UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA

RAFAEL DE JESUS DA COSTA

ALGUMAS APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA NA GEOMETRIA PLANA

ACARAPE

2017

RAFAEL DE JESUS DA COSTA

ALGUMAS APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA NA GEOMETRIA PLANA

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza e Matemática com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

ACARAPE - CE

2017

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro- Brasileira

Sistema de Bibliotecas da UNILAB (SIBIUNI)
Biblioteca da Unidade Acadêmica dos Palmares
Catalogação na fonte

C837a

Costa, Rafael de Jesus da.

Algumas aplicações da trigonometria na geometria plana. / Rafael de Jesus da Costa. Acarape, 2017.

45 f.; il.

Monografia (Graduação) do curso Ciência da Natureza e Matemática, Instituto de Ciência da Natureza e Matemática da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira – UNILAB.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Trigonometria - Aplicações. 2. Geometria. 3. Matemática. I. Título.

CDD 510

RAFAEL DE JESUS DA COSTA

ALGUMAS APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA NA GEOMETRIA PLANA

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza e Matemática com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 25 / 07 / 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof.ª Dra. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

À DEUS, pela vida maravilhosa que me Deu.

Aos meus pais, meus irmãos, meus primos, pelo amor, carinho e apoio durante essa caminhada.

AO GOVERNO DE TIMOR, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

A UNILAB e ao BRASIL, pelo acolhimento, durante a estadia para o curso.

Ao Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Profª. Dra. Danila Fernandes Tavares e Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores do ICEN e da CNM.

Aos colegas da turma de 2012.2, pelo apoio.

“A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza”.

Bertrand Russel

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar algumas aplicações trigonométricas na geometria plana. Para isso, foi considerada uma breve preliminar dos conteúdos da trigonometria para em seguida podermos utilizá-los com facilidade nas suas aplicações à geometria plana. Desse modo, podemos elaborar um conteúdo não tão comum no ambiente matemático, em específico da área de geometria plana, utilizando as ferramentas trigonométricas, como nas questões da utilização da leis dos senos e cossenos para demonstrar a congruência de triângulo, a utilização da razão trigonométrica para calcular a área de figura planas, entre outros. Desejamos desta forma, apresentar aos professores e aos alunos de matemática do ensino médio e/ou superior, uma nova abordagem matemática que pode se servir como uma referência para a próxima temática.

Palavras-chave: Aplicações. Trigonometria. Geometria.

ABSTRACT

The present work aims to present some trigonometric applications in plane geometry. For this it was considered a brief preliminary of the contents of trigonometry so that we can then easily use them in their applications to plane geometry. In this way we can elaborate an content not so common in the mathematical environment, specifically in the area of flat geometry, using the trigonometric tools, as in the questions of the use of sine and cosine laws to demonstrate triangle congruence, the use of the trigonometric ratio to calculate the area of geometric figure, among others. In this way we wish to present a new mathematical approach to teachers and students of high and highschool mathematics that can serve as a reference for the next subject.

Keywords: Applications. Trigonometry. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um dos objetivos da trigonometria é o estudo da relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo. Nos triângulos retângulos, quando as relações constituem os chamados ângulos notáveis, 30^o, 45^o e 60^o, elas possuem valores conhecidos fracionários representados pelas relações seno, cosseno e tangente. Nos triângulos que não possuem ângulo reto, as condições são adaptadas na busca pela relação entre os ângulos e os lados como, por exemplo, a utilização da lei dos senos e lei dos cossenos. Segundo Ronney (2012), a trigonometria é o ramo da matemática que trata do cálculo de ângulos, particularmente em triângulos retângulos. A trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos.

Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática auxiliando na atividade humana, tais como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topologia, a Engenharia, etc.

> A trigonometria foi uma criação da Matemática grega, e recebeu contribuições importantes de matemáticos de várias culturas: hindus, muçulmanos e europeus. Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, calcular o tempo a ser utilizadas na navegação e na geografia. (ROQUE, 2012, p.173).

Procuramos estabelecer algumas aplicações à geometria plana não tão comuns nos livros didáticos. Iniciamos com a demonstração dos casos de congruências de triângulos usando apenas as ferramentas trigonométricas como as leis do seno e cosseno. Após, procuramos determinar áreas de figuras planas envolvendo alguma razão trigonométrica.

É fundamental para o professor de matemática investigar a forma como os estudantes compreendem os conteúdos relacionados ao ensino nesta área, conhecendo a forma como os estudantes elaboram conhecimento sobre a trigonometria. Segundo Oliveira (2014), ao desenvolvimento das aulas o professor deve promover a participação ativa do aluno. Assim, a abordagem metodológica do ensino da trigonometria deve partir das concepções prévias dos estudantes que permitem a resolução de problemas, seguindo para a complementação ou mesmo correção de concepções equivocadas por meio do contato com os conteúdos cientificamente organizados.

2 PRELIMINARES

Nesta seção, vamos abordar a origem da trigonometria e seus conceitos básicos necessários para uma boa compreensão do conteúdo das aplicações.

2.1 História da Trigonometria

A trigonometria trata do cálculo de ângulos, particularmente em triângulos retângulos. Até o século XVI, ela era realmente uma parte da geometria, mas desde então ela passou a ser considerada uma área independente da matemática. Os egípcios tinham algum conhecimento de trigonometria, como demonstra a construção de suas pirâmides. Porém os egípcios não eram rigorosos em seu estudo de triângulos. Como em outras áreas da matemática, eles estavam interessados em aplicações práticas e não na trigonometria pura. Enquanto os Gregos tomaram a linha reta e o círculo como base de sua geometria e a partir daí desenvolveram a trigonometria (RONNEY, 2012).

Assim, os estudos de trigonometria se concentravam na trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera. No entanto, foi necessário para isso desenvolver partes da Trigonometria Plana. O estudo de triângulos esféricos na Matemática grega vinha sendo feito desde os últimos pitagóricos. Depois dos Gregos, os matemáticos hindus e árabes trabalharam com trigonometria. Os estudantes árabes traduziram e dominaram o trabalho de seus predecessores gregos e logo passaram além deles. Os hindus trabalhavam amplamente com sua própria tradição, que foi obtida independentemente da herança egípcia e babilônica. Embora os estudiosos europeus da idade média tenham traduzido trabalhos árabes e gregos sobre trigonometria e geometria, eles não acrescentaram nada próprio a esses trabalhos.

Outro nome importante na história da trigonometria foi o de Hiparco de Nicéia, que viveu em torno de 120 a.C. Como no caso de muitos matemáticos gregos, inclusive do próprio Euclides, pouco sabemos sobre sua vida. A maior parte do que conhecemos sobre ele é devido a Ptolomeu, o qual cita vários resultados de Hiparco sobre trigonometria e astronomia e a fragmentos de descrições de seus trabalhos contidos nas obras de outros autores gregos (ROQUE, 2012). Podemos contudo dizer que o fundador da trigonometria foi Hiparco de Nicéia, pois é provável que a divisão do círculo em 360° tenha se originado com a tabela de Hiparco. Ele seguiu a ideia do matemático grego, o qual por sua vez tinha divido o dia em 360 partes, uma divisão possivelmente inspirada pela astronomia babilônica (CARMO, *et al.*, 2005)

2.2 Conceitos Básicos

2.2.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Dado um ângulo agudo $\hat{B}$, vamos marcar sobre um dos seus lados os pontos $A_1, A_2, A_3 \ldots$ e vamos conduzir, por eles, as perpendiculares $\overline{A_1C_1}, \overline{A_2C_2}, \overline{A_3C_3}, \ldots$

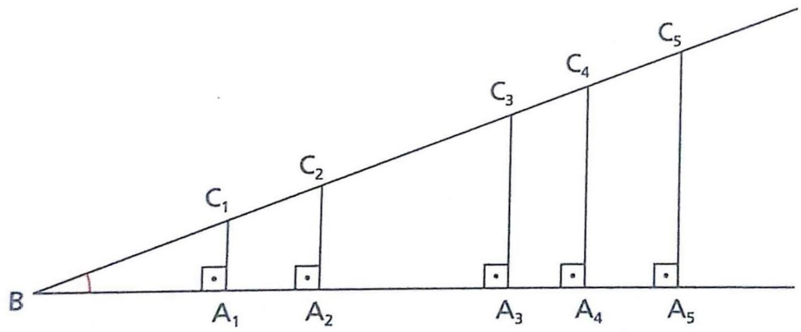

Figura 1 – Razão Trigonométrica

Na figura 1, os triângulos $BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3, \ldots$ são todos semelhantes entre si, pelo teorema fundamental da semelhança. Então, decorre a seguinte relação:

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BC_3}} = \ldots$$

Verificamos que essa relação não depende do tamanho dos triângulos $\triangle BA_1C_1, \triangle BA_2C_2, \ldots$ mas depende apenas do valor do ângulo $\hat{B}$. Logo, a razão acima é uma função de $\hat{B}$, o qual chamaremos de seno de $\hat{B}$ e denotamos por

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BC_3}} = \ldots$$

Da mesma forma, na figura 1, temos

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{BA_3}}{\overline{BC_3}} = \ldots \tag{1}$$

e

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BA_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BA_3}} = \ldots \tag{2}$$

Podemos então definir outras funções trigonométricas. A razão (1) é chamada de cosseno do ângulo $\hat{B}$ e denotamos por $\cos \hat{B}$ e a razão (2) é chamada tangente do ângulo $\hat{B}$, denotada por $\operatorname{tg} \hat{B}$.

As relações acima são o que chamamos de **Razões Trigonométricas.** Como a razão trigonométrica não depende do tamanho do triângulo então, considere o triângulo retângulo a seguir

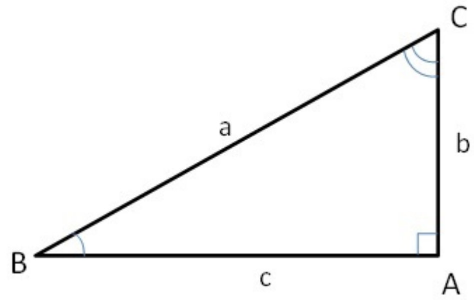

Figura 2 – Triângulo Retângulo

Fixando um ângulo em $\hat{B}$, temos as relações a seguir

1. **Seno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}$$

2. **Cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

$$cos\hat{B} = \frac{c}{a}$$

3. **Tangente** de um ângulo agudo é a razão ente o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c}$$

2.2.2 Relação Fundamental e Ângulos Notáveis.

Do triângulo ABC, retângulo em A, da figura 2 sabemos que

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \text{ e } \cos\hat{B} = \frac{c}{a}.$$

Então

$$b = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B} \text{ e } c = a \cdot \cos\hat{B}.$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos $b^2 + c^2 = a^2$. Então

$$\begin{aligned} (a \cdot \operatorname{sen}\hat{B})^2 + (a \cdot \cos\hat{B})^2 &= a^2 \\ a^2 \cdot \operatorname{sen}^2\hat{B} + a^2 \cdot \cos^2\hat{B} &= a^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{sen}^2\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1.$$

conhecida como Relação Fundamental da trigonometria.

Considere agora, a razão $\dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}}$.

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\hat{B}.$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}}.$$

Os ângulos de 30° , 45° e 60° são conhecidos como ângulos notáveis. Vamos determinar suas relações trigonométricas, que são obtidas, a partir de um quadrado e de um triângulo equilátero, como veremos a seguir.

1. Ângulo 45°.
   Considere um quadrado de lado l a seguir

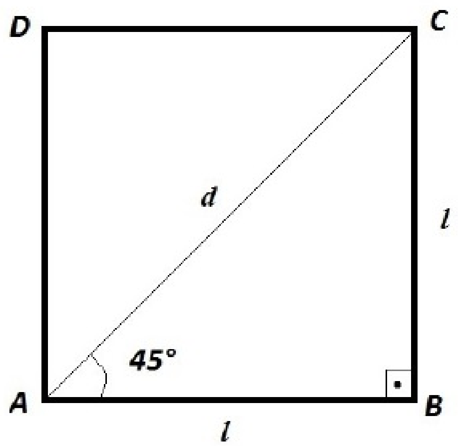

Figura 3 – Razões trigonométricas para 45°

Com o auxílio do Teorema de Pitágoras, obtemos d, em função de l, que corresponde a: $d = l\sqrt{2}$.

Logo, por razões trigonométricas, concluímos então que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\cos 45^\circ &= \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\operatorname{tg}45^\circ &= \frac{l}{l} = 1.
\end{aligned}$$

2. Ângulo 30°

   Consideremos um triângulo equilátero ABC de lado l. Então $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^o$.

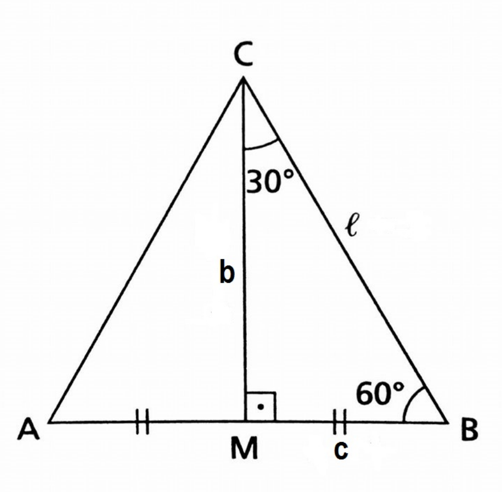

Figura 4 – Razões trigonométricas para 30° e 60°

Seja $\overline{CM}$ a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$, sabemos que, $\overline{CM}$ é mediana, altura e bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. Portanto, no $\triangle MBC$, temos

$$\begin{aligned}
B\hat{M}C &= 90° \left(\overline{CM} \text{ é altura}\right) \\
M\hat{C}B &= 30° \left(\overline{CM} \text{ é bissetiz}\right) \\
c &= \frac{l}{2} \left(\overline{CM} \text{ é mediana}\right) \\
l^2 &= b^2 + c^2 \\
&= b^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\
&= b^2 + \frac{l^2}{4} \\
b^2 &= l^2 - \frac{l^2}{4} \\
b^2 &= \frac{3 \cdot l^2}{4} \\
b &= \frac{l\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, por razões trigonométricas, concluímos então que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 30° &= \frac{c}{l} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}. \\
\cos 30° &= \frac{b}{l} = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\
\operatorname{tg} 30° &= \frac{c}{b} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

3. Ângulo 60°

Das razões trigonométricas e do ângulo $\hat{B}$ da figura 4, considere o triângulo $M\hat{B}C$ podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{b}{l} = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\
\cos 60^\circ &= \frac{c}{l} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}. \\
\operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{b}{c} = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Concluindo, podemos sintetizar esses resultados na seguinte tabela

razão \ ângulo	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2.2.3 Trigonometria no Círculo Trigonométrico

Vamos agora estender as funções trigonométricas para qualquer número real. Vamos partir de "o número π é o comprimento de um semi-círculo de raio 1".(veja Figura 5)

Seja C é o comprimento da circunferência então $C = 2\pi$ se o raio do círculo é 1, e $C = 2\pi R$ se o raio do círculo é R.

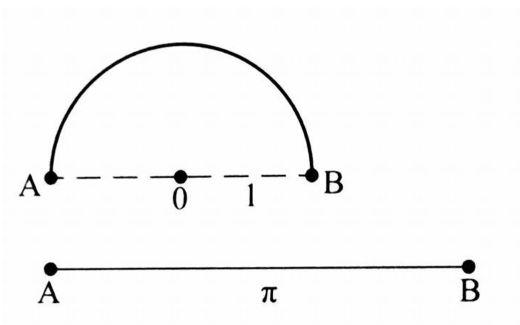

Figura 5 – Semi-circunferência

Podemos ver que, $\pi = \dfrac{C}{2R}$, assim, π é a razão entre o comprimento de qualquer circunferência o seu diâmetro, sendo aproximadamente $3,14159265$.

Sabemos que, arcos de círculo que subtendem o mesmo ângulo central são semelhantes e que a razão de semelhança é a razão entre os raios. Assim, considere dois círculos de raio R e R', conforme a figura 6, com s e s' sendo os comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$.

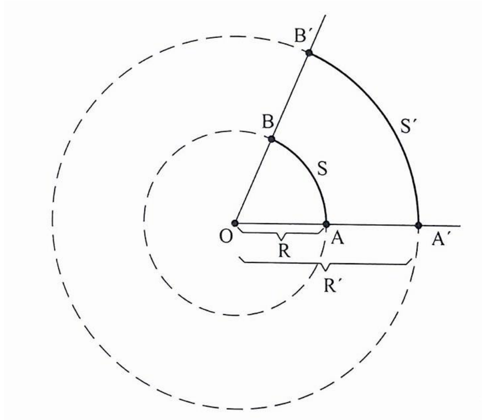

Figura 6 – dois Círculos concêntricos de raio R e R'

Assim, $\dfrac{R}{R'} = \dfrac{S}{S'}$, ou ainda,

$$\frac{S'}{R'} = \frac{S}{R}.$$

Ou seja, dado o ângulo central, é constante a razão entre o comprimento do arco e o raio. Isto nos permite definir,

Definição 2.1 *A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo, em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo, e o comprimento do raio do círculo.*

Assim, no exemplo acima, $A\widehat{O}B = \dfrac{S}{R}$ radianos. Em particular, decorre da definição de que se s é o comprimento do arco determinado por um ângulo central de α radianos em um círculo de raio R, então

$$\alpha = \frac{S}{R} \text{ , ou seja, } S = \alpha R.$$

Como o comprimento de um semi-círculo (que é um arco de $180°$) é πR, então temos que

$$180° = \frac{\pi R}{R} = \pi \text{ radianos .}$$

Assim, 1 radiano $= \left(\dfrac{180°}{\pi}\right) \cong 57°$.

Além disso, a medida de um ângulo em radianos não depende de unidade de comprimento considerada. Note também que, quando $R = 1$ a medida de ângulo coincide com o comprimento de arco, porém esta última medida depende de uma unidade de comprimento enquanto a primeira não.

Vamos assumir que, a orientação positiva de círculo trigonométrico (unitário) é no sentido anti-horário, com ponto de partida $(1, 0)$. (veja Figura 7)

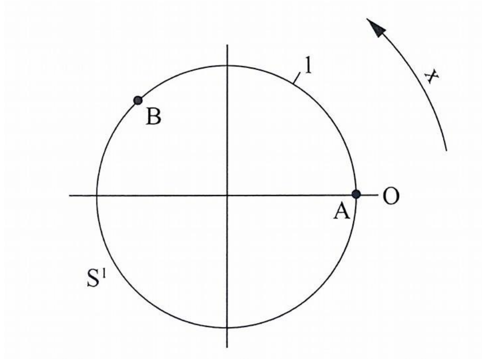

Figura 7 – Círculo Trigonométrico

Definiremos a medida algébrica de um arco $\overset{\frown}{AB}$ deste círculo como sendo o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for anti-horário e negativo em caso contrário. Esta medida será representada por $m\ \overset{\frown}{AB}$.

Até o momento, as funções trigonométricas estão definidas para os ângulos do intervalo $(0°, 90°)$. Como esses ângulos podem ser medidos em radianos, estão definidos naturalmente, o seno, o cosseno, e a tangente dos números reais do intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Nosso objetivo é estender estas funções de modo que elas possam ser definidas para todos (ou quase todos) os números reais que sejam mantidas as relações básicas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

e

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Para isto, consideramos a função $E : R \longrightarrow S^1$ definida da seguinte forma: fixada uma origem $A = (1, 0)$ em S^1 e dado um número real x, percorrendo sobre S^1, no sentido positivo se $x > 0$ e no sentido negativo se $x < 0$, um comprimento igual a $|x|$, por definição, $E(x)$ é o ponto de S^1. (veja Figura 8)

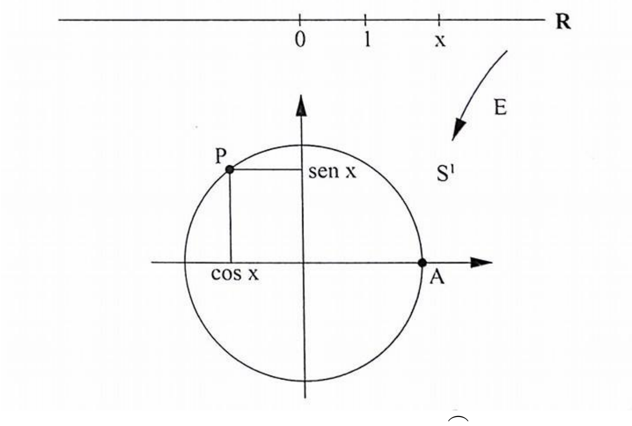

Figura 8 – $E(x) = P, m\ \overset{\frown}{AP} = x$

Observação 2.1 *Note que,*

1. *se $x > 0$ e $x > 2\pi$, será necessário dar mais de uma volta em S^1, no sentido positivo, para atingir $E(x)$;*
2. *observação análoga vale para $x < 0$;*
3. *dado um ponto P de S^1, ele é a imagem pela função E de uma infinidade de números reais, todo eles de forma:*

$$x + 2k\pi, \ \textit{com } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ \textit{e } 0 \leq x < 2\pi.$$

Isto é, x e $x + 2k\pi$ são côngruos (ou seja, a diferença é um múltiplo de 2π).

Note também que, quando $R = 1$ então, x (real) pode ser visto como x (radianos) e consequentemente existe um ângulo (grau) associado. Além disso, note que, se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ então

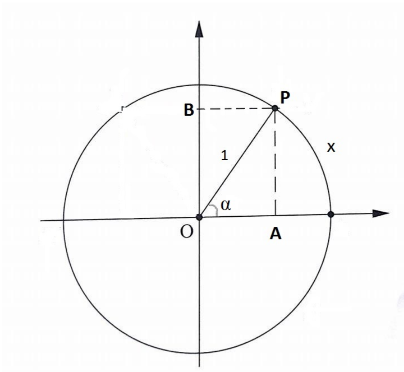

Figura 9 – Círculo Trigonométrico no ponto $P = (A, B)$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} x = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OB} = \operatorname{sen} x,$$
$$\cos \alpha = \cos x = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OA} = \cos x.$$

Portanto, se $E(x) = P$ definimos para $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos x &= \text{abcissa de } P; \\ \operatorname{sen} x &= \text{ordenada de } P; \\ \operatorname{tg} x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \text{ se } \cos x \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, isso nos permite dizer que

$$\cos 0 = 1 \ , \ \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\operatorname{sen} 0 = 0 \ , \ \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1.$$

Além disso, como $P = (\cos x \ , \ \operatorname{sen} x)$ e $P \in S^1$, segue que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, nossa definição estende a primeira e mantém a relação fundamental.

Observação 2.2 *Note que,*

1. $\operatorname{tg} x$ *não está definida para* $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, *pois neste caso* $\cos x = 0$;
2. *dado que,* $E(x) = E(x + 2k\pi)$ *tem-se que*

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$$

e

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x,$$

Isto é, as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π. *Assim, basta conhecermos estas funções em* $[0, 2\pi]$. *Isso também quer dizer que o gráfico de* $y = \operatorname{sen} x$ *no intervalo de* $[0, 2\pi]$ *é o mesmo em* $[2k\pi, 2(k-1)\pi]$.

3. *as funções seno e cosseno, como coordenadas de um ponto, têm sinais que dependem do quadrante em que se encontram.* $E(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$. *(veja Figura 10)*

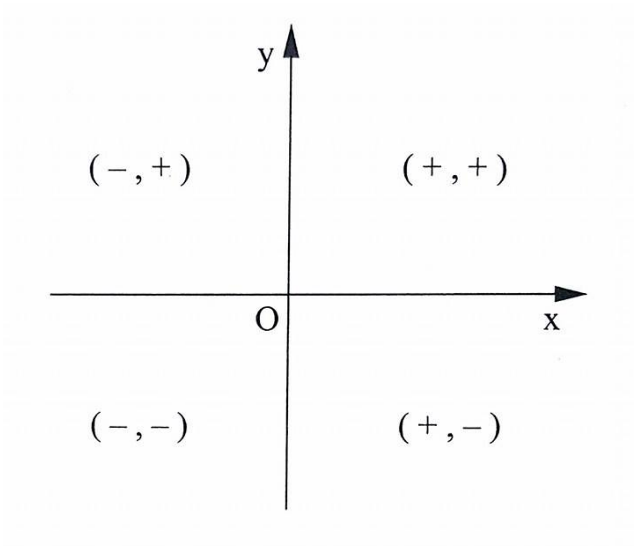

Figura 10 – Os Quadrantes no Sistema Cartesiano

Das relações simetrias do plano, temos as seguintes identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \ , \ \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x,$$

$$\cos(-x) = \cos x \ , \ \cos(\pi - x) = -\cos x,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \ , \ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x.$$

2.2.4 Fórmulas de Adição e Substração

1. Cosseno da soma e da diferença.
   Sejam P, Q, e R os pontos do ciclo associados aos números $a, (a+b)$, e $-b$, respectivamente.

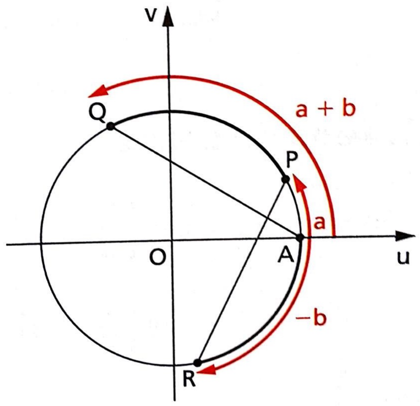

Figura 11 – Funções Circulares de a e b

Em relação aos sistemas cartesianos uOv, as coordenadas desses pontos são

$$\begin{aligned} P &= (\cos a, \operatorname{sen} a) \\ Q &= (\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b)) \\ R &= (\cos b, \operatorname{sen}(-b)) = (\cos b, -\operatorname{sen} b). \end{aligned}$$

Os arcos $\overset{\frown}{AQ}$ e $\overset{\frown}{RP}$ têm a mesma medida, portanto, as cordas $\overline{AQ}$ e $\overline{PR}$ têm medidas iguais. Logo, da fórmula da distância entre dois pontos da geometria analítica, temos

$$\begin{aligned} d_{AQ}^2 &= (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 \\ &= [\cos(a+b) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(a+b) - 0]^2 \\ &= \cos^2(a+b) - 2\cdot\cos(a+b) + 1 + \operatorname{sen}^2(a+b) \\ &= 2 - 2\cdot\cos(a+b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{RP}^2 &= (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 \\ &= (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2 \\ &= \cos^2 a - 2\cdot\cos a\cdot\cos b + \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a + 2\cdot\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}^2 b \\ &= 2 - 2\cdot\cos a\cdot\cos b + 2\cdot\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b. \end{aligned}$$

Igualando d_{AQ}^2 e d_{RP}^2 temos

$$\begin{aligned} d_{AQ}^2 &= d_{RP}^2 \\ 2 - 2 \cdot \cos(a+b) &= 2 - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b. \end{aligned}$$

Então, vem a fórmula

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b.$$

A partir da fórmula acima podemos obter o cosseno da diferença

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos[a + (-b)] \\ &= \cos a \cdot \cos(-b) - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(-b) \\ &= \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot (-\operatorname{sen} b). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b.$$

2. Seno da soma e da diferença.
   Vamos partir dos conceitos de ângulos complementares, onde a soma de dois ângulos é $\dfrac{\pi}{2}$. Temos ainda que, como os ângulos são complementares então podemos afirmar que, seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complemento. Portanto, podemos escrever seno de soma como: $\operatorname{sen}(a+b) = \cos\left[\dfrac{\pi}{2} - (a+b)\right]$. Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \operatorname{sen} b. \end{aligned}$$

   Como $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{sen} a$ e $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$, concluímos que

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$

   Do seno da soma podemos obter o seno da diferença

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen}[a + (-b)] \\ &= \operatorname{sen} a \cdot \cos(-b) + \operatorname{sen}(-b) \cdot \cos a \\ &= \operatorname{sen} a \cdot \cos b + (-\operatorname{sen} b) \cdot \cos a. \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a.$$

2.3 Equações Fundamentais Trigonométricas

Quase todas equações trigonométricas reduzem-se a uma das equações seguintes

- $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$,
- $\cos\alpha = \cos\beta$.

1. $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$

   Se $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = OP_1$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, isto é, estão em P ou P'. (veja Figura 12)

   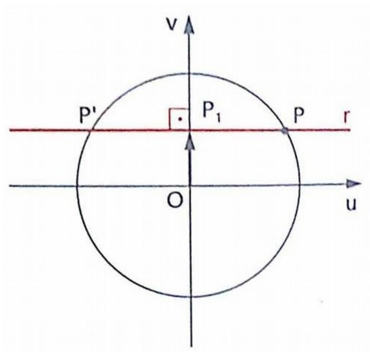

   Figura 12 – $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = OP_1$

   Há, portanto, duas possibilidades

   - α e β têm a mesma imagem, isto é, são **côngruos** ou
   - α e β têm imagens simétrica em relação ao eixo dos senos, isto é, são **suplementares**.

   Em resumo, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} .$$

2. $\cos\alpha = \cos\beta$

   Se $\cos\alpha = \cos\beta = OP_2$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2, isto é, estão em P ou P'. (veja Figura 13)

   Há portanto, duas possibilidades

   - α e β têm a mesma imagem, isto é, são **côngruos** ou
   - α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são **replementares**

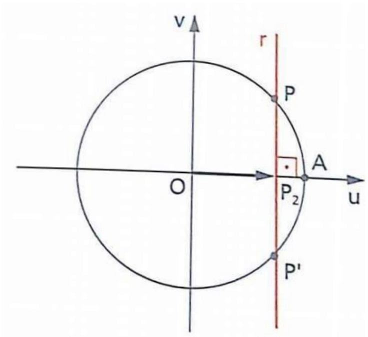

Figura 13 – $\cos\alpha = \cos\beta = OP_2$

Em resumo, temos

$$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \{\alpha = \pm\beta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.4 As Leis dos Senos e Cossenos

2.4.1 Lei dos Cossenos

Para mostrar a lei dos cossenos, vamos considerar dois casos.

1. Seja ABC um triângulo com $A < 90°$.

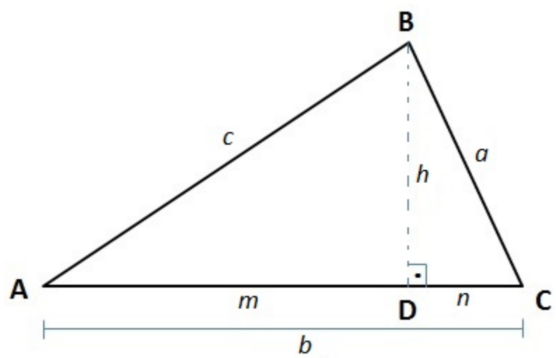

Figura 14 – Triângulo ABC com $\hat{A} < 90°$

No $\triangle BCD$ da figura 14 temos

$$a^2 = n^2 + h^2, \tag{3}$$

no $\triangle ABD$, temos

$$h^2 = c^2 - m^2, \tag{4}$$

temos também que

$$n = b - m. \tag{5}$$

Substituindo (5), (4) em (3), temos

$$a^2 = (b-m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm,$$

mas, no triângulo BAD, temos

$$\cos \hat{A} = \frac{m}{c},$$

isto é, $m = c \cdot \cos \hat{A}$. Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}.$$

2. Seja ABC um triângulo com $90° < \hat{A} < 180°$.

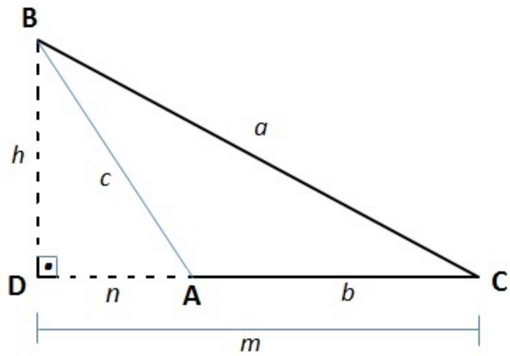

Figura 15 – Triângulo ABC com $90° < \hat{A} < 180°$

No retângulo $\triangle BCD$ temos

$$a^2 = m^2 + h^2, \tag{6}$$

no $\triangle BAD$ temos

$$h^2 = c^2 - n^2, \tag{7}$$

temos também que

$$m = b + n. \tag{8}$$

Substituindo (8), (7) em (6) temos

$$a^2 = (b+n)^2 + c^2 - n^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bn,$$

mas, no $\triangle BAD$, $\cos(180° - \hat{A}) = \dfrac{n}{c}$, isto é, $n = c \cdot \cos(180° - \hat{A})$, como $\cos(\pi - x) = -\cos x$, então

$$n = -c \cdot \cos \hat{A}.$$

Logo,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}.$$

Analogamente, podemos provar que,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}.$$

Portanto, concluímos que em qualquer triângulo, *o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.*

2.4.2 Lei dos Senos

Vamos agora demonstrar que os comprimentos dos lados dos triângulos são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

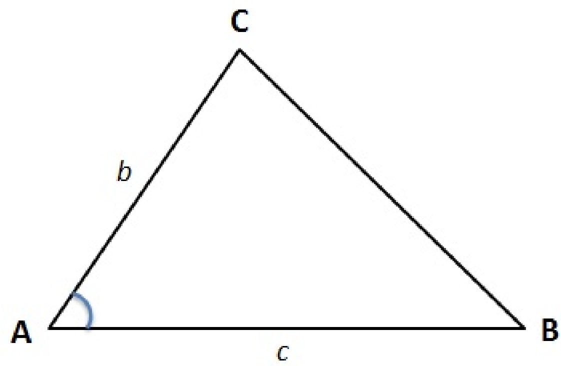

Figura 16 – Triângulo ABC qualquer

Para isso, vale lembrar que, a área do triângulo ABC da figura 16 é dada por

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{A},$$

onde b e c são os comprimentos dos lados que formam o ângulo $\hat{A}$.

Para demonstrar a lei dos senos, começamos por multiplicar por a (o comprimento do lado BC do triângulo) temos então que

$$a \cdot A_t = \frac{1}{2} \cdot abc \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{abc}{2 \cdot A_t}.$$

De modo análogo, temos as expressões para a área do triângulo ABC

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \hat{B},$$

$$A_t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \hat{C},$$

o que nos permite escrever

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{abc}{2 \cdot A_t} \text{ e } \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{abc}{2 \cdot A_t}.$$

Temos então que, em qualquer triângulo ABC vale a relação

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

conhecida como a lei dos senos.

3 APLICAÇÕES

Nesta seção, vamos elaborar algumas aplicações na geometria plana utilizando as ferramentas trigonométricas, como o caso das leis dos senos e cossenos para demonstrar a congruência de triângulos. Além disso, utilizar as razões trigonométricas para calcular áreas de figuras planas.

3.1 Casos de congruências

O objetivo desta seção é mostrar os casos da congruência de triângulos usando a trigonometria, de maneira particular as leis dos senos e cossenos.

Lembre-se que, um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- Seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
- Seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

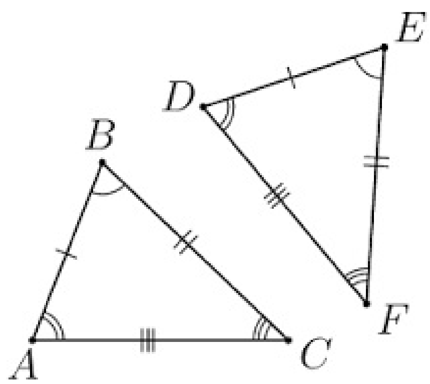

Figura 17 – dois triângulos congruentes

Portanto, na figura 17, dizemos que triângulo ABC é congruente ao triângulo DEF, ($\triangle ABC \equiv \triangle DEF$), pois,

$\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$,$\widehat{C} \equiv \widehat{F}$.

1. Primeiro caso: Lado, Lado, Lado (LLL)
   Considere dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que, $AB = A'B' = c$, $AC = A'C' = b$ e $BC = B'C' = a$ (Veja a figura 18).

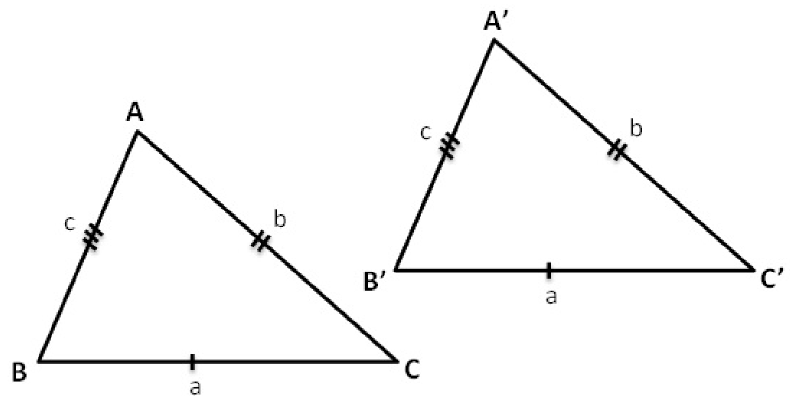

Figura 18 – caso LLL

Demonstração:
Pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \text{ no } \triangle ABC \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}' \text{ no } \triangle A'B'C'. \end{aligned}$$

Logo, igualando as duas equações temos

$$\cos \hat{A} = \cos \hat{A}'$$

Pela equação fundamental trigonométrica $\hat{A} = \pm \hat{A}' + 2k\pi$ e pelo fato de $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ serem ângulos de triângulo, temos $0 < \hat{A}, \hat{A}' < \pi$, portanto concluímos que $\hat{A} = \hat{A}'$. Analogamente, podemos provar que $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$. Portanto, por definição, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são **congruentes**. ■

2. Segundo caso: Lado, Ângulo, Lado (LAL)
   Considere dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que, $AB = A'B' = c$, $AC = A'C' = b$ e $\hat{A} = \hat{A}'$ (Veja a figura 19).

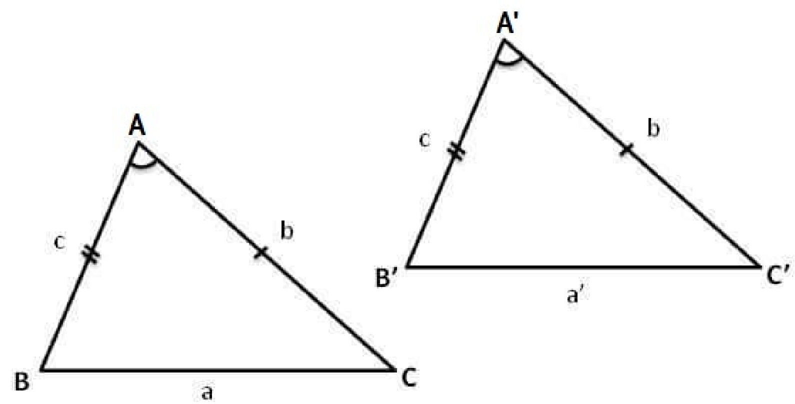

Figura 19 – caso LAL

Demonstração:
Pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \text{ no } \triangle ABC \\ a'^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}' \text{ no } \triangle A'B'C'. \end{aligned}$$

Como $\hat{A} = \hat{A}'$, igualando as duas equações temos

$$a^2 = a'^2 \Rightarrow a = a'$$

Logo, pelo caso LLL os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são **congruentes**. ■

3. Terceiro caso: Ângulo, Lado, Ângulo (ALA)
Considere dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que, $\overline{BC} = \overline{B'C'} = a$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$ (Veja a figura 20).

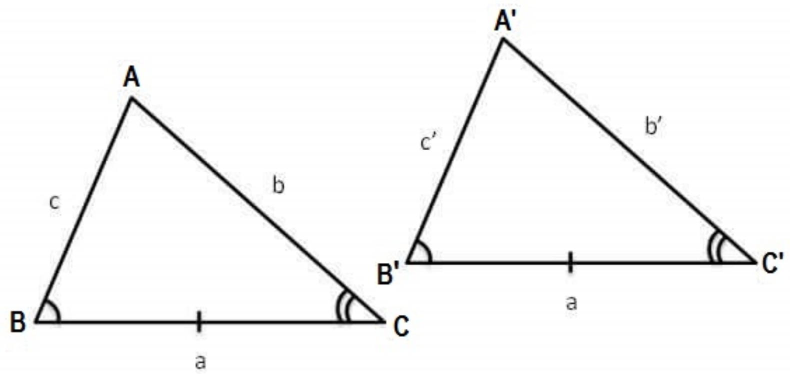

Figura 20 – caso ALA

Demonstração:
Pela lei dos Senos temos

$$\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} &= \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \text{ no } \triangle ABC \\ \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}'} &= \frac{b'}{\operatorname{sen} \hat{B}'} \text{ no } \triangle A'B'C'. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \hat{A} &= 180° - \hat{B} - \hat{C} \text{ no } \triangle ABC \\ \hat{A}' &= 180° - \hat{B}' - \hat{C}' \text{ no } \triangle A'B'C'. \end{aligned}$$

Como $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$, então $\hat{A} = \hat{A}'$. Assim, $\operatorname{sen} \hat{A} = \operatorname{sen} \hat{A}'$, $\operatorname{sen} \hat{B} = \operatorname{sen} \hat{B}'$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} &= \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}'} = \frac{b'}{\operatorname{sen}\hat{B}'} = \frac{b'}{\operatorname{sen}\hat{B}}.\\ \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} &= \frac{b'}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Rightarrow b = b'.\end{aligned}$$

Logo, pelo caso LAL os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são **congruentes**. ■

3.2 Cálculo de áreas de figuras planas

O objetivo desta seção é calcular as áreas de figuras plana utilizando as ferramentas trigonométricas. Vamos começar por triângulos.

1. Triângulo.
   (a) Primeiro caso: triângulo com dois lados e um ângulo entre eles conhecidos.
   Demonstração:
   A área do triângulo é dado por

$$A_t = \frac{\text{base} \ \cdot \ \text{altura}}{2}.$$

Suponha que $0° < \hat{C} < 90°$, temos da figura 21,

$$A_t = \frac{a \cdot h}{2} \tag{9}$$

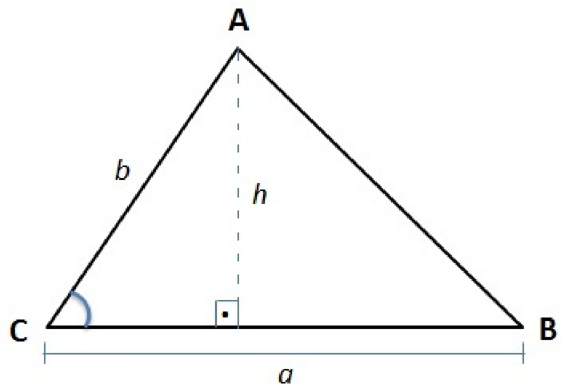

Figura 21 – Triângulo com dois lados e um ângulo entre eles conhecidos

Como gostaríamos de calcular a área apenas envolvendo os lados e o ângulo adjacente a esses lados então, vamos utilizar a razão trigonométrica seno do ângulo conhecido para isolar a altura h. Assim, da razão trigonométrica da função seno temos

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}.$$

Substituindo h em (9) obtemos

$$A_t = \frac{a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}{2}. \blacksquare \tag{10}$$

Agora vamos mostrar para o caso $90° < \hat{C} < 180°$.

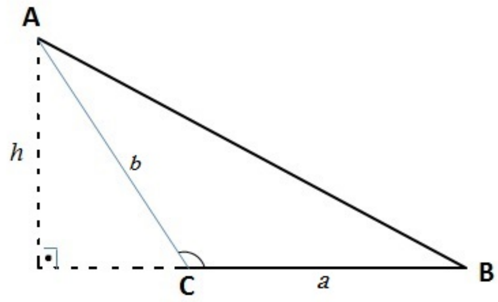

Figura 22 – Triângulo com dois lados e um ângulo entre eles conhecidos

Considere o triângulo ABC da figura 22 e da razão trigonométrica da função seno, temos

$$\operatorname{sen}(180° - \hat{C}) = \frac{h}{b},$$

como da fórmula de seno de diferença $\operatorname{sen}(180° - \hat{C}) = \operatorname{sen} \hat{C}$, então

$$h = b \cdot \operatorname{sen} \hat{C},$$

logo, se substituímos o h no (9), obtemos a fórmula (10). Assim, podemos afirmar que, a fórmula (10) é válida para qualquer triângulo com dois lados e um ângulo adjacentes aos lados conhecidos.

Portanto, concluímos então que, a área do triângulo com dois lados e um ângulo conhecidos é a metade do produto entre os dois lados e o seno do ângulo adjacente aos lados. $\blacksquare$

(b) Segundo caso: triângulo com três ângulos e um lado conhecidos.

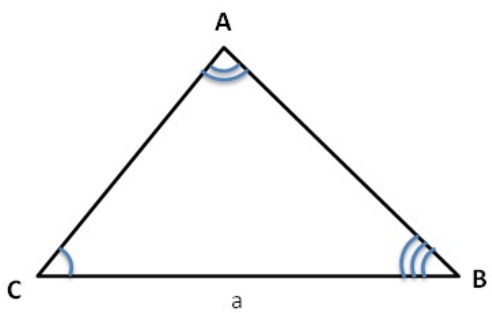

Figura 23 – Triângulo com 3 ângulos e um lado conhecidos

Demonstração:
Considere o triângulo ABC, conhecendo seus ângulos e o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$, de tamanho a (Veja figura 23).
Da fórmula (10) temos

$$A_t = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot a \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2}. \tag{11}$$

Da lei dos senos temos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\hat{B}} &= \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\hat{A}} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} \\ \overline{AC} &= \frac{a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo $\overline{AC}$ em (11), concluímos que

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{2 \cdot \operatorname{sen}\hat{A}} \cdot a \cdot \operatorname{sen}\hat{C} \\ &= \frac{a^2 \cdot \operatorname{sen}\hat{B} \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2 \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Analogamente, para os dois outros lados:

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{b^2 \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2 \cdot \operatorname{sen}\hat{B}} \\ A_t &= \frac{c^2 \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{2 \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que, a área da figura 23 é o lado ao quadrado vezes o produto dos senos dos ângulos adjacentes dividido por duas vezes o seno do ângulo oposto ao lado. ■

(c) Terceiro caso: triângulo com dois ângulos e um lado.

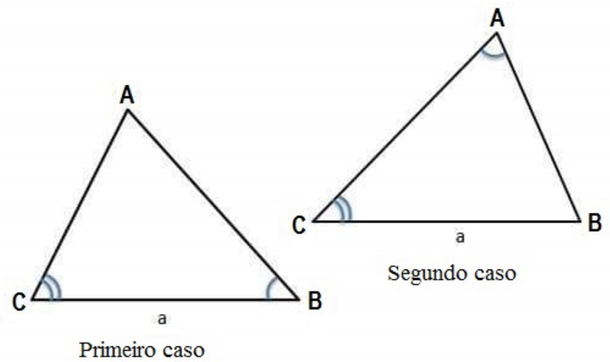

Figura 24 – Triângulos com dois ângulos e um lado conhecidos

Demonstração:

Considere o triângulo ABC com dois ângulos conhecidos e um lado do tamanho $BC = a$. Veja que, da figura 24, existem dois casos, no primeiro caso, temos dois ângulos e um lado adjacente a esses ângulos, isto é, da figura 24, temos que $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C})$. Assim, $\operatorname{sen}\hat{A} = \operatorname{sen}(180° - (\hat{B} + \hat{C})) = \operatorname{sen}(\hat{B} + \hat{C})$. Portanto, da fórmula (12), podemos calcular a área desta figura substituindo os ângulos desconhecidos pela fórmula de seno de diferença.

Logo, temos então que

$$A_t = \frac{a^2 \cdot \operatorname{sen}\hat{B} \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2 \cdot \operatorname{sen}(\hat{B} + \hat{C})}. \blacksquare \tag{13}$$

No segundo caso, temos dois ângulos e um lado adjacente a um ângulo e oposto a outro ângulo. Assim, substituindo o ângulo $\hat{B}$ pela fórmula do seno da diferença, obtemos

$$A_t = \frac{a^2 \cdot (\operatorname{sen}(\hat{A} + \hat{C})) \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2 \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}. \blacksquare \tag{14}$$

(d) Quarto caso: triângulo com a altura e ângulos por ela formado com os lados adjacentes conhecidos.

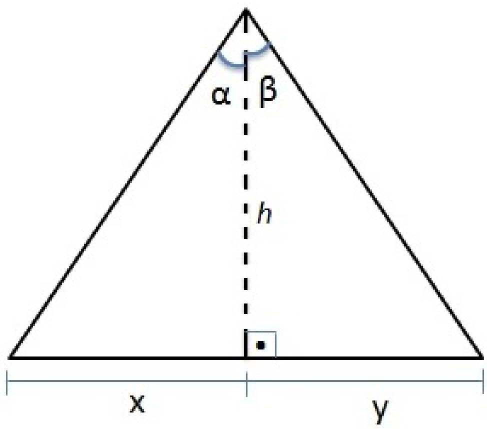

Figura 25 – Triângulo com a altura e ângulos por ela formado com os lados adjacentes conhecidos

Demonstração:

Usando a fórmula de área do triângulo $A_t = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$, da figura 25, temos

$$A_t = \frac{(x + y) \cdot h}{2}. \tag{15}$$

Mas, por razão trigonométrica da função tangente temos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{x}{h} \Rightarrow x = h \cdot \operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{tg}\beta &= \frac{y}{h} \Rightarrow y = h \cdot \operatorname{tg}\beta. \\ \text{Assim, } (x+y) &= (\operatorname{tg}\alpha + \tan\beta) \cdot h. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo $x + y$ em (15) temos

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot h \cdot h}{2} \\ &= \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \cdot h^2}{2}. \end{aligned}$$

Concluímos então que, a área do triângulo da figura 25, é a metade da altura ao quadrado vezes a soma das tangentes dos ângulos adjacentes à altura. ■

2. Um quadrilátero qualquer.
Considere um quadrilátero $ABCD$ qualquer (Veja a figura 26). Sejam $d_1 = \overline{BD}$ ($d_1 = \overline{DE} + \overline{EB}$), $d_2 = \overline{AC}$ ($d_2 = \overline{AE} + \overline{EC}$) as diagonais e E o ponto de interseção entre as diagonais.

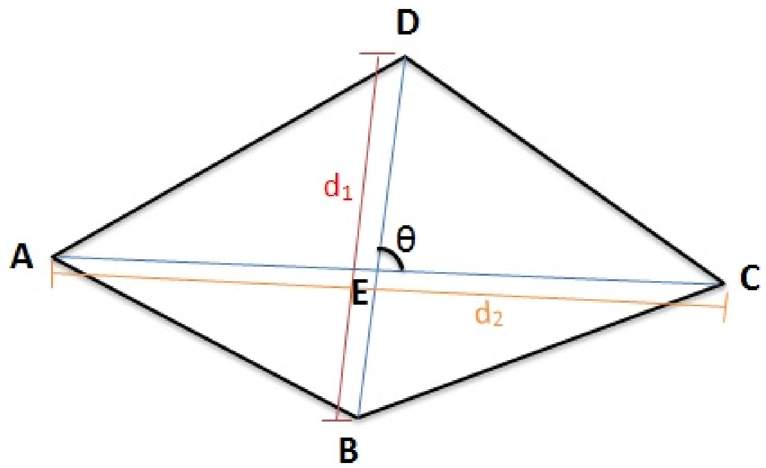

Figura 26 – Quadrilátero Qualquer

Demonstração:
A área de quadrilátero (A_q) da figura 26, é dada pela soma das áreas dos quatros triângulos que formam o quadrilátero, isto é

$$A_q = A_{\triangle AED} + A_{\triangle AEB} + A_{\triangle BEC} + A_{\triangle CED}. \tag{16}$$

Da fórmula (10), podemos calcular a área de cada triângulo como

$$
\begin{aligned}
A_{\triangle AED} &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{DE} \cdot \overline{AE} \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - \theta)) && (17)\\
A_{\triangle AEB} &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{AE} \cdot \overline{EB} \cdot \operatorname{sen}\theta) && (18)\\
A_{\triangle BEC} &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{BE} \cdot \overline{EC} \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - \theta)) && (19)\\
A_{\triangle CED} &= \frac{1}{2} \cdot (\overline{DE} \cdot \overline{EC} \cdot \operatorname{sen}\theta). && (20)
\end{aligned}
$$

Substituindo (17), (18), (19) e (20) em (16), tem-se

$$
\begin{aligned}
A_q &= \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{AE} \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - \theta) + \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{EB} \cdot \operatorname{sen}\theta \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{EC} \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - \theta) + \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{EC} \cdot \operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, pela fórmula de seno da diferença

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen} 180^\circ \cdot \cos\theta - \cos 180^\circ \cdot \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
A_q &= \frac{1}{2}\left[\overline{DE} \cdot \overline{AE} \cdot \operatorname{sen}\theta + \overline{AE} \cdot \overline{EB} \cdot \operatorname{sen}\theta + \overline{EB} \cdot \overline{EC} \cdot \operatorname{sen}\theta + \overline{DE} \cdot \overline{EC} \cdot \operatorname{sen}\theta\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\overline{DE} \cdot \overline{AE} + \overline{AE} \cdot \overline{EB} + \overline{BE} \cdot \overline{EC} + \overline{DE} \cdot \overline{EC}\right] \cdot \operatorname{sen}\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[(\overline{DE} + \overline{EB}) \cdot \overline{AE} + (\overline{BE} + \overline{DE}) \cdot \overline{EC}\right] \cdot \operatorname{sen}\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[d_1 \cdot \overline{AE} + d_1 \cdot \overline{EC}\right] \cdot \operatorname{sen}\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[d_1 \cdot (\overline{AE} + \overline{EC})\right] \cdot \operatorname{sen}\theta \\
&= \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \operatorname{sen}\theta. \blacksquare
\end{aligned}
$$

Observação 3.1 *Para o Losango as diagonais são perpendiculares então o ângulo* $\theta = 90^\circ$*, assim,* $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$*. Portanto, a área de Losango é* $A_L = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$*.*

3. Paralelogramo.
Vamos calcular a área de um paralelogramo conhecendo os dois lados e um ângulo. Considere um paralelogramo a seguir com seus lados, respectivamente, a , b e o ângulo adjacente sobre os lados que é o ângulo θ.

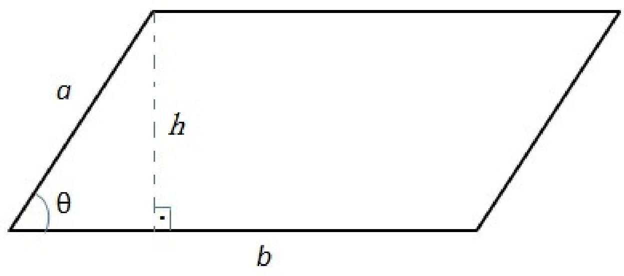

Figura 27 – Paralelogramo

Demonstração:
Sendo que, a área de um quadrilátero qualquer é dada por $A_q =$ base $\cdot$ altura .
Assim, pela figura 27, temos

$$A_p = b \cdot h. \tag{21}$$

Como queremos calcular a área apenas envolvendo os lados e o ângulo por eles formado então, vamos utilizar a razão trigonométrica da função seno para isolar a altura h.
Logo, por razões trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

Portanto, substituindo h em (21), temos

$$A_p = a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\theta. \blacksquare \tag{22}$$

4. Trapézio.
   Considere um Trapézio $ABCD$ a seguir, com dois ângulos (θ_1 e θ_2) da base e bases maior e menor b_1 e b_2, respectivamente (Veja a figura 28).

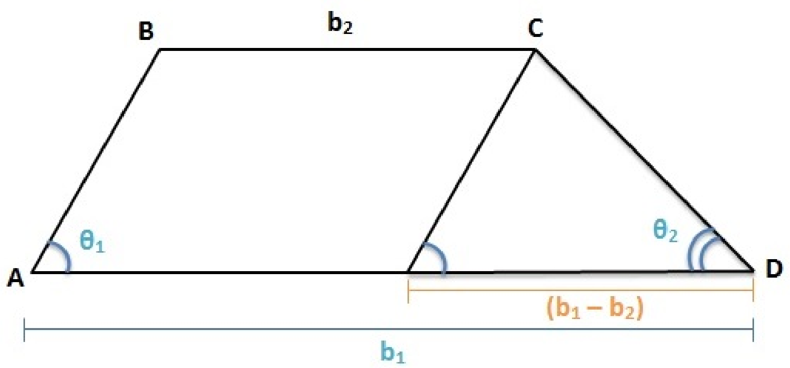

Figura 28 – Trapézio

Demonstração:
Podemos ver a área do trapézio (A_T) da figura 28, é a soma da área do paralelogramo e a área do triângulo, isto é,

$$A_T = A_p + A_t.$$

Vamos usar a fórmula (22) do paralelogramo, e a fórmula (13) do triângulo, assim, temos então que

$$A_T = b_2 \cdot \overline{AB} \cdot \operatorname{sen}\theta_1 + \frac{(b_1 - b_2)^2 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2}{2 \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)} \tag{23}$$

Pela lei dos senos

$$\frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{b_1 - b_2}{\operatorname{sen}(180^\circ - (\theta_1 + \theta_2))}$$

Por outro lado, da fórmula do seno da diferença, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)) &= \operatorname{sen}180^\circ \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos 180^\circ \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\
&= \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

Logo, isolando $\overline{AB}$ temos que

$$\overline{AB} = \frac{(b_1 - b_2) \cdot \operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Substituindo $\overline{AB}$ em (23),temos

$$\begin{aligned}
A_T &= b_2 \cdot \frac{(b_1 - b_2) \cdot \operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)} \cdot \operatorname{sen}\theta_1 + \frac{(b_1 - b_2)^2 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2}{2 \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)}. \\
&= \frac{2(b_2 \cdot b_1 - b_2^2) \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + (b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2) \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2}{2 \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)}. \\
&= \frac{(2b_1b_2 - 2b_2^2 + b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2) \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2}{2 \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)}. \\
&= \frac{(b_1^2 - b_2^2) \cdot \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2}{2 \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)}.
\end{aligned}$$

Concluímos então que, a área de um trapézio podemos calcular pela diferença dos quadrados das bases multiplicado pelo produto dos senos dos dois ângulos dividido por duas vezes a soma do seno dos dois ângulos. ■

5. Setor circular (a área da região hachurada (h)).

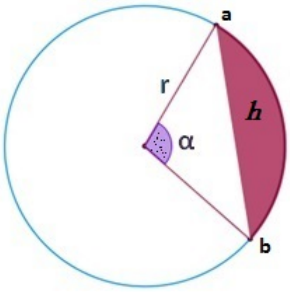

Figura 29 – Setor Circular

Demonstração:
A área da região hachurada da figura 29, é dada por

$$A_h = \text{ área do setor circular } (A_{\widehat{ab}}) - \text{ área do triângulo } (A_t).$$

Por outro lado, a área de setor circular $A_{\widehat{ab}}$ é

$$A_{\widehat{ab}} = \frac{r^2}{2} \cdot \alpha.$$

Da fórmula (10), podemos calcular a área do triângulo (A_t) como

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$

Portanto, a área da região hachurada é

$$\begin{aligned} A_h &= \left(\frac{r^2}{2} \cdot \alpha\right) - \left(\frac{r^2}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha\right). \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot (\alpha - \operatorname{sen} \alpha) . \blacksquare \end{aligned}$$

6. Polígono regular de n lados (l).
Vamos calcular a área do polígono regular de n lados (l) envolvendo apenas a medida dos lados (l) e a quantidade de lados n. (veja a figura 30)

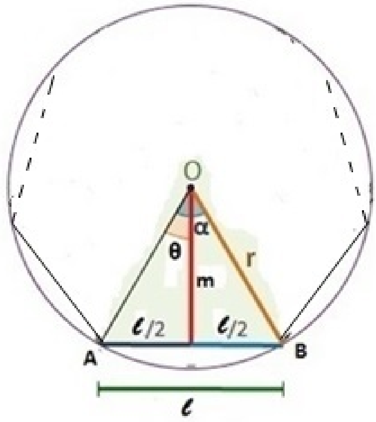

Figura 30 – Polígono Regular

Demonstração:
Como sabemos todo polígono regular pode ser inscrito numa circunferência, logo a área do polígono regular de n lados de tamanho l (figura 30) é dada por

$$A_P = n \cdot A_t \tag{24}$$

onde A_t é a área do triângulo (AOB). Então, a área do triângulo (AOB), é

$$A_t = \frac{l \cdot m}{2}. \tag{25}$$

Da razão trigonométrica, $\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{l}{2}}{m} \Rightarrow m = \frac{l}{2\operatorname{tg}\theta}$.
Substituindo m em (25) temos

$$A_t = \frac{l \cdot \frac{l}{2 \cdot \operatorname{tg}\theta}}{2} = \frac{l^2}{4 \cdot \operatorname{tg}\theta}.$$

Da figura 30, temos

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2}, \\ \text{Como, } \alpha &= \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{n} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_t = \frac{l^2}{4 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \tag{26}$$

Substituindo (26) em (24), temos então que

$$\begin{aligned} A_P &= n \cdot A_t \\ &= \frac{n \cdot l^2}{4 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \blacksquare \end{aligned} \tag{27}$$

Vamos verificar a fórmula (27), para $n = 3$ e $n = 4$.

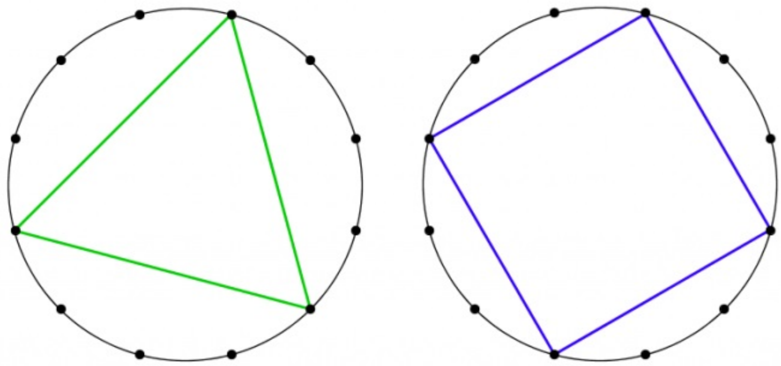

Figura 31 – Polígono de $n = 3$ e $n = 4$

A área do Triângulo equilátero $A_t = \dfrac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$. Logo para $n = 3$ na fórmula (27) temos:

$$\begin{aligned} A_P &= \frac{3 \cdot l^2}{4 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \frac{3 \cdot l^2}{4 \cdot \sqrt{3}} \\ &= \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}. \blacksquare \end{aligned}$$

A área do Quadrado $A_q = l^2$. Logo para $n = 4$ na fórmula (27) temos:

$$\begin{aligned} A_P &= \frac{4 \cdot l^2}{4 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{l^2}{1} \\ &= l^2. \blacksquare \end{aligned}$$

4 CONCLUSÃO

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) objetivou elaborar um material capaz de ajudar os profissionais de educação matemática a desenvolverem o raciocínio por meio de demonstrações da figura geométricas utilizando a aplicação trigonométrica.

Para tal, esta análise apoiou-se num conjunto de definições que contemplam os alicerces de cada demonstração apresentada. Realizou-se em primeiro lugar um preliminar ou seja, uma revisão dessas definições para em seguida poder utilizá-los no presente trabalho. Foi possível realizar demonstrações das aplicações trigonométricas, as quais não são usuais nos livros textos do ensino médio, tais como: a utilização das leis de senos e cossenos para demonstrar os casos de congruência de triângulos, calcular a área de um triângulo com o auxílio da razão trigonométrica, e entre outros.

Uma contribuição importante deste trabalho foi á demonstração de uma fórmula para calcular a área de um polígono regular de n lados usando apenas o número de lados e o tamanho do lado do polígono.

Desta forma pode-se concluir que o mérito do trabalho é mostrar uma nova forma de apresentar trigonometria no ensino médio.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria Números Complexos** . 3.ed. Rio de Janeiro : SBM, 2005.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de Matemática elementar 9, geometria plana** . 9 ed. São Paulo : Atual, 2013.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática elementar 3, trigonometria** . 9 ed. São Paulo : Atual, 2013.

OLIVEIRA, A. C. **Trigonometria : o radiano e as funções seno, cosseno e tangente.** - Campina Grande, 2014. 81 f. (dissertação de mestrado em matemática). Universidade Federal de Campina Grande, 2014.

ROONEY, A. **A História da Matemática - desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo : M.Books do Brasil editora Ltda, 2012.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J.B. **Tópicos de História de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.