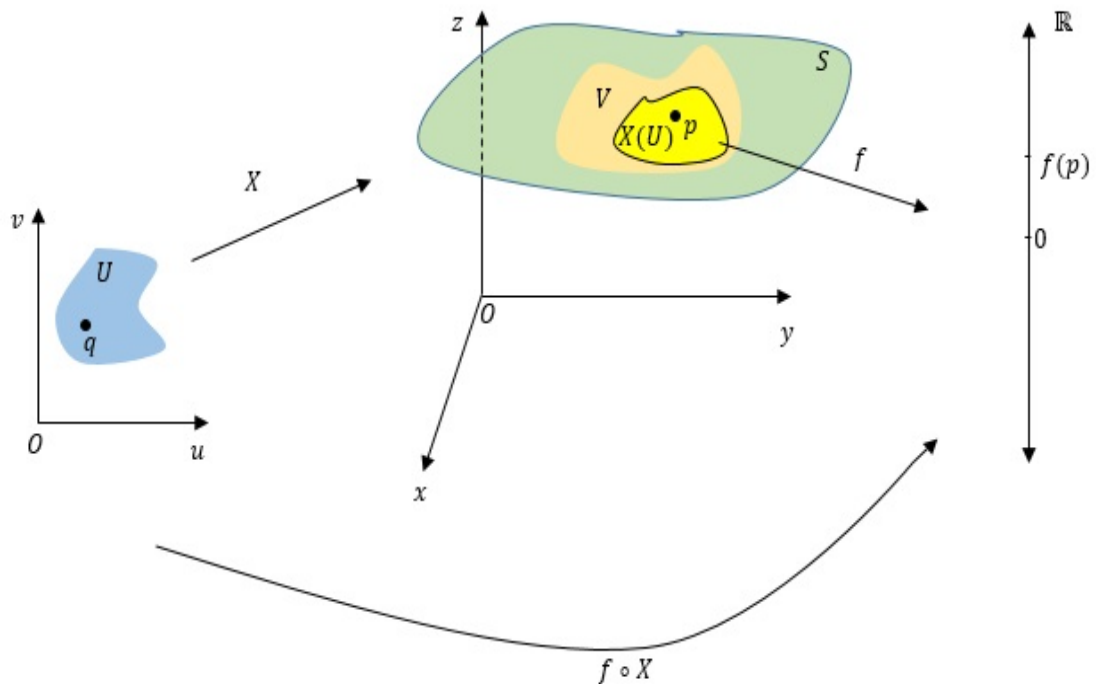


Figura 8:  $f$  é diferenciável em  $p$  se  $f \circ X$  for diferenciável em  $X^{-1}(p) = q$ .  
 Fonte: Autor, 2018.

## 2.4 Aplicações diferenciáveis entre superfícies

Anteriormente, falamos sobre a diferenciabilidade de uma função sobre uma superfície. Agora falaremos um pouco sobre a diferenciabilidade entre superfícies.

**Definição 2.6** Diremos que uma aplicação contínua  $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ , de um conjunto aberto  $V_1$  de uma superfície regular  $S_1$  em uma superfície regular  $S_2$ , é diferenciável em  $p \in V_1$ , se dadas parametrizações

$$X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1, \quad X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2,$$

com  $p \in X_1(U)$  e  $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U)$ , a aplicação

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

é diferenciável em  $q = X_1^{-1}(p)$  (Figura 9).

Em nossa Definição de superfície, não a enunciamos como uma superfície parametrizada, embora este seja o mais comum em alguns livros, pois uma parametrização pode representar apenas aspectos locais para a teoria e não global, de todo modo vamos definir o conceito de uma superfície parametrizada.

**Definição 2.7** Uma superfície parametrizada  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $X$  de um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto  $X(U) \subset \mathbb{R}^3$  é chamado o

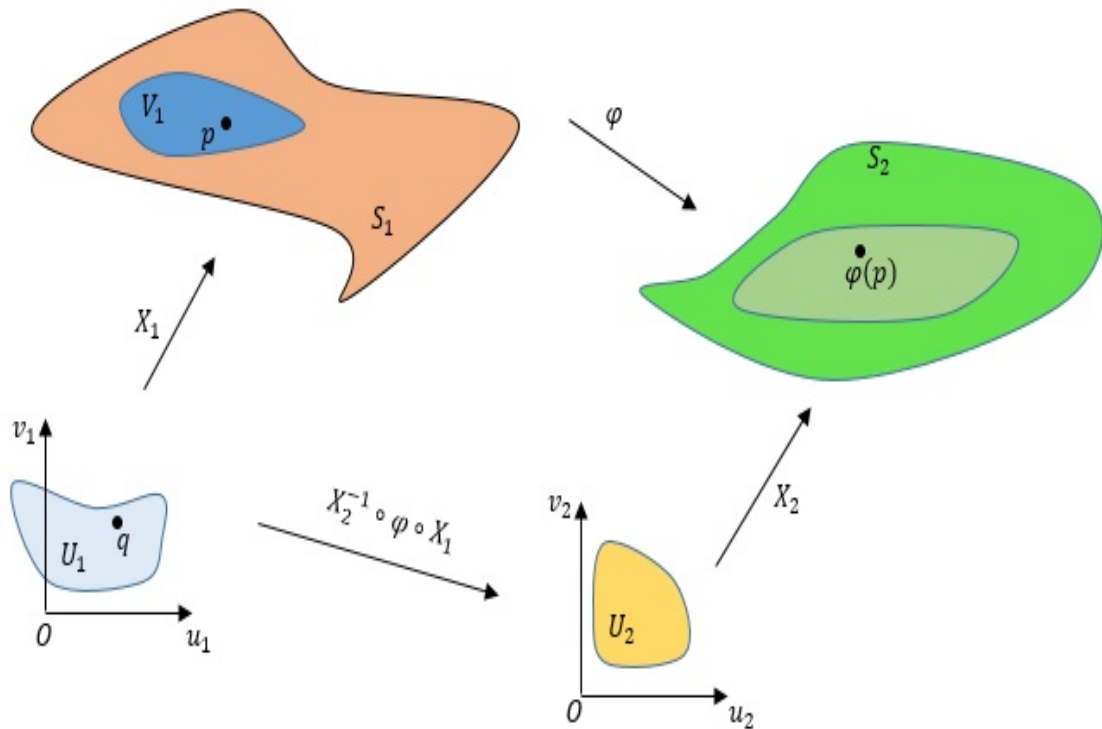


Figura 9: Representação da diferenciabilidade entre superfícies.  
Fonte: Autor, 2018.

traço de  $X$ . A superfície  $X$  é regular se a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva para todo  $q \in U$ , isto equivale a dizer que os vetores  $\frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial v}$  são linearmente independentes para todo  $q \in U$ . Um ponto  $p \in U$  onde  $dX_p$  não é injetiva é chamado um ponto singular de  $X$ .

Veremos que as propriedades e conceitos de geometria diferencial podem ser estendidas as superfícies parametrizadas regulares, como mostra a

**Proposição 2.7** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície regular parametrizada e seja  $q \in U$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $q$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $X(V) \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular.*

**Demonstração:** Podemos escrever  $X$  como

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Como  $X$  é uma superfície regular, podemos supor que  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ . Então defina a aplicação  $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}$$

Então observe que

$$dF_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto  $\det(dF_q) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$ . Deste modo podemos aplicar o Teorema da função inversa, que garante a existência de vizinhanças  $W_1$  de  $q$  e  $W_2$  de  $F(q)$ , tais que  $F : W_1 \rightarrow W_2$  é um difeomorfismo. Logo, considere  $V = W_1 \cap U$  e observe que a restrição  $F|_V = X|_V$ . Assim,  $X(V)$  é difeomorfo a  $V$  e, portanto uma superfície regular, como queríamos. ■

## 2.5 Plano tangente e diferencial de uma aplicação

Antes de falarmos em plano tangente, é conveniente ressaltar o que é um vetor tangente a uma superfície em um ponto  $p$ . De fato, seja  $S$  uma superfície e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  uma curva contida em  $S$  que passa por  $p \in S$ , podemos supor,  $\alpha(0) = p$ , então o vetor  $\alpha'(0)$  é o vetor tangente a  $S$  no ponto  $p \in S$ . Observe que o vetor tangente, pode ser visto como o vetor velocidade de uma curva que passa por  $p \in S$ .

**Definição 2.8** *O plano tangente a uma superfície  $S$  em  $p$ , é o plano que contém todos os vetores tangentes a  $S$  em  $p \in S$ , denotado por  $T_p S$ .*

**Proposição 2.8** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície  $S$  e seja  $q \in U$ , tal que  $X(q) = p$ . O subespaço vetorial de dimensão 2,*

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3,$$

*Coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $p$*

**Demonstração:** Devemos mostrar que  $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ . Seja  $v \in T_p S$ , logo existe  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Defina também a curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , tal que  $\gamma(0) = q$  e  $\gamma'(0) = w$ , de modo que

$$\alpha = X \circ \gamma.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \gamma)(0) = dX_{\gamma(0)}\gamma'(0) \\ \therefore \alpha'(0) &= v = dX_q w \in dX_q(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Isso mostra que  $T_p S \subset dX_q(\mathbb{R}^2)$  (Figura 10). Considere agora  $v = dX_q(w)$  e  $\gamma(t) = q + tw$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  uma curva em  $U$ , com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = w$ . Tome  $\alpha = X \circ \gamma$ , deste modo

$$\alpha(0) = X \circ \gamma(0) = X(p) = q$$

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \gamma)(0) = dX_{\gamma(0)}\gamma'(0) \\ &= dX_q w = v \in T_p S. \end{aligned}$$

Portanto  $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset T_p S \subset \mathbb{R}^3$ . Com isto, concluímos que  $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ . ■

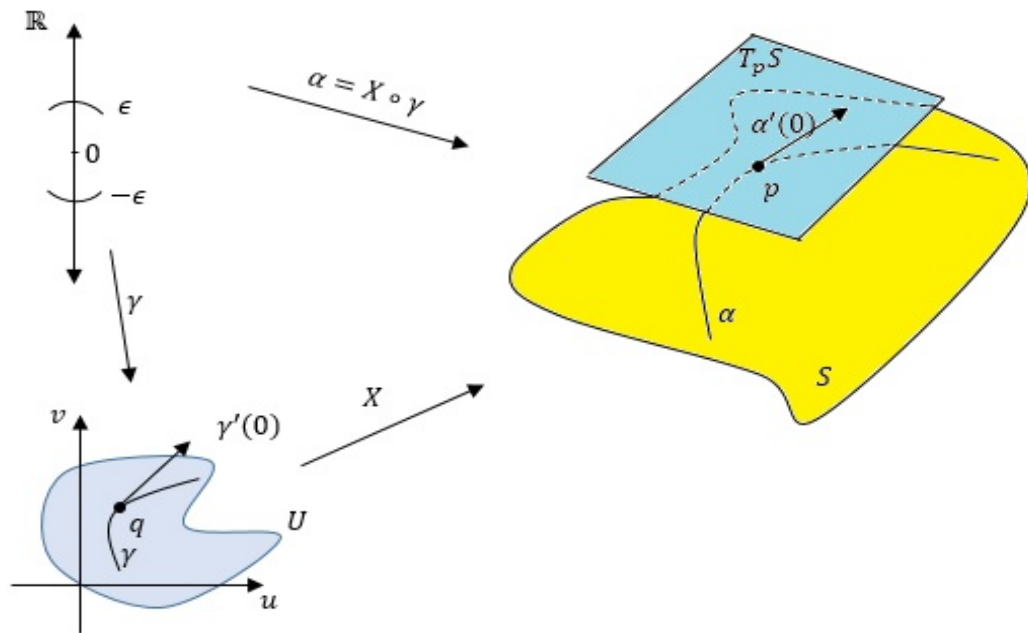


Figura 10: O plano tangente  $T_p S$  contém todos os vetores tangentes a  $S$  em  $p$ .  
Fonte: Autor, 2018.

Pela Proposição 2.8, o plano tangente em  $p \in S$ , independe da parametrização  $X$ , embora a parametrização determine uma base para o plano tangente, chamada *base associada a  $X$*  dada por

$$\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q) \right\}.$$

Muitas vezes denotaremos  $\frac{\partial X}{\partial u}(q) = X_u$  e  $\frac{\partial X}{\partial v}(q) = X_v$  para facilitar a notação.

Agora veremos uma Definição para aplicação diferenciável.

**Definição 2.9** *Seja  $S_1$  e  $S_2$  duas superfícies regulares e  $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável no aberto  $V$ . Para cada  $p \in V$  definimos a aplicação linear*

$$d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$$

atuando sobre um vetor  $w \in T_p S_1$  da seguinte forma:

Seja  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ , tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = w$ , então

$$d\varphi_p(w) = \beta'(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(0),$$

onde  $\beta = \varphi \circ \alpha$  e  $\beta(0) = \varphi(p)$  (Figura 11).

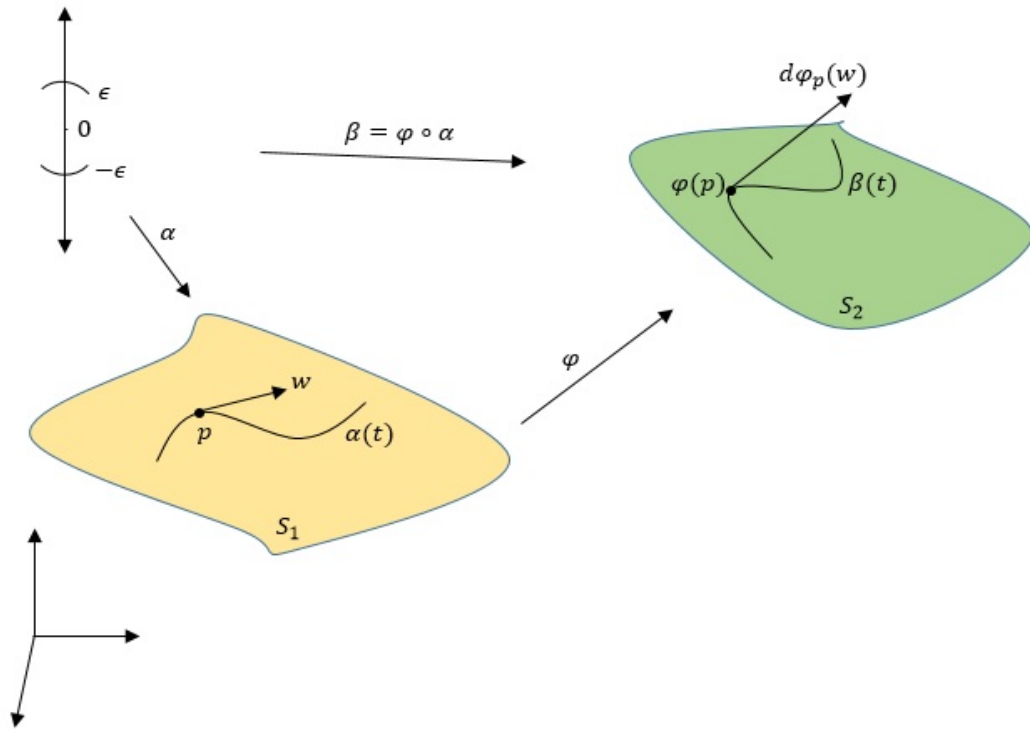


Figura 11: A diferencial  $d\varphi_p$  associa um vetor de  $T_p S_1$  a outro vetor em  $T_{\varphi(p)} S_2$ .

Fonte: Autor, 2018.

A Proposição a seguir mostra que a diferencial independe da parametrização da curva que passa por  $p$ .

**Proposição 2.9** *Da Definição 2.9, dado  $w$ , o vetor  $\beta'(0)$  não depende da escolha de  $\alpha$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$  é linear.*

**Demonstração:** Devemos considerar duas parametrizações de cada superfície, logo, seja  $X = (u, v)$  e  $Y = (r, s)$  parametrizações nas vizinhanças de  $p$  e  $\varphi(p)$ , respectivamente. Vamos supor que  $\varphi$  seja expressa nestas coordenadas por

$$\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$$

e que  $\alpha$  seja expressa por

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

e como  $\beta = \varphi \circ \alpha$ , temos que

$$\beta(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t))).$$

A expressão de  $\beta'(0)$  na base  $\{Y_r, Y_s\}$  é:

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} v'(0) \right).$$

Assim vemos que  $\beta'(0)$  independe de  $\alpha$ , e sim da aplicação  $\varphi$  e das coordenadas  $(u'(0), v'(0))$  de  $w$  na base  $\{X_u, X_v\}$ . Além disso, observe que

$$\beta'(0) = d\varphi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix},$$

o que mostra que  $d\varphi_p$  é uma aplicação linear, cuja matriz associada nas bases  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_p S_1$  e  $\{Y_r, Y_s\}$  de  $T_{\varphi(p)} S_2$  é justamente a que encontramos acima. ■

Veja que a Definição de diferencial aqui apresentada é referente a uma aplicação, mas podemos, também, definir a diferencial de uma função diferenciável  $f : U \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  em  $p \in U$ , como a aplicação  $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  que funciona como a diferencial de uma aplicação sobre um vetor de  $T_p S$ .



### 3 Primeira forma fundamental, aplicação de Gauss e segunda forma fundamental

Nesta seção, serão apresentados conceitos essenciais da geometria diferencial, uma vez que a partir deste contexto, podemos fazer cálculos sobre a superfície para descobirmos características intrínsecas da mesma, como o quanto a superfície deixa de ser plana numa determinada vizinhança de um ponto.

#### 3.1 Primeira forma fundamental

Tratamos agora de uma das mais importantes estruturas geométricas de uma superfície, que é a *primeira forma fundamental*, que nos possibilita fazer medidas sobre a superfície, tais como área e comprimento de curvas, entre outros. Embora importante, ela é de Definição bem simples, como mostra a

**Definição 3.1** A forma quadrática  $I_p$  em  $T_p S$  definida por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0,$$

é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  em  $p \in S$ .

O símbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ . É conveniente expressar a primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  associada a uma parametrização  $X(u, v)$  em  $p$ . Seja  $S$  uma superfície regular, e  $p$  um ponto de  $S$ , então, considere uma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  dada por

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Com  $\alpha(0) = p = X(u_0, v_0)$ . Com isso, temos o vetor tangente,  $\alpha'(0)$ , a  $S$  em  $p$ . Dado que  $\alpha'(0) = u'(0)X_u + v'(0)X_v$ , calculemos a primeira formula fundamental aplicada a esse vetor:

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p (u'v') + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2. \end{aligned}$$

Lembre que estamos calculando em  $t = 0$ , com isso, podemos denotar

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle_p,$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle_p,$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle_p.$$

E portanto, obtemos

$$I_p(\alpha'(0)) = E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2.$$

Onde  $E, F, G$  são os chamados coeficientes da primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_pS$ .

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 3.1** *O cilindro reto sobre o círculo  $x^2 + y^2 = 1$  admite a parametrização  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde*

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < u < 2\pi, \quad v \in \mathbb{R}\}.$$

*Para calcularmos a primeira forma fundamental, devemos calcular  $X_u$  e  $X_v$ , donde obtemos que*

$$X_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad X_v = (0, 0, 1)$$

*E com isso, obtemos que  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$*

Agora vamos ver a utilidade da primeira forma fundamental para medir o comprimento de uma curva sobre uma superfície regular. Seja  $S$ , uma superfície regular e  $X : U \rightarrow S$  uma parametrização (diferenciável) de  $S$ . Tomando a curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  e suponha que  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ , isto equivale a dizer que

$$\gamma = X \circ \alpha, \quad \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$$

e desejamos calcular o comprimento de  $\gamma$  de  $t_0$  a  $t$ . Como sabemos, o comprimento de uma curva no  $\mathbb{R}^3$  é dado pela função comprimento, dado por

$$L(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt,$$

mas  $|\gamma'(t)|^2 = I_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ , logo, obtemos

$$L(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{I_{\gamma(t)}(\gamma'(t))} dt,$$

ou ainda, em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, temos

$$L(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2} dt. \quad (1)$$

Agora suponha que  $\alpha$  e  $\beta$  sejam duas curvas em  $S$ , tal que ambas passam pelo mesmo ponto  $p \in S$ , suponha que  $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = p$ , com isso, os vetores  $\alpha'(t_0)$  e  $\beta'(t_0)$  são tangentes a  $S$  em  $p$ . Então o ângulo entre estas curvas em  $p$ , é igual ao ângulo entre

os vetores tangentes, e como sabemos

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

Em particular, o ângulo  $\varphi$  entre as curvas coordenadas a  $S$  em  $p$ , é dado por

$$\cos \varphi = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u| |X_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

já que  $|X_u| = \sqrt{E}$  e  $|X_v| = \sqrt{G}$ , além disso  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a  $S$  em  $p$ . Assim, quando  $\cos \varphi = 0$  e daí  $\varphi = 90^\circ$ . Neste caso dizemos que  $X$  é uma parametrização ortogonal.

**Exemplo 3.2** A esfera  $S^2$  de raio um e centro na origem admite a parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  dada por

$$X(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v),$$

onde  $v$  e  $u$  são os complementos da latitude e longitude, respectivamente. Tal que  $(u, v) \in U = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ . A curva  $\alpha(t) = (\cos v(t), \sin v(t), 0)$  está contida em  $S^2$ , basta notar que apenas fixamos  $u = \frac{\pi}{2}$  e variamos  $v(t) = t$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ . Como

$$X_u = (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0)$$

$$X_v = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v)$$

os coeficientes da primeira forma fundamental nos fornecem

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \sin^2 v = \sin^2 v$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -\sin u \cos u \sin v \cos v + \sin v \cos v \sin u \cos u = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 v = 1.$$

Por (1), Temos que

$$L(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\sin^2 v(u')^2 + (v')^2} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{1} dt = t - t_0.$$

Com isso, o comprimento da curva  $\gamma$  de  $t_0 = 0$  a  $t = 2\pi$  vale  $2\pi$ , como era de se esperar.

Para continuarmos com algumas aplicações métricas da primeira forma fundamental, vamos definir o conceito de área, mas antes, lembremos que o símbolo “ $\times$ ” representa o produto vetorial usual de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 3.2** Seja  $R \subset S$  uma região limitada de uma superfície regular  $S$ , contida em

uma vizinhança coordenada de uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . O número positivo

$$\iint_Q |X_u \times X_v| dudv = A(R), \quad Q = X^{-1}(R)$$

é chamada área de  $R$ .

Uma observação importante é que a integral acima independe da parametrização, para ver isso basta utilizar a teoria de mudança de variável para integrais múltiplas. Também é verdade que a região  $Q \subset \mathbb{R}^2$  deve ser compacta, isto é, fechada e limitada. Observe que

$$|X_u \times X_v| = |X_u||X_v|\text{sen } \theta$$

e

$$\langle X_u, X_v \rangle = |X_u||X_v|\cos \theta$$

Com isso, obtemos que

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2|X_v|^2$$

$$|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2},$$

ou seja, podemos calcular a área de uma região sobre uma superfície regular apenas com os coeficientes da primeira forma fundamental

$$A(R) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (2)$$

**Exemplo 3.3** Calculemos a área da esfera do exemplo anterior, onde

$$Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi\}.$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} A(S^2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\text{sen}^2 v} dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \pi |\text{sen } v| dv \\ &= 2\pi \int_0^\pi \text{sen } v dv \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Observe que poderíamos estender estes cálculos para uma esfera de raio  $r > 0$ , o que nos daria que  $A(S^2(r)) = 4\pi r^2$ .

### 3.2 Aplicação normal de Gauss

De início, suponha que tenhamos uma superfície regular  $S$  descrita pela parametrização

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

e que queremos um vetor normal unitário num ponto  $p$  de  $X(U)$ . Sabemos que os vetores  $X_u$  e  $X_v$  são tangentes a  $p \in S$ , para algum ponto  $(u, v) \in U$ . Lembre ainda que o produto vetorial de dois vetores fornece um terceiro vetor ortogonal aos dois vetores, logo, definimos a aplicação

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(p).$$

como sendo o vetor normal unitário para cada ponto  $p \in X(U)$ .

A aplicação  $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável, e dizemos que  $N$  é *um campo diferenciável de vetores normais unitários em  $V = X(U)$* . Observe que a diferenciabilidade de  $N$  é herdada da parametrização diferenciável  $X$ .

Diremos que uma superfície regular é *orientável* se ela admite um campo diferenciável de vetores unitários definidos em toda a superfície; o campo  $N$  escolhido é chamado *orientação de  $S$* . Com isso podemos definir a aplicação de Gauss.

**Definição 3.3** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$ , assim definida, é chamada a *aplicação de Gauss de  $S$  em  $S^2$*  (Figura 12).

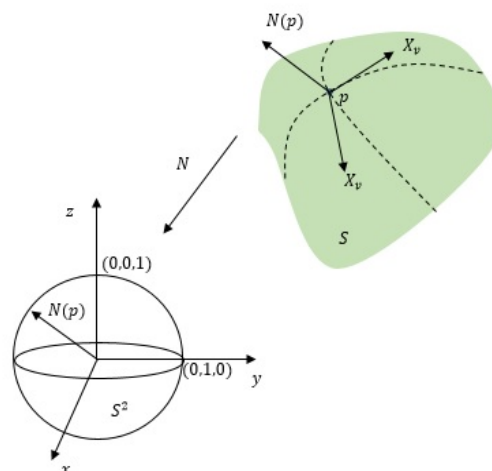


Figura 12: A aplicação de Gauss Toma vetores em  $S$  e leva na esfera  $S^2$ .  
Fonte: Autor, 2018.

Como a aplicação de Gauss é diferenciável, podemos tomar a diferencial  $dN : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$ , mas observando que ambos os planos constituem o mesmo espaço vetorial, diremos apenas que  $dN : T_p S \rightarrow T_p S$  é uma aplicação de  $T_p S$ .

A aplicação  $dN$  agirá da seguinte forma: Considere uma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , tal que  $\alpha(0) = p$ , com isso, fazemos a composição  $N(t) = (N \circ \alpha)(t)$  na esfera  $S^2$ . Isto equivale a restringir os vetores normais dados por  $N$  a curva  $\alpha$ . Calculando a derivada de  $N(t)$  no ponto  $t = 0$ , obtemos o vetor tangente a superfície no ponto  $N(0)$ :

$$N'(0) = \frac{d}{dt} N(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = dN_p(\alpha'(0)),$$

ou seja,  $N'(0)$  é um vetor de  $T_p S$  (Figura 13), e além disso, ele mede a taxa de variação do vetor normal  $N$  restrito a  $\alpha$  em  $t = 0$ . Observe ainda que,  $dN_p$  mede o quanto o vetor normal  $N$  se afasta de  $N(p)$  numa vizinhança de  $p$ , e isto equivale ao quanto a superfície  $S$  se afasta do plano tangente  $T_p S$ , visto que  $N$  é normal a  $T_p S$ . Este papel de  $dN_p$  é equivalente a curvatura de curvas, só que no caso de uma superfície é dado por uma aplicação.

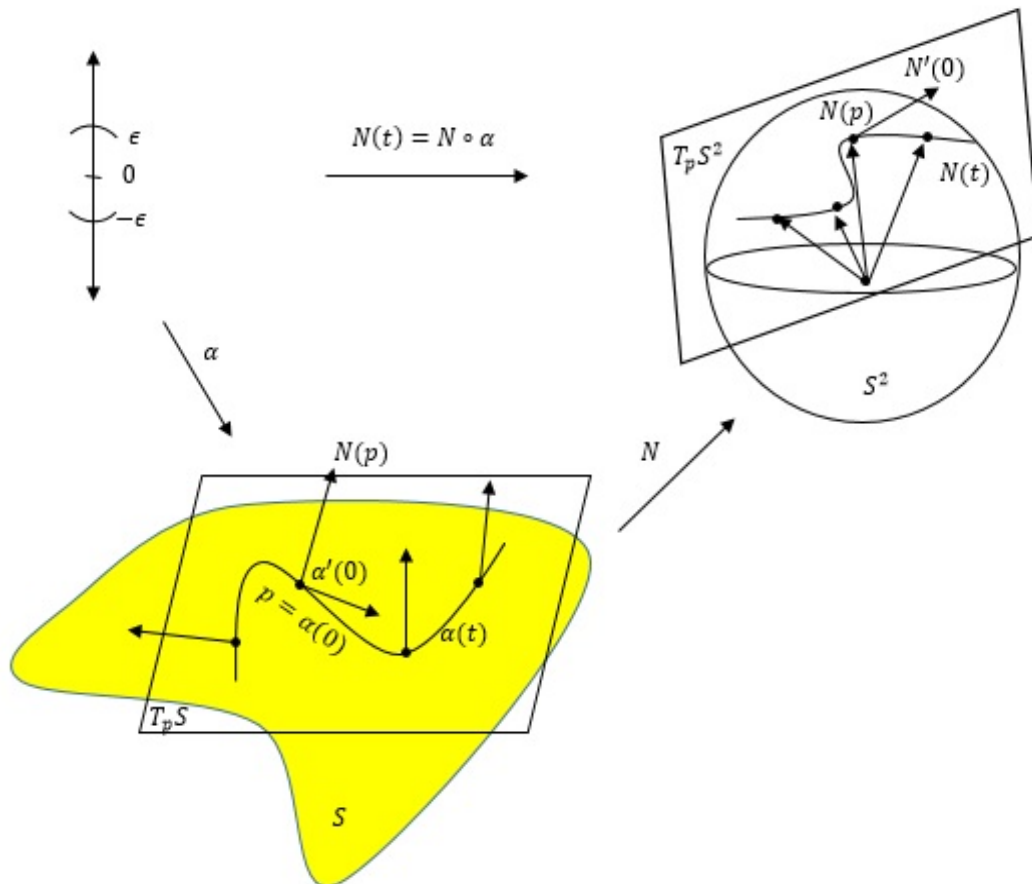


Figura 13:  $N(t)$  descreve uma curva sobre  $S^2$ .

Fonte: Autor, 2018.

**Exemplo 3.4** Considere a esfera de centro na origem e raio um

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  uma curva parametrizada em  $S^2$ , portanto  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  é um vetor tangente a esfera, além disso, observe que

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1.$$

Derivando em relação a  $t$ , obtemos

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0.$$

Portanto

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 0,$$

o que mostra que o vetor posição  $(x, y, z)$  é normal a esfera no ponto  $(x, y, z)$ . Por outro lado, o vetor  $(-x, -y, -z)$  também é normal a esfera no ponto  $(x, y, z)$ . Para os nossos estudos escolheremos  $N = (-x, -y, -z)$  como campo normal da esfera, isto é,  $N$  aponta para o centro da esfera. Observe ainda que se restringirmos  $N$  a  $\gamma$ , com a orientação escolhida, temos que

$$N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t)),$$

isto é,  $N$  é uma função vetorial de  $t$ . Aplicando  $dN$  ao vetor  $(x'(t), y'(t), z'(t))$ , obtemos que

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t)).$$

Ou seja,  $dN_p(v) = -v$  para todo  $p \in S^2$  e para todo  $v \in T_pS$ .

**Proposição 3.1** A diferencial  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

**Demonstração:** Como  $dN_p$  é linear, basta mostrar que ela é auto-adjunta, isto é, devemos mostrar que

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$$

para alguma base  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_pS$ . Para isso, considere  $X(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$ , e  $\{X_u, X_v\}$  a base associada de  $T_pS$ . Seja  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = X(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada de  $S$ , tal que  $\alpha(0) = p$ . Com isso, temos que

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \Big|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0). \end{aligned}$$

Como

$$dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) = N_u u'(0) + N_v v'(0).$$

Temos que

$$dN_p(X_u) = N_u$$

e

$$dN_p(X_v) = N_v.$$

Logo, devemos mostrar apenas que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle$$

e como

$$\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$$

por serem ortogonais, derivamos em relação a  $v$  e  $u$ , respectivamente. Logo, teremos

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle X_{uv}, N \rangle = 0$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle X_{vu}, N \rangle = 0$$

donde obtemos que

$$\langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle,$$

como queríamos. ■

Uma vez que  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  é uma aplicação auto-adjunta, podemos definir a forma quadrática  $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$ , onde  $v$  é um vetor tangente a  $S$  em  $p$ ,  $v \in T_p S$ .

### 3.3 Segunda forma fundamental

A partir da primeira forma fundamental, podemos considerar uma forma quadrática  $Q(v)$ , utilizando este fato vamos definir a segunda forma fundamental.

**Definição 3.4** A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_p S$  por

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$$

é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

Note que  $II_p(v) = -Q(v)$ . A escolha do sinal negativo para a segunda forma fundamental será vista mais adiante.

Seja  $S$  uma superfície regular. Considere uma curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  parametrizada pelo comprimento de arco, isto é,  $|\alpha'(t)| = 1$  para todo  $t \in I$ . Seja  $p \in S$ , um



ponto tal que  $\alpha(0) = p$ . Seja  $N(t)$  a restrição de  $N$  a curva  $\alpha(t)$ . Veja que

$$\langle N(t), \alpha'(t) \rangle = 0,$$

logo, derivando em relação a  $t$ , temos que

$$\langle N'(t), \alpha'(t) \rangle + \langle N(t), \alpha''(t) \rangle = 0,$$

isto é,

$$\langle N(t), \alpha''(t) \rangle = -\langle N'(t), \alpha'(t) \rangle.$$

Agora, se aplicarmos a segunda forma fundamental em  $\alpha'(0)$ , temos que

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_{\alpha(0)}(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle. \end{aligned}$$

Observe que  $\alpha'(t) \perp \alpha''(t)$ , ou seja,  $\alpha''(t)$  é paralelo ao vetor normal unitário  $n$  de  $\alpha$  em  $t$ .

Em particular

$$\alpha''(0) = kn(0). \quad k \in \mathbb{R}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} II_p(\alpha'(0)) &= \langle N(0), kn(0) \rangle \\ &= k\langle N, n \rangle(p). \end{aligned}$$

Como os vetores  $N$  e  $n$  são unitários, obtemos

$$\cos \theta = \frac{\langle N, n \rangle}{\|N\|\|n\|} = \langle N, n \rangle,$$

portanto, temos que

$$II_p(\alpha'(0)) = k \cos \theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $N$  e  $n$  (Figura 14).

Observe que  $k$  é a curvatura da curva  $\alpha$  em  $p$ . Assim, temos a seguinte Definição.

**Definição 3.5** *Seja  $\alpha$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, além disso  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t$  pertencente ao domínio de  $\alpha$ . Seja  $S$  uma superfície regular, tal que  $\alpha(0) = p \in S$ . Sendo  $k$  a curvatura de  $\alpha$  e  $N, n$  os vetores normais unitários em  $p$  de  $S$  e  $\alpha$  respectivamente. O número  $k_n = k \cos \theta$  é chamado a curvatura normal de  $\alpha \subset S$  em  $p$ .*

Da Definição acima, vemos que a segunda forma fundamental aplicada a um

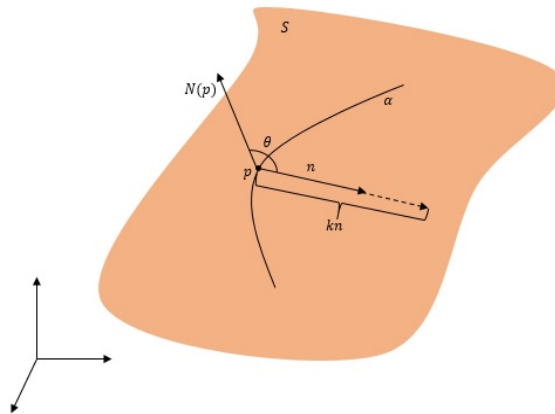


Figura 14: Representação geométrica da segunda forma fundamental.

Fonte: Autor, 2018.

vetor  $v \in T_p S$ , unitário, é igual a curvatura normal da curva que passa por  $p$  e que tem  $v$  como vetor tangente em  $p$ . Com isso, demonstramos um resultado obtido pelo matemático francês *Meusnier*, a saber

**Proposição 3.2** *Todas as curvas de uma superfície  $S$  que têm, em um ponto  $p \in S$ , a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

Seja  $S$  uma superfície regular, e  $\alpha$  uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, passando por  $p \in S$ , com  $\alpha(0) = p$ . Sendo  $v = \alpha'(0)$ , temos que  $N(p)$  e  $v$  formam uma base de um plano  $P$ , isto é,  $N$  e  $v$  geram  $P$ . Com isso, a interseção de  $S$  com  $P$ , gera uma curva  $\alpha_n$  chamada *seção normal* de  $S$  em  $p$  segundo  $v$  (Figura 15). Veja que o vetor normal  $n$  de  $\alpha_n$  em  $p$ , é tal que  $n = \pm N$  ou zero, e na vizinhança de  $p$ , temos que  $\alpha_n$  é um curva regular plana em  $S$  e pela Proposição 3.2, nesta vizinhança, a curvatura normal de  $\alpha$  em  $p$  segundo  $v$  é equivalente a curvatura normal da seção normal em  $p$  segundo  $v$ .

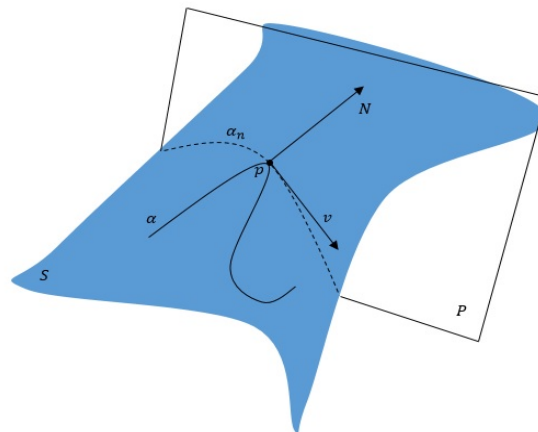


Figura 15: Numa vizinhança de  $p$ ,  $\alpha$  e  $\alpha_n$  possuem a mesma curvatura normal segundo  $v$ .

Fonte: Autor, 2018.

**Exemplo 3.5** *Seja  $p$  um ponto da esfera*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

*Considerando a orientação  $N = (-x, -y, -z)$ , as seções normais por  $p \in S^2$  são circunferências concêntricas de raio 1 (Figura 16). Deste modo, todas as curvaturas normais são iguais a 1. Sendo  $v$  um vetor unitário pertencente a  $T_p S$ , uma vez que*

$$II_p(v) = k \langle N, n \rangle$$

*e como, neste caso,  $n = N$  e  $k = 1$ , temos que*

$$II_p(v) = |n|^2 = 1, \quad \forall p \in S^2, \quad v \in T_p S^2.$$

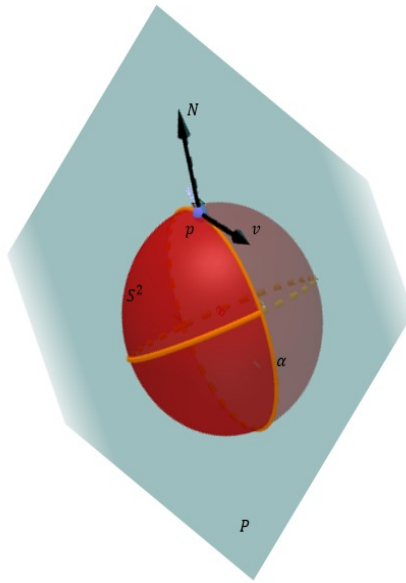


Figura 16: As curvas normais em  $S^2$  são circunferências de raio 1.

Fonte: Autor, 2018.

Para dar continuidade, precisamos de um Teorema que dará início aos nossos estudos sobre curvaturas principais, a saber

**Teorema 3.1** *Seja  $A : V \rightarrow V$  uma aplicação linear auto-adjunta. Então existe uma base  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$  tais que  $A(e_1) = \lambda_1 e_1, A(e_2) = \lambda_2 e_2$ . Na base  $\{e_1, e_2\}$ , a matriz de  $A$  é diagonal e os elementos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática  $Q(v) = \langle Av, v \rangle$  sobre o círculo unitário de  $V$ .*

A demonstração deste Teorema pode ser vista em (CARMO, 2014).

O Teorema 3.1, nos garante a existência de uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  em  $p \in T_p S$  tal que  $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$  e  $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$ , com  $k_1 \geq k_2$ , e além disso,  $k_1$  e

$k_2$  são chamados de máximo e mínimo da segunda forma fundamental  $II_p$  restrita a um círculo unitário de  $T_pS$ , ou seja, são valores extremos da curvatura normal em  $p$ .

**Definição 3.6** O máximo da curvatura normal  $k_1$  e o mínimo da curvatura normal  $k_2$ , são chamados curvaturas principais em  $p$ ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos vetores  $e_1$  e  $e_2$ , são chamadas direções principais em  $p$ .

Agora suponhamos que  $v$  é um vetor unitário de  $T_pS$ , e além disso, suponha que  $\{e_1, e_2\}$  é uma base ortonormal de  $T_pS$ , com isso, podemos escrever  $v$  como

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta,$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $e_1$  e  $v$  na direção de  $T_pS$  (Figura 17). Calculando a curvatura normal, obtemos

$$\begin{aligned} k_n &= -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= -\langle \cos \theta dN_p(e_1) + \sin \theta dN_p(e_2), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \langle k_1 e_1 \cos \theta + k_2 e_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

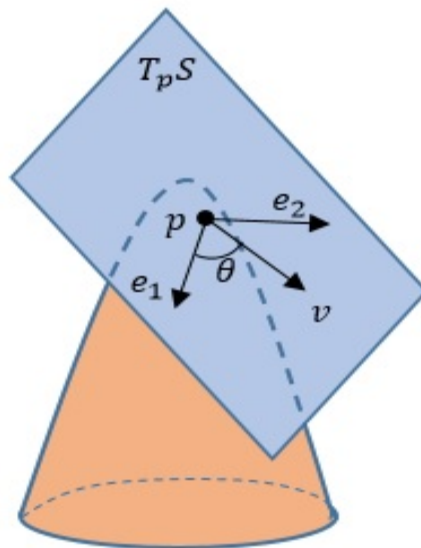


Figura 17: Os vetores  $\{e_1, e_2\}$  formam uma base ortonormal de  $T_pS$ .

Fonte: Autor, 2018.

Observe que  $\{e_1, e_2\}$  não necessariamente é a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , além disso, vimos que através das curvaturas principais podemos obter a curvatura normal em  $p$  na

direção de um vetor  $v \in T_p S$ . Esta expressão obtida em função das curvaturas e o ângulo, é conhecida como *fórmula de Euler*, mas é fácil observar que ela é somente a segunda forma fundamental na base  $\{e_1, e_2\}$ .

Observe que pelo Teorema 3.1 a matriz associada a aplicação  $dN$  na base  $\{e_1, e_2\}$  é diagonal, ou seja, apenas os elementos da diagonal principal, são diferentes de zero, e em nosso caso, os elementos da diagonal da matriz de  $dN$  são justamente  $-k_1$  e  $-k_2$ , com isso, temos a seguinte Definição

**Definição 3.7** *Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a curvatura média  $H$  de  $S$  em  $p$ , ou seja,*

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

**Definição 3.8** *Um ponto de uma superfície  $S$  é chamado*

1. *Elíptico, se  $\det(dN_p) > 0$ .*
2. *Hiperbólico, se  $\det(dN_p) < 0$ .*
3. *Parabólico, se  $\det(dN_p) = 0$ , com  $dN_p \neq 0$ .*
4. *Planar, se  $dN_p = 0$ .*

Observe que um ponto é elíptico se  $K > 0$ , isto equivale a dizer que ambas as curvaturas principais tem mesmo sinal, ou seja, os vetores normais das direções principais apontam para um mesmo lado do plano tangente ao ponto, como por exemplo, todos os pontos da esfera.

No caso de um ponto Hiperbólico, os vetores normais das direções principais apontam para lados opostos do plano tangente ao ponto, como o ponto  $(0, 0, 0)$  de um parabolóide hiperbólico.

Um ponto Parabólico, possui uma das curvaturas identicamente nula, como por exemplo o cilindro, que possui curvaturas  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 0$ .

Por fim, um ponto é planar, se as curvaturas principais são identicamente nulas, como por exemplo um plano. Existem outros casos não triviais, em que na vizinhança do ponto, a superfície possui um aspecto “achatado” como um plano.

**Definição 3.9** *Se em  $p \in S$ ,  $k_1 = k_2$ , então  $p$  é chamado um ponto umbílico de  $S$ ; em particular, os pontos planares ( $k_1 = k_2 = 0$ ) são pontos umbílicos.*

Os pontos de um plano são umbílicos, pois todas as seções normais são retas, que tem curvatura nula. Os pontos de uma esfera também são pontos umbílicos, pois como todas as seções normais são circunferências, que tem curvatura  $\frac{1}{r}$ , onde  $r$  é o raio da circunferência. Com isso temos a seguinte Proposição

**Proposição 3.3** *Se todos os pontos de uma superfície conexa são umbílicos, então  $S$  está contida em um plano ou em uma esfera.*

A demonstração desta Proposição pode ser vista em (CARMO, 2014).

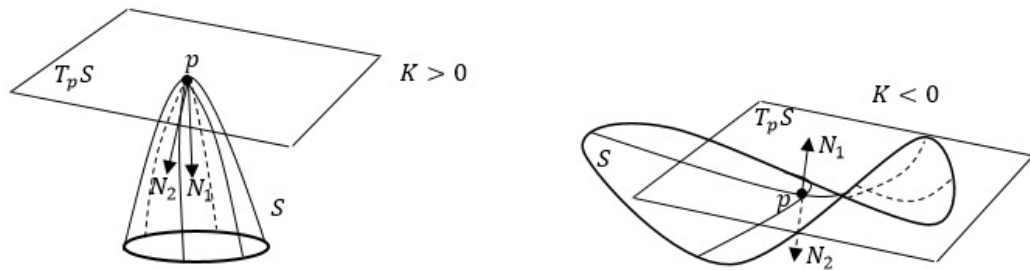


Figura 18: Os vetores normais  $N_1, N_2$  das seções normais definem o sinal de  $K$ .

Fonte: Autor, 2018.

Seja  $S$  uma superfície regular e  $X(u, v)$  uma parametrização de  $S$ , considere a curva parametrizada  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ , tal que  $\alpha(0) = p \in S$ . O vetor tangente a  $\alpha(t)$  em  $p$  é dado pela derivação de  $\alpha$ , que utilizando regra da cadeia, obtemos

$$\alpha'(t) = X_u u' + X_v v', \quad (3)$$

e além disso, temos que

$$dN(\alpha') = N'(t) = \frac{d}{dt}N(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'. \quad (4)$$

Como  $N$  é unitário, temos que  $N_u$  e  $N_v$  são ortogonais a  $N$ , ou seja,  $N_u$  e  $N_v$  pertencem a  $T_p S$ , e com isso, podemos escrever

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v \quad (5)$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v \quad (6)$$

já que  $\{X_u, X_v\}$  é uma base de  $T_p S$ . Observe que todos os valores das funções acima são calculados em  $p$ . Desta forma, substituindo (3), (5) e (6) em (4), temos que

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha') &= (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v' \\ dN_p(X_u u' + X_v v') &= (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v, \end{aligned}$$

isto é

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Agora, calculando a segunda forma fundamental no ponto  $p$  segundo  $\alpha'$  na base  $\{X_u, X_v\}$ ,

temos

$$\begin{aligned}
II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\
&= -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\
&= -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - (\langle N_u, X_v \rangle + \langle N_v, X_u \rangle) (u'v') - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0.$$

Assim, derivando, temos que

$$\langle N_u, X_u \rangle = -\langle N, X_{uu} \rangle =: -e,$$

$$\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle =: -f,$$

$$\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle =: -f,$$

$$\langle N_v, X_v \rangle = -\langle N, X_{vv} \rangle =: -g.$$

Deste modo, temos que

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2,$$

onde  $e, f, g$  são chamados *coeficientes da segunda forma fundamental*. Com isso, das equações (3) e (4), temos que

$$\begin{aligned}
-e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\
-f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\
-f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\
-g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G.
\end{aligned} \tag{7}$$

Onde  $E, F, G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental. A partir das equações de (7), podemos representar em forma matricial, donde obtemos:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \tag{8}$$

É conveniente encontrarmos os valores de  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, j = 1, 2$ , para isso, observe que o determinante da matriz à extrema direita da equação (8) é diferente de zero, pois se isso não fosse verdade a área da superfície  $S$  seria nula. Sabemos que dada uma matriz invertível  $A$ , a inversa  $A^{-1}$  de  $A$  é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A')^t$$

onde  $(A')^t$  representa a transposta da matriz dos cofatores de  $A$ . E com isso, temos que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a partir de (8), temos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Vale ressaltar que as equações (5) e (6) são conhecidas como *equações de Weingarten*.

Como definimos  $K = \det(dN_p)$ , temos que  $K = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} K &= \frac{(fF - eG)(fF - gE)}{(EG - F^2)^2} - \frac{(eF - fE)(gF - fG)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)} ((fF)^2 - fFgE - fFG e + eGgE - egF^2 + eFfG + fFgE - f^2EG) \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} (f^2F^2 + eGgE - egF^2 - f^2EG) \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} (EG - F^2)(eg - f^2) \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (9)$$

Por outro lado, temos que  $H = -\frac{1}{2}tr(dN_p)$ , ou seja,



$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \\ &= \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}. \quad (10)$$

Em relação a curvatura média  $H$ , observe que  $-k_1$  e  $-k_2$ , são autovalores de  $dN$ , ou seja, para algum  $v \in T_pS$ ,  $v \neq 0$ ,  $k_1, k_2$  satisfaz a equação

$$dN(v) = -kv.$$

Da álgebra linear, temos que

$$dN(v) = -kIv,$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Logo, representando em forma matricial, temos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} v.$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} + k \end{pmatrix} v = 0,$$

como  $v \neq 0$ , portanto,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0$$

donde obtemos que,

$$a_{11}a_{22} + a_{11}k + a_{22}k + k^2 - a_{12}a_{21} = 0.$$

Logo,

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$k^2 - 2kH + K = 0. \quad (11)$$

Resolvendo a equação de segundo grau em  $k$ , obtemos que

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \quad (12)$$

A expressão acima nos permite obter as curvaturas principais, a partir da curvatura média e curvatura gaussiana, além disso, ela nos mostra que é melhor trabalharmos com

as curvaturas  $K$  e  $H$ , pois elas são funções diferenciáveis, e como se pode ver em (10), as curvaturas principais podem não ser diferenciáveis nos pontos umbílicos, isto é,  $H^2 = K$ .

**Exemplo 3.6** *Vamos calcular a curvatura média e curvatura gaussiana de uma superfície de revolução. Seja  $S$  uma superfície de revolução, sendo  $X(u, v)$  uma parametrização de  $S$ , temos que*

$$X(u, v) = (\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sen u, \phi(v))$$

$0 < u < 2\pi$ ,  $a < v < b$ ,  $\varphi(v) > 0$ . Para facilitar a notação, omitiremos  $v$ , mas fica subentendido que  $\varphi, \phi$  são funções de  $v$ . Além disso, vamos supor que a curva geratriz está parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja,

$$(\varphi')^2 + (\phi')^2 = 1.$$

Observe que

$$X_u = (-\varphi\sen u, \varphi\cos u, 0)$$

$$X_v = (\varphi'\cos u, \varphi'\sen u, \phi')$$

$$X_{uu} = (-\varphi\cos u, -\varphi\sen u, 0)$$

$$X_{vv} = (\varphi''\cos u, \varphi''\sen u, \phi'')$$

$$X_{uv} = (-\varphi'\sen u, \varphi'\cos u, 0).$$

Com isso, para os coeficientes da primeira forma fundamental, temos:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \varphi^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (\varphi')^2 + (\phi')^2 = 1.$$

Lembre que

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|},$$

e

$$|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Logo, temos que

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left( \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} \varphi\cos u & 0 \\ \varphi'\sen u & \phi' \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} -\varphi\sen u & 0 \\ \varphi'\cos u & \phi' \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} -\varphi\sen u & \varphi\cos u \\ \varphi'\cos u & \varphi'\sen u \end{array} \right| \end{array} \right),$$

isto é,

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (\varphi\phi' \cos u, \varphi\phi' \sin u, -\varphi\phi') \\
 &= \frac{1}{\varphi} (\varphi\phi' \cos u, \varphi\phi' \sin u, -\varphi\phi') \\
 &= (\phi' \cos u, \phi' \sin u, -\phi').
 \end{aligned}$$

Logo, para os coeficientes da segunda forma fundamental, temos:

$$\begin{aligned}
 e &= \langle N, X_{uu} \rangle = -(\phi' \varphi \cos^2 u + \varphi \phi' \sin^2 u) = -\varphi\phi' \\
 f &= \langle N, X_{uv} \rangle = -\phi' \phi' \sin u \cos u + \phi' \phi' \sin u \cos u = 0 \\
 g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \varphi'' \phi' \cos^2 u + \varphi'' \phi' \sin^2 u - \phi'' \varphi' = \varphi'' \phi' - \phi'' \varphi'.
 \end{aligned}$$

E como  $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$ , temos que

$$K = \frac{-\varphi\phi'(\varphi''\phi' - \phi''\varphi')}{\varphi^2} = \frac{\phi'(\phi''\varphi' - \phi'\varphi'')}{\varphi}. \quad (13)$$

Diferenciando à expressão  $(\varphi')^2 + (\phi')^2 = 1$ , obtemos que

$$2\varphi'\varphi'' + 2\phi'\phi'' = 0,$$

isto é,

$$\varphi'\varphi'' = -\phi'\phi''.$$

Logo, em (13) ficamos com

$$K = \frac{-(\varphi')^2\varphi'' - (\phi')^2\varphi''}{\varphi} = \frac{-\varphi''}{\varphi}. \quad (14)$$

Para o valor de  $H$ , como  $H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$ , temos que

$$H = \frac{-\varphi\phi' + \varphi^2(\phi'\varphi'' - \phi''\varphi')}{2\varphi^2} = \frac{\varphi(\phi'\varphi'' - \phi''\varphi') - \phi'}{2\varphi}. \quad (15)$$

Do exemplo anterior, podemos notar que as curvaturas principais de uma superfície de revolução, são exatamente  $\frac{e}{E}$ ,  $\frac{g}{G}$ , para ver isto, basta notar que  $K$  é o produto das curvaturas principais e  $2H$  a soma das mesmas. Além disso, este exemplo nos possibilita calcular as curvaturas gaussiana e média da esfera de raio 1 com centro na origem, basta representar a esfera como uma superfície de revolução, ou seja, em coordenadas

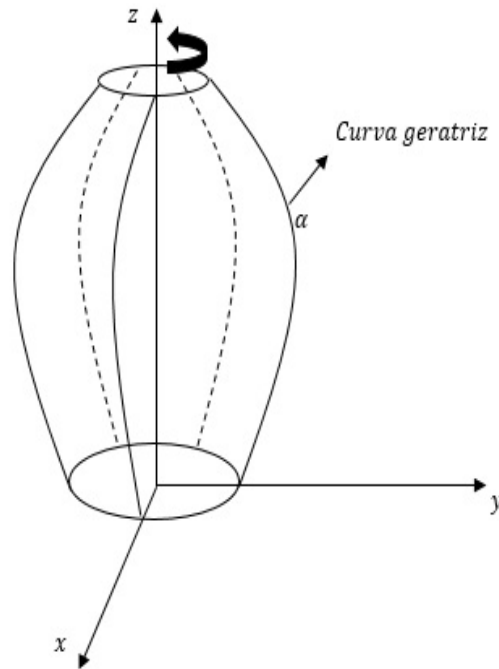


Figura 19: Exemplo de uma superfície de revolução obtida a partir da rotação de uma curva geratriz  $\alpha$  em torno do eixo  $z$ .

Fonte: Autor, 2018.

esféricas, isto é,

$$X(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v),$$

com  $0 < u < 2\pi$ ,  $0 < v < \pi$ . Observe que neste caso  $\varphi = \sin v$ ,  $\phi = \cos v$ , de (14) e (15), temos que

$$K = \frac{\sin v}{\sin v} = 1$$

$$H = \frac{\sin v(\sin^2 v + \cos^2 v) + \sin v}{2\sin v} = \frac{\sin v + \sin v}{2\sin v} = 1.$$

Além disso, temos que as curvaturas principais são

$$k_1 = 1 = \frac{e}{E}$$

$$k_2 = 1 = \frac{g}{G},$$

como era de se esperar.

Agora vamos supor que a superfície orientada  $S$  é o gráfico de uma função, isto é,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = h(x, y)\}, \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

Uma parametrização de  $S$ , pode ser dado por

$$X(u, v) = (u, v, h(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

com  $u = x, v = y$ . Com isso, temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, h_u) \\ X_v &= (0, 1, h_v) \\ X_{uu} &= (0, 0, h_{uu}) \\ X_{vv} &= (0, 0, h_{vv}) \\ X_{uv} &= (0, 0, h_{uv}). \end{aligned}$$

Portanto, para os coeficientes da primeira forma fundamental, temos que

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + h_u^2 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = h_u h_v \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1 + h_v^2. \end{aligned}$$

E para  $N$ , temos

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}(-h_u, -h_v, 1).$$

Logo, para os coeficientes da segunda forma fundamental, temos

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{h_{uu}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = \frac{h_{uv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{h_{vv}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}. \end{aligned}$$

E portanto, aplicando (9) e (10), temos

$$K = \frac{1}{1 + h_u^2 + h_v^2} \left( \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{1 + h_u^2 + h_v^2} \right) = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^2} \quad (16)$$

$$H = \frac{1}{2(1 + h_u^2 + h_v^2)} \left( \frac{h_{uu}h_v^2 + h_{uu} + h_{vv} + h_{vv}h_u^2 - 2h_{uv}h_uh_v}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}} \right). \quad (17)$$

Organizando (17), obtemos

$$H = \frac{h_{uu}(h_v^2 + 1) + h_{vv}(h_u^2 + 1) - 2h_{uv}h_uh_v}{2(1 + h_u^2 + h_v^2)^{3/2}}. \quad (18)$$

Observe que os cálculos acima são efetuados num ponto de  $S$ . Além disso, estas equações são bem úteis, uma vez que é possível mostrar que localmente, toda superfície pode ser vista como gráfico de uma função diferenciável.

Uma observação importante, é o fato de que, mesmo com parametrizações distintas, as curvaturas Média e Gaussiana não se alteram num determinado ponto, uma justificativa simples pra este fato, vem de que num ponto, as curvaturas são dadas pela variação do plano tangente, que neste caso, vemos como variação do vetor normal unitário, e como o plano tangente a um ponto é único, independente da parametrização, no mesmo ponto vamos ter o mesmo comportamento. Uma justificativa mais formal, decorre imediatamente da álgebra linear, veja por exemplo (LIMA, 2016).

## 4 Superfícies mínimas

Nesta seção, daremos início ao estudo de superfícies mínimas, onde usaremos todos os conceitos visto para a primeira e segunda forma fundamental. A importância das superfícies mínimas pode ser facilmente vista em nosso cotidiano, uma vez que esta teoria é usada por grandes fábricas para produzir formar de armazenar seus produtos de maneira a reduzir gastos com o armazenamento, ou seja, minimizando a área da superfície do vasilhame de seu produto.

### 4.1 Noção intuitiva de superfície mínima

Uma superfície parametrizada regular é chamada *mínima* se possui curvatura média identicamente nula. Uma superfície é mínima se cada uma de suas parametrizações é mínima. Um exemplo bem conhecido de superfície mínima, é a chamada *superfície de Enneper*.

**Exemplo 4.1** *A superfície de Enneper pode ser parametrizada por*

$$X(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

além disso, observe que

$$\begin{aligned} X_u &= (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u) \\ X_v &= (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v) \\ X_{uu} &= (-2u, 2v, 2) \\ X_{vv} &= (2u, -2v, -2) \\ X_{uv} &= (2v, 2u, 0). \end{aligned}$$

Desta forma, para os coeficientes da primeira forma fundamental, temos

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = 1 + u^4 + v^4 - 2u^2 + 2v^2 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 = (1 + u^2 + v^2)^2 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 2uv(1 - u^2 + v^2) + 2uv(1 - v^2 + u^2) - 4uv = 4uv - 4uv = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 4u^2v^2 + 1 + v^4 + u^4 - 2v^2 + 2u^2 - 2u^2v^2 + 4v^2 = (1 + u^2 + v^2)^2. \end{aligned}$$

Além disso, temos também que, o vetor normal unitário  $N$ , é dado por

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2} (-2u(1 + u^2 + v^2), 2v(1 + u^2 + v^2), 1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4).$$

Logo, temos que os coeficientes da segunda forma fundamental, são

$$\begin{aligned}
 e &= \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{4u^2(1+u^2+v^2) + 4v^2(1+u^2+v^2) + 2 - 4u^2v^2 - 2u^4 - 2v^4}{(1+u^2+v^2)^2} \\
 &= \frac{4(u^2+v^2)(1+u^2+v^2) + 2 - 2(u^2+v^2)^2}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{2(u^2+v^2)(2+u^2+v^2) + 2}{(1+u^2+v^2)^2} \\
 &= \frac{2(u^4 + 2u^2v^2 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 1)}{(1+u^2+v^2)^2} \\
 &= \frac{2(1+u^2+v^2)^2}{(1+u^2+v^2)^2} = 2,
 \end{aligned}$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} (-4uv(1+u^2+v^2) + 4uv(1+u^2+v^2)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 g &= \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{-4u^2(1+u^2+v^2) - 4v^2(1+u^2+v^2) - 2 + 4u^2v^2 + 2u^2 + 2v^2}{(1+u^2+v^2)^2} \\
 &= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} (-4(u^2+v^2)(1+u^2+v^2) - 2 + 2(u^2+v^2)^2) \\
 &= \frac{2(u^2+v^2)(-2 - 2u^2 - 2v^2 + u^2 + v^2) - 2}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{2(-2u^2 - 2v^2 - u^4 - v^4 - 2u^2v^2)}{(1+u^2+v^2)^2} \\
 &= \frac{-2(1+u^2+v^2)^2}{(1+u^2+v^2)^2} = -2.
 \end{aligned}$$

E como

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

temos que

$$H = \frac{1}{2} \frac{2G - 2E}{EG} = \frac{1}{2} \frac{2G - 2G}{EG} = 0.$$

E portanto a superfície de Enneper, de fato, é uma superfície mínima. Um fato interessante, é que a superfície de Enneper possui auto-interseções.

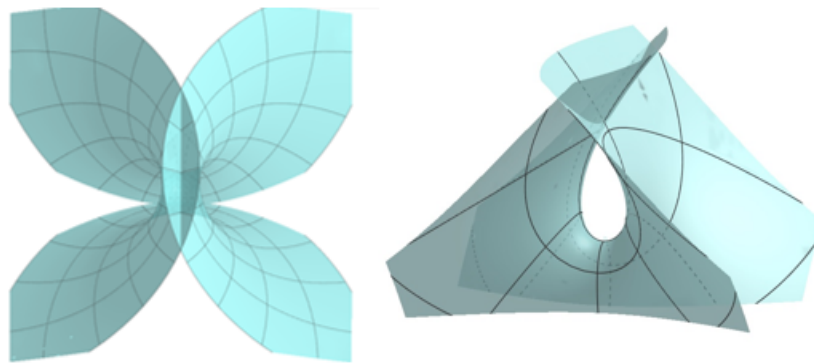


Figura 20: Superfície mínima de Enneper vista de dois ângulos.

Fonte: Autor, 2018.



Veremos a partir de agora que esse termo de “mínima” nem sempre pode estar relacionado com a minimização da área da superfície. Voltando ao problema proposto por Lagrange em 1760, ou seja, dado um bordo, ou uma curva conexa, qual a superfície que possui a menor área tendo como bordo tal curva. Vamos generalizar tal problema. Podemos pensar da seguinte forma: Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , uma superfície que tem bordo  $\partial X(U)$ . Com isso, vamos fazer uma pequena “perturbação” na superfície  $X(U)$ , dada por:

$$X^t(u, v) = X(u, v) + th(u, v)N(u, v),$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferencial,  $\bar{U} = U \cup \partial U$  é um conjunto limitado e  $N$  é o vetor normal unitário a  $X(u, v)$ . Observe que  $X^t$  nada mais é que uma variação de  $X$  ao longo de  $N$  e além disso,  $h$  funciona com uma pequena “deformação” da superfície  $X(U)$ . Tal variação é chamada de variação normal de  $X$  determinada por  $h$ .

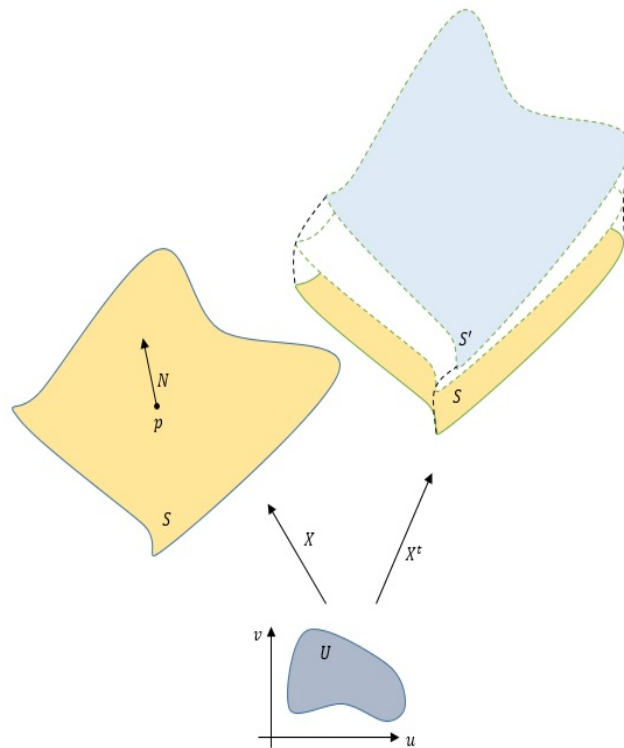


Figura 21:  $X^t$  faz uma pequena perturbação em  $X$  na direção de  $N$ .  
Fonte: Autor, 2018.

Observe que

$$\begin{aligned} X_u^t &= X_u + t(h_u N + N_u h) \\ X_v^t &= X_v + t(h_v N + N_v h). \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} E_t &= \langle X_u^t, X_u^t \rangle = \langle X_u, X_u \rangle + th\langle X_u, N_u \rangle + t^2 h_u^2 + th\langle X_u, N_u \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle; \\ F_t &= \langle X_u^t, X_v^t \rangle = \langle X_u, X_v \rangle + th\langle X_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v + th\langle X_v, N_u \rangle + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle; \\ G_t &= \langle X_v^t, X_v^t \rangle = \langle X_v, X_v \rangle + th\langle X_v, N_v \rangle + t^2 h_v^2 + th\langle X_v, N_v \rangle + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle. \end{aligned}$$

Em função das formas fundamentais, temos que

$$\begin{aligned} E_t &= E - 2eth + t^2 P \\ F_t &= F - 2fth + t^2 Q \\ G_t &= G - 2gth + t^2 R, \end{aligned}$$

onde  $P, Q, R$  são funções diferenciáveis. Chamando  $A(t)$  a área da superfície  $X^t$ , temos que

$$A(t) = \iint_U \sqrt{E_t G_t - F_t^2} \, dudv.$$

Observe que

$$E_t G_t - F_t^2 = EG - F^2 + tS(t),$$

onde  $S(t)$  é uma função diferenciável. Logo, aplicando o limite, teremos

$$\lim_{t \rightarrow 0} (E_t G_t - F_t^2) = EG - F^2.$$

Uma vez que  $X(U)$  é uma superfície regular, temos que para um  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, temos que se  $|t| < \varepsilon$ , então  $X^t(U)$  ainda é uma superfície regular. Derivando em relação a  $t$ , temos que

$$A'(t) = \iint_U \frac{1}{2\sqrt{E_t G_t - F_t^2}} (E_t G_t - F_t^2)' \, dudv.$$

E portanto, vamos avaliar a derivada do funcional área  $A'(t)$  em  $t = 0$ , mas para isto, observe que

$$(E_t G_t - F_t^2)' \Big|_{t=0} = -2ehG - 2ghE - (-4Ffh) = -2h(eG + gE - 2Ff).$$

Veja que

$$2H(EG - F^2) = eG + gE - 2Ff.$$

Além disso, temos que

$$E_0 G_0 - F_0^2 = EG - F^2,$$

com isso, obtemos

$$A'(0) = \iint_U \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} (-4hH)(EG - F^2) dudv.$$

Simplificando, temos

$$A'(0) = -2 \iint_U Hh\sqrt{EG - F^2} dudv. \quad (19)$$

Observe que o termo dentro da raiz é diferente de zero. Assim, temos base para anunciar a

**Proposição 4.1** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e seja  $D \subset U$  um domínio limitado em  $U$ . Então  $X$  é mínima se e somente se  $A'(0) = 0$  para todo domínio  $D$  e toda variação normal em  $X(\bar{D})$ .*

**Demonstração:** Se  $X$  é mínima, temos  $H = 0$ , então o resultado segue imediatamente de (19). Suponha que  $A'(0) = 0$  e que  $H(q) \neq 0$  para algum  $q \in D$ . Como  $h$  é uma função diferenciável qualquer, tome  $h(q) = H(q)$ , donde temos que  $hH > 0$ , além disso, impomos que  $h$  seja identicamente nula em uma pequena vizinhança  $V$  de  $q$ , com isso, por (19), obtemos que  $A'(0) < 0$ , o que contraria nossa hipótese. Logo, deve ser  $H = 0$  em todo ponto de  $D$ . ■

Com isso, vemos que uma superfície é mínima se sua curvatura média é identicamente nula, que equivale a dizer que  $t = 0$  é um ponto crítico do funcional área. Podemos ver que, em nosso conceito, o termo “Superfície mínima” não necessariamente seria uma superfície que minimiza a área, pois toda superfície que minimiza a área é, em nossa Definição, uma superfície mínima, mas nem toda superfície mínima minimiza a área, além disso, uma vez que sendo  $A'(0)$  um ponto crítico, sabemos que ela pode ser ou não um ponto de mínimo, como vemos nos cursos de cálculo.

Uma abordagem interessante para o problema proposto por Lagrange, foi desenvolvida pelo físico belga Plateau (por volta de 1850), que fazia experimentos com arame mergulhado em misturas de água e sabão, donde ao retirar o arame, que pode ser visto com uma curva que faz o papel de bordo, vinha recoberto por películas de sabão, formando uma superfície de sabão com arame como bordo. Fisicamente foi provado que tais superfícies eram mínimas, embora o arame as vezes tivessem um formato não condizente com a teoria aqui exposta para superfícies regulares, como por exemplo, um arame em forma de cubo.

Na demonstração da Proposição anterior tomamos  $h = H$ , nesta linha de raciocínio, vamos fazer uma pequena Definição.

**Definição 4.1** *O vetor curvatura média  $\mathbf{H}$  é dado por*

$$\mathbf{H} = HN.$$

E como vimos anteriormente, uma visualização geométrica de tal vetor, pode ser vista fazendo  $h = H$  em (19), donde obtemos que  $A'(0) < 0$ , isto equivale a dizer que ao deformarmos  $X$  na direção de  $\mathbf{H}$  a área inicial é decrescente.

**Definição 4.2** *Uma superfície regular  $X = X(u, v)$  é chamada isotérmica se*

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle \text{ e } \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

**Proposição 4.2** *Seja  $X = X(u, v)$  uma superfície parametrizada regular e suponha que  $X$  é isotérmica. Então*

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

onde  $\lambda = |X_u| = |X_v|$ .

**Demonstração:** Como  $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$  derivamos em ambos os lados em relação a  $u$ , donde obtemos que

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle,$$

além disso, como  $\langle X_u, X_v \rangle = 0$  derivamos em relação a  $v$  em ambos os lados, e com isso temos:

$$\langle X_{uv}, X_v \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle.$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_{vv}, X_u \rangle &= 0 \\ \langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, note que

$$\langle X_{uv}, X_u \rangle = \langle X_{vv}, X_v \rangle,$$

e também

$$\langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle = 0,$$

isto é,

$$\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0.$$

Donde concluímos que  $X_{uu} + X_{vv}$  é paralelo a  $N$ . E como neste caso temos  $E = G$  e  $F = 0$ , portanto

$$H = \frac{1}{2} \frac{E(e+g)}{E^2} = \frac{e+g}{2E}.$$

E com isso, obtemos

$$2\lambda^2 H = e + g = \langle N, X_{uu} + X_{vv} \rangle.$$

Como  $N$  é unitário, e por ser  $X_{uu} + X_{vv}$  paralelo a  $N$ , temos que  $X_{uu} + X_{vv} = kN$ , onde,

$k \in \mathbb{R}$ , logo, teremos

$$2\lambda^2 H = \langle N, kN \rangle = k.$$

Donde concluimos que

$$X_{uu} + X_{vv} = 2\lambda^2 \mathbf{H},$$

onde  $\lambda = |X_u| = |X_v|$ . ■

A Proposição anterior nos fornece um resultado importante, mas antes, lembremos que o *Laplaciano*  $\Delta f$  de uma função diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dado pela soma

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \quad (u, v) \in U.$$

Dizemos que  $f$  é *harmônica* em  $U$  se  $\Delta f = 0$ . E com isso, da Proposição anterior, obtemos **Corolário 4.1** *Seja  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  uma superfície parametrizada e suponha que  $X$  é isotérmica. Então  $X$  é mínima se e somente se as suas funções coordenadas  $x, y, z$  são harmônicas.*

Agora vamos supor que  $S$  é uma superfície mínima, ou seja,  $H = 0$ , além disso, vamos supor que  $S$  representa o gráfico de uma função  $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com isso, de (18), obtemos que

$$h_{uu}(h_v^2 + 1) + h_{vv}(h_u^2 + 1) - 2h_{uv}h_uh_v = 0 \quad (20)$$

como  $u = x$  e  $v = y$ , podemos escrever

$$h_{xx}(1 + h_y^2) - 2h_{xy}h_xh_y + h_{yy}(1 + h_x^2) = 0$$

para sabermos se o gráfico da função  $h(x, y)$  representa uma superfície mínima.

A partir da equação acima, vemos que encontrar uma superfície mínima, mesmo quando seu traço representa o gráfico de uma função, não é uma tarefa fácil. Lagrange só conseguiu encontrar o exemplo trivial do plano, para satisfazer (20), de fato, considere o plano

$$ax + by + cz = d$$

temos que o plano pode ser expresso em função de  $z$ . Assim

$$z(x, y) = \frac{d - ax - by}{c}, \quad c \neq 0,$$

donde obtemos que,

$$z_{xx} = z_{yy} = z_{xy} = 0,$$

que satisfaz (20). Logo, o plano é uma superfície mínima. Convém mencionar que foi o próprio Lagrange que obteve a expressão (20), mas seus exemplos cessaram por aí. Só 16 anos depois de Lagrange dar o exemplo do plano, Meusnier obteve mais dois exemplos

de gráficos de funções que satisfaziam (20). Meusnier teve a seguinte ideia, supor que o gráfico de uma superfície mínima representa o gráfico de uma superfície de revolução, ou seja,

$$X(u, v) = (\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sen u, \phi(v))$$

com  $0 < u < 2\pi$  e  $a < v < b; \varphi(v) > 0$ . Com essa ideia ele mostrou que o catenóide, que é obtido pela rotação da curva catenária, é uma superfície mínima.

**Exemplo 4.2** *O catenóide, dado por*

$$X(u, v) = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sen u, av), \quad 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R}$$

*obtido pela rotação da catenária  $y = a\cos\left(\frac{z}{a}\right)$ , é uma superfície mínima. Observe que*

$$\begin{aligned} X_u &= (-a\cosh v\sen u, a\cosh v\cos u, 0) \\ X_{uu} &= (-a\cosh v\cos u, -a\cosh v\sen u, 0) \\ X_v &= (a\senh v\cos u, a\senh v\sen u, a) \\ X_{vv} &= (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sen u, 0), \end{aligned}$$

*logo, temos*

$$\begin{aligned} \langle X_u, X_u \rangle &= a^2\cosh^2 v\sen^2 u + a^2\cosh^2 v\cos^2 u = a^2\cosh^2 v \\ \langle X_v, X_v \rangle &= a^2\senh^2 v\cos^2 u + a^2\senh^2 v\sen^2 u + a^2 = a^2\cosh^2 v \\ \langle X_u, X_v \rangle &= -a^2\cosh v\senh v\sen u\cos u + a^2\cosh v\senh v\sen u\cos u = 0. \end{aligned}$$

*Logo,  $X$  é isotérmica. Assim, somando  $X_{uu}$  e  $X_{vv}$  obtemos*

$$X_{uu} + X_{vv} = (0, 0, 0) = 0,$$

*que mostra que, de fato, o catenóide é uma superfície mínima.*

É possível mostrar que a catenóide é a única superfície de revolução mínima, veja por exemplo em (CARMO, 2014). Meusnier também supôs que as curva de nível da superfície  $f(x, y) = c \in \mathbb{R}$  eram retas. Com esta condição, ele mostrou que o Helicóide também é uma superfície mínima.

**Exemplo 4.3** *O Helicóide que pode ser representado por*

$$X(u, v) = (a\senh v\cos u, a\senh v\sen u, au), \quad 0 < u < 2\pi, v \in \mathbb{R},$$

*é uma superfície mínima. Observe que*

$$X_u = (-a\senh v\sen u, a\senh v\cos u, a)$$

$$\begin{aligned} X_v &= (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0) \\ X_{uu} &= (-a \sinh v \cos u, -a \sinh v \sin u, 0) \\ X_{vv} &= (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, 0), \end{aligned}$$

donde temos que

$$\begin{aligned} \langle X_u, X_u \rangle &= a^2 \sinh^2 v \sin^2 u + a^2 \sinh^2 v \cos^2 u + a^2 = a^2 \cosh^2 v \\ \langle X_u, X_u \rangle &= a^2 \cosh^2 v \cos^2 u + a^2 \cosh^2 v \sin^2 u = a^2 \cosh^2 v \\ \langle X_u, X_v \rangle &= -a \sinh v \cosh v \sin u \cos u + a \sinh v \cosh v \cos u \sin u = 0, \end{aligned}$$

donde concluimos que  $X$  é isotérmica. De imediato, vemos que

$$X_{uu} + X_{vv} = 0,$$

portanto o Helicóide é uma superfície mínima.

Em 1835 o matemático alemão Scherk, obteve um novo exemplo que satisfazia (20). Sua ideia foi bem simples, supôs que  $f(x, y)$  poderia ter suas variáveis separadas, ou seja,  $f(x, y) = h(x) + g(y)$ , com isso, ele obteve a expressão

$$h_{xx}(1 + g_y^2) + g_{yy}(1 + h_x^2) = 0.$$

Em verdade, resolvendo esta expressão, obtemos que  $f(x, y) = \log \frac{\cos y}{\cos x}$ ,  $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , facilmente pode-se ver que só uma parte da superfície pode ser representada por tal função. Esta superfície recebe o nome de Scherk. Na Figura 22, observe que a superfície de Scherk vista de cima, se distribui como num tabuleiro.

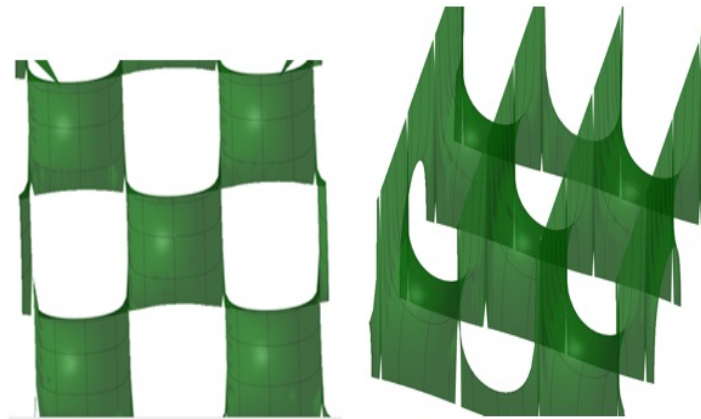


Figura 22: Superfície de Scherk vista de dois ângulos.

Fonte: Autor, 2018.

As Figuras 23 e 24 representam exemplos de superfícies mínimas aplicadas ao nosso cotidiano.

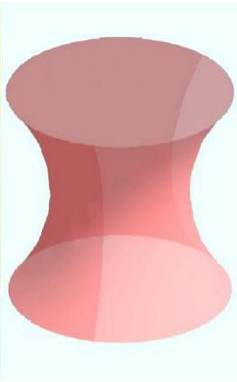


Figura 23: Catenóide e uma aplicação em nosso cotidiano.  
Fonte:Silva e Silva, 2014.

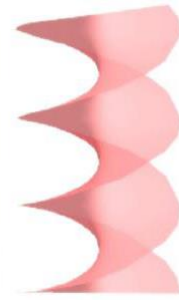


Figura 24: Helicóide e uma aplicação em nosso cotidiano.  
Fonte:Silva e Silva, 2014.

Um resultado importante é dado pela Proposição a seguir

**Proposição 4.3** *Não existe superfície compacta (sem bordo) mínima.*

A ideia para demonstrar esta Proposição é simples e intuitiva, observe que, como uma superfície mínima possui curvatura média identicamente nula em todos os seus pontos, temos que todos os pontos da superfície devem ser hiperbólicos, uma vez que as curvaturas principais possuem sinais opostos, ou são nulas, logo,  $K < 0$  ou  $K = 0$ . Em contrapartida, seja  $S$  uma superfície compacta, então tomamos a menor esfera que contém  $S$ , ou seja, existe um ponto na superfície que é tangente a esfera e necessariamente este ponto é elíptico, pois as curvaturas de uma esfera sempre apontam para seu centro, como vimos anteriormente. Logo,  $S$  não pode ser mínima, pois admite pelo menos um ponto elíptico (Figura 25).

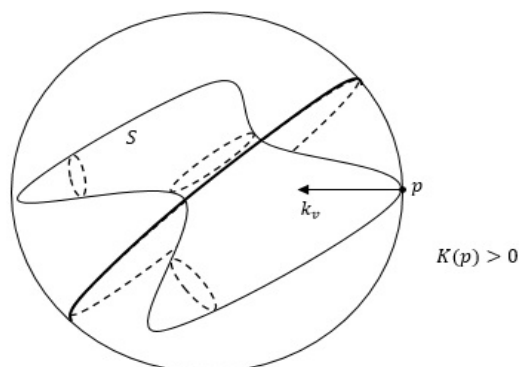


Figura 25: No ponto  $p$  a curvatura Gaussiana é positiva.  
Fonte: Autor, 2018.



## 5 Representação de Weierstrass para superfícies mínimas

Como vimos, obter uma superfície mínima não é nada trivial, porém, em 1866 Weierstrass obteve um resultado muito expressivo da equação (20). Para podermos dar início a esta seção, precisamos de alguns conceitos de cálculo com variável complexa.

### 5.1 Um pouco de variáveis complexas

Um número complexo  $z$  é da forma

$$z = x + yi, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde  $x$  é dita parte real de  $z$  e  $y$  parte imaginária de  $z$ , e  $i$  é o chamado número imaginário tal que  $i^2 = -1$ .

Lembre que podemos identificar o plano complexo com o plano do  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 5.1** *Um caminho suave  $\gamma$  em  $\mathbb{C}$  é uma aplicação*

$$\gamma : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

*que possui todas as derivadas contínuas em todos os pontos de  $J$ .*

Podemos ver  $\gamma$  como sendo

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) = (x(t), y(t))$$

com  $J = [a, b]$ ,  $a < b$ , temos que  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  são os valores inicial e final de  $\gamma$  em  $J$ . Se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  dizemos que  $\gamma$  é um caminho fechado. A derivada ou vetor velocidade de  $\gamma$  em  $t \in J$ , é o vetor  $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ .

**Definição 5.2** *Seja  $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um caminho suave. Então seu comprimento é dado por*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Definiremos uma função complexa como sendo da forma  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , onde  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Definição 5.3** *A derivada de uma função complexa  $f$  em  $z_0 \in \mathbb{C}$  é dado pelo limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*se este limite existir.*

Como  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  podemos fazer o limite acima variar tanto pela parte real como pela parte imaginária de  $f(z)$ . Assim, observe que  $u_0 = u(x_0, y_0)$  e  $v_0 = v(x_0, y_0)$ , além disso, temos que  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , com isso, variando

primeiramente pela parte real, temos no numerado e denominador do limite que:

$$\begin{aligned} \frac{u + iv - u_0 - iv_0}{z - z_0} &= \frac{(u - u_0) + i(v - v_0)}{(x - x_0) + (y - y_0)i} \cdot \frac{(x - x_0) - i(y - y_0)}{(x - x_0) - i(y - y_0)} \\ &= \frac{(u - u_0)(x - x_0) + (v - v_0)(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + i \frac{(v - v_0)(x - x_0) - (u - u_0)(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Como estamos supondo que tal limite existe, ele deve ser o mesmo para todas as direções, neste caso, tomamos, primeiramente como sendo  $z = x_0 + iy$ , donde obtemos que

$$f'(z_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Analogamente, pelo caminho  $y = y_0$ , isto é,  $z = x + y_0i$ , temos

$$f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Donde concluímos que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Assim acabamos de demonstrar a

**Proposição 5.1 (Condição de Cauchy-Riemann)** *Se a função  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  tem derivada no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$ , então*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Vejamos um exemplo de função que obedece as condições de Cauchy-Riemann.

**Exemplo 5.1** *Seja  $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Observe que*

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

e

$$v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Logo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos y \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -e^x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= e^x \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= e^x \cos y.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).\end{aligned}$$

Portanto  $f(z)$  satisfaz as condições de Cauchy-Riemann.

A Definição a seguir é de suma importância, e por isso, sempre devemos tê-la em mente.

**Definição 5.4** *Seja  $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $A$  aberto, uma função complexa. Então  $f$  é dita holomorfa em  $A$  se  $f'(z)$  existe em todo ponto  $z$  de  $A$ .*

Também podemos dizer que  $f$  é holomorfa, se suas derivadas parciais de  $u$  e  $v$  existem e são contínuas em  $A$ , além disso, devem satisfazer as condições de Cauchy-Riemann, veja por exemplo em (SOARES, 2009).

**Definição 5.5** *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função complexa. Se existe  $g(z)$ , função holomorfa em  $U$ , tal que*

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad g(z_0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

então,  $z = z_0$  é dito um zero ordem  $n$  de  $f(z)$ .

Por exemplo, a função  $f(z) = (z - 2)^3$  tem como zero de grau 3 o ponto  $z = 2$ .

**Definição 5.6** *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa. Então se pudermos escrever*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

onde  $g(z)$  é uma função holomorfa em  $U$  e  $g(z_0) \neq 0$ , então,  $z = z_0$  será dito um polo de ordem  $n$  de  $f(z)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Se tivermos, por exemplo, a função  $f(z) = \frac{1}{(z - 3)^2}$ , então o ponto  $z = 3$  é um polo de ordem 2.

Outra Definição importante é a seguinte

**Definição 5.7** *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dizemos que  $f$  é uma função meromorfa se é holomorfa em  $\mathbb{C} - \{\Gamma\}$ , onde  $\Gamma$  é um conjunto de pontos isolados e cada um desses pontos é um polo de  $g$ .*

Por exemplo, a função  $f : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = \frac{1}{z}$  é uma função meromorfa e  $z = 0$  é um polo de  $f(z)$ .

Vamos agora definir a integral de uma função complexa sobre um caminho suave.

**Definição 5.8** A integral da função  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , contínua, ao longo de um caminho suave  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  é o número complexo dado por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

De outro modo, sendo  $z = x + iy$ , temos que  $dz = dx + idy$  e como  $f = u + iv$ , temos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} u dy + v dx.$$

Para fixar as ideias, vejamos um exemplo

**Exemplo 5.2** Seja  $f(z) = z^2$  e  $\gamma(t) = t + i2t, t \in [0, 2]$ . Vamos calcular a integral de  $f(z)$  ao longo do caminho  $\gamma$ . Logo, temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^2 (t + i2t)^2 (1 + 2i) dt \\ &= (1 + 2i) \int_0^2 (t^2 - 4t^2 + 4it^2) dt \\ &= (1 + 2i) \left[ -t^3 + \frac{4}{3}it^3 \Big|_0^2 \right] \\ &= (1 + 2i) \left( 8 \left( \frac{4}{3}i - 1 \right) \right) \\ &= -\frac{88}{3} - \frac{16}{3}i. \end{aligned}$$

**Definição 5.9** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua, onde  $U \subset \mathbb{C}$  é um domínio. Uma função  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  é chamada primitiva de  $f$  se  $F$  é holomorfa em  $U$  e  $F'(z) = f(z)$  para todo ponto  $z \in U$ .

Da Definição 5.9, temos o Teorema Fundamental do Cálculo para variáveis complexas.

**Teorema 5.1** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua, onde  $U \subset \mathbb{C}$  é um domínio e  $F$  uma primitiva de  $f$  em  $U$  e além disso,  $\gamma$  é um caminho suave por partes em  $U$  ligando o ponto  $z_0$  ao ponto  $z_1$ . Então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Em particular, se o caminho é fechado então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

A demonstração do Teorema 5.1 pode ser encontrado em (SOARES, 2009).

## 5.2 A representação de Weierstrass

Antes de darmos início, de fato, a esta seção, iremos anunciar um Teorema muito importante, cuja demonstração pode ser vista em (ALVAREZ, 2015).

**Teorema 5.2** *Seja  $S$  uma superfície regular do  $\mathbb{R}^3$  com  $p \in S$ . Então existe vizinhança  $V$  de  $p$  e parametrização isotérmica  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) = V \subset S$ .*

Vale ressaltar do Teorema acima, que ele não é sempre válido para superfícies de dimensão mais altas, digamos  $S \subset \mathbb{R}^4$ , por outro lado, em nossos estudos ele será de grande importância, uma vez que ele garante uma vizinhança, mesmo que muito pequena, na qual temos uma parametrização isotérmica.

Vamos considerar uma parametrização de uma superfície dada por

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)).$$

Como vimos, um número complexo  $z$  é da forma  $z = u + iv$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . E definimos as seguintes funções

$$\phi_j(z) = \frac{\partial x_j}{\partial u} - i \frac{\partial x_j}{\partial v}, \quad j = 1, 2, 3$$

veja que  $\phi_j$  são funções complexas de variável  $z$ . Agora vamos analisar os quadrados de tais funções, logo,

$$\sum_{j=1}^3 \phi_j^2(z) = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial x_j}{\partial u} - i \frac{\partial x_j}{\partial v} \right)^2 = \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial x_j}{\partial u} \right)^2 - 2i \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} - \left( \frac{\partial x_j}{\partial v} \right)^2 \right]$$

separando a parte real da imaginária, temos

$$\sum_{j=1}^3 \phi_j^2(z) = \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial x_j}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial x_j}{\partial v} \right)^2 \right] - 2i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial x_j}{\partial u} \right)^2 &= |X_u|^2 = \langle X_u, X_u \rangle \\ \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial x_j}{\partial v} \right)^2 &= |X_v|^2 = \langle X_v, X_v \rangle \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} &= \langle X_u, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Com isso concluímos que

$$\sum_{j=1}^3 \phi_j^2(z) = E - G - 2iF,$$

onde  $E, F$  e  $G$  são coeficientes da primeira forma fundamental. Agora, vamos supor que  $X$  é isotérmica, logo  $E = G$  e  $F = 0$ , donde concluímos que

$$\sum_{j=1}^3 \phi_j^2(z) = 0.$$

Observe que não é estranho a soma de quadrados dando zero, uma vez que estamos falando de funções complexas.

Vamos impor mais uma condição a  $X$ , que ela seja mínima, e como ela é isotérmica, pela Proposição 4.2, temos

$$X_{uu} + X_{vv} = 0.$$

Além disso, as funções coordenadas de  $X$  são harmônicas, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} &= -\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} &= -\frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2} &= -\frac{\partial^2 x_3}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

O interessante é notar o que isto implica nas  $\phi_j, j = 1, 2, 3$ . Como vimos anteriormente em funções complexas da forma  $\phi(z) = h(u, v) - ig(u, v)$ , são holomorfa se possuem derivadas parciais contínuas e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, isto é,

$$h_u = -g_v, \quad g_u = h_v.$$

Em nosso caso, veja que as  $\phi_j, j = 1, 2, 3$ , é da forma

$$\phi_j(z) = \frac{\partial x_j}{\partial u} - i \frac{\partial x_j}{\partial v}.$$

E para elas serem holomorfas, devemos ter derivadas parciais contínuas satisfazendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_j}{\partial^2 u} &= -\frac{\partial^2 x_j}{\partial^2 v} \\ \frac{\partial^2 x_j}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial^2 x_j}{\partial u \partial v}, \end{aligned}$$

e como isto ocorre, concluímos que  $\phi_j(z), j = 1, 2, 3$ , devem ser holomorfas. E com tudo

isso, demostramos um importante resultado:

**Lema 5.1**  *$X$  é isotérmica se e somente se  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ . Se esta última condição é satisfeita,  $X$  é mínima se e somente se  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  são holomorfas.*

É interessante notar que as funções  $\phi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , não são simultaneamente nulas, e para visualizar isto, observe que

$$\sum_{j=1}^3 |\phi_j|^2 = |X_u|^2 + |X_v|^2,$$

e como supomos  $X$  isotérmica, temos que  $|X_u|^2 + |X_v|^2 = 2\lambda^2 \neq 0$ , logo, as  $\phi_j$  não se anulam simultaneamente.

Já obtivemos uma importante relação entre superfícies mínimas e as funções holomorfas, pois agora podemos saber quando as funções  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  vem de uma superfície mínima, basta encontrarmos três funções complexas holomorfas que satisfaçam as condições do Lema 5.1.

A pergunta agora que nos norteia é, dado as  $\phi_j, j = 1, 2, 3$ , com obter  $X$ ? Para isto, seja  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  funções holomorfas, tal que  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ , e além disso, considere  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , uma parametrização de uma superfície  $S$ , e fixemos um ponto  $(u_0, v_0) \in U$  e chamemos de  $p = X(u_0, v_0)$ . Suponhamos um ponto  $(u, v) \in U$  e consideremos um curva  $\alpha$  que liga  $(u_0, v_0)$  à  $(u, v)$  (Figura 26). Sabemos também que  $\phi(z)$  é da forma

$$\phi_j(z) = \frac{\partial x_j}{\partial u} - i \frac{\partial x_j}{\partial v}.$$

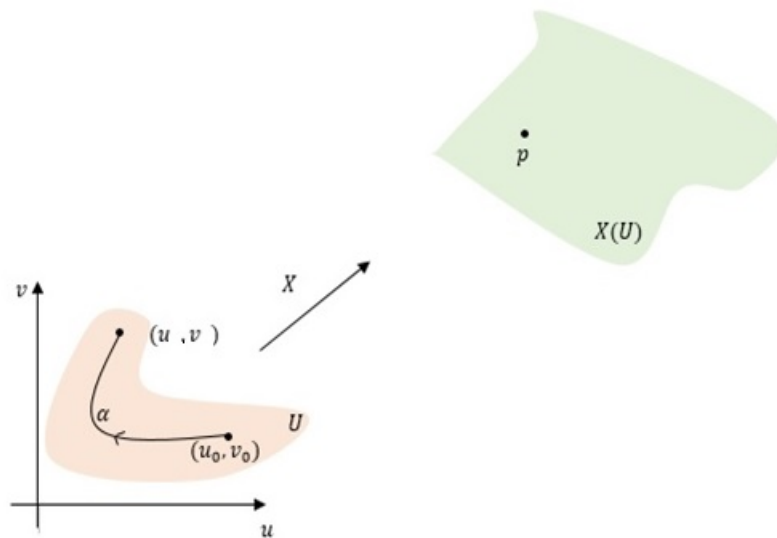


Figura 26: Representação da curva  $\alpha$ .

Fonte: Autor, 2018.

Além disso, escrevendo

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_2(u, v)),$$

com cada entrada de  $X$  possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Com isso, calculamos uma integral de linha das entradas de  $X$  sobre uma curva  $\alpha$ , lembre-se que se um campo vetorial  $F$  possui todas as derivadas parciais contínuas, num domínio simplesmente conexo, então a integral de linha independe do caminho, com isso em mente, temos que

$$x_j(u, v) - x_j(u_0, v_0) = \int_{\alpha} dx_j$$

ou equivalentemente, temos que

$$x_j(u, v) - x_j(u_0, v_0) = \int_{\alpha} \left( \frac{\partial x_j}{\partial u} du + \frac{\partial x_j}{\partial v} dv \right).$$

Na integral acima, encontramos a parte real das  $\phi_j, j = 1, 2, 3$ , e o negativo de sua parte imaginária, denotando por  $\Re$  a parte real do número complexo, temos que

$$\left( \frac{\partial x_j}{\partial u} du + \frac{\partial x_j}{\partial v} dv \right) = \Re \left[ \left( \frac{\partial x_j}{\partial u} - i \frac{\partial x_j}{\partial v} \right) (du + idv) \right].$$

Com isso, temos

$$x_j(u, v) - x_j(u_0, v_0) = \int_{\alpha} \Re \left[ \left( \frac{\partial x_j}{\partial u} - i \frac{\partial x_j}{\partial v} \right) (du + idv) \right],$$

e como  $du + idv = dz$ , e além disso, o termo entre parênteses é a própria  $\phi_j, j = 1, 2, 3$ , portanto temos

$$x_j(u, v) - x_j(u_0, v_0) = \Re \left[ \int_{\alpha} \phi_j(z) dz \right].$$

Como  $x_j(u_0, v_0)$  é constante, então, obtemos

$$x_j(u, v) = \Re \left[ \int_{\alpha} \phi_j(z) dz \right] + k_j, \quad k_j \in \mathbb{R},$$

onde  $\alpha$  é uma curva que liga um ponto fixo, a qualquer outro ponto de  $U$ . Observe que  $x_j(u_0, v_0) = k_j$ .

O problema que podemos ter para recuperarmos as  $x_j$ , é que a integral  $\int_{\alpha} \phi_j(z) dz$  só faz sentido, como dito antes, num domínio simplesmente conexo, isto é, não possui “buracos” e toda cisão é trivial. Além disso, muitas vezes, com estas contas, só encontramos um “pedaço” de superfície como sendo mínima, até porque o Teorema que garante as vizi-nhanças com parametrizações isotérmicas são puramente locais, logo, pode ser uma parte



bem pequena de uma superfície. Em geral, temos

$$\phi_j : U \rightarrow \mathbb{C}$$

funções holomorfas, com  $U$  simplesmente conexo.

**Teorema 5.3** *Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um domínio simplesmente conexo. E  $f$  e  $g$  funções holomorfa e meromorfa, respectivamente, em  $U$ , satisfazendo a seguinte propriedade:  $q \in U$  é polo de  $g$  de ordem  $n$ , se e somente se  $q$  é zero de  $f$  de ordem  $2n$ .*

Então as funções

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}f(1 - g^2) \\ \phi_2 &= \frac{i}{2}f(1 + g^2) \\ \phi_3 &= fg,\end{aligned}\tag{21}$$

são funções holomorfas que satisfazem:

$$\sum_{j=1}^3 \phi_j^2 = 0\tag{22}$$

$$\sum_{j=1}^3 |\phi_j|^2 \neq 0.\tag{23}$$

Reciprocamente, dadas três funções  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  que satisfazem (22) e (23) podem ser representadas na forma (21), exceto quando  $\phi_1 \equiv i\phi_2$  e  $\phi_3 \equiv 0$ .

**Demonstração:** Primeiramente, vamos conferir (22), donde obtemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3 \phi_j^2 &= \frac{1}{4}f^2(1 + g^4 - 2g^2) - \frac{1}{4}f^2(1 + g^4 + 2g^2) + f^2g^2 \\ &= -\frac{1}{2}f^2g^2 - \frac{1}{2}f^2g^2 + f^2g^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo obtemos (22). Para conferir (23), devemos garantir que tais funções não se anulem simultaneamente, para isto, vamos supor que  $\phi_3 = 0$ , logo, temos duas possibilidades,  $f = 0$  ou  $g = 0$ , vamos analisar primeiramente o caso em que  $f = 0$ , para isto, seja  $z_0$  um zero de  $f$ , e pela propriedade imposta no Teorema, se  $z_0$  é um zero de ordem  $2n$  de  $f$ , então,  $z_0$  é um polo de ordem  $n$  de  $g$ , ou seja, existe  $h$  função holomorfa em  $U$ , tal que podemos escrever

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n}, \quad h(z_0) \neq 0.$$

E como  $z_0$  é um zero de ordem  $2n$  de  $f$ , existe  $p(z)$  função holomorfa em  $U$ , tal que

$$f(z) = (z - z_0)^{2n}p(z), \quad p(z_0) \neq 0.$$

Desta forma, observe que o produto

$$fg^2 = \frac{h^2(z)}{(z - z_0)^{2n}}(z - z_0)^{2n}p(z) = h^2(z)p(z).$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \phi_1(z_0) &= -\frac{1}{2}f(z_0)g^2(z_0) = -\frac{1}{2}h^2(z_0)p(z_0) \neq 0 \\ \phi_2(z_0) &= \frac{i}{2}f(z_0)g^2(z_0) = \frac{i}{2}h^2(z_0)p(z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Agora, vamos supor que  $g(z_0) = 0$ , logo, teremos

$$\begin{aligned} \phi_1(z_0) &= -\frac{1}{2}f(z_0) \neq 0 \\ \phi_2(z_0) &= \frac{i}{2}f(z_0) \neq 0, \end{aligned}$$

pois, pela propriedade imposta, os únicos zeros de  $f$  são os polos de  $g$ . Daí, podemos ver que as funções não se anulam simultaneamente, logo, obtemos (23).

Reciprocamente, supomos que  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  satisfazem (22) e (23). Com isso, defina

$$f = \phi_1 - i\phi_2 \tag{24}$$

$$g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}. \tag{25}$$

Multiplicando (24) por (25), obtemos

$$fg = \phi_3. \tag{26}$$

Como  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} -\phi_3^2 &= \phi_1^2 + \phi_2^2 \\ &= (\phi_1 + i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) = (\phi_1 + i\phi_2)f. \end{aligned}$$

Logo,

$$-f^2g^2 = (\phi_1 + i\phi_2)f,$$

ou seja,

$$-fg^2 = (\phi_1 + i\phi_2).$$

Usando (25), temos

$$\begin{aligned}
 1 + g^2 &= 1 + \frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = \frac{\phi_1^2 - \phi_2^2 - 2i\phi_1\phi_2 + \phi_3}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\
 &= \frac{-2\phi_2^2 - 2i\phi_1\phi_2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = \frac{-2i\phi_2(-i\phi_2 + \phi_1)}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\
 &= \frac{-2i\phi_2}{f}.
 \end{aligned}$$

Assim, concluimos que

$$\phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2). \quad (27)$$

Como  $\phi_1 = f + i\phi_2$ , temos que

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= f + \frac{i^2}{2}f(1 + g^2) \\
 &= f - \frac{1}{2}f(1 + g^2).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2). \quad (28)$$

Obviamente, estes resultados não estão bem definidos para  $\phi_1 \equiv i\phi_2$ , por ser o denominador de  $g$ , por outro lado, isto implicaria  $\phi_3 \equiv 0$ , que são os casos excluídos do Teorema. ■

As funções obtidas no Teorema anterior, são mais conhecidas com as *Representações de Weierstrass*, objetos de estudo deste trabalho.

**Definição 5.10** *Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície mínima com parametrizações isotérmicas, o par de funções  $(f, g)$  associados a  $X$  são chamados de dados de Weierstrass da superfície.*

Com tudo que já vimos, podemos enunciar o

**Teorema 5.4 (Representação de Weierstrass)** *Qualquer superfície mínima regular com parametrizações isotérmicas  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  não plana sobre um domínio  $U \subset \mathbb{C}$  simplesmente conexo, pode ser representado na forma*

$$x_1(u, v) = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_{z_0}^z f(z)(1 - g^2(z)) dz \right] = \Re \int_{z_0}^z \phi_1(z) dz \quad (29)$$

$$x_2(u, v) = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_{z_0}^z if(z)(1 + g^2(z)) dz \right] = \Re \int_{z_0}^z \phi_2(z) dz \quad (30)$$

$$x_3(u, v) = \Re \left[ \int_{z_0}^z f(z)g(z) dz \right] = \Re \int_{z_0}^z \phi_3(z) dz, \quad (31)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções holomorfa e meromorfa, respectivamente, satisfazendo a condição do Teorema 5.2 em  $U$ . Reciprocamente dada duas funções  $f, g$  holomorfas, satisfazendo a condição do Teorema 5.2, então existe uma superfície mínima não plana em  $\mathbb{R}^3$  na forma (29), (30) e (31).

A demonstração do Teorema 5.3 já foi realizado implicitamente em nossas discussões. O fato da condição da superfície ser não plana, decorre que neste caso, teríamos as exceções do Teorema 5.2, que seria  $\phi_1 = i\phi_2$  e  $\phi_3 = 0$ . Logo,  $x_3$  constante em  $U$ , o que caracteriza o plano. Além disso, observe que as exceções do Teorema 5.2 existem por causa de sua construção, mas pode ser que as exceções existam e mesmo assim tenhamos uma superfície mínima, como será visto no Exemplo 5.1.

Vale ressaltar que, de nossas discussões,  $z_0 = x_j(u_0, v_0)$ ,  $z = x_j(u, v)$ , onde as integrais acima podem ser calculadas sobre qualquer curva que ligue  $z_0$  a  $z$ , uma vez que  $U$  é simplesmente conexo e  $f, g$  são holomorfas, a integral independe do caminho de integração.

Vamos agora obter alguns exemplos de superfícies mínimas através da representação de Weierstrass.

**Exemplo 5.3 (Plano)** *Vamos considerar as funções  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por  $g(z) = 0$  e  $f(z) = 1$ , obviamente estas funções não satisfazem as hipótese do Teorema 5.3, mesmo assim caracterizam uma superfície mínima, logo, temos que*

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^z dz \right] = \frac{1}{2} \Re[z] = \frac{1}{2} \Re[u + iv] = \frac{u}{2} \\ x_2(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^z i dz \right] = \frac{1}{2} \Re[iz] = \frac{1}{2} \Re[ui - v] = \frac{-v}{2} \\ x_3(u, v) &= \Re \left[ \int_0^z 0 dz \right] = c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ou seja, obtivemos a superfície  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por

$$X(u, v) = \left( \frac{u}{2}, \frac{-v}{2}, c \right), \quad (u, v) \in U, \quad c \in \mathbb{R}$$

que é justamente um plano paralelo ao plano  $xy$ , que como já vimos é uma superfície

mínima.

**Exemplo 5.4 (Catenóide)** Seja  $U \subset \mathbb{C} - 0$ , definimos as funções  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ , dadas por  $f(z) = \frac{1}{z^2}$ ,  $g(z) = z$ , estas funções são holomorfas e não possuem polos, uma vez que  $U$  não contém o zero, portanto tais funções satisfazem as condições do Teorema 5.3. Logo, temos que, para  $x_1$

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z f(z) (1 - g^2(z)) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z \left( \frac{1}{z^2} - 1 \right) dz \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[ \left( 1 - \frac{1}{z} \right) - (z - 1) \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ 2 - \frac{\bar{z}}{|z|^2} - z \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[ 2 - \frac{u - iv}{u^2 + v^2} - u - iv \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{u^2 + v^2} + u \right). \end{aligned}$$

Para  $x_2$ , temos

$$\begin{aligned} x_2(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z i f(z) (1 + g^2(z)) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z \left( \frac{i}{z^2} + i \right) dz \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[ i \left( z - \frac{1}{z} \right) \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ i \left( z - \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[ i \left( u + iv - \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{v}{u^2 + v^2} + v \right). \end{aligned}$$

E por último, para  $x_3$ , obtemos

$$x_3(u, v) = \Re \left[ \int_1^z f(z) g(z) dz \right] = \Re \left[ \int_1^z \frac{1}{z} dz \right] = \Re [\ln |z| + i \arg z] = \frac{1}{2} \ln (u^2 + v^2)$$

Podemos fazer uma mudança de coordenadas. Logo, considerando as coordenadas polares, temos que

$$u = r \cos \theta$$

$$v = r \sin \theta,$$

com  $r > 0$ . Logo, temos que

$$u^2 + v^2 = r^2.$$

Com isso, teremos

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \theta}{r} + r \cos \theta \right) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + r \right) \cos \theta \\x_2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\sen \theta}{r} + r \sen \theta \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + r \right) \sen \theta \\x_3 &= \frac{1}{2} \ln r^2 = \ln r.\end{aligned}$$

Fazendo outra mudança de coordenada, seja  $t = \ln r$ , com isso, teremos que

$$r = e^t.$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 - \frac{1}{2} (e^{-t} + e^t) \cos \theta \\x_2 &= -\frac{1}{2} (e^{-t} + e^t) \sen \theta \\x_3 &= t.\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t.$$

Portanto, a superfície encontrada é

$$X(\theta, t) = (1 - \cos \theta \cosh t, -\sen \theta \cosh t, t), \quad t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi].$$

que representa uma catenóide, que, já mencionamos, é a única superfície mínima de revolução.

**Exemplo 5.5 (Superfície de Enneper)** Considere as funções  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definidas por  $f(z) = 1$  e  $g(z) = z$ , estas funções são holomorfas e  $f$  não possui zeros. Logo, tais funções satisfazem as condições do Teorema 5.3, com isso, podemos obter uma superfície mínima utilizando a representação de Weierstrass, portanto, teremos:

$$\begin{aligned}x_1(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^z f(z) (1 - g^2(z)) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^z (1 - z^2) dz \right] \\&= \frac{1}{2} \Re \left[ z - \frac{z^3}{3} \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ u + iv - \frac{u^3 + 3u^2iv - 3uv^2 - iv^3}{3} \right] \\&= \frac{1}{2} \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^z i f(z) (1 + g^2(z)) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^z (i + iz^2) dz \right] \\
&= \frac{1}{2} \Re \left[ iz + \frac{iz^3}{3} \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ i(u + iv) + \frac{i(u + iv)^3}{3} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( -v + \frac{v^3 - 3u^2v}{3} \right) = -\frac{1}{2} \left( v - \frac{v^3}{3} + u^2v \right), \\
x_3(u, v) &= \Re \left[ \int_0^z f(z)g(z)dz \right] = \Re \left[ \int_0^z z dz \right] = \Re \left[ \frac{z^2}{2} \right] \\
&= \Re \left[ \frac{(u + iv)^2}{2} \right] = \Re \left[ \frac{u^2 - v^2 + 2iuv}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} (u^2 - v^2).
\end{aligned}$$

E com isso, encontramos a superfície

$$X(u, v) = \left( \frac{1}{2} \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \right), -\frac{1}{2} \left( v - \frac{v^3}{3} + u^2v \right), \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \right),$$

que é justamente a parametrização da superfície de Enneper multiplicada pela constante  $\frac{1}{2}$ , e como vimos anteriormente é uma superfície mínima. Observe que para esta parametrização ficar como o exemplo 4.1, basta tomar a mudança de variável  $\bar{v} = -v$ .

**Exemplo 5.6 (Helicóide)** Considere as funções complexas  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $U \subset \mathbb{C} - \{0\}$ , definidas por  $f(z) = \frac{i}{z^2}$  e  $g(z) = z$ . Tais funções satisfazem as condições do Teorema 5.3. Logo, caracterizam uma superfície mínima, portanto:

$$\begin{aligned}
x_1(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z f(z) (1 - g^2(z)) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z \left( \frac{i}{z^2} - i \right) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ i - \frac{i}{z} + i - iz \right] \\
&= \frac{1}{2} \Re \left[ 2i - \frac{i u + v}{u^2 + v^2} - i u + v \right] = \frac{1}{2} \left( v - \frac{v}{u^2 + v^2} \right).
\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável  $w = -u$ , em coordenadas polares, temos que

$$w = r \cos \theta$$

$$v = r \sin \theta$$

com  $r > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ , logo, teremos que

$$x_1(r, \theta) = \frac{1}{2} \left( r \sin \theta - \frac{\sin \theta}{r} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{r^2 \sin \theta - \sin \theta}{r} \right) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{r^2 - 1}{r} \right) \sin \theta \right).$$

Para  $x_2(u, v)$ , temos

$$\begin{aligned} x_2(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z i f(z) (1 + g^2(z)) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z \left( -\frac{1}{z^2} - 1 \right) dz \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[ \frac{1}{z} + 1 - 1 - z \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ \frac{u - iv}{u^2 + v^2} - u - iv \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left( u - \frac{u}{u^2 + v^2} \right). \end{aligned}$$

Fazendo a mudança  $w = -u$ , temos que

$$x_2(w, v) = \frac{1}{2} \left( w - \frac{w}{w^2 + v^2} \right).$$

Portanto, em coordenadas polares, teremos

$$x_2(r, \theta) = \frac{1}{2} \left( r \cos \theta - \frac{\cos \theta}{r} \right) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{r^2 - 1}{r} \right) \cos \theta \right).$$

E por último, para  $x_3(u, v)$ , teremos

$$x_3(u, v) = \Re \left[ \int_i^z \frac{i}{z} dz \right] = \Re [i \ln z] = \Re [i (\ln |z| + i \arg z)] = -\arctan \frac{v}{u}.$$

Fazendo a mudança  $w = -u$ , temos que

$$x_3(w, v) = -\arctan \frac{v}{-w}$$

Em coordenadas polares teremos

$$x_3(r, \theta) = -\arctan(-\tan \theta) = \theta.$$

Fazendo a mudança de variável  $t = \ln r$ , temos que  $r = e^t$ , e com isso ficamos com

$$\begin{aligned} x_1(t, \theta) &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{e^{2t} - 1}{e^t} \right) \sin \theta \right) = \left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \sin \theta = \sin \theta \sinh t, \\ x_2(t, \theta) &= \left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \cos \theta = \cos \theta \sinh t, \\ x_3(t, \theta) &= \theta. \end{aligned}$$

Assim, encontramos a superfície

$$X(t, \theta) = (\sin \theta \sinh t, \cos \theta \sinh t, \theta),$$

com  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , que é justamente uma *Helicóide*, que como vimos anteriormente,



de fato, é uma superfície mínima.

**Exemplo 5.7 (Superfície de Scherk)** Seja agora  $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ , e definamos as funções  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por  $f(z) = \frac{4}{1-z^4}$  e  $g(z) = z$ . Tais funções são holomorfas, e além disso  $f$  não possui zeros, logo, satisfazem as condições do Teorema 5.3. e com isso, elas caracterizam uma superfície mínima. Com isso, temos

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^z f(z) (1 - g^2(z)) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^z \left( \frac{4}{1-z^4} - \frac{4z^2}{1-z^4} \right) dz \right] \\ &= \Re \left[ \int_0^z \left( \frac{2}{1+z^2} \right) dz \right] = \Re [2 \arctan z]. \\ x_2(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^z i f(z) (1 + g^2(z)) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_0^z \left( \frac{4i}{1-z^4} + \frac{4iz^2}{1-z^4} \right) dz \right] \\ &= \Re \left[ \int_0^z \left( \frac{2i}{1-z^2} \right) dz \right] = \Re \left[ i \ln \left( \frac{z+1}{1-z} \right) \right] \\ &= \Re \left[ i \left( \ln \left| \frac{z+1}{1-z} \right| + i \arg \left( \frac{z+1}{1-z} \right) \right) \right]. \\ x_3(u, v) &= \Re \left[ \int_0^z f(z) g(z) dz \right] = \Re \left[ \int_0^z \left( \frac{4z}{1-z^4} \right) dz \right] = \Re \left[ \ln \left( \frac{z^2+1}{1-z^2} \right) \right] \\ &= \Re \left[ \ln \left| \frac{z^2+1}{1-z^2} \right| + i \arg \left( \frac{z^2+1}{1-z^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

De variáveis complexas, temos que

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-z}{i+z} = \frac{1}{2i} \left( \ln \left| \frac{i-z}{i+z} \right| + i \arg \left( \frac{i-z}{i+z} \right) \right).$$

Donde concluimos que

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \Re \left[ \frac{1}{i} \left( \ln \left| \frac{i-z}{i+z} \right| + i \arg \left( \frac{i-z}{i+z} \right) \right) \right] = \arg \left( \frac{i-z}{i+z} \right), \\ x_2(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ 2i \left( \ln \left| \frac{z+1}{1-z} \right| + i \arg \left( \frac{z+1}{1-z} \right) \right) \right] = -\arg \left( \frac{z+1}{1-z} \right), \\ x_3(u, v) &= \ln \left| \frac{z^2+1}{1-z^2} \right|. \end{aligned}$$

Lembrando que o  $\arg z$  é um valor real, na qual é a medida do ângulo que o eixo real  $u$  faz com o eixo imaginário  $z$ . E com isso, temos que

$$\arg \left( \frac{i-z}{i+z} \right) = \arg \left( \frac{i-z-i+\bar{z}}{i+z-i+\bar{z}} \right) = \arg \left( \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2+2v} + i \frac{2u}{1+u^2+v^2+2v} \right).$$

Lembre que sendo  $z = x + iy$  temos que  $\arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , e com isso, teremos que

$$\arg\left(\frac{i-z}{i+z}\right) = \arctan\left(\frac{2u}{1-u^2-v^2}\right) = \arctan\left(\frac{-2u}{u^2+v^2-1}\right),$$

observe também que

$$\frac{z+1}{1-z} \frac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}} = \frac{1-u^2-v^2}{u^2+v^2+1-2u} + i \frac{2v}{u^2+v^2+1-2u}.$$

E com isso, obtemos

$$\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \arctan\left(\frac{-2v}{u^2+v^2-1}\right).$$

Veja que

$$\ln\left|\frac{z^2+1}{1-z^2}\right| = \ln|z^2+1| - \ln|1-z^2| = \ln|(u^2-v^2+1)+2iuv| - \ln|(v^2-u^2+1)-2iuv|.$$

Donde concluímos que

$$\ln\left|\frac{z^2+1}{1-z^2}\right| = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2}{(v^2-u^2+1)^2+4u^2v^2}\right).$$

E com tudo isso, encontramos que

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \arctan\left(\frac{-2u}{u^2+v^2-1}\right) \\ x_2(u, v) &= -\arctan\left(\frac{-2v}{u^2+v^2-1}\right) \\ x_3(u, v) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(u^2-v^2+1)^2+4u^2v^2}{(v^2-u^2+1)^2+4u^2v^2}\right). \end{aligned}$$

Lembre que  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ , desta forma temos que

$$\begin{aligned} \cos x_1 &= \frac{u^2+v^2-1}{\sqrt{4u^2+(u^2+v^2-1)^2}} \\ \cos x_2 &= \frac{u^2+v^2-1}{\sqrt{4v^2+(u^2+v^2-1)^2}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\cos x_2}{\cos x_1} = \sqrt{\frac{4u^2+(u^2+v^2-1)^2}{4v^2+(u^2+v^2-1)^2}} = \sqrt{\frac{4u^2+u^4+v^4+1+2u^2v^2-2u^2-2v^2}{4v^2+u^4+v^4+1+2u^2v^2-2u^2-2v^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{4u^2 + u^4 + v^4 + 1 + 2u^2v^2 - 2u^2 - 2v^2 + 2u^2v^2 - 2u^2v^2}{4v^2 + u^4 + v^4 + 1 + 2u^2v^2 - 2u^2 - 2v^2 + 2u^2v^2 - 2u^2v^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(u^2 - v^2 + 1)^2 + 4u^2v^2}{(v^2 - u^2 + 1)^2 + 4u^2v^2}}.
\end{aligned}$$

E com isso, vemos que

$$x_3(u, v) = \ln \frac{\cos x_2}{\cos x_1}, \quad x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Isto é, a superfície encontrada é da forma

$$X(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \ln \frac{\cos x_2}{\cos x_1}\right),$$

que é o gráfico da função  $f(x_1, x_2) = \ln \frac{\cos x_2}{\cos x_1}$ , que como vimos anteriormente é a superfície de Scherk.

**Exemplo 5.8 (Superfície de Henneberg)** Seja  $U \subset \mathbb{C} - \{0\}$ , e considere as funções  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = 2\left(1 - \frac{1}{z^4}\right)$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $g(z) = z$ , veja que estas funções são holomorfas em  $U$  e além disso não temos problemas com os zeros e polos, portanto satisfazem as condições do Teorema 5.3. Com isso, teremos:

$$\begin{aligned}
x_1(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z f(z) (1 - g^2(z)) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z 2 \left(1 - \frac{1}{z^4} - z^2 + \frac{1}{z^2}\right) dz \right] \\
&= \Re \left( z - 1 + \left(\frac{1}{3z^3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{z^3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{z} + 1 \right) = \Re \left( z + \frac{1}{3z^3} - \frac{z^3}{3} - \frac{1}{z} \right) \\
&= \Re \left( \frac{3z^4 + 1 - z^6 - 3z^2}{3z^3} \right) = \Re \left( \frac{(1 - z^2)^3}{3z^3} \right) = \Re \left( \frac{(1 - z^2)^3 \bar{z}^3}{3z^3 \bar{z}^3} \right) \\
&= \Re \left( \frac{(\bar{z} - z|z|^2)^3}{3|z|^6} \right) = \Re \left( \frac{\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 z|z|^2 + 3\bar{z} z^2|z|^4 - z^3|z|^6}{3|z|^6} \right) \\
&= \Re \left( \frac{\bar{z}^3 - 3\bar{z}|z|^4 + 3z|z|^6 - z^3|z|^6}{3|z|^6} \right) = \Re \left( \frac{\bar{z}^3}{3|z|^6} - \frac{\bar{z}}{|z|^2} + z - \frac{z^3}{3} \right) \\
&= \Re \left( \frac{(u - iv)^3}{3(u^2 + v^2)^3} - \frac{u - iv}{u^2 + v^2} + u + iv - \frac{(u + iv)^3}{3} \right) \\
&= \Re \left( \frac{u^3 - 3iu^2v - 3uv^2 + iv^3}{3(u^2 + v^2)^3} - \frac{u - iv}{u^2 + v^2} + u + iv - \frac{u^3 + 3iu^2v - 3uv^2 - iv^3}{3} \right) \\
&= \frac{u^3 - 3uv^2}{3(u^2 + v^2)^3} - \frac{u}{u^2 + v^2} + u - \frac{u^3 - 3uv^2}{3}.
\end{aligned}$$

Em coordenadas polares, teremos,

$$x_1(r, \theta) = \frac{r^3 \cos^3 \theta - 3r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{3r^6} - \frac{r \cos \theta}{r^2} + r \cos \theta - \frac{r^3 \cos^3 \theta - 3r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(r^3 \cos^3 \theta - 3r^3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta - 3r^5 \cos \theta + 3r^7 \cos \theta - r^9 \cos^3 \theta + 3r^9 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta)}{3r^6} \\
&= \cos^3 \theta \left( \frac{1}{3r^3} - \frac{r^3}{3} \right) + \cos \theta \left( r - \frac{1}{r} \right) + \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta \left( r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \\
&= \cos \theta \left( r - \frac{1}{r} \right) + \left( r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \left( \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \\
&= \cos \theta \left( r - \frac{1}{r} \right) + \frac{\cos 3\theta}{3} \left( r^3 - \frac{1}{r^3} \right).
\end{aligned}$$

Para  $x_2(u, v)$ , teremos:

$$\begin{aligned}
x_2(u, v) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \int_1^z i f(z) (1 + g^2(z)) dz \right] = \frac{1}{2} \Re \left[ 2i \int_1^z \left( 1 - \frac{1}{z^4} + z^2 - \frac{1}{z^2} \right) dz \right] \\
&= \Re \left[ i \left( z - 1 + \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{3} + \frac{z^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{z} - 1 \right) \right] \\
&= \Re \left[ i \left( \frac{3z^4 + 1 - z^3 + z^6 - z^3 + 3z^2 - 6z^3}{3z^3} \right) \right] \\
&= \Re \left[ i \left( \frac{z^6 + 3z^4 - 8z^3 + 3z^2 + 1}{3z^3} \right) \right] \\
&= \Re \left[ i \left( \frac{(z^2 + 1)^3}{3z^3} - \frac{8}{3} \right) \right] = -\Re \left[ i \left( \frac{(z^2 + 1)^3 \bar{z}^3}{3z^3 \bar{z}^3} - \frac{8}{3} \right) \right] \\
&= \Re \left[ i \left( \frac{(z^2 \bar{z} + \bar{z})^3}{3|z|^6} - \frac{8}{3} \right) \right] = -\Re \left[ i \left( \frac{(z|z|^2 + \bar{z})^3}{3|z|^6} - \frac{8}{3} \right) \right] \\
&= \Re \left[ i \left( \frac{z^3 |z|^6 + 3z|z|^6 + 3\bar{z}|z|^4 + \bar{z}^3}{3|z|^6} - \frac{8}{3} \right) \right] \\
&= \Re \left[ i \left( \frac{z^3}{3} + z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} + \frac{\bar{z}^3}{3|z|^6} - \frac{8}{3} \right) \right] \\
&= \Re \left[ i \left( \frac{(u + iv)^3}{3} + u + iv + \frac{u - iv}{u^2 + v^2} + \frac{(u - iv)^3}{3(u^2 + v^2)^3} - \frac{8}{3} \right) \right] \\
&= - \left( \frac{3u^2v - v^3}{3} + v - \frac{v}{u^2 + v^2} + \frac{v^3 - 3u^2v}{3(u^2 + v^2)^3} \right).
\end{aligned}$$

Em coordenadas polares, teremos:

$$\begin{aligned}
x_2(r, \theta) &= -\operatorname{sen}^3 \theta \left( \frac{1}{3r^3} - \frac{r^3}{3} \right) - \operatorname{sen} \theta \left( r - \frac{1}{r} \right) - \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta \left( r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \\
&= -\operatorname{sen} \theta \left( r - \frac{1}{r} \right) - \left( r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \left( \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{3} \right) \\
&= -\operatorname{sen} \theta \left( r - \frac{1}{r} \right) - \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{3} \left( r^3 - \frac{1}{r^3} \right).
\end{aligned}$$

E por fim, para  $x_3(u, v)$ , teremos

$$x_3(u, v) = \Re \left[ \int_1^z f(z) g(z) dz \right] = \Re \left[ 2 \int_1^z \left( z - \frac{1}{z^3} \right) dz \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \Re \left[ 2 \left( \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{z^2} - 1 \right) \right] = 2\Re \left[ \frac{(u+iv)^2}{2} + \frac{1}{(u+iv)^2} - \frac{3}{2} \right] \\
&= 2 \left( \frac{u^2 - v^2}{2} + \frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} - \frac{3}{2} \right) = u^2 - v^2 + \frac{2(u^2 - v^2)}{(u^2 + v^2)^2} - 3.
\end{aligned}$$

Em coordenadas polares, teremos

$$\begin{aligned}
x_3(r, \theta) &= r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta + \frac{2(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)}{r^4} - 3 \\
&= \cos^2 \theta \left( r^2 + \frac{2}{r^2} \right) - \sin^2 \theta \left( r^2 + \frac{2}{r^2} \right) - 3 = \cos 2\theta \left( r^2 + \frac{2}{r^2} \right) - 3,
\end{aligned}$$

onde  $r > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Assim, encontramos a superfície

$$\begin{aligned}
x_1(r, \theta) &= \cos \theta \left( r - \frac{1}{r} \right) + \frac{\cos 3\theta}{3} \left( r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \\
x_2(r, \theta) &= -\sin \theta \left( r - \frac{1}{r} \right) - \frac{\sin 3\theta}{3} \left( r^3 - \frac{1}{r^3} \right) \\
x_3(r, \theta) &= \cos 2\theta \left( r^2 + \frac{2}{r^2} \right) - 3.
\end{aligned}$$

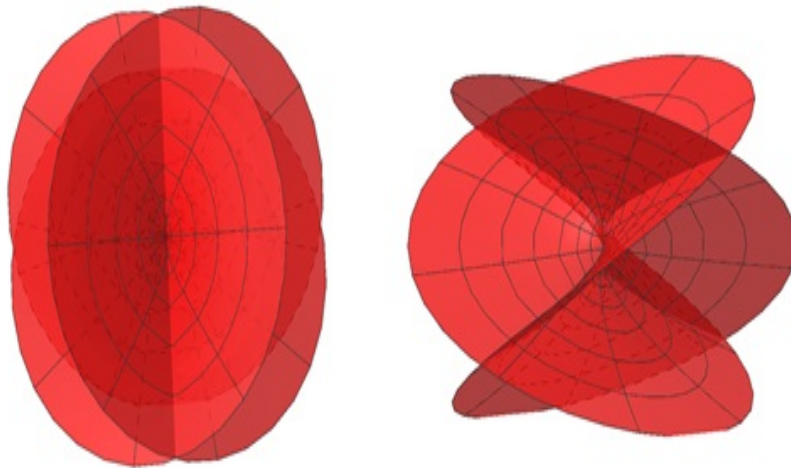


Figura 27: Superfície mínima de Henneberg vista de dois ângulos.

Fonte: Autor, 2018.

Podemos ver que as funções  $f$  e  $g$  da representação de Weierstrass, podem ser bem mais simples que as funções coordenadas de uma parametrização de superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$ , e por isso, esta representação é tão importante. Além disso, ela nos possibilita obter uma infinidade de superfícies mínimas, o que antes era algo muito difícil.

## 6 Superfícies Costa e Jorge-Meeks: Um pouco da história.

Nesta seção, falaremos um pouco da história de como estas duas superfícies foram descobertas, sobretudo, por serem frutos de pesquisas brasileiras na qual desempenharam um importante papel no estudo de superfícies mínimas.

### 6.1 Superfície Costa

Antes de falarmos sobre a importante descoberta feita pelo brasileiro de Congonhinhas no Paraná, Celso José da Costa. Precisamos saber algumas Definições para falarmos de sua grande descoberta.

**Definição 6.1** *Uma curva parametrizada, não constante,  $\gamma : I \rightarrow S$  é chamada geodésica em  $t \in I$  se o seu campo de vetores tangentes  $\gamma'(t)$  é paralelo ao longo de  $\gamma$  em  $t$ ; isto é*

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0;$$

$\gamma$  é uma geodésica parametrizada se é geodésica para todo  $t \in I$ .

Vale ressaltar que  $\frac{D\gamma'(t)}{dt}$  é chamado de derivada covariante de  $\gamma'(t)$  em  $t$ . Para mais detalhes veja (CARMO, 2014).

**Definição 6.2** *Uma superfície regular conexa  $S$  é denominada completa quando para qualquer ponto  $p \in S$ , qualquer geodésica parametrizada  $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow S$  de  $S$ , começando em  $p = \gamma(0)$ , pode ser estendida em uma geodésica parametrizada  $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$ , definida sobre toda a reta real  $\mathbb{R}$ .*

A curvatura total de uma superfície  $S$ , será entendida como a integral da curvatura Gaussiana. Se esta integral for finita, diremos que  $S$  tem curvatura total finita.

Dos exemplos de superfícies mínimas vistos, apenas o plano e o catenóide são superfícies regulares mínimas com curvatura total finita. E por muito tempo estes foram os únicos exemplos. Até que no início da década de 80, enquanto o brasileiro assistia no cinema um filme sobre escola de samba e se deparou com um sambista de chapéu com três abas, aquilo lhe chamou atenção, dando-lhe ideia de como seria a figura geométrica que buscava para sua tese de doutorado. A superfície encontrada por Costa, parece uma junção do Toro com uma Catenóide (Figura 28).

De fato, o resultado principal obtido através da superfície Costa, foi a da existência de uma superfície mínima regular e completa no espaço Euclidiano tridimensional com a topologia do toro menos três pontos.

O problema é que naquela época, no Brasil, não se tinha computadores capazes de fazerem um esboço de tal superfície. Só em 1984, J. Hoffman, D. Hoffman e W. W. Meeks, da Universidade de Massachusetts, conseguiram criar sua imagem computacional e posteriormente, mais precisamente em março de 1984, comprovando todos os resultados obtidos pelo brasileiro.

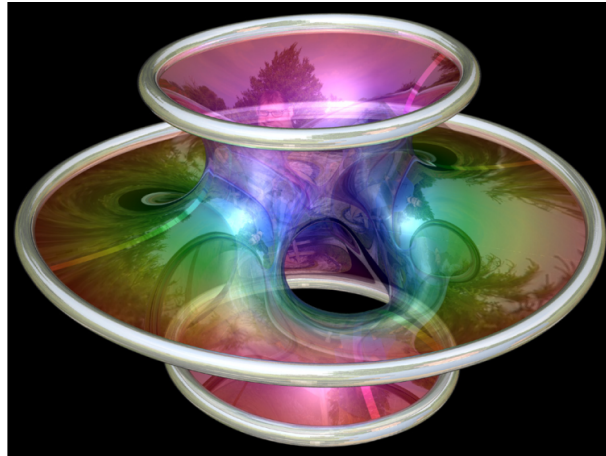


Figura 28: Superfície Costa.

Fonte: Google.

A superfície Costa além de ser o terceiro exemplo de superfície mínima com características bem peculiares, procurada a tantos anos, também desempenhou um importante papel no desenvolvimento da computação gráfica. Além disso, o resultado obtido pelo brasileiro contribuiu bastante para técnicas de solução de problemas relacionados a área de superfícies mínimas, fazendo assim, com que seu trabalho ganhasse ainda mais respaldo.

Muitos artistas ganharam prêmios utilizando como inspiração a estrutura da superfície Costa, ou seja, além de um belo resultado matemático se tornou uma bela obra de arte.



Figura 29: Escultura de gelo da Superfície Costa.

Fonte: Google.

Costa obteve tal superfície utilizando a Representação de Weierstrass, embora seu desenvolvimento, por enquanto, esteja além do exposto neste trabalho e por isso, omitiremos os cálculos para obter tal superfície.

## 6.2 Superfície de Jorge-Meeks

Luquésio Petrola de Melo Jorge é professor da Universidade federal do Ceará que juntamente com William Meeks da Universidade de Massachusetts, construíram uma família enumerável de superfícies mínimas completas em  $\mathbb{R}^3$  denominadas de superfície de Jorge-Meeks. Tais superfícies são uma generalização da catenóide e também foram obtidas através da Representação de Weierstrass.

Através da Representação de Weierstrass, temos o par de Weierstrass dado por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z^{n+1} - 1)^2}, & \text{se } z \neq \infty \\ 0, & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} z^n, & \text{se } z \neq \infty \\ \infty, & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

Onde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Observe que a catenóide é o caso  $n = 1$  da superfície de Jorge-Meeks.

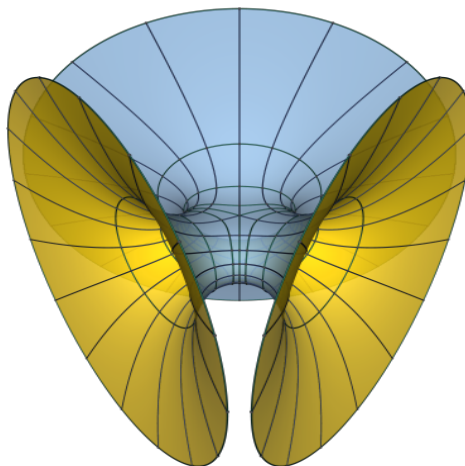


Figura 30: Superfície de Jorge-Meeks para o caso  $n=2$ .

Fonte: Google.

As superfícies de Jorge-Meeks também são superfícies mínimas completas de curvatura total finita, até porque, como falamos, é uma generalização da Catenóide. As pesquisas realizadas por Jorge e Meeks contribuíram fortemente para os estudos de superfícies mínimas. A Figura 30 é usada como uma das logo dos cursos de pós graduação em matemática da Universidade Federal do Ceará, mostrando o tão importante que foram as pesquisas de Luquésio Jorge, especialmente por ser um professor da instituição.



## 7 CONCLUSÃO

O estudo de geometria diferencial, sobretudo de superfícies mínimas, nos possibilita obter resultados que, de fato, podem ter uma aplicação não apenas teórica, mas também prática, uma vez que algumas das superfícies mínimas estão inseridas em nosso cotidiano.

Em meados do século XIX, as superfícies mínimas eram difíceis de se obter, mudando este aspecto por volta de 1866, cem anos depois da Definição de superfície mínima, com as pesquisas feitas por Weierstrass, onde ele obteve um mecanismo que descrevia todas as superfícies mínimas, relacionando tais superfícies com funções holomorfas.

Estudar geometria diferencial, nos possibilita ver os conteúdos dos cursos de cálculos, sobretudo relacionados a vetor, área, superfícies, de uma maneira mais consistente, pois conseguimos descrever mais rigorosamente o comportamento de uma superfície.

Uma vez que a disciplina de geometria diferencial é uma cadeira optativa, em alguns cursos de licenciatura em matemática, logicamente, encontramos algumas dificuldades, que com muito esforço e dedicação puderam ser sanadas. Esperamos que o assunto abordado neste trabalho possam ajudar outras pessoas interessadas nesta área do conhecimento, e pensando nisso, procuramos fazer uma abordagem com linguagem simplificada, tentando mostrar todos os cálculos, que muitas vezes são omitidos nos livros, para que o leitor não ficasse com dúvidas e conseqüentemente ter uma leitura frustrada.

Por fim, aos leitores interessados em geometria diferencial, mas que não tem familiaridade com a mesma, recomendamos uma leitura inicial do livro de (TENENBLAT, 2008) e posteriormente (CARMO, 2014), pois, acreditamos que desta forma o leitor encontrará mais facilidades nos assuntos abordados e conseqüentemente, terá um aprendizado mais significativa.

## REFERÊNCIAS

- ALVAREZ, Y. N., *Superfícies Mínimas Completas e Limitadas em  $\mathbb{R}^3$* . Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, 2015.
- ÁVILA, Geraldo, *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 2024p.
- CARMO, M. P. do, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- CARMO, M. P. do, *Superfícies Mínimas*, 16º Colóquio Brasileiro de Matemática. 2ª ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.
- HABER, Howard, *The complex inverse trigonometric and hyperbolic functions*. Universidade da Califórnia, 2010. Disponível em: [scipp.ucsc.edu/~haber/archives/physics116A10/arc\\_10.pdf](http://scipp.ucsc.edu/~haber/archives/physics116A10/arc_10.pdf). Acesso em 05 de março de 2018.
- KAWANO, Carmem, *A bolha de sabão em números: Como a arte inspirou a matemática (e vice-versa) no estudo de figuras geométricas*. **Revista Galileu**, 2015. Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT656726-2680,00.html>. Acesso em 20 de maio de 2018.
- NUNES, Bruna, *Geometria Diferencial de Superfícies e o Teorema de Gauss-Bonnet*. Trabalho de Conclusão de Curso, UFSC, Florianópolis, 2010.
- PEREIRA, F. A. M., *Superfícies Mínimas em  $\mathbb{R}^3$* . Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, 2013.
- SILVA, L. N. da, SILVA, M.P. da, *Uma Introdução ao Estudo de Superfícies Mínimas Utilizando o GeoGebra*. Revista do Instituto de GeoGebra Internacional de São Paulo, v.3, n.2, p.120-131, 2014.
- SOARES, M. G., *Cálculo em uma Variável Complexa*. 5ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- TENENBLAT, Ketí, *Introdução à Geometria Diferencial*. 2ª ed. São Paulo: Editora Blucher, 2008. v.1. 270p.