



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA  
AFRO-BRASILEIRA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
LICENCIATURA EM CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA**

**PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA**

**TÓPICOS DE GRAVITAÇÃO: FORMALISMOS, CORREÇÃO E ESTABILIDADE  
ORBITAL**

**ACARAPE - CE**

**2018**

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA

TÓPICOS DE GRAVITAÇÃO: FORMALISMOS, CORREÇÃO E ESTABILIDADE  
ORBITAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Ciências da Natureza e Matemática, da Universidade da Integração Intenacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Ciências da Natureza e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Michel Lopes Granjeiro.

Coorientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga.

PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA

TÓPICOS DE GRAVITAÇÃO: FORMALISMOS, CORREÇÃO E ESTABILIDADE  
ORBITAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Ciências da Natureza e Matemática, da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Ciências da Natureza e Matemática.

Aprovada em 04/06/2018.

BANCA EXAMINADORA

*Michel Lopes Granjeiro*

---

Prof. Dr. Michel Lopes Granjeiro - Orientador  
Universidade da Integração Internacional da  
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

*Ph. M. V.*

---

Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga - Coorientador  
Universidade da Integração Internacional da  
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

*Silvia Helena R. de Sena*

---

Profa. Dra. Silvia Helena Roberto de Sena  
Universidade da Integração Internacional da  
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Sistema de Bibliotecas da UNILAB  
Catalogação de Publicação na Fonte.

---

Oliveira, Pedro Henrique Ferreira de.

O42t

Tópicos de Gravitação: formalismos, correção e estabilidade orbital / Pedro Henrique Ferreira de Oliveira. - Redenção, 2018. 63f: il.

Monografia - Curso de Ciências Da Natureza E Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2018.

Orientador: Prof Dr. Michel Lopes Granjeiro.  
Coorientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga.

1. Gravitação. 2. Problema da Força Central. 3. Correção do Potencial da Terra. 4. Estabilidade Orbital. I. Título

CE/UF/BSCL

CDD 523.1

---

*Dedico este trabalho à  
minha família, que  
sempre me apoiou em  
todas as minhas  
decisões ao longo  
dessa caminhada, mas  
em especial aos meus  
pais, Raimundo  
Ferreira de Oliveira  
(in memoriam) e  
Joana D'arc de  
Oliveira, ao meu  
irmão Rodolfo  
Ferreira de Oliveira e  
à minha namorada  
Vanesca Almeida de  
Oliveira por todo o  
carinho dedicado a  
mim.*

## AGRADECIMENTOS

Para chegar onde cheguei, com os êxitos que obtive ao longo desta caminhada, foi necessário muita determinação, esforço, dedicação, abstenção e perseverança. De modo que, primeiramente, agradeço a mim mesmo, sem o qual este trabalho não seria possível.

Como dizia Martha Medeiros, 'em tempos em que quase ninguém se olha nos olhos, em que a maioria das pessoas pouco se interessa pelo que não lhe diz respeito, só mesmo agradecendo àqueles que percebem nossas descrenças, indecisões, suspeitas, tudo o que nos paralisa, e gastam um pouco da sua energia conosco, insistindo'.

Certamente minhas conquistas não são apenas minhas, mas também de minha família. Primeiramente gostaria de agradecer à minha querida mãe, Joana D'arc de Oliveira, por toda a parceria com que me acompanhou em toda essa longa jornada. Obrigado por todo o incentivo e apoio dedicados à mim. Obrigado pelas inúmeras noites que me esperou acordada para ouvir, atenta, as novidades que a faculdade proporcionava, a cada livro novo que eu lia, a cada trabalho entregue, a cada nota satisfatória obtida. Obrigado por tudo. Essa conquista é tua também.

Agradeço também ao meu irmão mais novo, Rodolfo Ferreira de Oliveira, pela paciência e pelo apoio prestado a mim. Obrigado por toda a tua cooperação e por algumas discussões ricas de aprendizado, sobretudo as críticas feitas, certamente sou mais forte graças à elas.

Dedico também essa conquista ao meu estimado pai, Raimundo Ferreira de Oliveira (*in memoriam*), que sempre foi e sempre será minha grande referência como pessoa, como homem, como marido e pai, que sempre se dedicou de corpo e alma a tudo que fazia, buscando fazer seu melhor (pessoal e profissionalmente), almejando a perfeição, mas sempre se dedicando à família e sendo muito presente em minha infância. Obrigado pai. Mesmo que o tempo nos faça um pouco longe, sempre estás perto de mim.

Sou eternamente grato à minha namorada Vanesca Almeida de Oliveira, o melhor presente que a universidade poderia ter me dado. Obrigado, meu amor, por tudo o que você transformou na minha vida. Obrigado pelo teu carinho, tua alegria, tua atenção, tua vibração com as minhas conquistas e teu ombro em cada momento difícil que você me ajudou a atravessar. Sem você, essa conquista não teria o mesmo gosto. Obrigado, meu amor. Eu te amo.

Ao professor Dr. Michel Lopes Granjeiro que, com muita paciência, dedicação e atenção, dedicou de seu valioso tempo para me orientar em toda a minha trajetória formativa enquanto graduando, desde o primeiro dia, sempre paciente e compreensivo. Meu mais sincero obrigado pelas imensas contribuições em minha vida acadêmica e por tanta influência na minha futura vida profissional. Agradeço ainda pela importante orientação acadêmica para a realização desta monografia.

Agradeço ao Professor Dr. João Philipe Macedo Braga pela co-orientação deste trabalho monográfico, sempre me instigando a ir além daquilo que outrora imaginava, permitindo que eu, com meu próprio esforço, pudesse efetivar coisas expressivas para a minha formação acadêmica.

Gostaria de agradecer à todo o elenco de profissionais com os quais convivi

(dentro e fora de sala de aula) nesses anos de Universidade, em especial aos doutores dos quais tive a oportunidade de ser estudante, dentre os quais destaco a Professora Dra. Mylene Ribeiro Moura Miranda, por todo o apoio dedicado a mim, sobretudo pelas conversas descontraídas sobre tópicos de física teórica e experimental.

Agradeço também àqueles que aqui não foram citados, em especial a secretária do Curso de Ciências da Natureza e Matemática, Carla Constantino, por todo o apoio e dedicação.

Aos professores participantes da banca examinadora, Dr. Michel Lopes Granjeiro, Dr. João Philipe Macedo Braga e Dra. Silvia Helena Roberto de Sena sou grato pelo tempo dedicado e pelas valiosas colaborações e sugestões para a melhoria deste e aperfeiçoamento de meus futuros trabalhos.

Agradeço, também, a todos que um dia contribuíram direta ou indiretamente com as atividades vinculadas aos meus projetos de Iniciação Científica. Sou grato especialmente à Antonio Luan Ferreira Eduardo, Fabricio Maia de Oliveira, e demais membros do Grupo de Ensino, Pesquisa e Popularização da Astronomia e Astrofísica (GEPPAA).

Deixo aqui registrado meu muito obrigado a dois professores que, em particular, contribuíram significativamente para minha formação acadêmica enquanto físico teórico, a Professora Dra. Silvia Helena Roberto de Sena e o Professor Dr. João Philipe Macedo Braga, pelas inestimáveis oportunidades de estudar, construindo a teoria, formando uma base sólida para meus futuros investimentos acadêmicos.

Aqui deixo também meus agradecimentos aos jovens Wellisson Pires Lima, Antonio Isael Paz Pires e Ivanildo Rui Barbosa por me acolherem junto ao seu grupo de estudos de Mecânica Analítica. Este pequeno fato possibilitou um leque de oportunidades de aprendizados e ricas discussões.

Aos meus animais de estimação pelo amor incondicional, gestos de carinho, olhar sincero e livre de julgamentos. Em especial à 'pôdi', minha gata, que me acompanhou acordada enquanto eu estudava durante toda a graduação.

Por fim, agradecimentos especiais ao CNPq, a Funcap e à própria Unilab por todo o apoio financeiro durante minha trajetória acadêmica como bolsista de Iniciação Científica e Tecnológica ao longo desses quatro anos.

*Lembre-se de olhar para o alto, para as estrelas, e não para baixo, em seus pés. Tente identificar o sentido do que você vê e se pergunte sobre o que faz o Universo existir. Seja curioso. E, no entanto, por mais que a vida possa parecer difícil, há sempre algo que você pode fazer e ter sucesso. É importante não desistir simplesmente.*

*Stephen W. Hawking*

## RESUMO

Nesse trabalho, empregamos ferramentas matemáticas para calcular um fator corretivo para o potencial gravitacional da Terra, utilizando o modelo do elipsoide de referência (ER), e então, determinamos condições de estabilidade orbital. Inicialmente, contextualizamos de modo breve sobre a evolução das ideias envolvendo gravitação e os modelos de mundo, desde as contribuições dos primeiros gregos até o entendimento geométrico que Einstein conferiu à força gravitacional. Após isto, o problema da força central foi discutido em seus dois formalismos convencionalmente trabalhados em disciplinas de Mecânica Teórica, a nível de graduação, estabelecendo resultados importantes para o desenvolvimento dos capítulos seguintes. Ao modificar a geometria do planeta, escrevemos os vetores  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{r}$  que conectam o centro até o contorno das superfícies esfera e elipsoide, respectivamente, escrevendo uma expressão para a densidade superficial da massa deslocada, obtendo assim um fator corretivo aditivo ao potencial gravitacional que é inversamente proporcional ao cubo da distância, sendo função ainda do ângulo azimutal no qual o plano orbital de um satélite esteja configurado. Ao final, estabelecemos condições de estabilidade de órbitas circulares gerais para qualquer força radial, obtendo então uma condição secundária para que a força gravitacional da Terra, derivada de seu potencial corrigido, gere órbitas circulares estáveis. Concluimos que a mudança na forma da Terra devido à sua rotação em torno de um eixo central implica em um conjunto de configurações orbitais permitidas para que órbitas circulares e estáveis existam.

**Palavras-chave:** Gravitação. Problema da Força Central. Correção do Potencial da Terra. Estabilidade Orbital.

## ABSTRACT

In this work, we use mathematical tools to calculate a corrective factor for the Earth's gravitational potential using the reference ellipsoid (ER) model, and then determine orbital stability conditions. Initially, we briefly contextualize the evolution of ideas involving gravitation and world models, from the contributions of the early Greeks to the geometric understanding that Einstein gave to the gravitational force. After this, the central force problem was discussed in its two formalisms conventionally worked in Theoretical Mechanics, at the undergraduate level, establishing important results for the development of the following chapters. By modifying the geometry of the planet, we write the vectors  $\mathbf{R}$  and  $\mathbf{r}$  that connect the center to the contour of the sphere and ellipsoid surfaces, respectively, by writing an expression for the surface density of the displaced mass, thus obtaining an additive corrective factor to the gravitational potential that is inversely proportional to the cube of the distance, being still function of the azimuthal angle in which the orbital plane of a satellite is configured. In the end, we establish conditions of stability of general circular orbits for any radial force, obtaining then a secondary condition so that the gravitational force of the Earth, derived from its corrected potential, generates stable circular orbits. We conclude that the change in the shape of the Earth due to its rotation about a central axis implies in a set of orbital configurations allowed for circular and stable orbits to exist.

**Keywords:** Gravitation. Central Force Problem. Correction of Earth's Potential. Orbital Stability.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	TEORIA DO CAMPO GRAVITACIONAL . . . . .	19
2.1	Formalismo Newtoniano . . . . .	19
2.1.1	O Campo Gravitacional para distribuições contínuas de massa . . . . .	21
2.1.2	O Teorema de Helmholtz e suas implicações no Campo Gravitacional . . . . .	23
2.1.3	O Potencial Gravitacional . . . . .	25
2.2	Formalismo Lagrangiano . . . . .	26
2.2.1	Fundamentos do Cálculo Variacional . . . . .	27
2.2.2	Mecânica Lagrangiana e o Princípio de Hamilton . . . . .	28
2.2.3	Movimento sob uma força central - O problema de dois corpos . . . . .	30
2.2.3.1	O momento angular é conservado . . . . .	30
2.2.3.2	A trajetória do movimento . . . . .	32
2.2.3.3	O potencial efetivo . . . . .	33
3	O POTENCIAL GRAVITACIONAL DA TERRA . . . . .	35
3.1	Justificativa para a correção . . . . .	35
3.2	Descrição Geométrica do Problema . . . . .	36
3.3	Densidade superficial da massa deslocada . . . . .	39
3.4	Correção do Potencial . . . . .	41
3.4.1	Aspectos gerais do fator de correção . . . . .	45
4	ÓRBITAS PLANETÁRIAS . . . . .	47
4.1	Estabilidade Orbital . . . . .	48
4.1.1	Estabilidade de órbitas circulares . . . . .	49
4.2	Estabilidade orbital para o potencial corrigido da Terra . . . . .	51
5	CONCLUSÕES . . . . .	54
	REFERÊNCIAS . . . . .	55
	APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÃO DAS LEIS DE KEPLER . . . . .	57

## 1 INTRODUÇÃO

O Universo, pelo menos como o conhecemos, existe a aproximadamente 13,7 bilhões de anos; a teoria mais aceita para sua criação, o Big Bang, diz que tudo surgiu de um ponto menor do que um único átomo, no qual o espaço explodiu em um fogo cósmico, lançando a expansão do Universo e gerando toda a energia e toda a matéria que conhecemos hoje.

Passado um certo intervalo de tempo (denominado tempo de Planck<sup>1</sup>), infinitesimalmente breve, mas substancialmente importante, algo em torno de  $10^{-44}$  segundos após a grande explosão, todo o condensado unido por uma força, aquilo que chamamos hoje de Força Gravitacional, teve um colapso repentino e se separou da força fundamental<sup>2</sup>, e isto fez com que tudo se expandisse omnidirecionalmente de modo descomunal. Este pequeno fato mudou tudo.

O que o termo Gravidade, ou Força Gravitacional lhe infere? O que significa? Quais suas premissas? Quais suas implicações? Certamente o termo "Gravitação" é conhecido por grande parte das pessoas, desde leigos à especialistas no tema, contudo seu significado e interpretações, assim como quase tudo no Universo, constituem um dos maiores mistérios na aventura científica desde os primórdios da existência humana.

O conceito de Gravitação, historicamente, se desenvolveu e se desenvolve intimamente correlacionado à evolução dos modelos de mundo [1], desde mitos até teorias matematicamente bem fundamentadas que buscam descrever os movimentos celestes a partir dos movimentos conhecidos e experimentados cotidianamente. Tiago [2] enfatiza que compreender a evolução das teorias, seus objetivos e limitações auxiliam na compreensão da importância de uma aprendizagem da Ciência que não se limite aos conteúdos 'nus'.

Nesta perspectiva, um trabalho monográfico nesta temática não poderia deixar de conter um breve resgate histórico dos principais pensamentos e reflexões sobre o conceito de Gravitação, no entanto, é importante esclarecer que não é possível ser leviano sobre sintetizar uma história que se desenvolve por séculos em poucas páginas sem cometer o exercício do esquecimento. Portanto este texto não tem como objetivo

---

<sup>1</sup>Tempo de Planck é o tempo passado após o Big Bang a partir do qual as implicações da Teoria da Relatividade Geral passaram a ser válidas.

<sup>2</sup>Atualmente todos os fenômenos físicos são explicados através de quatro forças fundamentais, a gravitacional, a eletro magnética, a nuclear forte e a nuclear fraca, no entanto, até o tempo de Planck essas quatro estavam unidas, em uma única força fundamental.

efetivar um compilado afimco da evolução deste conceito, apenas apresentar as ideias mais marcantes em contextos históricos bem definidos.

Ao longo do desenvolvimento das civilizações, alguns acontecimentos na esfera celeste como os movimentos aparentes do Sol, a forma inconstante da Lua, o movimento e a variação de brilho dos astros errantes<sup>3</sup>, a aparição de cometas ou até mesmo os eclipses (solares e lunares) que apavoravam a todos, estimularam a imaginação do homem e despertaram nele o interesse em procurar uma explicação para os fenômenos que percebia.

O céu tornou-se então um laboratório natural da humanidade, sobretudo pela grande variedade de objetos visíveis no firmamento [3], permitindo a elaboração das primeiras ideias sobre o funcionamento do Cosmos<sup>4</sup>. As primeiras explicações para a origem, funcionamento e até mesmo propósito do Universo se basearam em mitos e crendices, sobretudo relacionadas a divindades em diversas culturas, que tinham os movimentos celestes como manifestações dos deuses<sup>5</sup> e, com isto transformavam sua vida em uma eterna adoração ao céu e aos seus fenômenos.

A civilização humana existe há dezenas de milhares de anos, no entanto não é necessário voltarmos muito no tempo para uma contextualização histórica do desenvolvimento da Ciência. Em seus estudos, Schurmann [4] evidencia que para se compreender efetivamente a evolução da História da Física basta tomarmos um intervalo de tempo iniciando-se com a civilização grega<sup>6</sup>. Foram os gregos que então introduziram o chamado método científico [5], isto é característico em seus textos, pois seus argumentos prezam pela racionalidade.

Nossa viagem temporal inicia-se com a Cosmologia grega antiga, com os pensamentos de Tales de Mileto (623/24 – 546/48 a.C.), um exímio filósofo, astrônomo e matemático que concebia a Terra como um disco plano na superfície de uma enorme extensão de água. Anaximandro (610 – 546 a.C.), um de seus discípulos, configurou os planetas como sendo espécies de rodas de fogo girando sob uma terra cilíndrica (com seu eixo central orientado no sentido leste-oeste), onde os céus giravam em torno da estrela polar sendo, portanto, o Universo esférico [6].

A Terra em repouso, no centro do Cosmos, em uma visão totalmente geocên-

---

<sup>3</sup>A palavra planeta significa “estrela vagabunda” ou “astro errante”, aquele que erra a trajetória.

<sup>4</sup>Cosmos ou cosmo é o universo em seu todo. É o conjunto de tudo que existe, desde o microcosmo ao macrocosmo, das estrelas até as partículas subatômicas. Do grego antigo - *Kósmos* que significa beleza, ordem, organização, harmonia.

<sup>5</sup>Para as civilizações primitivas o céu era algo imutável, o lar de deuses, de modo que tudo aquilo que fosse “não natural” foi entendido como uma manifestação divina contra o homem. Os cometas foram tidos como presságios de agouro e ira dos deuses contra os humanos durante séculos.

<sup>6</sup>Com isto efetivam-se aproximadamente 2700 anos de evolução da Ciência, enquanto Ciência, como uma forma de compreender o Cosmos, e tudo que o contém e que está contido em si.

trica, se estabeleceu sobretudo devido aos ideais de Aristóteles (384 – 322 a.C.). Em seu livro, intitulado *De caelo*, o mesmo parte de que “[...] este mundo é único, solitário e completo [...] O movimento natural da Terra como um todo, como de todas as suas partes, está dirigido para o centro do Universo [...] assim, a Terra e o Universo têm o mesmo centro [...]” é aí que uma das primeiras ideias de gravidade surge, quando o mesmo reitera que “os corpos pesados movem-se para o centro da Terra apenas incidentalmente, pois seu centro está no centro do Universo”, a gravidade (não cunhada nestes termos) então seria como uma consequência de os corpos buscarem seu estado (ou local) natural, o centro do Cosmos.

Aristóteles<sup>7</sup> ainda dividiu o Universo em duas regiões, cada uma com seus movimentos intrínsecos associados, de modo que sua composição gerava os movimentos planetários em um certo grau de aproximação, a região sublunar e a região celeste. O mundo sublunar era constituído apenas por movimentos verticais, enquanto que o movimento na região celeste era circular, uma vez que o círculo era tido pelos gregos como a figura perfeita.

Um salto consideravelmente longo da história nos leva à Claudio Ptolomeu (90 – 168), que insatisfeito com os modelos antigos usou de seu conhecimento matemático para descrever um novo modelo, extremamente complexo, com um conjunto de artifícios geométricos que possuíam centros e movimentos bem definidos, de modo que sua composição conseguia explicar, em boa aproximação, o movimento retrógrado dos planetas.

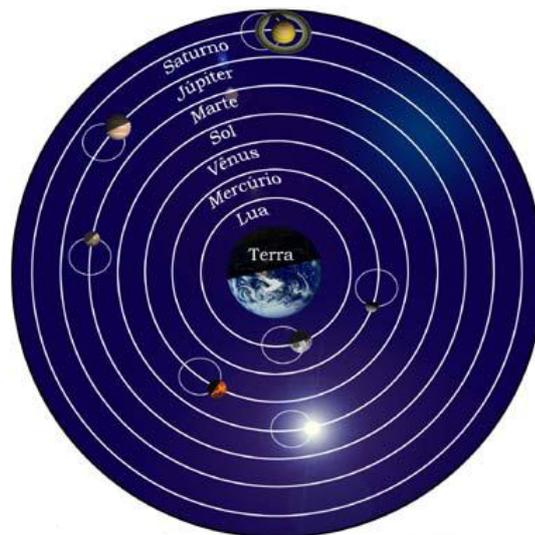


Figura 1: Modelo planetário geocêntrico de Claudio Ptolomeu. Fonte: Adaptado de [7].

<sup>7</sup>É importante enfatizar que Aristóteles, assim como Platão, rejeitava a ideia de interação à distância e, por isto, seu modelo foi construído tal que o conceito de força não fosse necessário [6].

O *Almagesto* (publicado no século II), se constituiu como um tratado matemático detalhista de tudo que havia como tentativas anteriores para descrição dos movimentos no céu e era dotado de uma capacidade de prever o movimento dos corpos celestes [8]. Além disso, o tratado matemático de Claudio Ptolomeu se constituiu como uma espécie de 'bíblia' para a Astronomia, desde o século II até o século XVII, não encontrando teoria alternativa com poder de predição similar [9].

Seguindo o curso da história, foi na Polônia que surgiu um dos grandes revolucionários dos modelos de mundo, Nicolau Copérnico (1473 – 1543). Foi Copérnico quem revolucionou o pensamento científico ao tomar o Sol como centro do Sistema Solar, em seu livro *De Revolutionibus Orbitum Coelestium* (publicado no ano de sua morte, 1543), onde a Terra era descrita como apenas mais um dos planetas orbitando ao redor do Sol, que estaria levemente deslocado do centro do Universo.

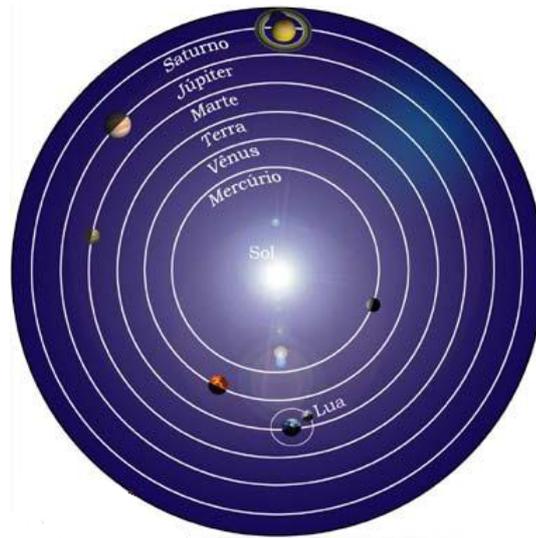


Figura 2: Modelo planetário heliocêntrico de Nicolau Copérnico. Fonte: Adaptado de [7].

A visão copernicana sobre a queda dos corpos foi construída e fundamentada sobre muitos preceitos aristotélicos, como o conceito de 'lugar natural', onde o movimento de queda seria a consequência de uma propriedade denominada gravidade. A sua compreensão da gravidade estava certamente cunhada de religiosidade. Nesta premissa Koestler [9] enfatiza que para a visão copernicana "a gravidade não passa de uma inclinação natural concedida às partes dos corpos pelo Criador a fim de combinar as partes no formato de uma esfera e contribuir, assim, para a sua unidade e integridade". Deste modo o Sol e os demais planetas possuíam esta propriedade, uma vez que se constituíam como objetos esféricos.

Galileu Galilei (1564 – 1642), considerado pai da Astronomia moderna, foi

aquele quem primeiro empregou um método efetivamente sistemático para a observação da natureza. Aprimorando<sup>8</sup> a luneta, fez um conjunto de descobertas descritas em seu livro *Sidereus Nuncius*, o *Mensageiro das Estrelas* (publicado em 1610), onde o mesmo detalha as observações feitas com a luneta astronômica, o que incluíam ricos detalhes e conclusões sobre: i) manchas solares; ii) superfície lunar imperfeita; iii) fases de Vênus; iv) estrelas fixas ainda muito pequenas, ou seja, muito distantes; v) luas de Júpiter [6]. Esta última discussão foi responsável por oferecer uma saída do Modelo Geocêntrico, uma alternativa Heliocêntrica, não muito aceita em sua época, sobretudo por fatores religiosos. Galileu admitia desconhecer a natureza da gravidade (ou seja qual o termo fora empregado), no entanto enfatiza que compreendia um princípio inerente, sobretudo em uma passagem de seu escrito *De motu* (escrito entre 1589 e 1592), onde o mesmo evidencia que “[...] um corpo grave, por sua natureza, tem um princípio inerente, a mover-se em direção ao centro comum dos corpos graves, isto é, do nosso globo terrestre, com um movimento constantemente acelerado” [10].

Iniciado como ajudante do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546 – 1601), o alemão Johannes Kepler (1571 – 1630), assim como Galileu, acreditava que o Universo possuía uma organização matemática pré-estabelecida e de que a Ciência se constituía da união de hipóteses com os dados observados experimentalmente [11]. Após sistemáticas análises dos dados obtidos por Tycho, Kepler concluiu que as órbitas dos planetas eram elipses, e não círculos, de modo que caracterizou o Sol como sendo responsável pelo movimento dos planetas, isto é, o Sol foi considerado como uma “fonte de movimento no Universo”, sugerindo uma “força” motora como consequência da interação magnética<sup>9</sup> dos corpos envolvidos no sistema, iniciando a contextualização da ideia de que o Sistema Solar era na realidade um sistema autossustentável, não requerendo agentes externos.

Kepler ficou a um passo de descrever a atração universal, mas ficou limitado a ideia de que os corpos só se atraíam devido à certo parentesco (ou “*cognata*” do latim), sendo necessário existir uma afinidade entre os elementos, a Terra e a Lua compartilhavam deste parentesco, no entanto não existiria, na concepção de Kepler, entre a Terra e os demais planetas do Sistema Solar [11].

Não concordando com as ideias de inércia circular, propostas por Galileu, René Descartes (1596 – 1650) concebia que a inércia deveria fazer com que os corpos

<sup>8</sup>Embora comumente seja atribuída a Galileu a invenção da luneta, o mesmo não o fez, Galileu ficou sabendo de um instrumento capaz de ampliar a visão de observação, desenvolvido pelo holandês Hans Lippershey no ano de 1608, aperfeiçoando-o de tal modo que seu aumento foi de 30 vezes.

<sup>9</sup>As propriedades magnéticas de alguns materiais eram conhecidas desde os primórdios da Grécia, de modo que Kepler imaginou o movimento planetário como consequência desse tipo de interação.

permanecessem em um movimento linear, de modo que Koestler [9] atribui a Descartes a primeira formulação da Primeira Lei de Newton. Descartes, além de contribuir nas bases da formulação do Método Científico<sup>10</sup>, concebia que não era possível que o Universo admitisse um modelo de interação a distância, deste modo era preciso que algo impregnasse o espaço para que houvesse uma interação por contato, para explicar isto postulou a existência de vórtices.

Zanetic [13] evidencia que para Descartes a gravidade era entendida pelo seguinte fato postulado por ele, de que “a matéria impregnava todo o espaço”, de modo que pelos princípios de movimento circular como sendo o “natural” da região celeste, então esta matéria entraria em rotação, de modo que “estabeleceu-se um vórtice gigante no qual os tijolos primários de matéria eram arrastados girando, gastando-se gradualmente pelo atrito”, de modo que a gravidade, para ele era entendida como uma manifestação do movimento da própria matéria de acordo com os princípios fundamentais.

Finalmente, surgiu um indivíduo que conseguiu demonstrar e efetivar um manuscrito sólido, uma teoria universal, que explicaria os movimentos no Cosmos, James Isaac Newton (1643 – 1727) modelou um conceito novo, um conceito empregado comumente hoje em dia, o conceito de força, em especial o conceito de força gravitacional, de modo que dados dois corpos providos de massa, sua interação<sup>11</sup> seria proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância relativa entre os mesmos. Além disso, de posse das descobertas de Kepler, Newton mostrou<sup>12</sup> que com uma força deste tipo, as órbitas possíveis eram as seções cônicas (circunferência, elipse, parábola e hipérbole), solucionando o problema das órbitas fechadas (elípticas), de Kepler.

Outra contribuição da síntese newtoniana, foi a descoberta e comprovação dos fenômenos que geram o achatamento dos polos, além dos movimentos naturais observados puderem ser interpretados pela ação desta força sobre os mesmos, como

---

<sup>10</sup>O método científico, estabelecido pelas ideias de Bacon, Galileu e Descartes é hoje constituído de sete etapas: i) considere uma questão sobre a natureza; ii) recolha as evidências experimentais pertinentes; iii) formule hipóteses explicativas; iv) deduza suas implicações; v) teste experimentalmente as implicações; vi) aceite, rejeite ou modifique as hipóteses, com base nos resultados experimentais; vii) defina as situações de aplicabilidade das hipóteses [12].

<sup>11</sup>Não é preciso dizer que a ideia de interação ser possível a distância não foi bem aceita em sua época, mesmo Newton em algumas cartas enviadas à Richard Bentley admitiu que não tinha pretensões de buscar entender a origem desta atração gravitacional, de modo que sua teoria se constitui como uma maneira de descrever os fenômenos associados pela sua atuação, e sua existência como puro fato experimental.

<sup>12</sup>Newton ressuscitou uma crença grega que a muito estava esquecida, de que é possível compreender o Universo de um modo racional. Essa nova confiança em seus próprios poderes intelectuais alterou, de modo permanente, a percepção que a humanidade tem de si própria, e, nos últimos 300 anos, todos os setores da vida humana têm sentido suas consequências.

por exemplo o fenômeno das marés. Além, é claro, a dinâmica newtoniana permitiu ao homem lançar sondas espaciais ao Universo para estudá-lo, isto mudou tudo!

Para Newton, a natureza e seus fenômenos aconteciam em um palco, este palco constituído pelo espaço e pelo tempo seguia preceitos muito bem estabelecidos: a homogeneidade do tempo e a isotropia do espaço, os quais são chamados postulados<sup>13</sup> fundamentais da teoria newtoniana do movimento.

A mudança das premissas conduz à novos resultados, esta verdade (óbvia, mas essencial) levou um funcionário de um escritório de patentes a pensar no Cosmos em uma nova perspectiva. Albert Einstein (1879 – 1955), não visualizava sentido em uma interação a distância, de modo que abandonando a ideia de um espaço euclidiano<sup>14</sup>, conseguiu estabelecer uma teoria de que espaço e tempo não são isolados um do outro, mas que o Cosmos é o próprio espaço-tempo, de modo que “o ponto nevrálgico deste assunto é que a gravidade não é uma força, mas sim, uma deformação no espaço-tempo causada pela presença de algum corpo massivo” [6]. Esta teoria fora então comprovada experimentalmente através da observação de um eclipse (onde foi observado o deslocamento aparente de uma estrela sobreposta), na cidade de Sobral, no Estado do Ceará.

Estas foram apenas algumas, das incontáveis tentativas de explicar o funcionamento do Cosmos, sobretudo relacionados ao movimento dos planetas, as ideias de Gravitação aqui discutidas qualitativamente permitiram que modelos planetários, cada vez mais poderosos, tanto matematicamente (em seu poder preditivo), como em simplificação lógica, permitiram e permitem ao homem prever o que acontece na esfera celeste.

Especificamente, nesta monografia serão trabalhados os seguintes temas:

i) Uma discussão teórica do problema de força central nos formalismos newtoniano e lagrangiano; ii) uma forma de corrigir o potencial gravitacional gerado pela Terra, tomando em si os efeitos do achatamento de seus polos; iii) uma discussão sobre a estabilidade associada à órbitas.

Para atingir os objetivos aqui propostos, o trabalho foi dividido em capítulos, com organização própria e sequencial. No capítulo 2, intitulado “Teoria do Campo Gravitacional” discutimos os dois formalismos (newtoniano e lagrangiano) do problema da força central, enfatizando seus principais resultados e possibilidades opera-

<sup>13</sup>Dizer que o tempo é homogêneo é dizer que sua ‘marcha’ é constante. O espaço ser isotrópico infere que não há direções preferenciais no Universo para a ocorrência de fenômenos.

<sup>14</sup>Baseado nos estudos de Poincaré, Riemann, entre outros, Einstein buscou compreender o que aconteceria com o Universo se o método de calcular distância fosse diferente do usual, isto é, se a métrica fosse diferente. Esta “pequena” mudança nos preceitos construiu toda uma nova teoria, a Teoria da Relatividade Geral (TRG).

cionais.

No capítulo 3, denominado “O potencial gravitacional da Terra”, fazemos uso da teoria descrita no Capítulo 2 para determinar um fator corretivo para o potencial gravitacional da Terra considerando o achatamento de seus polos.

O capítulo 4, descrito como, “Órbitas Planetárias”, buscamos sistematizar o conhecimento já discutido sobre órbitas e com isto derivar condições de estabilidade orbital, tanto para órbitas circulares no campo de força inversamente proporcional ao quadrado da distância como também derivar as condições de estabilidade para órbitas circulares mediante o potencial corrigido da Terra.

Por fim, no Capítulo 5, “Conclusões”, trazemos os principais resultados deste trabalho e suas potenciais contribuições.

## 2 TEORIA DO CAMPO GRAVITACIONAL

Até aqui foi discutido qualitativamente a conceituação e entendimento sobre a natureza da Gravidade e, conseqüentemente da Força Gravitacional, que embora seja algo complexo de se entender, uma vez que as concepções de mundo divergiram época após época, sobretudo devido à preceitos religiosos e culturais que permeavam o ambiente, uma noção matemática pôde surgir. Dentre as várias formulações distintas atualmente existentes de se trabalhar classicamente a Mecânica, duas delas se destacam por permitirem uma ampla discussão sobre a Teoria do Campo Gravitacional, as abordagens newtoniana e lagrangiana.

A formulação newtoniana da Mecânica, certamente a única trabalhada no Ensino Médio, e até mesmo em cursos de nível superior, trabalha o problema da força central em um caráter vetorial, onde certas operações são permitidas, enquanto outras exigem ressalvas, mas que produzem elegantes resultados.

Em contrapartida, a formulação lagrangiana não emprega uma notação vetorial, todos os cálculos são feitos baseados nas energias (quantidades escalares) do sistema considerado, gerando soluções consideravelmente mais simples para problemas mais elaborados.

Veremos neste capítulo uma fundamentação sistemática de cada formalismo, buscando uma compreensão holística das técnicas para abordar os mais diversos problemas e suas respectivas limitações, o que servirá como base para a construção dos capítulos seguintes.

### 2.1 Formalismo Newtoniano

O problema fundamental que esta teoria busca solucionar é o seguinte: sejam dispostas massas pontuais,  $\{m_i; i = 1, 2, 3, \dots\}$  (aqui designadas por massas fontes), estas exercem uma força em uma outra massa  $\tilde{m}$  (a dita massa de prova) localizada em um ponto  $P$  arbitrário. Como determinar tal força? Solucionar este problema (representado pela figura 3) é nosso objetivo.

James Isaac Newton, a partir das Leis de Kepler demonstrou que a força de interação entre uma massa de prova  $\tilde{m}$  e uma única massa pontual  $m$  era proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional à distância que as separava<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Também é possível efetivar esta demonstração no sentido inverso, isto é, partindo da Lei da Gravitação de Newton, obter matematicamente as três Leis do Movimento Planetário, conforme consta no Apêndice A.

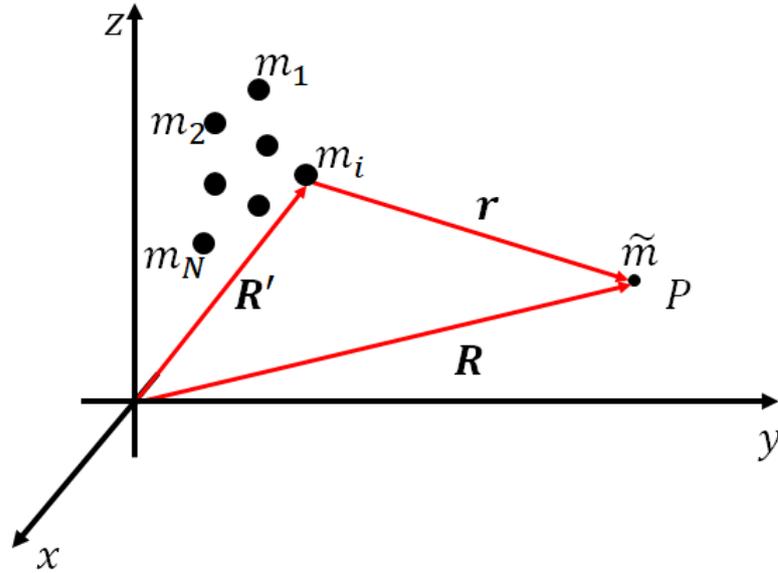


Figura 3: Problema Fundamental descrito por pontos infinitesimais de massa  $m_i$  interagindo a distância com um ponto  $P$  localizado no espaço.

Matematicamente obteve [14],

$$\mathbf{F} = -G \frac{\tilde{m}m}{r^2} \hat{r}, \quad (2.1)$$

onde  $G$  é a constante<sup>2</sup> newtoniana da gravitação universal, equivalendo à  $G = 6,67408 \cdot 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ . Toda a discussão a seguir será tratada com alta similaridade ao que é feito em Eletrostática, uma vez que a força elétrica ou coulombiana possui a mesma natureza vetorial da força gravitacional, no entanto há uma ressalva importante, valores de massa são grandezas positivas, de modo que só é possível, mediante tal força, interação atrativa entre massas no Universo.

A equação (2.1) na forma pela qual foi definida por Newton se aplica estritamente a sistemas em que os corpos que interagem entre si são partículas, no entanto é possível aplicá-la à sistemas macroscópicos sob os quais as dimensões das distribuições sejam pequenas em comparação à distância  $r$  que as separa [14]. Como então explicar a interação da Terra com os objetos próximos à sua superfície, se neste caso as dimensões são relevantes? Newton foi quem elucidou este problema ao demonstrar o que é hoje conhecido como Teorema das Cascas Esféricas<sup>3</sup>, onde a Terra pode ser compreendida como um conjunto infinito de cascas esféricas concêntricas, assim tudo se passa como

<sup>2</sup>Newton não conhecia seu valor, no entanto Henry Cavendish (1731-1810), um cientista britânico, elaborou um sistema para medir a densidade da Terra, mesmo sem compreender a gravitação de Newton, seu experimento possibilitou determinar, em uma aproximação com erro inferior à 1% a constante gravitacional de Newton.

<sup>3</sup>O Teorema das Cascas Esféricas, estabelece que uma casca esférica de massa interage com um ponto  $P$  qualquer de duas formas, para pontos internos à casca a força é nula, enquanto que para pontos externos a força exercida é tal como se a massa estivesse totalmente concentrada no centro da casca. Para uma demonstração rápida deste teorema, consulte [1].

se a interação acontecesse com um ponto no centro contendo toda a massa do planeta [15].

O problema de duas massas está bem solucionado<sup>4</sup>, como então generalizar para um conjunto de  $n$  massas? O Princípio da Superposição, estabelece que a interação entre duas massas quaisquer não é modificada pela presença de outras. Portanto, a interação total sobre  $\tilde{m}$  é dada por um somatório (vetorial) de todas as forças individuais das massas  $m_i$ ,

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = -G\tilde{m} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^2} \hat{r}_i, \quad (2.2)$$

note então que é possível interpretar a equação acima como sendo o produto da massa de prova  $\tilde{m}$ , por um vetor  $\mathbf{G}$ , chamado de campo gravitacional, definido por

$$\mathbf{G}(\mathbf{R}) \equiv -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (2.3)$$

Desta forma,  $\mathbf{G}$  é função apenas da posição  $\mathbf{R}$  do ponto de observação, independentemente da existência, ou não, de uma massa de prova, de modo que  $\mathbf{G}(\mathbf{R})$  é a força por unidade de massa que seria exercida sobre uma massa de prova que fosse colocada em  $P$ . O campo gravitacional, assim como o campo elétrico e magnético, deve ser entendido como uma entidade física ‘real’ que preenche o espaço, neste caso em torno de qualquer massa  $m_i \neq 0$ .

### 2.1.1 O Campo Gravitacional para distribuições contínuas de massa

A definição do campo gravitacional fornecido pela equação (2.3) assume como premissa que a fonte do campo é uma séria de massas pontuais discretas  $m_i$ ; como então generalizar para o caso de uma distribuição contínua de massa? Veja que um conjunto contínuo de massa, pode ser entendido, como sendo uma soma infinita de elementos infinitesimais de massa  $dm$ , fazendo com que a definição agora se torne um limite infinito de um somatório, ou seja, uma integral em  $dm$

$$\mathbf{G}(\mathbf{R}) = -G \int \frac{dm}{r^2} \hat{r}. \quad (2.4)$$

Para efetuar a integral acima, é preciso compreender como a massa se encontra distribuída no espaço, de modo que dependerá da geometria da distribuição, portanto o conceito de densidade de massa se mostra relevante. No caso de uma

<sup>4</sup>O problema de duas massas, também chamado de problema da massa reduzida será discutido em maiores detalhes na próxima seção, sob o formalismo lagrangiano.

distribuição linear de massa, então a densidade é, por construção, linear,  $\lambda = \lambda(\mathbf{R}')$ , no caso da massa estar distribuída ao longo de uma superfície, então a densidade de massa é superficial,  $\sigma = \sigma(\mathbf{R}')$ . O caso certamente mais geral, e mais realista com a natureza, é o caso em que a distribuição é volumétrica (ver figura 4), de modo que  $dm = \rho(\mathbf{R}') d\tau'$ , onde  $d\tau'$  é um elemento de volume ao longo da distribuição. O campo gravitacional para uma distribuição volumétrica de massa é dado por

$$\mathbf{G}(\mathbf{R}) = -G \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{R}')}{r^2} \hat{r} d\tau', \quad (2.5)$$

embora a integral acima seja feita sobre um volume determinado é possível tomá-la sobre todo o espaço, para isto uma condição necessária e suficiente é tomar a densidade volumétrica de massa como sendo nula fora da distribuição, ou seja,  $\rho(\mathbf{R}') = 0$  fora de  $\mathcal{V}$ .

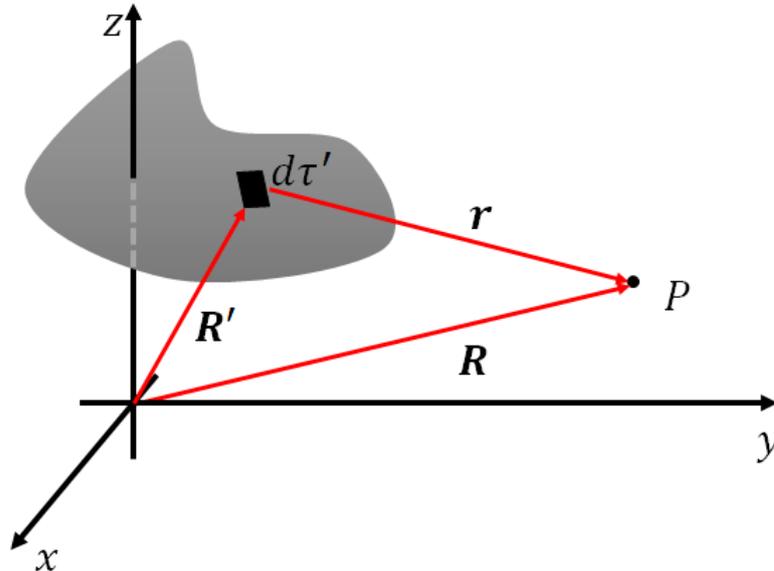


Figura 4: Uma distribuição volumétrica de massa atua a distância em um ponto  $P$  qualquer do espaço através de seu campo gravitacional.

O campo gravitacional, dimensionalmente, representa a aceleração sofrida por um corpo, devido a existência de uma distribuição de massa qualquer [14]. A equação (2.5) permite determinar o campo gravitacional gerado por uma distribuição de massa conhecida em um ponto determinado, no entanto os processos para determinar o mesmo são consideravelmente complexos.

### 2.1.2 O Teorema de Helmholtz e suas implicações no Campo Gravitacional

Uma alternativa para determinar o campo gravitacional, sem ter de recorrer à tentativas de solucionar a equação (2.5) é o Teorema de Helmholtz<sup>5</sup>, o mesmo afirma que todo campo vetorial é, unicamente determinado conhecendo-se seu divergente e seu rotacional, além de condições de contorno<sup>6</sup>.

Iremos então determinar expressões para o divergente e o rotacional do campo gravitacional a partir de sua definição fornecida pela equação (2.5). Inicialmente fazemos o procedimento de determinar o divergente<sup>7</sup> do campo

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = -G \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{R}')}{r^2} \hat{r} d\tau', \quad (2.6)$$

tomando  $\rho = 0$  fora da distribuição, a integral se torna sobre todo o espaço, permitindo que os operadores obedeçam parâmetros de comutatividade. Desse modo, como a massa fonte encontra-se em repouso, o operador diferencial atua apenas no vetor  $\mathbf{v} = \hat{r}/r^2$ , seu resultado é conhecido do Cálculo Vetorial,

$$\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{R}), \quad (2.7)$$

em que  $\delta^3(\mathbf{R})$  é a delta de Dirac tridimensional,  $\delta^3(\mathbf{R}) \equiv \delta(X)\delta(Y)\delta(Z)$ . Como a dependência entre os vetores que localizam os elementos do sistema é linear, então o divergente do campo gravitacional é

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = -4\pi G\rho(\mathbf{R}). \quad (2.8)$$

A equação acima, o divergente do campo gravitacional sobre um ponto observado, tem grande utilidade, no entanto quando o problema exhibe certa simetria é conveniente utilizar uma abordagem integral do problema, assim pode ser útil obter uma expressão análoga à equação (2.8) na formulação de integrais; para isto utilizemos o Teorema de Gauss<sup>8</sup>,

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{G} d\tau = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{a}, \quad (2.9)$$

<sup>5</sup>Tecnicamente este não é o Teorema de Helmholtz, mas sim um lema que o precede para a demonstração. O Teorema de Helmholtz afirma que um vetor  $\mathbf{V}$  pode ser separado em duas partes, uma das quais é irrotacional (possui rotacional nulo) e outra que é solenoidal (possui divergente nulo) [16].

<sup>6</sup>Fisicamente as condições de contorno empregadas no caso de campos em que sua intensidade decresce em potências da distância é a tendência a ser nulo nos extremos, de modo que  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{G} = 0$ .

<sup>7</sup>Como a análise está sobre um ponto de referência, então o divergente é um operador diferencial sobre as coordenadas  $\mathbf{R}$ .

<sup>8</sup>O Teorema de Gauss, ou Teorema da Divergência, nos diz que o fluxo gerado por um campo em uma determinada superfície  $\mathcal{S}$  é igual à integral volumétrica do divergente desse campo no volume encerrado  $\mathcal{V}$  pela superfície.

como o divergente do campo fora determinado, é possível exprimir o fluxo do campo gravitacional sobre uma determinada superfície como sendo,

$$\oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{a} = -4\pi G \int_V \rho(\mathbf{R}) d\tau, \quad (2.10)$$

como  $\rho(\mathbf{R})d\tau \equiv dm$ , então a integral volumétrica nada mais é do que a massa encerrada pela superfície. Portanto, o fluxo gerado por  $\mathbf{G}$  é

$$\oint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{a} = -4\pi GM_{enc}. \quad (2.11)$$

Calculemos então o rotacional do campo, de modo análogo ao feito para o divergente,

$$\nabla \times \mathbf{G} = -G \int \rho(\mathbf{R}') \nabla_{\mathbf{r}} \times \left( \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau', \quad (2.12)$$

como o sistema de coordenadas não afeta o problema podemos tomar um sistema de coordenadas polares esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , no qual um campo vetorial é do tipo  $\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ . O rotacional é então dado por

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (2.13)$$

como  $\mathbf{v} \propto \hat{\mathbf{r}}/r^2$ , então  $\nabla \times \mathbf{G} = 0$  para pontos fora da origem, uma vez que o próprio campo não é bem definido na origem. Para efetivar este cálculo para a origem é possível modificar o Teorema de Gauss tomando um vetor  $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{c}$ , onde  $\mathbf{c}$  é um vetor constante, arbitrário e não-nulo. Com algumas manipulações é possível mostrar a forma alternativa do Teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \times \mathbf{v} d\tau = - \oint_S \mathbf{v} \times d\mathbf{a}, \quad (2.14)$$

em que  $V$  contém a origem.

Sabemos, no entanto, que  $\mathbf{v} = G(\mathbf{R})\hat{\mathbf{r}}$ , se tomarmos  $V$  como sendo uma esfera de raio  $R$  centrada na origem, então  $d\mathbf{a} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}$ , de modo que

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{G}) d\tau = 0, \quad (2.15)$$

desse modo, o integrando é nulo para todos os pontos do espaço, isto é

$$\nabla \times \mathbf{G} = 0, \quad (2.16)$$

concluimos então que o campo gravitacional é irrotacional. De acordo com um dos teoremas do Cálculo Vetorial qualquer vetor cujo rotacional é zero pode ser escrito como

sendo igual ao gradiente de algum escalar, portanto o fato do campo ser irrotacional abre uma nova possibilidade, deixar de lado o caráter vetorial e reescrever a teoria em termos de funções escalares que são, em essência, mais simples.

Aplicando o Teorema de Stokes<sup>9</sup>,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.17)$$

como já vimos, o campo gravitacional é irrotacional (2.16), logo

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (2.18)$$

consequentemente  $\mathbf{G}$  é um campo conservativo. Note então que se tomarmos dois pontos quaisquer  $a, b \in C$ , a integral de linha do campo independerá do caminho sendo, portanto, uma função de ponto. Convenientemente faz-se interessante definir uma função escalar a partir de um ponto de referência  $\mathcal{O}$  a determinar<sup>10</sup>, de modo que

$$\mathcal{G} \equiv \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.19)$$

esta função escalar  $\mathcal{G}$  é designada como sendo o potencial gravitacional<sup>11</sup>.

### 2.1.3 O Potencial Gravitacional

O potencial é uma função de ponto, de modo que naturalmente o que importa é a diferença de potencial entre dois pontos quaisquer,

$$\mathcal{G}(\mathbf{b}) - \mathcal{G}(\mathbf{a}) = \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{b}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{a}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.20)$$

além disso o teorema fundamental para gradientes, no caso de  $\mathcal{G}$ , afirma que

$$\mathcal{G}(\mathbf{b}) - \mathcal{G}(\mathbf{a}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla \mathcal{G}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.21)$$

desse modo, comparando as equações (2.20) e (2.21) concluímos que

$$\mathbf{G} = \nabla \mathcal{G}, \quad (2.22)$$

<sup>9</sup>O Teorema de Stokes, ou Teorema Fundamental para rotacionais está, como era de se esperar, relacionado à interpretação geométrica do rotacional como sendo a 'quantidade de giro de vetores', desse modo o Teorema de Stokes estabelece que para calcular o giro de vetores sobre uma superfície  $S$  só é preciso determinar sobre seu contorno  $C$ .

<sup>10</sup>Geralmente este ponto de referência é tomado onde a quantidade do integrando se anula, neste caso, no infinito.

<sup>11</sup>Na definição do potencial como consequência do campo ser irrotacional é atribuído um sinal negativo, no entanto convencionou-se omitir o mesmo em Gravitação.

o campo gravitacional pode, portanto, ser escrito como o gradiente de um potencial escalar, consequência imediata do aspecto irrotacional do campo.

Conhecendo a relação entre o campo e o potencial é possível tomar a equação (2.8) e modificá-la para uma notação escalar, de modo que teremos uma relação do divergente de um gradiente, que por construção é definido o laplaciano, que em coordenadas cartesianas tridimensionais assume a seguinte forma

$$\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.23)$$

a combinação das equações (2.22) e (2.8) produz uma equação extremamente recorrente em física teórica, chamada Equação de Poisson,

$$\nabla^2 \mathcal{G} = -4\pi G \rho(\mathbf{R}). \quad (2.24)$$

Há casos, no entanto que se busca compreender o potencial gerado sobre uma região desprovida de massa, de modo que quando  $\rho(\mathbf{R}) = 0$  a equação (2.24) se torna a chamada Equação de Laplace,

$$\nabla^2 \mathcal{G} = 0, \quad (2.25)$$

Uma consequência imediata do operador nabla ser um operador linear, é de que o Princípio da Superposição também se aplica às soluções da Equação de Laplace e de Poisson, de modo que se o conjunto  $\{\mathcal{G}_i; i = 1, 2, \dots, n\}$  forem soluções das equações (2.24) e (2.25), então uma combinação linear  $\mathcal{G} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{G}_i$  também é solução.

## 2.2 Formalismo Lagrangiano

A grande conclusão da seção anterior foi o desenvolvimento do formalismo newtoniano em uma perspectiva escalar, devido à definição da função potencial gravitacional. Um outro exemplo de tratamento escalar, pelo qual é possível obter os resultados da abordagem vetorial da mecânica é a partir da função lagrangiana<sup>12</sup>.

A formulação lagrangiana da mecânica é desenvolvida sob o chamado Princípio de Hamilton e, a partir dele se concluem as principais equações para explicar a evolução de sistemas dinâmicos. O Princípio de Hamilton, ou Princípio da Mínima Ação, que será enunciado mais adiante, está baseado na extremização de um funcional específico, a ação. Com esta premissa é preciso fundamentar aqui as bases do Cálculo

---

<sup>12</sup>Em tratamentos mais antigos, visando enfatizar a semelhança com a função potencial, a função lagrangiana era chamada de potencial cinético [17].

Variacional.

### 2.2.1 Fundamentos do Cálculo Variacional

O problema fundamental do cálculo das variações é, determinar a função  $y = y(x)$  que extremize<sup>13</sup> a integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\} dx, \quad (2.26)$$

note que se uma função  $y = y(x)$  projete no funcional integral  $J$  um valor mínimo, qualquer variação em  $y$ , isto é, qualquer função vizinha, mesmo que seja tomada suficientemente próxima, deve gerar um valor maior para  $J$ .

Qualquer função vizinha de  $y(x)$  pode ser escrita da seguinte forma

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x), \quad (2.27)$$

em que  $\eta = \eta(x)$  é uma função com primeira derivada contínua. Note que  $y(x)$  deve ser um extremo do funcional para  $x_1 \leq x \leq x_2$ , de modo que a função vizinha  $y(\alpha, x)$  deve coincidir com  $y(x)$  nestes pontos. Um método eficaz de fazer isto é forçar que  $\eta(x)$  não seja uma função qualquer, mas que desapareça nestes pontos, isto é  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ .

Se  $y(x)$  for a função que minimiza o funcional integral  $J$ , então  $J(\alpha, x)$  é sempre superior à  $J(x)$ , para qualquer valor de  $\alpha$ , seja positivo ou negativo. Assim, uma condição necessária para que a integral tenha um valor estacionário é de que a derivada em relação à  $\alpha$  deve ser nula para a avaliação em  $\alpha = 0$ . Em outras palavras,

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (2.28)$$

produz um extremo para todas as funções  $\eta(x)$ .

A condição imposta pela Equação (2.28) pode ser então reescrita, uma vez conhecida a expressão geral de  $J$ , estabelecida pela Equação (2.26), mas agora para a função vizinha e efetuando a diferenciação associada, de modo que

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f\{y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x\} dx, \quad (2.29)$$

como a integral atua com limites fixos então as operações possuem uma comutatividade natural, de modo que a derivada parcial pode atuar no integrando, produzindo,

<sup>13</sup>Embora o termo 'extremizar' esteja relacionado apenas em tornar algo um máximo ou mínimo, para a maioria dos problemas dinâmicos se buscará a minimização das quantidades.

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx, \quad (2.30)$$

note, no entanto que a partir da Equação (2.27) é possível escrever as derivadas em relação à  $\alpha$ , de modo que

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x); \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx}, \quad (2.31)$$

por conseguinte, integrando utilizando o método de integração por partes e tomando a condição de contorno de que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , temos que

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx, \quad (2.32)$$

em  $\alpha = 0$  a integral deve desaparecer, e as funções  $y$  e  $y'$  retornam à sua forma original.

Portanto, como a função  $\eta(x)$  é arbitrária, mesmo que sujeita às condições já impostas, temos aquilo que é denominado Equação de Euler,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (2.33)$$

A equação acima é válida para o problema específico de o funcional  $f$  tiver apenas uma variável dependente  $y(x)$ , ocorre geralmente do problema possuir diversas variáveis, isto é  $f = f\{y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \dots; x\}$ , neste caso é possível mostrar que de modo equivalente ao já feito aqui, obtém-se que a solução será um conjunto de  $n$  equações de Euler [17], isto é

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.34)$$

## 2.2.2 Mecânica Lagrangiana e o Princípio de Hamilton

Para problemas mecânicos, o funcional integral de interesse é a ação, dada pela integral da lagrangiana ( $L$ ) no tempo; a lagrangiana é definida como sendo a diferença entre as energias cinética ( $T$ ) e potencial ( $U$ ) do sistema. Nesta perspectiva, surge o Princípio de Hamilton<sup>14</sup>, que será enunciado como um teorema [18]

**Teorema 1** (*Princípio de Hamilton*) *De todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer restrições), o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinéticas e potenciais.*

<sup>14</sup>O Princípio de Hamilton, ou Princípio da Mínima Ação, é o princípio dinâmico pelo qual é possível basear toda a Mecânica

Empregando o formalismo até aqui discutido, o Princípio de Hamilton se expressa matematicamente como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (2.35)$$

a notação delta aqui empregada é uma forma abreviada para descrever a variação paramétrica em  $\alpha$ . Novamente esta condição, escrita desta maneira, apenas garante a extremização, mas para fins práticos será tomada como sendo suficiente para a minimização da ação.

Se o sistema considerado for de coordenadas retangulares cartesianas então a energia cinética será função unicamente das velocidades de cada partícula constituinte do sistema estudado, enquanto que se as partículas se moverem em um campo de força conservativa, então a energia potencial será função única das posições geométricas das partículas. Em outras palavras,  $T = T(\dot{x}_i)$  e  $U = U(x_i)$ , portanto a lagrangiana é, em geral, função destes parâmetros  $L = L(x_i, \dot{x}_i)$ . Deste modo a Equação de Euler, como está aplicada à um sistema dinâmico, se torna a Equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.36)$$

No entanto o sistema pode ser estudado sob a ótica de qualquer conjunto de coordenadas, de modo que seja buscado aquele que simplifique o problema, sobretudo em aspectos de simetria. É então dado o nome de coordenadas generalizadas a todo o conjunto de quantidades que especifiquem o estado de um sistema, estas coordenadas são então comumente designadas como o conjunto  $\{q_j\}$ . Analogamente a Equação de Lagrange é então reescrita como sendo

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (2.37)$$

em que  $s$  é o número de graus de liberdade do sistema. A Equação de Lagrange é a base para toda a formulação da Mecânica, gerando como resultado as equações de movimento para quaisquer sistemas livres de vínculos<sup>15</sup> e seu valor teórico é totalmente equivalente ao Princípio Fundamental da Dinâmica<sup>16</sup>.

<sup>15</sup>É possível derivar uma equação levando em consideração os vínculos de caráter geométrico e/ou cinemático, no entanto como o plano de revolução de planetas em órbita é uma consequência dinâmica, não se configura como vínculo e, portanto não é necessário esta derivação neste texto.

<sup>16</sup>Para uma demonstração da equivalência entre a 2ª Lei de Newton e a Equação de Lagrange, consulte [17].

### 2.2.3 Movimento sob uma força central - O problema de dois corpos

Com a lagrangiana de um sistema dinâmico qualquer é possível, com as Equações de Lagrange, obter as equações de movimento. Imagine que o sistema seja formado por duas partículas pontuais, sujeitas à uma interação radial e, conseqüentemente conservativa, isto é, o potencial só dependendo das posições relativas. Sejam  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  os vetores que localizam as partículas 1 e 2 respectivamente, neste caso o potencial será uma função apenas de  $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ . Portanto, a lagrangiana deste sistema é,

$$L = \frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 - U(r), \quad (2.38)$$

convenientemente podemos tomar a origem do sistema de referência sobre o centro de massa do mesmo, isto nos permite relacionar as posições de ambas as partículas,

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0. \quad (2.39)$$

Buscar meios de conectar as partículas nos permitirá trocar o problema de dois corpos, pelo problema de um corpo equivalente. Utilizando o fato de que  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  é possível reescrever a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(r), \quad (2.40)$$

em que  $\mu$  é a massa reduzida,

$$\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.41)$$

#### 2.2.3.1 O momento angular é conservado

O sistema possui simetria esférica, de modo que uma rotação qualquer não modifica as equações de movimento, com isso é possível mostrar que a quantidade de movimento angular se conserva [17]. Uma consequência imediata é de que o plano de revolução é único e, portanto, o problema recai sobre duas dimensões. Desse modo, empregando coordenadas polares planas, podemos reescrever a lagrangiana (2.40) da seguinte forma

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r), \quad (2.42)$$

com isto a lagrangiana do sistema é cíclica em relação à variável  $\theta$ , ou seja, não é função direta da posição angular  $\theta$ , desse modo

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (2.43)$$

o que nos leva à conservação da quantidade de movimento angular [14]

$$p_\theta \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta}, \quad (2.44)$$

que é uma constante de movimento, que podemos definir como sendo  $l = \mu r^2 \dot{\theta}$ . Do modo pelo qual foi definido,  $l$  pode ser positivo ou negativo, dependendo da direção de translação de um corpo em torno do centro da força.

Uma consequência imediata da conservação do momento angular conjugado à coordenada  $\theta$  é a conservação da variação da área no tempo, correspondendo assim à 2ª Lei de Kepler para o movimento planetário, uma vez que  $r^2 \dot{\theta}/2$  corresponde geometricamente (ver figura 5) à velocidade areal [18].

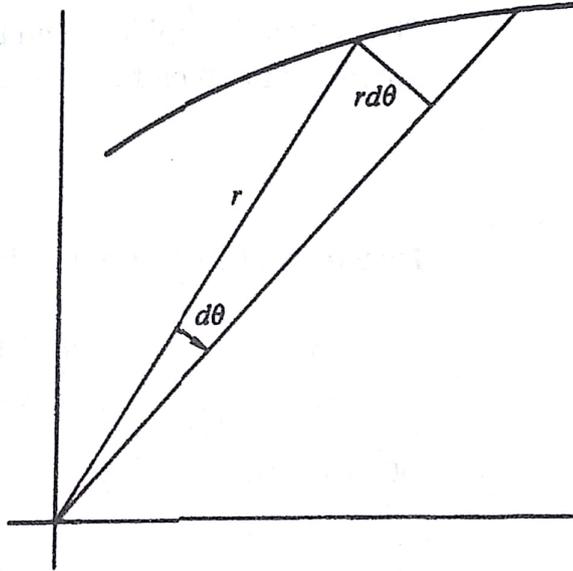


Figura 5: Área percorrida pela reta que 'conecta' a massa ao centro atrator em um intervalo de tempo  $dt$ . Fonte: [18].

Em um sistema conservativo, outra quantidade que se mantém constante é a energia mecânica total do sistema, de modo que ao somar a energia cinética ( $T$ ) de todas as partículas e a energia potencial de interação relativa entre as mesmas, o resultado é a energia total  $E$  do sistema. Para o problema de dois corpos,

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r), \quad (2.45)$$

a qual podemos reescrever em termos da quantidade de movimento conservada

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r), \quad (2.46)$$

podemos então resolver a equação acima para a velocidade generalizada  $\dot{r}$ , e com isso

obter [18]

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U(r)] - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \quad (2.47)$$

dado o valor de energia fornecido ao sistema, em contraste ao potencial relativo entre seus constituintes, os mesmos executarão determinada trajetória.

### 2.2.3.2 A trajetória do movimento

Para obter a trajetória é preciso resolver a equação (2.47) e obter  $r = r(\theta)$ , no entanto a resolução da equação gerará  $t = t(r)$  que ao ser algebricamente invertida produzirá a equação horária do movimento, isto é  $r = r(t)$  e não a trajetória. Para determinar a trajetória da partícula é preciso relacionar a variação do ângulo  $\theta$  com a posição  $r$ ; sua relação não é direta, o ângulo varia no tempo devido ao movimento, o tempo por sua vez pode ser escrito como função da posição, deste modo há a seguinte dependência  $\theta = \theta(t(r))$ , portanto podemos denotar

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr, \quad (2.48)$$

combinando as equações para  $l$  e  $\dot{r}$  recém encontradas, obtemos que a trajetória  $r = r(\theta)$  é obtida ao inverter a solução da seguinte equação [19]

$$\theta(r) = \int \frac{\pm(l/r^2)dr}{\sqrt{2\mu \left( E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right)}}. \quad (2.49)$$

Fornecido o potencial é possível, com a equação (2.49), associarmos uma trajetória. O contrário pode ser feito? Isto é, conhecendo-se a trajetória é possível determinar o potencial, ou a força que a gerou? De fato, isto é possível. Para isto podemos reescrever a equação de lagrange, para a lagrangiana do problema e, como o problema se trata de um campo conservativo, então a variação do potencial gera uma força,

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} = F(r), \quad (2.50)$$

tomando uma substituição de variáveis, tal que  $u \equiv 1/r$ , podemos então denotar, em termos de  $l$  as seguintes quantidades

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu}{l}\dot{r}; \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{l\dot{\theta}}\ddot{r}, \quad (2.51)$$

e com isto podemos obter expressões para  $\ddot{r}$  e para  $r\dot{\theta}^2$ . Combinando estas expressões

na equação (2.50) e voltando à variável original obtemos

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2} F(r), \quad (2.52)$$

neste caso, ao se conhecer a trajetória  $r = r(\theta)$  é possível determinar a força  $F = F(r)$  que a gerou<sup>17</sup>.

### 2.2.3.3 O potencial efetivo

Ao longo das discussões aqui apresentadas, como consequências do movimento de translação em torno de um centro atrator, um termo recorrente apareceu nas expressões obtidas. Este termo, originado da energia cinética de translação, exibe-se acompanhado da energia potencial, de modo que designa-o como sendo o potencial centrífugo

$$U_c = \frac{l^2}{2\mu r^2}, \quad (2.53)$$

associado à este potencial é possível derivar a força centrífuga<sup>18</sup>, que neste caso toma a seguinte forma,

$$F_c = -\frac{\partial U_c}{\partial r} = \mu r \dot{\theta}^2 \quad (2.54)$$

Podemos então definir o chamado potencial efetivo  $V$  como sendo aquele ‘real’ sofrido por uma massa  $m$  nas proximidades de um centro atrator,

$$V = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \quad (2.55)$$

para o problema que estamos analisando o potencial  $U(r)$  é o potencial gravitacional  $\mathcal{G}(r) = -k/r$ , onde  $k = GM$ , desse modo obtemos o potencial gravitacional efetivo [18],

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \quad (2.56)$$

com tal potencial efetivo é possível construir um gráfico que relacione o seu decaimento com a distância.

Nota-se que há uma similaridade forte do gráfico do potencial efetivo com o gráfico do potencial de interação de uma molécula diatômica, isto acontece devido à similaridade das forças de interação associadas à cada problema, a força newtoniana

<sup>17</sup>De fato, se tomarmos a equação da trajetória dos planetas ao redor do Sol, que é uma elipse e substituirmos nesta equação, obteremos que a lei da força depende do inverso do quadrado da distância.

<sup>18</sup>É devido a isto que o potencial é chamado de potencial centrífugo. Vale ressaltar ainda que normalmente a força centrífuga é apresentada nos livros-texto como sendo  $F_c = m r \omega^2$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular e  $m$  é a massa do corpo que rotaciona.

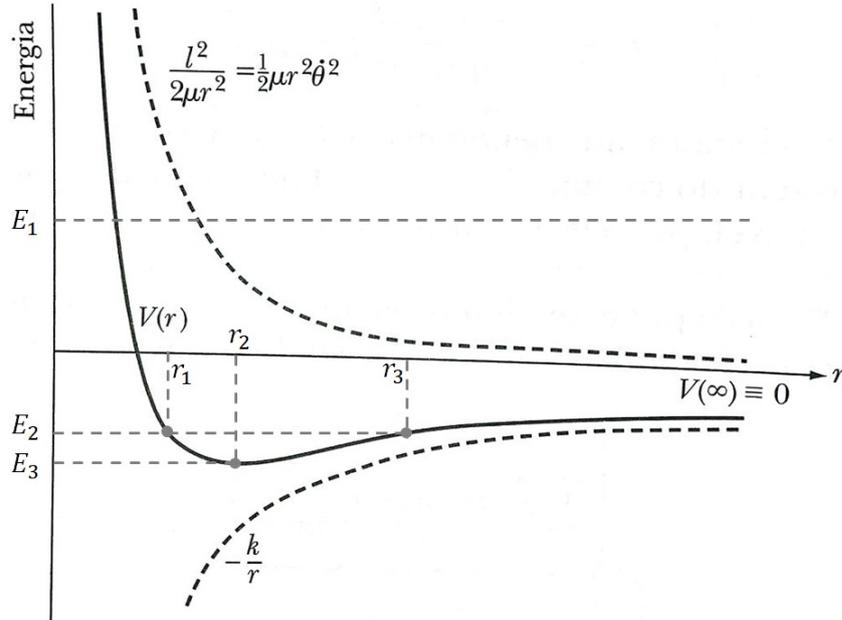


Figura 6: Gráfico do potencial, associando o potencial newtoniano de interação gravitacional e o potencial centrífugo, enfatizando a resultante, o potencial efetivo gravitacional. Fonte: Adaptado de [17].

da gravitação e a força elétrica coulombiana possuem a mesma dependência, gerando assim um potencial que até certo ponto é atrativo, e em certa região se torna repulsivo para evitar que as duas partículas (ou corpos) colidam.

Além disso, a partir deste gráfico é possível tirar conclusões qualitativas sobre o movimento da partícula apenas sabendo o valor de energia que a mesma possui. Por exemplo, suponha que a partícula possua  $E_1$  (ou qualquer outro valor positivo), neste caso o movimento não será limitado, ela se moverá em direção ao centro atrator até uma posição  $r_0$  que da qual não poderá ultrapassar, sendo repellido indefinidamente. Caso o valor de energia total seja  $E_2$  então o movimento estará limitado, entre  $r_1$  e  $r_3$ . Por fim, se a energia total for o valor mínimo, isto é  $E_3$ , então a órbita será circular com raio determinado  $r_2$ .

### 3 O POTENCIAL GRAVITACIONAL DA TERRA

O terceiro planeta do Sistema Solar, a Terra (figura 7), o lar da única forma de vida inteligente conhecida até o momento, gera um potencial em todos os pontos do espaço devido à sua massa. Certamente a primeira aproximação para estudar o potencial da Terra é considerar o planeta como sendo uma esfera maciça e uniforme, na qual o Teorema das Cascas Esféricas se aplica.



Figura 7: Planeta Terra visto da Estação Espacial Internacional (em inglês, *International Space Station, ISS*). Fonte: Nasa Imagens.

Tudo isto seria suficientemente preciso se a Terra constituísse um referencial inercial, no entanto isto não acontece. A Terra possui um movimento de rotação uniforme em torno de um eixo, o qual tomaremos como sendo perfeitamente vertical ao plano da órbita, nesta perspectiva a Terra deve ser considerada um referencial não inercial e, portanto o Princípio Fundamental da Dinâmica precisa ser alterado de modo a contemplar as chamadas forças de inércia<sup>1</sup>.

#### 3.1 Justificativa para a correção

Em um referencial  $S'$  girante (veja a figura 8) com rotação uniforme em relação à um referencial inercial  $S$  surge a chamada força centrífuga, esta força é dirigida para fora,

$$\mathbf{F}_{in} = m\omega^2 r \hat{r}, \quad (3.1)$$

veja que a força centrífuga aumenta com  $r^2$ . Consequentemente, para uma Terra

<sup>1</sup>Para uma discussão na temática Forças de Inércia, consulte [1].

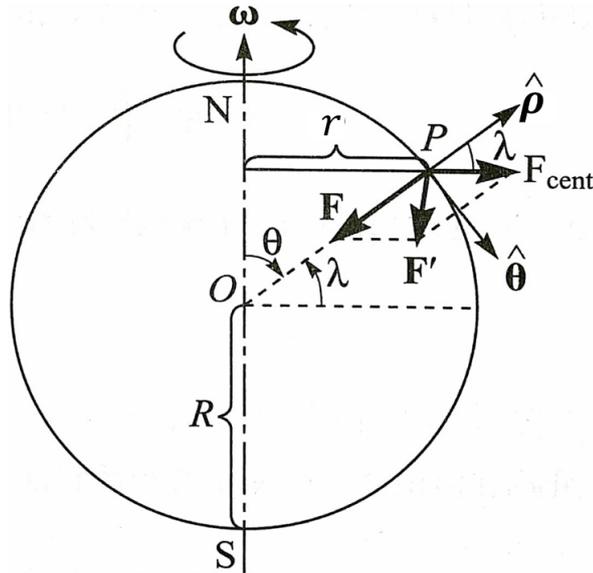


Figura 8: Relação da força centrífuga devido ao movimento de rotação da Terra. Fonte: Adaptado de [1].

esférica,  $r$  aumenta ao se aproximar do equador, sendo mínimo nos polos, então esta força também o é. A força centrífuga é então máxima no equador da Terra e nula nos polos, e isto faz com que seu formato se altere.

Se considerarmos a Terra como uma esfera hidrostática<sup>3</sup>, a forma de uma Terra em rotação seria a de um elipsoide (oblato) de revolução, também chamado de elipsoide de referência (ER) em geodesia. Newton assumiu uma densidade constante ao longo da Terra e chegou a conclusão que o achatamento seria de 1 : 230 [20], obtendo assim um erro de aproximadamente 27,9% do valor atualmente conhecido.

Portanto, a intenção deste capítulo é deduzir um fator corretivo para este potencial quando o formato da terra é considerado aproximadamente um elipsoide oblato de revolução com achatamento determinado, e não mais uma esfera. Nesta aproximação a massa do planeta não se altera, sendo apenas deslocada dos polos e acrescida junto ao equador.

### 3.2 Descrição Geométrica do Problema

Para determinar o efeito do achatamento da Terra em seu potencial gravitacional, em uma primeira aproximação<sup>4</sup>, podemos substituir a Terra elipsoidal por

<sup>2</sup>Note, no entanto que o  $r$  aqui representado não é a distância radial, mas sim a distância perpendicular ao eixo de rotação.

<sup>3</sup>Uma esfera hidrostática nada mais é do que uma esfera constituída de um fluido homogêneo e incompressível, isto é que atingiu o equilíbrio hidrostático.

<sup>4</sup>Os métodos que se seguirão para o cálculo desta primeira aproximação para o potencial gerado por uma Terra elipsoidal se baseiam no Problema 6-17 [14].

uma esfera de raio  $R$  escolhida de modo a ter o mesmo volume. Para isto, calculemos inicialmente o volume do elipsoide.

O elipsoide de revolução centrado na origem de um sistema cartesiano possui a seguinte forma funcional

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.2)$$

de modo que é possível escrever  $x$  em termos das outras variáveis. Se tomarmos

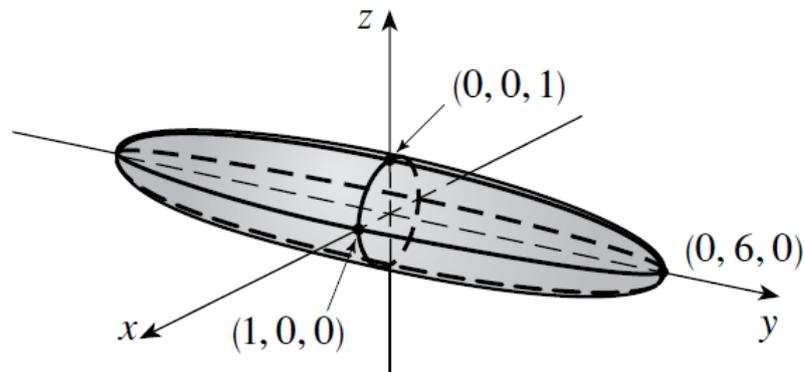


Figura 9: Exemplo de um elipsoide de revolução, modelo pelo qual o formato da Terra pode ser aproximado. Fonte: [21].

apenas o plano  $OYZ$  obtemos uma elipse, expressa por

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.3)$$

permitindo escrever  $z$  como função de  $y$  e, conseqüentemente como o valor máximo de  $y$  é  $b$  é possível determinar uma expressão para o volume do elipsoide. Note que basta tomarmos os intervalos válidos no primeiro octante, onde todas as coordenadas são positivas e então multiplicar o resultado por 8, de modo que o volume do elipsoide é dado por

$$V = 8 \int_0^b \int_0^{c(1-y^2/b^2)^{1/2}} \int_0^{a(1-y^2/b^2-z^2/c^2)^{1/2}} dx dz dy, \quad (3.4)$$

devido a ocorrência de termos em repetição se mostra interessante efetuar uma mudança de variável, isto é, modificando a geometria do problema, se definirmos novas quantidades  $\tilde{x} \equiv x/a$ ,  $\tilde{y} \equiv y/b$  e  $\tilde{z} \equiv z/c$ , então a integral acima se torna,

$$V = 8abc \int_0^1 \int_0^{c(1-\tilde{y}^2)^{1/2}} \int_0^{a(1-\tilde{y}^2-\tilde{z}^2)^{1/2}} d\tilde{x} d\tilde{z} d\tilde{y}, \quad (3.5)$$

note, no entanto, que a tripla integral, nada mais representa do que a oitava parte do volume de uma esfera cujo raio é a unidade [21], de modo que o volume do elipsoide

é

$$V = \frac{4}{3}\pi abc, \quad (3.6)$$

como no problema em questão o elipsoide é formado rotacionando a elipse em torno do eixo  $z$ , então  $a$  é necessariamente igual à  $b$ . Além disso, se considerarmos uma esfera e um elipsoide, a diferença é de que há um achatamento ( $\eta \neq 0$ ) no elipsoide, este achatamento<sup>5</sup> é definido pelo seguinte quociente,

$$\eta \equiv \frac{a - c}{a}, \quad (3.7)$$

de modo que é possível então escrever  $c$  como função de  $a$ ,  $c = a(1 - \eta)$  e, portanto o volume do elipsoide<sup>6</sup> é

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3(1 - \eta), \quad (3.8)$$

com isto, uma esfera com o mesmo volume, possuiria como raio equivalente para a expressão (3.8),

$$R = a(1 - \eta)^{1/3}. \quad (3.9)$$

O potencial gravitacional da Terra é então o potencial de uma esfera uniforme de raio  $R$  com a massa da Terra, mais o potencial de uma distribuição superficial de massa (positiva ou negativa), representando a massa por unidade de área que seria adicionada ou subtraída para formar o elipsoide real.

Para obter tal superfície buscaremos escrever um 'raio' para o elipsoide (isto é, o comprimento de um segmento de reta que 'conecte' o centro do elipsoide ao seu contorno) em termos do parâmetro de achatamento, afim de exprimir uma relação sobre a diferença nas superfícies.

Restringindo a análise ao plano  $OYZ$ , é possível definir um vetor posição  $r$  (ver figura 10) que conecta o centro da elipse à todos os pontos de seu contorno, empregando coordenadas polares, do tipo  $y = r \sin \alpha$  e  $z = r \cos \alpha$ , além da equação que relaciona  $a$ ,  $b$  e  $\eta$  é possível modificar a equação cartesiana da elipse de modo a obter

$$r^2[1 - \cos^2 \alpha + (1 - \eta)^{-2} \cos^2 \alpha] = a^2, \quad (3.10)$$

como  $\eta$  é um número muito menor que a unidade podemos expandir o termo envolvendo o mesmo em uma Série de Maclaurin<sup>7</sup>, na qual truncaremos a série nos termos

<sup>5</sup>Para a Terra temos que o raio equatorial mede  $a = b \approx 6378 \text{ km}$  e o raio polar é  $c \approx 6356,5 \text{ km}$ , de modo que o parâmetro de achatamento é aproximadamente  $\eta = 0,0034$ , um valor numericamente pequeno.

<sup>6</sup>Podemos, com esta expressão, quantificar de modo aproximado o volume da Terra, uma vez que é conhecido o raio equatorial  $a$  e o achatamento do planeta  $\eta$ , tomando os valores é possível estimar que  $V_{\text{earth}} \approx 1,0831 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$ .

<sup>7</sup>A Série de Maclaurin é uma variante da Série de Taylor, com o caso particular da expansão

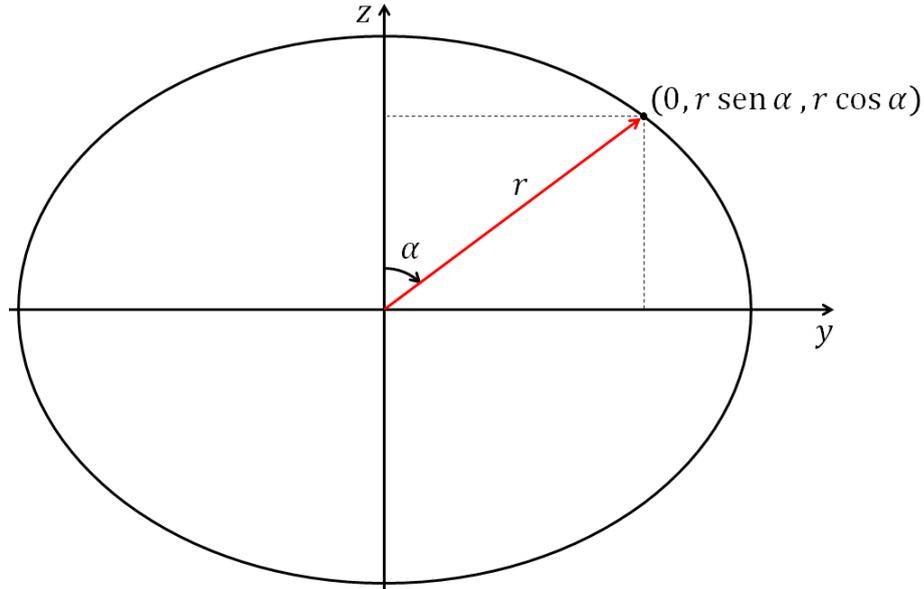


Figura 10: Elipse no plano  $OYZ$  que ao ser rotacionada em torno do eixo  $z$  gera o elipsoide de revolução.

de primeira ordem de achatamento, de modo que

$$(1 - \eta)^{-2} \approx 1 + 2\eta, \quad (3.11)$$

desse modo

$$r = \frac{a}{(1 + 2\eta \cos^2 \alpha)^{1/2}}, \quad (3.12)$$

expandindo novamente para os termos de achatamento em primeira ordem, obtemos

$$r = a(1 - \eta \cos^2 \alpha), \quad (3.13)$$

a equação acima conecta o 'raio' da elipse com seu achatamento, de modo que era esperado de que se  $\eta = 0$  o problema retorne ao caso de uma circunferência, neste caso de raio  $a$ .

### 3.3 Densidade superficial da massa deslocada

Conforme discutido, o método de se aproximar a Terra em um elipsoide e, com isto, escrever o potencial gravitacional gerado, consiste em tomar uma esfera com o mesmo volume contendo toda a massa da Terra e a ela adicionar uma superfície de densidade (positiva ou negativa) de massa, de modo que na região equatorial esta contribuição seja positiva, enquanto que nos polos esta superfície possa

---

ser tomada em torno da origem, de modo que sua expressão geral para uma função  $f = f(x)$  é  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [D^{(n)}f(0)](x^n)/(n!)$ , em que  $D^{(n)}f(0)$  é a  $n$ -ésima derivada da função aplicada no ponto de expansão [22].

densidade negativa. Matematicamente teremos que se  $\sigma_{elip}$  for a densidade excedente do elipsoide e  $\sigma_{esf}$  representar esta mesma quantidade para a esfera, então teremos que  $\sigma_{elip} = -\sigma_{esf}$ <sup>8</sup>. Como a massa total assim adicionada à esfera é zero, seu potencial gravitacional representará o efeito da forma oblíqua da Terra.

Geometricamente é mais simples de se calcular a densidade excedente pela esfera de raio  $R$  nos polos, de modo que é possível escrever um elemento infinitesimal de volume desta superfície (observe a figura 11).

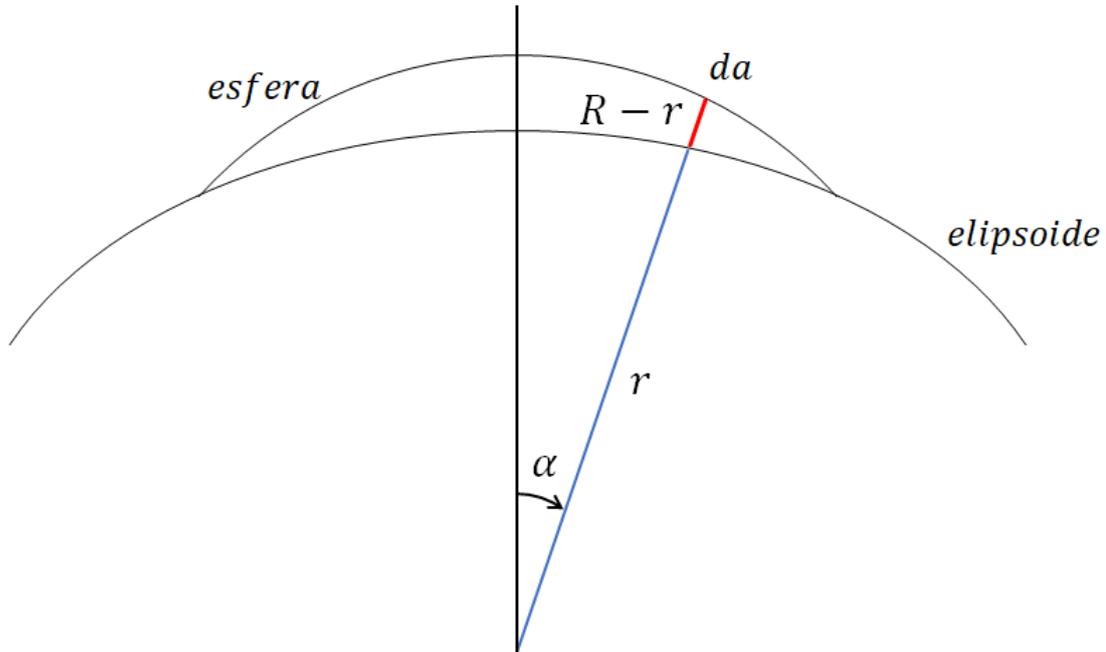


Figura 11: Esquemática (meramente ilustrativa, sem escala) entre a esfera e o elipsoide para obter um elemento infinitesimal de volume.

Deste modo um elemento infinitesimal de volume é dado por

$$d\tau = (R - r)da, \quad (3.14)$$

em que  $da$  é um elemento de área, geometricamente perpendicular à reta tangente em cada ponto da superfície. Deste modo é preciso buscar formas de escrever a diferença entre o raio da esfera  $R$ , e seu análogo  $r$  para o elipsoide, daí a necessidade de se escrever ambos em termos do parâmetro de achatamento. Combinando as equações (3.9) e (3.13) temos que,

$$(R - r) = a(1 - \eta)^{1/3} - a(1 - \eta \cos^2 \alpha), \quad (3.15)$$

<sup>8</sup>Outra forma de compreender a necessidade do sinal de menos nesta densidade é compreender que  $R - r < 0$  para a superfície excedente do elipsoide próximo ao equador.

expandindo o termo  $(1 - \eta)^{1/3}$  até primeira ordem em  $\eta$ , obtemos

$$R - r = -\frac{1}{3}a\eta + a\eta \cos^2 \alpha. \quad (3.16)$$

Um elemento infinitesimal de volume  $d\tau$  carrega consigo uma quantidade infinitesimal de massa,

$$dm = \rho d\tau, \quad (3.17)$$

empregando a equação (3.16), reescrevemos

$$dm = \rho(R - r)da, \quad (3.18)$$

de modo que podemos definir a densidade superficial de massa como sendo a taxa de variação da massa sob a área, isto é  $\sigma \equiv dm/da$  e, portanto, empregando a equação (3.16) obtemos a densidade superficial de massa excedente nos polos da esfera

$$\sigma_{esf} = \frac{1}{3}\eta a \rho (3 \cos^2 \alpha - 1), \quad (3.19)$$

relembre, no entanto que a densidade de massa gerada pelo elipsoide é o negativo daquela gerada pela esfera, de modo que [14]

$$\sigma_{elip} = \frac{1}{3}\eta a \rho (1 - 3 \cos^2 \alpha). \quad (3.20)$$

A densidade de massa gerada pela superfície excedente (3.20) causa uma modificação no potencial gravitacional, determinar tal modificação nesta aproximação é nosso objetivo ao longo desta seção.

### 3.4 Correção do Potencial

De certo modo, pode ser extensivamente complicado determinar esta correção considerando a geometria do elipsoide, no entanto é possível efetivar todos os procedimentos para uma esfera, mas tomando a densidade superficial dada pela equação (3.20). Seja tomada uma esfera, centrada na origem, de massa  $M$  e raio  $a$ , busquemos então calcular a alteração no potencial gerado sobre um ponto  $P$  qualquer (figura 12), aqui definido por  $\delta\mathcal{G}$

$$\delta\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_{superfície} = \int \frac{G}{r_m} dm, \quad (3.21)$$

onde  $r_m$  é o módulo do vetor posição que conecta o ponto  $P$  a cada elemento de massa da superfície.

É possível escrever os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{r}$  e, com isto escrever uma expressão para  $\mathbf{r}_m$  através da conexão geométrica entre estes vetores,  $\mathbf{r}_m = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ . O raio da esfera é (em

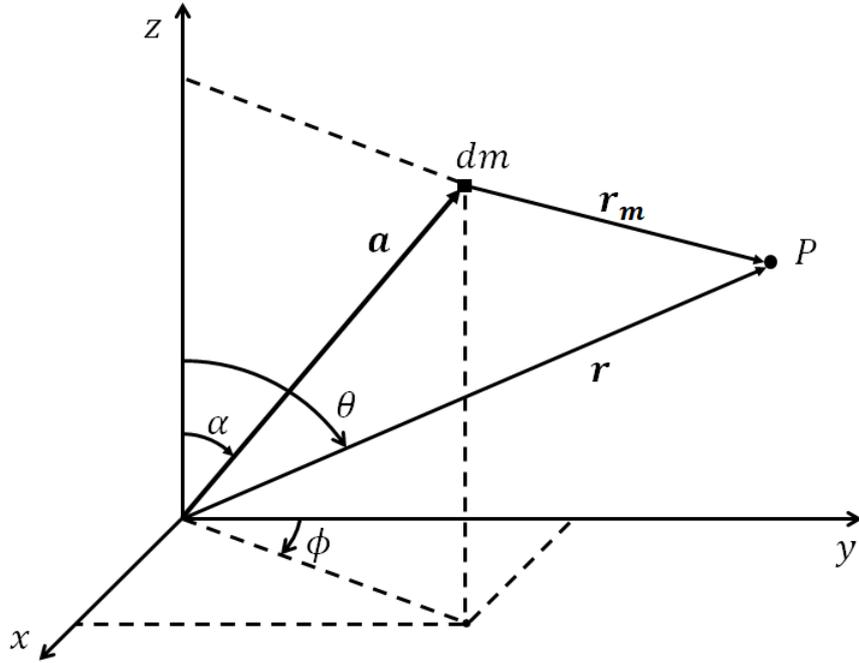


Figura 12: Esquemática da localização em coordenadas polares esféricas do elemento de massa  $dm$  e do ponto  $P$  no qual o potencial será avaliado.

coordenadas polares esféricas)

$$\mathbf{a} = a \sin \alpha \sin \phi \hat{x} + a \sin \alpha \cos \phi \hat{y} + a \cos \alpha \hat{z}, \quad (3.22)$$

enquanto que o vetor que localiza o ponto  $P$  é dado por

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}, \quad (3.23)$$

isto é possível pois é sempre possível rotacionar o sistema de modo que o vetor que localiza o ponto  $P$  em relação a origem esteja no plano  $OYZ$ . Consequentemente o módulo de  $\mathbf{r}_m$  pode ser obtido desenvolvendo a seguinte equação

$$\begin{aligned} r_m &= [(-a \sin \alpha \sin \phi)^2 + (r \sin \theta - a \sin \alpha \cos \phi)^2 + (r \cos \theta - a \cos \alpha)^2]^{1/2} \\ &= [r^2 + a^2 - 2ar(\sin \alpha \cos \phi \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta)]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

como o termo entre parênteses não depende das coordenadas radiais, podemos então escrever a expressão acima de modo sucinto definindo  $\Psi(\alpha, \theta, \phi)$ , a dependência angular

$$\Psi(\alpha, \theta, \phi) = \sin \alpha \cos \phi \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta, \quad (3.25)$$

com isto

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} \Psi(\alpha, \theta, \phi) \right]^{-1/2}, \quad (3.26)$$

tomando a premissa de que  $r \gg a$ , podemos expandir esta expressão até os termos quadráticos em  $r$  e, com isto obter

$$\frac{1}{r_m} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a}{r} \Psi(\alpha, \theta, \phi) + \frac{3a^2}{2r^2} \Psi^2(\alpha, \theta, \phi) \right] \quad (3.27)$$

em contrapartida o elemento de massa pode ser escrito como sendo o produto da densidade (do elipsoide) pelo elemento de superfície, que em coordenadas esféricas é  $da = a^2 \sin \alpha d\alpha d\phi$ , portanto

$$dm = \frac{1}{3} \eta a^3 \rho \sin \alpha (1 - 3 \cos^2 \alpha) d\alpha d\phi, \quad (3.28)$$

combinando então as equações (3.21), (3.27) e (3.28), e tomando a simetria existente no problema,

$$\delta \mathcal{G} = \frac{2G\eta a^3 \rho}{3r} \int_0^\pi \int_0^\pi (\sin \alpha - 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha) \left[ 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a}{r} \Psi + \frac{3a^2}{2r^2} \Psi^2 \right] d\alpha d\phi, \quad (3.29)$$

portanto o objetivo é determinar a solução da equação (3.29). Abstraindo as constantes a equação acima se torna um problema de três integrais em  $\alpha$ , sendo

$$I_1 \equiv \int_0^\pi (\sin \alpha - 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha) d\alpha = 0, \quad (3.30)$$

$$I_2 \equiv \int_0^\pi (\sin \alpha - 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha) \Psi(\alpha, \theta, \phi) d\alpha = \frac{\pi}{8} \cos \phi \sin \theta, \quad (3.31)$$

$$I_3 \equiv \int_0^\pi (\sin \alpha - 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha) \Psi^2(\alpha, \theta, \phi) d\alpha = \frac{8}{15} \cos^2 \phi \sin^2 \theta - \frac{8}{15} \cos^2 \theta, \quad (3.32)$$

vejamos assim que a equação (3.29) se reduz à

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{G} &= \frac{2G\eta a^3 \rho}{3r} \int_0^\pi \left[ \frac{a}{r} \frac{\pi}{8} \cos \phi \sin \theta + \frac{3a^2}{2r^2} \left( \frac{8}{15} \cos^2 \phi \sin^2 \theta - \frac{8}{15} \cos^2 \theta \right) \right] d\phi \\ &= \frac{2G\eta a^3 \rho}{3r} \frac{3a^2}{2r^2} \frac{8\pi}{15} \left( \frac{1}{2} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \right) \\ &= \frac{4G\eta a^5 \pi \rho}{15r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta), \end{aligned} \quad (3.33)$$

para solucionar este problema estamos tomando uma esfera de raio  $a$  em que a massa seja igual a massa do elipsoide oblato, mas com densidade negativa, então é interessante exprimir o resultado da correção para o potencial em termos desta esfera. Veja

que o volume gerado pela esfera é

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi a^3, \quad (3.34)$$

observe que com isto teremos o produto da densidade volumétrica de massa pelo próprio volume, resultando por fim na massa  $M$  da distribuição. Concluimos então que a correção para o potencial gerado pela Terra, assumindo seu formato como sendo aproximadamente um elipsoide oblato de revolução, é inversamente proporcional ao cubo da posição e tendo uma dependência com o cosseno ao quadrado do ângulo azimutal [14],

$$\delta\mathcal{G} = \frac{1}{5}\eta \frac{MGa^2}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta). \quad (3.35)$$

Os procedimentos realizados nos levaram à um fator corretivo que depende inversamente de  $r^3$ . No entanto, a demonstração foi feita tomando  $r$  como sendo o vetor que conectava o centro ao contorno da elipse, desse modo a correção para o potencial só vale para pontos no interior do elipsoide? Mostraremos que não, uma vez que este fator sendo solução da Equação de Laplace, teremos que será solução para a Equação de Poisson para a região em que  $\rho = 0$ , sendo portanto, fora da distribuição de massa.

Como  $\delta\mathcal{G}$  não é função do ângulo  $\phi$ , então o laplaciano é escrito em coordenadas polares esféricas, como sendo

$$\nabla^2(\delta\mathcal{G}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial(\delta\mathcal{G})}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin\theta \frac{\partial(\delta\mathcal{G})}{\partial \theta} \right], \quad (3.36)$$

se agruparmos as constantes como sendo uma constante  $A$ , teremos que,

$$\delta\mathcal{G} = \frac{A}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta), \quad (3.37)$$

desse modo obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla^2(\delta\mathcal{G}) &= \frac{A}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3} \right) \right] + \frac{A}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3} \right) \right] \\ &= \frac{A}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{-3(1 - 3\cos^2\theta)}{r^2} \right] + \frac{K}{r^5 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (6\sin^2\theta \cos\theta) \\ &= \frac{6A}{r^5}(1 - 3\cos^2\theta) - \frac{6A}{r^5}(1 - 3\cos^2\theta), \end{aligned} \quad (3.38)$$

portanto

$$\nabla^2(\delta\mathcal{G}) = 0, \quad (3.39)$$

logo o fator corretivo é válido para pontos fora da Terra.

### 3.4.1 Aspectos gerais do fator de correção

A correção ao potencial gravitacional gerado pela geometria da Terra, possui uma relação direta entre as quantidades  $r$  e  $\theta$ , de modo que as possíveis variações dos mesmos geram valores diferentes de  $\delta\mathcal{G}$ . Este fator, tende a zero mais rapidamente no crescimento de  $r$  do que o potencial comumente empregado. Quando esta correção é máxima? Quando ela é mínima? Ela pode ser nula? Se sim, quando que o potencial não precisa ser corrigido?

Para tornar esta análise efetiva precisaremos tomar um dos parâmetros como sendo constante, enquanto o outro varia. O módulo de  $r$ , empregado na demonstração como sendo a distância do centro do elipsoide até seu contorno, é praticamente idêntica à  $R$ , o raio da esfera equivalente, uma vez que o valor do achatamento  $\eta$  é pequeno se comparado às demais distâncias envolvidas. Neste caso podemos tomar  $r$  como sendo constante e ao variar o ângulo azimutal, obter uma ideia básica com o auxílio de um gráfico sobre as variações sofridas no potencial.

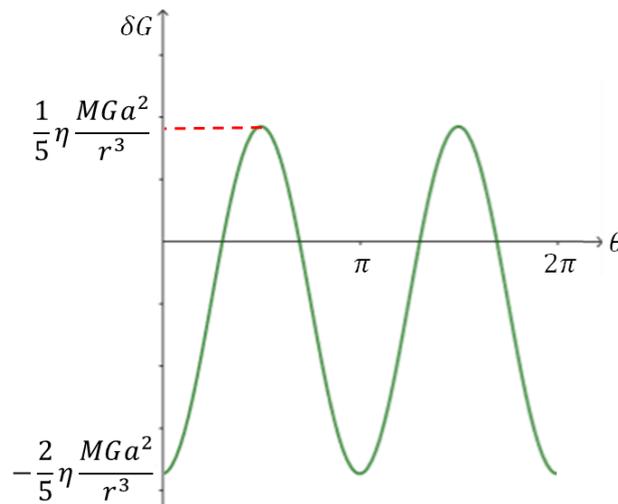


Figura 13: Gráfico do fator corretivo em função do ângulo azimutal, tomando  $r$  como sendo constante.

O fator angular, devido à simetria natural do problema, produz o mesmo resultado para a correção tanto para  $\theta$  como para  $-\theta$ , com  $0 \leq \theta \leq \pi$ , desse modo podemos analisar quando este fator é máximo ou mínimo. O máximo certamente ocorrerá quando,

$$\delta\mathcal{G}_{máx} = \frac{1}{5}\eta \frac{MGa^2}{r^3}, \quad (3.40)$$

este caso força que  $\cos^2 \theta$  seja igual a zero e, com isto faz com que os ângulos possíveis sejam

$$\theta = \frac{n\pi}{2}; \quad n = \{1, 3\}, \quad (3.41)$$

note que, este caso gera os pontos sob os quais há a maior sobreposição do elipsoide, isto é, no equador. Analogamente o valor mínimo da correção, isto é, quando ela contribui negativamente, deve ser quando a esfera que se sobrepõe, ou seja, nos pólos do planeta. Este caso, em que  $\theta = m\pi; m = \{0, 1, 2\}$ , produz então uma contribuição negativa ao potencial resultante,

$$\delta\mathcal{G}_{min} = -\frac{2}{5}\eta\frac{MGa^2}{r^3}. \quad (3.42)$$

Pode-se questionar se há algum caso, no qual a contribuição do fator corretivo seja nula. Isto é, dado que  $r$  seja tomado como uma constante, há locais onde o potencial gerado pelo elipsoide oblato coincida numericamente com o potencial gerado pela esfera? Este caso, faria então com que  $\delta\mathcal{G} = 0$  e, com isso

$$\cos\theta_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta_0 = \pm\cos^{-1}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (3.43)$$

este valor  $\theta_0$ , na realidade produz quatro valores específicos<sup>9</sup> para o ângulo azimutal por plano e, neles, a correção se torna nula. Estes quatro ângulos, devido à simetria do problema, se traduzem como um cone, centrado na origem, que sob o qual o potencial não necessita de uma correção, sendo portanto formado pelas interseções entre as duas superfícies<sup>10</sup>, onde  $R = r$ .

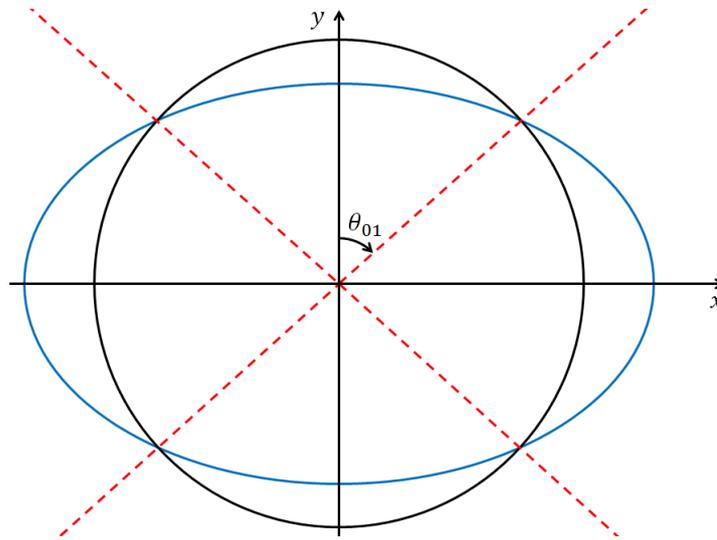


Figura 14: Superfície sob a qual a correção para o potencial não é necessária, isto é  $\delta\mathcal{G} = 0$ .

<sup>9</sup>Os quatro valores são  $\theta_{01} \approx 54,736^\circ$ ,  $\theta_{02} \approx 125,264^\circ$ , além de seus valores no sentido  $-\theta$ , devido à simetria pela qual o problema foi construído, isto é  $\theta_{03} = -\theta_{01}$  e  $\theta_{04} = -\theta_{02}$ .

<sup>10</sup>Este resultado poderia ter sido obtido anteriormente, tomando na equação (3.16) a igualdade  $R = r$  e verificando a região na qual as superfícies se interceptavam.

## 4 ÓRBITAS PLANETÁRIAS

De certo modo, com tudo o que vimos até o momento é possível sintetizar nosso conhecimento da dinâmica orbital em 5 tópicos [23]:

i) A família de curvas conhecida como seções cônicas (ver figura 15) é a única possibilidade de trajetória para o problema de dois corpos;

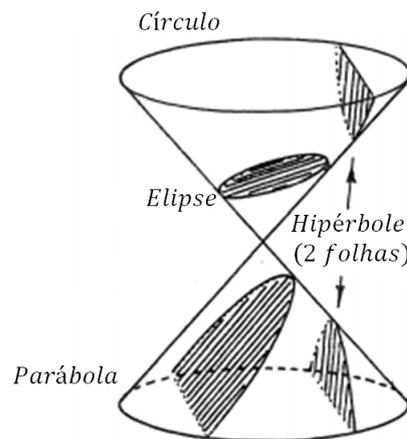


Figura 15: Família de curvas chamadas seções cônicas, geradas através de partições específicas de um cone teórico. Fonte: Adaptado de [23].

ii) O corpo central (de maior massa) ocupa o foco da órbita cônica;

iii) A energia mecânica total (soma da energia cinética e da potencial) de um corpo em órbita é constante ao longo do movimento, isto faz com que haja uma constante transformação energética, de modo que quando o corpo diminui sua distância, aumenta sua velocidade, conservando assim a área percorrida;

iv) O movimento orbital ocorre em um plano no espaço cuja inclinação é constante no tempo em relação ao plano equatorial do centro atrator;

v) O momento angular específico de um satélite é uma constante de movimento.

As três primeiras afirmações estão demonstradas ao longo do Apêndice A, nas chamadas Leis de Kepler, enquanto que as últimas são consequências da conservação da quantidade de movimento angular conjugada à uma das coordenadas, sendo demonstrado no Capítulo 2.

Para além disso podemos classificar as órbitas através da definição de órbita limitada. Uma órbita é dita limitada se, e somente se, a distância da partícula ao centro atrativo do sistema é constante, isto é a órbita é circular, ou se está compreendida entre dois valores limitantes<sup>1</sup> chamados de apsides, de modo que para qualquer valor de  $r$

<sup>1</sup>Para o Sistema Solar, onde a órbita dos planetas são elipses e o Sol ocupa um dos focos, esses dois

que seja alcançado na trajetória devemos ter que existem  $r_{min}$  e  $r_{max}$  tais que  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ . Vale ainda enfatizar que uma órbita ser limitada não é condição suficiente para que a mesma seja fechada, pois a trajetória pode dar voltas indefinidamente sem nunca se fechar [19].

Um dos maiores resultados do estudo de órbitas é o chamado Teorema de Bertrand, este determina quais os potenciais em que órbitas limitadas implicam sobre serem fechadas, este resultado enunciaremos aqui em forma de um teorema<sup>2</sup>.

**Teorema 2 (Teorema de Bertrand)** *Os únicos potenciais centrais para os quais todas as órbitas limitadas são fechadas são  $V(r) = -k/r$  e  $V(r) = kr^2$ , com  $k > 0$ , isto é, ou a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância ou obedece à lei de Hooke.*

#### 4.1 Estabilidade Orbital

Tão importante quanto se determinar a órbita de movimento dos planetas é então considerar aspectos teóricos que garantam sua estabilidade, afinal, uma órbita que não seja estável carece de condições operacionais para satélites e certamente não ofereceria as qualidades necessárias para gerar a vida como a conhecemos.

A órbita (2.48), como visto ao longo do Capítulo 2, depende da composição do potencial gravitacional junto ao potencial centrífugo (2.52), sendo função portanto do potencial efetivo (2.55). Por correspondência, a estabilidade orbital depende da estabilidade do potencial. Quais então são as condições necessárias para se obter um equilíbrio estável para uma função?

São duas as condições de estabilidade para uma função, primeiramente deve ser analisado se a região é de equilíbrio, isto é, se sua primeira derivada é nula e, com isto ver se sua segunda derivada é positiva, garantindo assim que a função possui um equilíbrio estável naquela região. Deste modo, tomando uma função  $f = f(x_1, x_2, \dots)$ , a mesma será estável em  $x_1 = x_0$ , se e somente se,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=x_0} > 0. \quad (4.1)$$

O conceito de estabilidade necessita, obrigatoriamente, associar uma região na qual a função (derivadas primeira e segunda) é avaliada. A órbita de revolução dos planetas do Sistema Solar é uma elipse, conforme estabelecido pela 1ª Lei de Kepler para o movimento planetário, no entanto, se observarmos a excentricidade das órbitas

---

pontos limitantes possuem nomes especiais,  $r_{min}$  é o periélio (que significa perto do Sol) e  $r_{max}$  é o afélio (que significa afastado do Sol), sendo portanto os pontos mais próximo e mais distante da órbita planetária, respectivamente.

<sup>2</sup>Para uma demonstração breve e clara deste teorema, consulte [19].

dos planetas observados por Kepler (ver tabela 1), são números pequenos, de modo que se aproximam muito de círculos, cuja excentricidade é zero.

Tabela 1: Excentricidade da elipse de cada planeta do Sistema Solar. Fonte: Adaptado de [7].

Planeta	Excentricidade	Observação
Mercúrio	0,2060	Observações insuficientes para o estudo de Kepler
Vênus	0,0068	Órbita praticamente circular
Terra	0,0167	Excentricidade muito pequena
Marte	0,0934	Órbita mais excêntrica dentre os estudados
Júpiter	0,0485	Movimento celeste lento (poucos dados)
Saturno	0,0556	Movimento celeste muito lento (pouquíssimos dados)
Urano	0,0472	Descoberto apenas em 1781
Netuno	0,0086	Descoberto apenas em 1846

Desse modo, podemos aproximar e determinar a estabilidade das órbitas tomando-as como sendo círculos de raio  $\rho$ .

#### 4.1.1 Estabilidade de órbitas circulares

Iremos agora estabelecer a chamada condição de estabilidade geral para órbitas circulares devido à uma força conservativa do tipo  $\mathbf{F}(r) = -\mu g(r) \hat{r}$ , onde  $g = g(r)$  é uma função inicialmente arbitrária. Esta força é, então, o negativo da derivada de um potencial  $U = U(r)$ . Portanto, pela Equação (2.49), obtemos que

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu^2 r^3} = -g(r), \quad (4.2)$$

tomemos então que seja feita uma pequena perturbação na órbita circular de raio  $\rho$ , isto é que agora  $r \rightarrow \rho + \rho_0$ , em que  $\rho \gg \rho_0$ . Deste modo, reescrevemos a equação (4.2) do seguinte modo

$$\ddot{\rho} + \ddot{\rho}_0 - \frac{l^2}{\mu^2 \rho^3 \left[1 + \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right]^3} = -g(\rho + \rho_0), \quad (4.3)$$

tomando a expansão multipolar do termo  $(1 + \rho_0/\rho)^{-3}$  até o termo linear e, supondo que  $g(\rho + \rho_0)$  possa ser expandida em Série de Taylor, truncando a série nos termos de ordem quadrática e/ou superior, podemos reescrever a equação (4.3). Lembre-se ainda que a premissa do movimento é que o mesmo aconteça sobre uma órbita circular de raio constante  $r = \rho$ , de modo que não ocorrem movimentos radiais e, portanto  $\dot{\rho} = 0$ ,

deste modo obtemos que

$$\ddot{\rho}_0 + \left[ \frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho) \right] \rho_0 = 0, \quad (4.4)$$

a Equação Diferencial Ordinária acima é conhecida, é a EDO de um oscilador harmônico simples, com frequência natural de oscilação  $\omega_0$  definida neste caso como sendo

$$\omega_0^2 = \frac{3g(\rho)}{\rho} + g'(\rho), \quad (4.5)$$

é a partir do valor de  $\omega_0$  que estabeleceremos aqui a condição de estabilidade para órbitas circulares.

A perturbação  $\rho_0$ , solução da EDO (4.4), pode ser escrita em termos de uma combinação linear de exponenciais complexas,

$$\rho_0(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}. \quad (4.6)$$

Uma hipótese já considerada é de que a perturbação, deve ser pequena ao ponto de não desfazer a órbita, desse modo  $\rho_0(t)$  não pode divergir. Se tomarmos  $\omega_0^2 < 0$  então ambos os termos deixarão de serem exponenciais complexas, passando a crescer indefinidamente. Portanto, a condição de oscilação é

$$3 + \rho \frac{g'(\rho)}{g(\rho)} > 0, \quad (4.7)$$

ou ainda como  $\mathbf{F}(r) = -\mu g(r) \hat{r}$ , podemos escrever a condição de estabilidade em termos da força que gerou a órbita [17],

$$3 + \rho \frac{F'(\rho)}{F(\rho)} > 0. \quad (4.8)$$

Para o caso de uma força radial atrativa, temos que  $F(r) = -k/r^n$ , onde  $k$  é uma constante qualquer, obtemos então que

$$(3 - n) \frac{1}{\rho} > 0, \quad (4.9)$$

isto nos leva à condição de que  $n < 3$ . Logo, a força de interação planetária definida por Newton tem o potencial de gerar órbitas circulares estáveis com raio  $\rho$  arbitrário.

Um fato interessante sobre as órbitas circulares estáveis é de que as mesmas possuem o maior valor possível de momento angular em relação à qualquer outra órbita, quando a energia mecânica total é constante. Tomando a energia total do sistema como sendo a soma da energia cinética com a energia potencial (efetiva), obtemos

que

$$l = r \sqrt{2\mu \left[ E + \frac{k}{r} - \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \right]}, \quad (4.10)$$

para órbitas circulares  $\dot{r} = 0$  e portanto não há o decréscimo do termo cinético. Para qualquer outra órbita  $\dot{r} \neq 0$  e uma quantidade será reduzida do momento angular. Portanto, a quantidade de movimento angular associada com uma órbita circular é maior do que aquela de qualquer outra órbita da família, dado o mesmo valor constante da energia mecânica total do sistema.

## 4.2 Estabilidade orbital para o potencial corrigido da Terra

Mostramos que uma lei de força do tipo  $\mathbf{F}(r) = -(k/r^n) \hat{r}$ , com  $n < 3$  gera órbitas circulares estáveis, no entanto o potencial corrigido da Terra, demonstrado e discutido no capítulo 3 deste trabalho monográfico, possui uma relação inversamente proporcional ao cubo da distância, sendo a força associada uma potência de 4ª ordem na distância, fugindo então aos condicionamentos de estabilidade impostos na Equação (4.9). É possível gerar órbitas circulares estáveis com tal potencial corrigido?

O potencial gerado pela Terra é, então a soma do potencial newtoniano com o fator corretivo (3.35),

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\tilde{k}}{r^4}, \quad (4.11)$$

em que  $k$  e  $\tilde{k}$  são constantes na variável  $r$ ,

$$k = GM\tilde{m} \text{ e } \tilde{k} = \frac{3}{5}\tilde{m}\eta M G a^2 (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad (4.12)$$

com isto temos que

$$\frac{dF(r)}{dr} \equiv F'(r) = \frac{2k}{r^3} + \frac{4\tilde{k}}{r^5}. \quad (4.13)$$

Com as equações (4.11) e (4.13) podemos substituir na condição de estabilidade, com  $r = \rho$ ,

$$\frac{3}{\rho} - \frac{\frac{1}{\rho^5}(2k\rho^2 + 4\tilde{k})}{\frac{1}{\rho^4}(k\rho^2 + \tilde{k})} > 0, \quad (4.14)$$

note que, embora  $\tilde{k}$  possa assumir valores negativos, como  $k \gg |\tilde{k}|$  uma vez que  $\tilde{k} \propto \eta$  e  $\eta \ll 1$  então  $k\rho^2 + \tilde{k} > 0$ . Com isto obtemos uma condição secundária para que a órbita circular seja estável,

$$k\rho^2 > \tilde{k}, \quad (4.15)$$

ou ainda

$$\rho > \sqrt{\frac{\tilde{k}}{k}}. \quad (4.16)$$

A condição acima, da forma com a qual está escrita, não revela muita coisa, pelo fato de as constantes não estarem devidamente explícitas. Note ainda, que  $\tilde{k}$  possui uma relação em termos do ângulo azimutal, portanto para cada plano orbital (isto é para cada valor de  $\theta$ ) o raio mínimo de uma órbita circular para que seja estável é diferente.

Conhecendo-se os valores das constantes, é possível escrever

$$\rho > a\sqrt{\frac{3}{5}\eta(1 - 3\cos^2\theta)}. \quad (4.17)$$

O radicando, dependendo do valor de  $\theta$  pode assumir valores tanto positivos quanto negativos. Os valores positivos produzem órbitas circulares estáveis, enquanto que valores negativos resultam em  $\rho \in \mathbb{C}$ , não representando então órbitas circulares estáveis<sup>3</sup>. O gráfico da Fig. 16, exprime esta relação  $\rho = \rho(\theta)$  que devido a simetria pelo qual o problema foi construído, será avaliado no intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

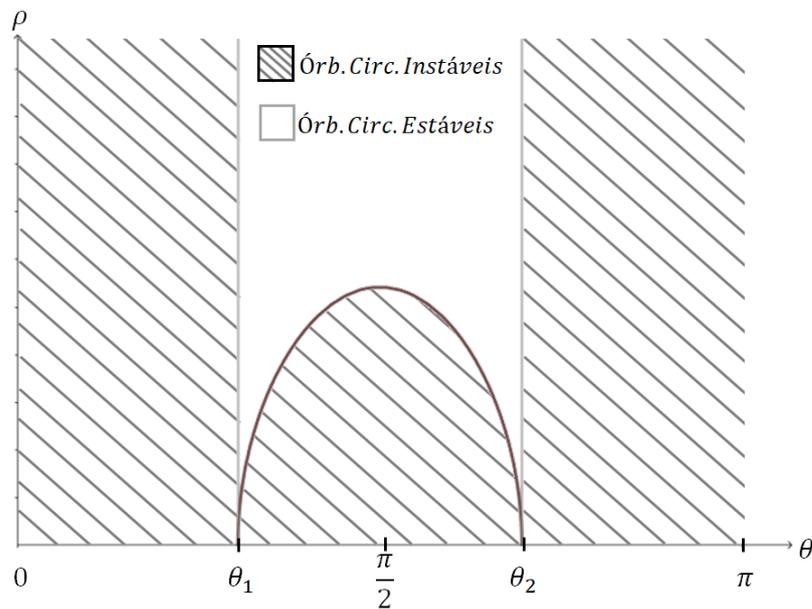


Figura 16: Configurações permitidas (em branco) para órbitas circulares estáveis de satélites que orbitem a Terra em função do ângulo azimutal.

O gráfico da Fig. 16, representa então o conjunto de configurações orbitais  $(\rho, \theta)$  permitidas (região branca) para um satélite orbitar a Terra em uma trajetória circular e estável. A região sombreada, além do contorno (em preto) são então inacessíveis, pela condição de estabilidade para existirem órbitas circulares estáveis, nada

<sup>3</sup>Como  $\rho \in \mathbb{C}$  então não existe órbita circular e estável nesta condição.

impede, no entanto de existirem órbitas instáveis, ou estáveis com excentricidade mais elevada.

A região angular então permitida reside próximo ao plano equatorial ( $\theta = \pi/2$ ), mais precisamente tais planos estão compreendidos na faixa angular correspondente ao deslocamento de massa para esta região, isto é, entre as interseções das superfícies<sup>4</sup> (elipsoide e esfera), sendo então compreendidos no intervalo  $\theta_{01} \leq \theta \leq \theta_{02}$ .

---

<sup>4</sup>Esta afirmação é verdadeira devido às expressões (3.35) e (4.17) terem a mesma dependência angular e conseqüentemente os mesmos zeros na função.

## 5 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi possível determinar um fator corretivo para o potencial gerado pelo achatamento da Terra na região de seus polos e então estabelecer condições de estabilidade orbital.

A princípio, derivamos um fator corretivo para o potencial gravitacional gerado por uma Terra não esférica, mas sob o modelo do elipsoide de referência (ER), com achatamento determinado, proveniente da rotação do planeta, para isto seguimos um conjunto de etapas sistemáticas: i) estabelecemos relações geométricas para  $R$  e  $r$ , os 'raios' da esfera e do elipsoide respectivamente, em função do parâmetro de achatamento  $\eta$ , ii) definimos um elemento infinitesimal de volume da distribuição de massa, iii) estabelecemos uma relação angular para a densidade superficial da massa deslocada dos polos ao equador, iv) escrevemos uma expressão para um elemento infinitesimal de massa  $dm$  em coordenadas esféricas, v) aplicamos na integral para determinar a função potencial gravitacional. Com isto, obtemos um fator corretivo inversamente proporcional ao cubo da distância, e com dependência no ângulo azimutal do plano orbital de um satélite.

Além disso, verificamos que a solução, embora demonstrada para  $r$  interno ao planeta, também era válido para pontos externos ao conferir a mesma como solução da Equação de Poisson na região em que  $\rho = 0$ . Ademais, constatamos as regiões onde tal correção era máxima, mínima e conseqüentemente determinamos a região em que a mesma não era necessária, sendo sob o cone formado pelas interseções das superfícies.

Após isto, determinamos, sob um procedimento geral, a chamada condição de estabilidade para órbitas circulares estáveis devido à forças radiais, constatando que forças atrativas  $F(r) \propto r^{-n}$  geram órbitas estáveis e circulares em quaisquer condições apenas quando  $n < 3$ .

Quando calculamos a condição de estabilidade para uma força derivada da soma dos potencial newtoniano com o fator corretivo obtido, constatamos que existem configurações permitidas para haverem órbitas estáveis e circulares, sendo que outros tantos planos orbitais eram inacessíveis. Além disso, vimos que tais planos permitidos residem próximos ao equador, entre os ângulos pelos quais as superfícies se interceptam. Este último resultado está sendo avaliado para uma possível publicação em uma revista de Ensino de Física.

## REFERÊNCIAS

- [1] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Mecânica*. São Paulo: Blucher, 2013.
- [2] TIAGO, M. F. S. *A 'Natureza da Ciência' através do exemplo do desenvolvimento das ideias que levaram à Gravitação Universal*. Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, 2011.
- [3] HOLTON, G.; RUTHERFORD, F. J.; FLETCHER, G. W. *Projecto Física - volume 2*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1978.
- [4] SCHURMANN, P. F. *História de la Física*. Buenos Aires: Nova, 1945.
- [5] BERNAL, J. D. *Science in History*. London: Penguin Books, 1965.
- [6] GATTI, S.; NARDI, R. Algumas considerações sobre a evolução dos modelos de mundo e o conceito de atração gravitacional. In: \_\_\_\_\_. *Educação em Astronomia: experiências e contribuições para a prática pedagógica*. Campinas: Átomo, 2010.
- [7] GRANJEIRO, M. L. *Tópicos de astronomia e astrofísica*. 2014.
- [8] PEDUZZI, L. O. Q. *As concepções espontâneas, a resolução de problemas e a História e a Filosofia da Ciência em um curso de Mecânica*. Tese de Doutorado, Santa Catarina, 1998.
- [9] KOESTLER, A. *O homem e o universo*. São Paulo: Ibrasa, 1989.
- [10] KOYRE, A. *Estudos de história do pensamento científico*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1991.
- [11] PORTO, C. M.; PORTO, M. B. D. S. M. A evolução do pensamento cosmológico e o nascimento da ciência moderna. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 30, n. 4, 2008.
- [12] ABDALLA, E.; SAA, A. *Cosmologia: dos mitos ao centenário da Relatividade*. São Paulo: Blucher, 2010.
- [13] ZANETIC, J. *Gravitação - notas de aula*. São Paulo: USP, 1995.
- [14] SYMON, K. R. *Mechanics*. Philippines: Addison-Wesley, 1971.
- [15] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física: gravitação, ondas e termodinâmica*. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- [16] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. California: Elsevier, 2005.
- [17] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Stamford: Cengage Learning, 2008.
- [18] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. San Francisco: Addison Wesley, 2001.
- [19] LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- [20] NEWTON, J. I. *Principia: o Sistema do Mundo*. São Paulo: EdUSP, 2008.

- [21] STEWART, J. *Cálculo - volume 2*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [22] LIMA, E. L. *Curso de Análise - volume 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.
- [23] BATE, R. R.; MUELLER, D. D.; WHITE, J. E. *Fundamentals of Astrodynamics*. New York: Dover Publications, 1971.
- [24] BERTRAND, J. *Os fundadores da astronomia moderna: Copérnico, Tycho Brahe, Kepler, Galileu, Newton*. Rio de Janeiro: Contraponto, 2008.
- [25] SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica - volume 2*. São Paulo: Pearson Makron Books, 1988.

## APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÃO DAS LEIS DE KEPLER

Através de incontáveis observações minuciosas do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe gerou-se uma grande massa de dados brutos sobre as posições dos planetas em vários intervalos de tempo que o mesmo havia observado[24].

Quando Tycho morreu, Kepler trabalhou incessantemente sobre eles por 20 anos, até que conseguiu destilar suas três leis do movimento planetário. Essas leis constituem o clímax de milhares de anos de Astronomia puramente observacional

**Lei 1 (Lei das órbitas)** *A órbita de cada planeta é uma elipse, sendo que o Sol está num dos focos.*

**Lei 2 (Lei das áreas)** *O segmento de reta que une um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.*

**Lei 3 (Lei dos períodos)** *O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita elíptica do planeta.*

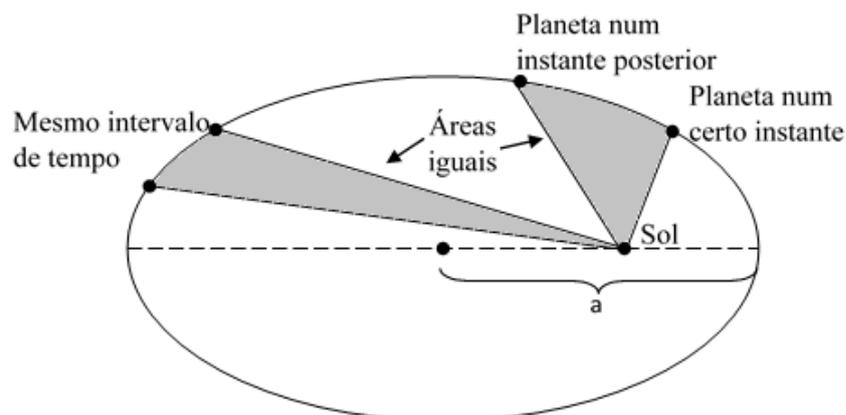


Figura 17: Esquemática do movimento planetário por Kepler enaltecendo a interpretação das Leis de Kepler em um formato compactado, em especial a primeira e a segunda lei. Fonte: Adaptado de [25].

Alguns anos depois, Isaac Newton, após formular - paralelamente com o matemático alemão Leibniz - o Cálculo Diferencial e Integral, conseguiu deduzir uma equação funcional para uma força que governasse o movimento dos planetas, a equação

(2.1). No entanto, disse que também é possível derivar as 3 Leis de Kepler a partir da Lei do Inverso do Quadrado das Distâncias. Efetuaremos uma demonstração disto.

Seja uma partícula (planeta) de massa  $m$  com movimento, a priori, arbitrário que sofre a interação de uma partícula maior (Sol) de massa  $M$  (conforme figura 18). Pela terceira Lei de Newton,  $M$  também sofre uma interação devido a existência de  $m$ , no entanto como  $M \gg m$  podemos tomar o Sol fixo. Para problemas envolvendo uma partícula móvel em torno de um ponto fixo, em que elas sofrem uma força sempre na direção da reta que liga a partícula ao centro é mais viável decompor a velocidade, aceleração e a força em componentes ao longo dessa reta e perpendicular a ela, uma vez que o movimento ocorre sobre um plano único como consequência da conservação do momento angular total.

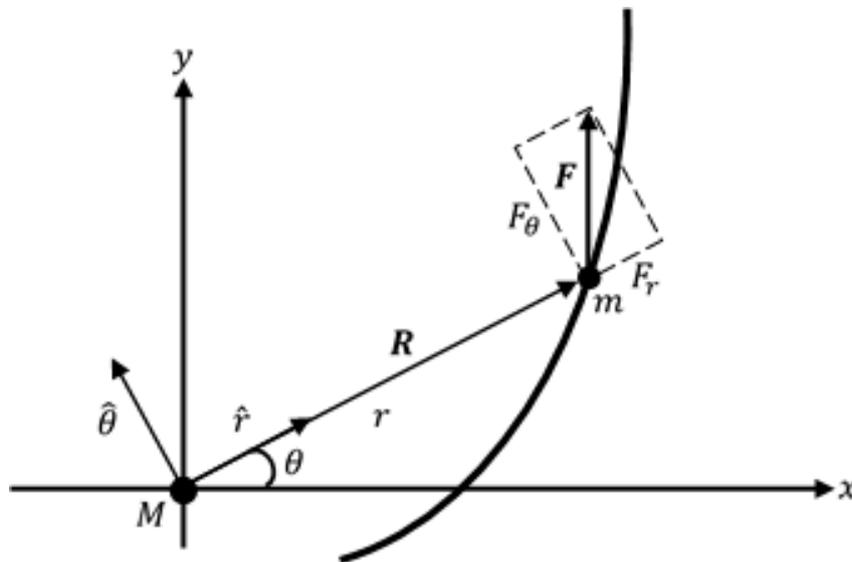


Figura 18: Movimento descrito por um ponto de massa  $m$  em torno de um ponto fixo de massa  $M$ , sofrendo interação mútua. Fonte: Adaptado de [25].

Tomemos inicialmente nenhuma restrição ao movimento da partícula de massa  $m$ . Com a origem do sistema de coordenadas localizado no centro do Sol, é possível descrever a posição do planeta por um vetor que depende de um ângulo que é função do tempo, isto é  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta)$ , com  $\theta = \theta(t)$ , de modo que a posição varia indiretamente com o tempo. Convenientemente definamos vetores unitários móveis nas direções de crescimento das coordenadas polares usuais,  $\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta$  e  $\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta$ .

Deste modo obtemos uma forma de determinar a velocidade e a aceleração desta partícula, uma vez que a velocidade nada mais é do que a taxa de variação da posição em função do tempo, enquanto que a aceleração é a variação da velocidade. Deste modo é possível obter expressões gerais para a aceleração da partícula. Co-

nhecendo sua aceleração é possível determinar a força que a compele pelo Princípio Fundamental da Dinâmica, portanto [25]

$$\begin{cases} F_\theta = m \left( r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \\ F_r = m \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

as equações acima independem da natureza da força envolvida, são então chamadas equações de movimento. Em uma primeira leitura isto não faz sentido, uma vez que o sistema claramente não é inercial e, portanto, não se pode aplicar a 2ª Lei de Newton ( $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ), note no entanto que a equação (A. 1) carrega consigo dois termos a mais, estes termos são interpretados como sendo as forças de inércia (força centrífuga e força de coriolis), de modo que as forças não inerciais surgem automaticamente devido ao fato de tomarmos vetores móveis, o que corrige o Princípio Fundamental da Dinâmica.

Pois bem, iremos agora extrair as conclusões desejadas (Leis do Movimento Planetário) fazendo hipóteses adequadas sobre a direção e o módulo de  $\mathbf{F}$ .

*Hipótese I: A força é central*

A força é central se, e somente se, não possuir componentes perpendiculares à  $\mathbf{R}$ , de modo que  $F_\theta = 0$ , o que nos leva a

$$m \left( r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) = 0, \quad (\text{A.2})$$

uma vez que massa do planeta seja, obviamente, não nula, uma série de pequenas manipulações nos leva à definição de uma quantidade constante, com dimensões de momento angular<sup>1</sup>

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h. \quad (\text{A.3})$$

Para que o planeta se mova no sentido anti-horário, é tomado convencionalmente  $h > 0$ , uma vez neste caso  $\dot{\theta}$  o é.

Estamos interessados em obter a segunda Lei de Kepler, de modo que é fundamental definirmos a área ‘varrida’ pelo vetor posição do planeta ao longo de seu movimento, de modo que  $A = A(t)$ . Em coordenadas polares o comprimento da curva é  $s = r\theta$ , de modo que a área é sua integral  $A = r^2\theta/2$ . Em uma fração infinitesimal de

---

<sup>1</sup>Desta forma,  $h$  não possui dimensões de momento angular, mas sim de momento angular por unidade de massa. A conservação do momento angular, obtida aqui como uma consequência da força ser central, é o que garante que o plano do movimento seja único.

seu movimento, uma área infinitesimal é varrida,

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta.$$

Através da definição do módulo do momento angular é possível reescrever a definição da área infinitesimal, mudando o parâmetro para um tempo, também infinitesimal, de modo que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h, \quad (\text{A.4})$$

a equação acima, matematicamente descreve o significado da 2ª Lei de Kepler, na qual, a taxa de variação da área no tempo é uma constante.

*Hipótese II:* A força é gravitacional

Iremos agora nos detalhar mais quanto a natureza da força envolvida entre as duas partículas materiais, admitiremos agora que a força de interação entre as massas  $M$  e  $m$  seja uma força central atrativa, cujo módulo é dado por

$$F_r = -G \frac{Mm}{r^2}, \quad (\text{A.5})$$

com a finalidade de simplificação é conveniente definir  $k \equiv GM$ . Desse modo obtemos uma outra equação de movimento

$$m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = - \frac{km}{r^2}, \quad (\text{A.6})$$

a equação acima é aparentemente de difícil solução por termos duas funções do tempo, no entanto a Eq. (A. 3) as relaciona, permitindo escrever a velocidade angular em termos da posição e, com isto

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = - \frac{k}{r^2},$$

se torna conveniente efetuar uma mudança de variável,  $z \equiv 1/r$ , tornando as potências da função com expoentes positivos, de modo que

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2},$$

a equação diferencial acima é conhecida, ou quase, ajustaremos ela com uma mudança de variável, tal que  $w \equiv z - k/h^2$ , de modo que obtemos

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = 0,$$

representando que o movimento é periódico, sua solução geral é uma combinação li-

near de funções senoidais e, portanto

$$z = A \operatorname{sen} \theta + B \operatorname{cos} \theta + \frac{k}{h^2}. \quad (\text{A.7})$$

Um resultado geral como este exige que sejam tomadas duas condições de contorno, de modo que as constantes sejam determinadas. Com efeito de simplificação iremos deslocar a direção do eixo polar, afim de que  $r$  seja mínimo, ou seja, quando  $m$  está no ponto mais próximo da origem<sup>2</sup>, deste modo  $\theta = 0$ , e não apenas isto, mas  $z$  é um máximo local<sup>3</sup>.

Tomando a primeira derivada de  $z = z(\theta)$  igual a zero para  $\theta = 0$ , obtemos que  $A = 0$ . Isto impacta ao se tomar a segunda derivada como uma quantidade negativa, o resultado é  $-B$ , de modo que  $B > 0$ .

Deste modo concluímos que

$$r = \frac{1}{k/h^2 + B \operatorname{cos} \theta}, \quad (\text{A.8})$$

definindo  $e \equiv Bh^2/h$  e  $d = 1/B$ , obtemos a equação polar para uma elipse<sup>4</sup>

$$r = \frac{ed}{1 + e \operatorname{cos} \theta}, \quad (\text{A.9})$$

uma vez que os planetas permanecem no Sistema Solar, não se afastando indefinidamente do Sol, demonstrasse assim a Primeira Lei de Kepler, as órbitas dos planetas são elipses com o Sol ocupando um dos focos.

*Hipótese III: A órbita é uma elipse*

A conclusão obtida agora, de que a órbita dos planetas ao redor do Sol ser uma elipse nos remete à necessidade de redefinir os parâmetros que a determinam. A equação cartesiana de uma elipse é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{A.10})$$

A excentricidade, definida convenientemente em termos da quantidade de momento angular, pode ser definida pela razão entre duas distâncias na elipse,  $e \equiv c/a$ ,

<sup>2</sup>Para o Sistema Solar, o ponto na órbita mais próximo do Sol é chamado de periélio, e o ponto mais afastado de afélio.

<sup>3</sup>Para que  $z$  seja um máximo local é necessário que o mesmo admita duas propriedades em suas derivadas, deve ser um ponto de primeira derivada nula, e de segunda derivada negativa.

<sup>4</sup>Na realidade a equação (A.9) retrata a equação polar de uma seção cônica com foco na origem e diretriz vertical à direita, o valor de  $e$  determina se a órbita é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole conforme  $e < 1$ ,  $e = 1$  ou  $e >$ .

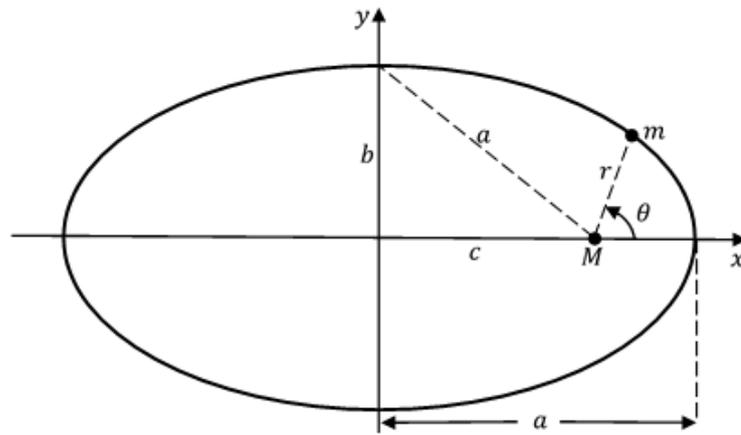


Figura 19: Representação da órbita elíptica centrada na origem e com os parâmetros determinados. Fonte: Adaptado de [25].

como  $c^2$  pode ser obtido pelo Teorema de Pitágoras, é possível escrever

$$b^2 = a^2(1 - e^2). \quad (\text{A.11})$$

Para a Astronomia, o semi-eixo maior  $a$  da órbita elíptica é denominado por distância média, pois é a média aritmética dos valores máximos e mínimos de  $r$ , ou seja é a média dos valores de  $r$  quando o planeta se encontra no periélio e no afélio. Estes pontos da órbita correspondem aos valores  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , de modo que

$$a \equiv \frac{1}{2}(r_{\theta=0} + r_{\theta=\pi}). \quad (\text{A.12})$$

Fazendo uso da expressão obtida anteriormente para  $r$ , podemos reescrever uma expressão para  $b^2$ ,

$$b^2 = ead. \quad (\text{A.13})$$

Pois bem, veja que a equação (A. 4) ao ser integrada em um período do movimento planetário, fornece a área total compreendida pela elipse delimitada pelo próprio movimento, de modo que  $A = hT/2$ . Matematicamente a área de uma elipse é  $A = \pi ab$ , de modo que

$$T^2 \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{h^2},$$

empregando a expressão para  $b^2$  e reorganizando os termos, obtemos que

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3, \quad (\text{A.14})$$

de modo que os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos de suas distâncias médias, a Terceira Lei de Kepler.