



Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB  
Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN  
Curso de Licenciatura em Ciências da Natureza e Matemática

RODOLFO FERREIRA DE OLIVEIRA

Análise Tangencial Geométrica para Obtenção de Regularidade em Equações  
Diferenciais Parciais

Acarape/CE

2018

RODOLFO FERREIRA DE OLIVEIRA

Análise Tangencial Geométrica para Obtenção de Regularidade em Equações  
Diferenciais Parciais

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Ciências da Natureza e Matemática com habilitação em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral

Acarape/CE

2018

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Sistema de Bibliotecas da UNILAB  
Catalogação de Publicação na Fonte.

---

Oliveira, Rodolfo Ferreira de.

O42a

Análise Tangencial Geométrica para Obtenção de Regularidade de Equações Diferenciais Parciais / Rodolfo Ferreira de Oliveira. - Redenção, 2018.

47f: il.

Monografia - Curso de Ciências Da Natureza E Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Análise Tangencial Geométrica. 3. Teorema de Schauder. I. Título

CE/UF/BSCL

CDD 515.35

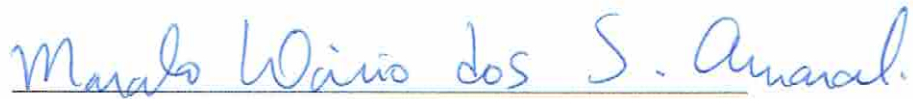
---

Análise Tangencial Geométrica para Obtenção de Regularidade em Equações  
Diferenciais Parciais

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Ciências da Natureza e Matemática com habilitação em Matemática.

Aprovada em: 04/06/2018.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho à meu falecido pai, Raimundo Ferreira de Oliveira, por sempre ter me motivado a estudar Matemática. Sem ele, essa realização não seria possível.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, pelo seu amor e misericórdia para conosco e por mais essa realização em minha vida.

À minha mãe, Joana Darc, por nada mais do que tudo, pelo seu cuidado, pelo seu carinho, por ter dedicado 20 anos de sua vida para cuidar de mim, em especial esses últimos 4 anos, onde dedicou-os inteiramente às graduações minha e do meu irmão.

Ao meu pai, Raimundo, *in memoriam*, por ter me motivado a estudar Matemática desde sempre, por todo o seu cuidado comigo e com o meu irmão, e por ter me dado o exemplo do homem que tenho que ser.

À minha namorada, companheira e melhor amiga, Sharmenya, ou mais carinhosamente, Shay, por todo seu amor, seu apoio e toda sua confiança em mim e no meu potencial. Eu te amo.

Ao meu irmão mais velho, Pedro Henrique, por todo seu apoio e por ter sido aquele que posso dizer que foi meu primeiro professor, pois durante anos, ele me ensinava os conteúdos de dois anos seguintes em relação ao ano que estava, o que contribuiu significativamente para quem sou hoje.

À minha gata de estimação, Pôdi, por ter me tornado uma pessoa mais sensível e por todas as noites que ficou acordada acompanhando meu irmão e eu estudarmos.

A todos os amigos que fiz na UNILAB, em especial aos meus 2 melhores amigos, Ricardo e Israel, por todos os trabalhos, brincadeiras, estudos, discussões, partidas de PES, partidas de Clash e muito mais.

Aos amigos que fiz no curso de Matemática, em especial ao Luan (Meu chapa), Fernandes (Pato réi) e Érika (Jojó) por todas as conversas, risadas, brincadeiras.

Ao meu orientador, Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral, pela confiança e pela paciência em trabalhar comigo.

A todos os professores que tive na minha carreira acadêmica, tanto do ensino fundamental, médio e superior.

Aos professores da banca examinadora, pelas valiosas contribuições para com o trabalho e conseqüentemente, para a minha formação.

*Eu sou aquele que ocupa o topo dos clãs*

## RESUMO

Neste trabalho, apresentamos a Análise Tangencial Geométrica, que consiste de um método altamente empregado no estudo de regularidade de Equações Diferenciais Parciais. O nome se deve ao fato de que, em certo sentido, em um processo limite, conseguimos obter estimativas de regularidade para o problema não-homogêneo tangenciando pelo problema homogêneo de coeficientes constantes, do qual importamos, de certa forma, regularidade, quando o termo não homogêneo tende a zero e os coeficientes variáveis tendem à coeficientes constantes. Neste texto abordamos a Análise Tangencial no Teorema de Schauder, o qual se configura em um cenário mais simples para a aplicação do método, onde o utilizamos para demonstrar a versão pontual e a versão  $L^2$  do referido Teorema. Ao final do trabalho, como cereja do bolo, mostramos a equivalência entre as regularidades  $C^\alpha$  no sentido clássico e  $C^\alpha$  no sentido  $L^2$  ao provar o clássico Teorema de Campanato.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Parciais. Análise Tangencial Geométrica. Teorema de Schauder.



## ABSTRACT

In this work, we present the Geometric Tangential Analysis, which consists of a method highly used in the study of regularity of Partial Differential Equations. The name is due to the fact that, in a sense, in a limiting process, we can obtain estimates of regularity for the nonhomogeneous problem by tangential by the homogeneous problem of constant coefficients, from which we import, to a certain extent, regularity, when the term not homogeneous tends to zero and the variable coefficients tend to constant coefficients. In this text we discuss the Tangential Analysis in Schauder's Theorem, which is configured in a simpler scenario for the application of the method, where we use it to demonstrate the point version and the  $L^2$  version of the theorem. At the end of the work, as cake cherry, we show the equivalence between the regularities  $C^\alpha$  in the classical sense and  $C^\alpha$  in the sense  $L^2$  while proving the classic Campanato's Theorem. .

**Keywords:** Partial Differential Equations. Geometric Tangential Analysis. Schauder's Theorem.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	9
2	NOTAÇÕES E PRÉ-REQUISITOS . . . . .	11
2.1	Notações e Definições Elementares . . . . .	11
2.2	Espaços Funcionais . . . . .	12
2.3	Problema de Dirichlet Homogêneo . . . . .	17
2.4	Hölder Continuidade . . . . .	19
2.5	Funções Harmônicas . . . . .	22
2.6	Princípio do Máximo . . . . .	23
3	TEOREMA DE SCHAUDER . . . . .	24
4	ANÁLISE TANGENCIAL . . . . .	25
4.1	Regime de Pequenez . . . . .	26
4.2	Resultado de Aproximação . . . . .	27
4.3	Passo Chave . . . . .	28
4.4	Regularidade Discreta . . . . .	30
4.5	Passagem do discreto para o contínuo . . . . .	33
4.6	Regularidade Pontual implica em Regularidade Local . . . . .	34
5	MÉTODO DE COMPACIDADE . . . . .	34
5.1	Resultado de Compacidade . . . . .	34
5.2	Resultado de Aproximação . . . . .	35
5.3	Resultado Chave . . . . .	36
5.4	Processo Iterativo . . . . .	37
6	TEOREMA DE CAMPANATO . . . . .	39
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	44
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	44

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo de Equações Diferenciais Parciais iniciou-se em meados do século XVIII e hoje é um dos temas centrais da pesquisa em Análise, devido às suas inúmeras aplicações conhecidas em Física, Estatística, Probabilidade, Engenharia e outras demais áreas do conhecimento. As primeiras contribuições no estudo de EDPs foram dadas por renomados matemáticos, como Euler, Laplace, dentre outros.

Este texto é o resultado final de dois anos de projeto de iniciação científica sob a orientação do professor Marcelo Dário dos Santos Amaral, orientador deste trabalho, estudando Equações Diferenciais Parciais (EDPs).

Em Equações Diferenciais Parciais, o estudo inicial, geralmente, consiste da procura de existência e, se possível for, de unicidade de solução fraca para problemas de contorno, como exemplo, o problema para o laplaciano homogêneo de Dirichlet.

Para termos uma ideia do quanto existência de soluções de EDPs é relativamente novo, mais precisamente menos de um século, tal ainda desafiava a comunidade matemática em seu entendimento total. As ferramentas para atacá-lo apropriadamente tem menos de um século. É incrível como neste tempo houve evolução extraordinária.

Mais especificamente as décadas de 1930 e 1940 assistiram ao surgimento e à consolidação da teoria dos espaços de Sobolev tanto por Kurt Otto Friedrichs (1901-1982) como por Sergei L'vovich Sobolev (1908-1989), num processo de verdadeira releitura do que se entenderia por uma solução o de uma equação diferencial. Tais trabalhos culminariam com a publicação o dos dois volumes da obra *Théorie des Distributions* de Laurent Schwartz (1915-2002) em 1950. Tudo isso, por sua vez, se sustentava no advento da Análise Funcional a partir da década de 1920.

Após o estudo da existência, um passo seguinte é o estudo da regularidade da solução. Sendo assim, estudaremos a regularidade da solução fraca da equação de Poisson, na bola unitária, a saber:

$$\Delta u = f$$

Para determinar a regularidade de tal equação, que possui solução amplamente conhecida utilizaremos o método de Análise Tangencial Geométrica para demonstrar o Teorema de Schauder.

A Análise Tangencial Geométrica consiste de uma teoria de "perturbação de fontes e coeficientes". O nome se deve ao fato de que, em certo sentido, em um processo limite, conseguimos obter estimativas de regularidade tangenciando pelo problema limite que, usualmente, é o problema homogêneo de coeficientes constantes, do qual importamos, de certa forma, regularidade quando o termo não-homogêneo tende a zero e os coeficientes variáveis tendem à coeficientes constantes.

Neste trabalho demonstramos, a partir do método de Análise Tangencial, as

versões pontual e  $L^2$  do Teorema de Schauder e com isso obtemos regularidade  $C^{2,\alpha}$  para a solução fraca da equação de Poisson mencionada acima, tanto no sentido clássico, quanto no sentido  $L^2$ . Ao final, demonstramos o Teorema de Campanato que mostra equivalência entre as regularidades  $C^\alpha$  no sentido clássico e  $C^\alpha$  no sentido  $L^2$ , as quais são tomadas como hipótese para o termo não homogêneo, a saber  $f$  em cada um dos casos.

## 2 NOTAÇÕES E PRÉ-REQUISITOS

### 2.1 Notações e Definições Elementares

**Notação 2.1.** A partir deste momento,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  denotará um domínio do  $\mathbb{R}^n$ , isto é, um aberto e conexo.

**Notação 2.2.** Nas condições do item anterior,  $\bar{\Omega}$  denotará o fecho de  $\Omega$ .

**Notação 2.3.** Ao longo deste texto,  $|\Omega|$  denotará a medida de  $\Omega$ .

**Definição 2.1.** Uma função  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita convexa se  $\forall t \in [0, 1]$  e  $\forall u, v \in \Omega$  ocorrer:

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v)$$

**Definição 2.2.** Seja  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Caso existam as primeiras derivadas parciais de  $u$ , definimos o Gradiente de  $u$ , aqui denotado por  $\nabla u$ , pelo vetor:

$$\nabla u := \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

**Definição 2.3.** Seja  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Caso existam as segundas derivadas parciais de  $u$ , definimos o Laplaciano de  $u$ , aqui denotado por  $\Delta u$ , pelo somatório:

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

De outro modo,

$$\Delta u = \text{Tr}(D^2u)$$

onde  $D^2u$  denota a matriz Hessiana associada a  $u$ .

**Definição 2.4.** Seja  $V$  espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Uma seminorma em  $V$  é toda função  $[\cdot] : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  que satisfaz:

$$\begin{cases} [x] \geq 0, \forall x \in V \\ [\lambda x] = |\lambda|[x], \forall x \in V \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ [x + y] \leq [x] + [y], \forall x, y \in V \end{cases}$$

**Observação 2.1.** No contexto da definição anterior, temos que toda norma é uma seminorma. Já o contrário não ocorre, pois podemos ter  $[x] = 0$ , mesmo que  $x \neq 0$ .

**Definição 2.5.** Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que  $s \in \mathbb{R}$  é uma cota superior de  $X$  se  $s \geq x, \forall x \in X$ .

**Definição 2.6.** Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que  $i \in \mathbb{R}$  é uma cota inferior de  $X$  se  $i \leq x, \forall x \in X$ .

**Definição 2.7.** Seja  $X \subset \mathbb{R}$  e  $s \in \mathbb{R}$  cota superior de  $X$ . Dizemos que  $s$  é o supremo de  $X$  e denotamos  $s := \sup X$  se,  $s \leq \tilde{s}$ , para toda  $\tilde{s}$  cota superior de  $X$ . Isto é, o supremo

é a menor das cotas superiores.

**Definição 2.8.** Seja  $X \subset \mathbb{R}$  e  $i \in \mathbb{R}$  cota inferior de  $X$ . Dizemos que  $i$  é o ínfimo de  $X$  e denotamos  $i := \inf X$  se,  $\tilde{i} \leq i$ , para toda  $\tilde{i}$  cota inferior de  $X$ . Isto é, o ínfimo é a maior das cotas inferiores.

**Definição 2.9.** Dizemos que uma função  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é essencialmente limitada quando  $|\{x \in \Omega; v(x) > C\}| = 0$ , isto é  $|v| \leq C$ , a menos de conjunto de medida nula e assim definimos:

$$\sup_{\text{ess}} v := \inf\{C; |\{x \in \Omega; v(x) > C\}| = 0\}$$

**Definição 2.10.** Seja  $V$  espaço vetorial real. Dizemos que uma sequência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$  converge em  $V$  se existe  $x \in V$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

**Definição 2.11.** Seja  $V$  espaço vetorial real. Dizemos que uma sequência  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$  é de Cauchy se para cada  $\epsilon > 0$  tomado arbitrariamente, for possível obter  $n > 0$  tal que:

$$m, r > n \implies \|x_m - x_r\| < \epsilon$$

## 2.2 Espaços Funcionais

**Definição 2.12.** Seja  $V$  espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  dotado de uma norma  $\|\cdot\|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Dizemos que  $V$  é um espaço de Banach se é completo em relação à norma  $\|\cdot\|_X$ . Isto é, se para cada sequência  $\{x_n\} \subset X$  de Cauchy, exista  $x \in X$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Ou equivalentemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

**Proposição 2.1.** Toda sequência limitada em um espaço de Banach admite subsequência fracamente convergente.

*Demonstração.* Seja  $V$  um espaço de Banach e  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$  limitada em  $V$ . Então existe  $C \in \mathbb{R}$  tais que:

$$\|x_n\| \leq C$$

Então, defina o conjunto:

$$A := \{t \in \mathbb{R}; t \leq \|x_n\|, \text{ para uma quantidade infinita de índices}\}$$

Note que  $C$  é cota superior de  $A$  e defina  $b := \sup A$ . Dado  $\epsilon > 0$  arbitrário, existe  $t \in A$

tal que:

$$b - \varepsilon < t \implies b - \varepsilon < \|x_n\|, \text{ para uma infinidade de } \text{índices}$$

Por outro lado,  $b + \varepsilon \notin A$ , logo  $b + \varepsilon \leq \|x_n\|$  apenas para uma quantidade finita de índices. Isto é, para uma infinidade de índices  $n_k$ :

$$\|x_{n_k} - b\| \leq \varepsilon$$

Logo,  $\{x_{n_k}\}$  é subsequência de  $\{x_n\}$  que converge fracamente para  $b = \sup A$ .  $\square$

**Definição 2.13.** *Seja  $X$  um conjunto e  $\mathcal{P}(X)$  seu conjunto das partes. Então, o subconjunto  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$  é dito uma  $\sigma$ -álgebra se:*

$$\begin{cases} \emptyset \in \mathcal{M} \\ A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M} \\ \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M} \end{cases}$$

**Definição 2.14.** *Definimos como espaço mensurável  $(X, \mathcal{M})$  um conjunto  $X$  dotado de uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$ .*

**Definição 2.15.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  função, onde  $(X, \mathcal{M})$  e  $(Y, \mathcal{N})$  são espaços mensuráveis. Dizemos que  $f$  é mensurável se  $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}, \forall E \in \mathcal{N}$ .*

**Definição 2.16.** *Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Se  $f$  é mensurável, então definimos:*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} (\int_{\Omega} |f|^p dx)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{\Omega} \text{ess}|f|, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

**Definição 2.17.** *Nas condições da definição anterior, definimos o espaço  $L^p(\Omega)$  como o espaço das funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $p$ -integráveis com norma  $\|f\|_{L^p(\Omega)}$  finita.*

**Observação 2.2.** *O espaço  $L^p(\Omega)$  é um espaço de Banach.*

**Proposição 2.2** (Desigualdade de Young). *Sejam  $p, q$  tais que  $1 < p, q < \infty$  e  $1/p + 1/q = 1$ , então para quaisquer  $a, b \geq 0$ , vale:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

*Demonstração.* Vamos dividir a prova em casos:

Caso 1:  $ab = 0$ . Este caso é trivial, pois  $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq 0$

Caso 2:  $ab \neq 0$ . Para este caso, tomemos os sub-casos

Sub-caso 2.1:  $a^p = b^q$ . Se isso ocorre, então temos:

$$ab = a(b^q)^{1/q} = a(a^p)^{1/q} = a^{p/p} a^{p/q} = a^{p(1/p+1/q)} = a^p = a^p \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Sub-caso 2.2:  $a^p \neq b^q$ . Neste caso, note que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = e^x$  é convexa, logo:

$$e^{tx+(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y, \forall t \in [0, 1] \text{ e } \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Façamos então  $x = \ln a^p$ ,  $y = \ln b^q$  e  $t = 1/p$  (consequentemente  $1 - t = 1/q$ ). Com isso:

$$e^{(\ln a^p)/p + (\ln b^q)/q} \leq \frac{e^{\ln a^p}}{p} + \frac{e^{\ln b^q}}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Por outro lado,

$$e^{(\ln a^p)/p + (\ln b^q)/q} = e^{(p \ln a)/p + (q \ln b)/q} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = ab$$

Donde concluímos que,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

**Proposição 2.3** (Desigualdade de Hölder). *Sejam  $u \in L^p(\Omega)$  e  $v \in L^q(\Omega)$  com  $1 \leq p, q \leq \infty$  e  $1/q + 1/p = 1$ , então:*

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

*Demonstração.* Defina as funções:

$$f(x) := \frac{u(x)}{\|u\|_{L^p(\Omega)}} \text{ e } g(x) := \frac{v(x)}{\|v\|_{L^q(\Omega)}}$$

Note que  $f$  e  $g$  são normalizadas nas normas  $L^p$  e  $L^q$ , respectivamente. Além disso,

$$\int_{\Omega} |uv| dx = \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \int_{\Omega} |fg| dx$$

É suficiente mostrar que  $\int_{\Omega} |fg| dx \leq 1$ . Pela Proposição (2.2), temos:

$$|fg| = |f||g| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$$

Integrando os dois lados sobre  $\Omega$ , temos:

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |f|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |g|^q dx$$

Como  $f$  e  $g$  são normalizadas, segue que:

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^q(\Omega)}$$



□

**Proposição 2.4** (Desigualdade de Minkowski). *Sejam  $u, v \in L^p(\Omega)$ , então:*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

*Demonstração.* Dado  $p > 1$ , considere  $q$  de tal modo que  $1/q + 1/p = 1$ . Temos:

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u + v|^p dx = \int_{\Omega} |u + v| |u + v|^{p-1} dx$$

Desigualdade triangular fornece:

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \int_{\Omega} |u| |u + v|^{p-1} dx + \int_{\Omega} |v| |u + v|^{p-1} dx$$

Pela Proposição (2.3), temos:

$$\int_{\Omega} |u| |u + v|^{p-1} dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|(u + v)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}.$$

Analogamente,

$$\int_{\Omega} |v| |u + v|^{p-1} dx \leq \|v\|_{L^p(\Omega)} \|(u + v)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}.$$

Daí,

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|(u + v)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} (\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)})$$

No entanto,

$$\|(u + v)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |(u + v)^{p-1}|^q \right)^{1/q}$$

Como  $1/p + 1/q = 1$ , então  $1/q = p/(p-1)$ , isto é,  $q = p/(p-1)$ , logo:

$$\|(u + v)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |(u + v)^{p-1}|^{p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p} = \left( \int_{\Omega} |u + v|^p dx \right)^{(p-1)/p} = \|u + v\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}.$$

Sendo assim,

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \|u + v\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} (\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)})$$

Donde concluímos o resultado:

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$

□

**Teorema 2.1** (Teorema da Diferenciação de Lebesgue). *Seja  $f \in L^p_{Loc}(\Omega)$ , então:*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_{x_0, r}} |f(x) - f(x_0)|^p dx = 0, \text{ para quase todo } x_0 \in \Omega$$

*Demonstração.* A prova deste resultado pode ser encontrada no Teorema 1.4 do capítulo 3 da referência [7].  $\square$

**Definição 2.18.** *Sejam  $u, v \in L^1_{Loc}(\Omega)$  e  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  um multi-índice de ordem  $|\alpha| = \sum_i \alpha_i = k$ . Dizemos que  $v$  é a  $\alpha$ -ésima derivada parcial fraca de  $u$  se:*

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx$$

para toda  $\varphi \in C^{\infty}_c(\Omega)$  função teste. E então escrevemos  $D^{\alpha}u = v$ .

**Proposição 2.5.** *Seja  $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ . Caso exista, a  $\alpha$ -ésima derivada parcial fraca de  $u$  é única, a menos de conjunto de medida nula.*

*Demonstração.* Suponha que  $v_1, v_2 \in L^1_{Loc}(\Omega)$  sejam  $\alpha$ -ésimas derivadas parciais fracas de  $u$ , então:

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_1 \varphi dx = \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_2 \varphi dx.$$

Isto é,

$$\int_{\Omega} v_1 \varphi dx - \int_{\Omega} v_2 \varphi dx = 0 \implies \int_{\Omega} (v_1 - v_2) \varphi dx = 0$$

Contanto que  $\Omega$  não tenha medida nula, segue que  $v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$ . Logo a  $\alpha$ -ésima derivada parcial fraca de  $u$  caso exista, é única.  $\square$

**Definição 2.19.** *Definimos o Espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  como o espaço de todos os funcionais  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cada multi-índice  $\alpha$ , com  $|\alpha| = k$ ,  $D^{\alpha}u$  existe e além disso,  $D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)$ .*

**Definição 2.20.** *No contexto da definição anterior, denotamos por  $W_0^{k,p}(\Omega)$  como o fecho de  $W^{k,p}(\Omega)$*

**Definição 2.21.** *Dada  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , então a norma de  $u$  é dada por:*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p dx)^{1/p}, & \text{se } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} \text{ess} |D^{\alpha}u|, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

**Teorema 2.2.** *Para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p \leq \infty$ , o espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach.*

*Demonstração.* A prova deste resultado pode ser consultada na referência [5], no Teorema 2 da Seção 5.2.  $\square$

**Teorema 2.3** (Desigualdade de Sobolev). *Seja  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  para algum  $p \in [1, n)$ . Então:*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Onde  $p^* = \frac{np}{n-p}$  e  $C = C(n, p)$ .

*Demonstração.* A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5], no Teorema 1 da Seção 5.6.  $\square$

### 2.3 Problema de Dirichlet Homogêneo

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com fronteira  $C^1$ , então o problema de fronteira de Dirichlet, no caso homogêneo, consiste de encontrar uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , tal que,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{sobre } \Omega \end{cases}, \text{ onde } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Nessa subseção, temos por objetivo estudar a existência e unicidade de solução fraca para este problema. Um importantíssimo fato a se destacar, é que a existência de EDP's, muitas vezes é extremamente difícil de se provar, principalmente exibindo de forma explícita a solução. Sendo assim, uma ideia à altura do problema foi necessária. A saber, formular um problema fraco, o qual permitisse procurar por soluções em um conjunto mais amplo. Além disso, o que permitiu de fato o sucesso de tal ideia, é que este novo conjunto, os Espaços de Sobolev, são estruturas matemáticas onde podemos aplicar as técnicas de Análise Funcional até então consolidadas. Ressaltamos aqui ainda, que para se formular um problema fraco, usualmente é pedido como definição que ele satisfaça uma propriedade que soluções clássicas possuem. Sendo assim, soluções clássicas são automaticamente soluções fracas. No entanto, a recíproca não é evidente e em alguns casos até mesmo não é verdade, sendo necessário teoria robusta de regularidade, o qual está fora do nosso propósito aqui, a priori. A título de informação, para problemas na forma divergente a propriedade usualmente é integração por partes e, para problemas na forma não divergente, é o princípio do máximo (ver Teorema 2.6). Apresentamos agora o Lema de Weyl, que caracteriza uma condição para que soluções fracas sejam soluções clássicas:

**Lema 2.1** (Lema de Weyl). *Se  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$  é solução fraca de  $\Delta u = 0$ , no sentido de que:*

$$\int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx = 0,$$

*para qualquer função teste  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , então (a menos de conjunto de medida nula),  $u \in C^\infty(\Omega)$  e satisfaz  $\Delta u = 0$  pontualmente em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* A prova para este resultado pode ser consultada em [8].  $\square$

**Proposição 2.6.** *A formulação fraca para o problema de Dirichlet homogêneo é:*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = 0 \\ u - \varphi \in W^{1,0}(\Omega) \end{cases}, \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

*Demonstração.* No problema homogêneo de Dirichlet, temos:

$$\Delta u = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por  $\varphi$  e integrando sobre  $\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta u dx = 0$$

Por integração por partes,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \nabla u dx - \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = 0.$$

Donde concluímos que,

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = 0.$$

□

**Proposição 2.7.** *A solução do problema variacional:*

$$\min \left\{ F(v); F(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx, v \in W^{1,2}(\Omega) \right\}$$

*resolve fracamente o problema homogêneo de Dirichlet.*

*Demonstração.* Seja o funcional integral  $F : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por:

$$F(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

Admita que  $F(u) = \min F(v)$  e defina  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$E(t) := F(u + t\varphi) = \int_{\Omega} |\nabla(u + t\varphi)|^2 dx.$$

Pela linearidade do gradiente e da integral, obtemos:

$$E(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2t \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx + t^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx.$$

Note que  $E(t)$  é uma função quadrática. Por nossa hipótese,  $F$  admite mínimo em  $u$ . Por outro lado,  $F(u) = E(0)$ , logo  $E$  admite mínimo (global) em  $t = 0$ . Disto, temos que

$E'(0) = 0$  e em decorrência:

$$E'(0) = 0 \implies 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = 0 \implies \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = 0$$

Logo, se  $u$  minimiza  $F$ , então é solução fraca para o problema homogêneo de Dirichlet.  $\square$

Agora, temos de mostrar que o problema variacional é minimizável, para se concluir a existência da solução. Seja  $I = \inf\{F(v), v \in W^{1,2}(\Omega)\}$ . Note que em particular,  $I \leq F(u)$ . Como este conjunto que estamos tomando o ínfimo não é vazio, podemos considerar uma sequência minimizante  $\{u_k\} \subset W^{1,2}(\Omega)$  tal que:

$$F(u_k) \rightarrow I$$

Pela Desigualdade de Sobolev (Ver Teorema (2.3)), temos:

$$\|u_k\| \leq C \|\nabla u_k\|$$

Desse modo, como  $\{u_k\}$  é limitada em um espaço de Banach, admite subsequência fracamente convergente  $\{u_{k_j}\}$ , tal que  $u_{k_j} \rightharpoonup u$ . Como  $F$  é estritamente convexa (mostra-se por verificação direta) e contínua, em particular é semicontínua inferior, isto é, na vizinhança de  $u$ , temos:

$$F(u) \leq \lim F(u_k) = I \implies F(u) = I \leq F(v), \forall v \in W^{1,2}(\Omega).$$

De fato,  $u$  minimiza  $F$  e portanto é solução fraca para o problema homogêneo de Dirichlet. Para finalizar, mostremos que tal solução admite unicidade. Como vimos que a solução é o mínimo do funcional  $F$ , admita que exista  $w \in W^{1,2}(\Omega)$  outro mínimo. Assim, pela convexidade estrita de  $F$ , temos:

$$F\left(\frac{u+w}{2}\right) < \frac{F(u)}{2} + \frac{F(w)}{2} = \min\{F(v), v \in W^{1,2}(\Omega)\}$$

No entanto,  $\frac{u+w}{2} \in W^{1,2}(\Omega)$ , pois  $W^{1,2}(\Omega)$  é fechado, logo chegamos a um absurdo. Portanto, a solução do problema homogêneo de Dirichlet é única.

## 2.4 Hölder Continuidade

**Definição 2.22.** Dada  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que  $g$  é  $\alpha$ -Hölder contínua em  $x_0 \in \Omega$  com  $0 < \alpha < 1$ , se existe uma constante  $C < \infty$  tal que

$$|g(x_0) - g(y)| \leq C|x_0 - y|^\alpha; \quad \forall y \in \Omega.$$

**Definição 2.23.** Se uma função  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é Hölder contínua em todos os pontos, dizemos que  $g$  é Hölder contínua e definimos a seminorma de Hölder como:

$$[g]_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

**Definição 2.24.** Dizemos que uma função  $u : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , em  $x_0 \in B_1$  se  $u$  é de classe  $C^2$  em  $x_0$  e  $D_{ij}u$  é  $C^\alpha$  em  $x_0$ , ou seja:

$$|D_{ij}u(x_0) - D_{ij}u(y)| \leq C|x_0 - y|^\alpha, \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n, \forall y \in B_1$$

**Proposição 2.8.** Se  $u : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  é  $C^{1,\alpha}$  na origem, então existe um polinômio de grau 1  $P(x) := b \cdot x + c$  tal que:

$$|u(x) - P(x)| \leq C|x|^{1+\alpha}$$

Além disso, necessariamente, têm-se:

$$b = \nabla u(0) \quad e \quad c = u(0)$$

*Demonstração.* Se  $u \in C^{1,\alpha}(0)$ , com  $\alpha \in (0, 1)$ , então  $u \in C^1(0)$  e  $D_i u \in C^\alpha(0)$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Assim:

$$|D_i u(0) - D_i u(x)| \leq C|x|^\alpha$$

Como  $u$  é diferenciável no ponto 0 podemos escrevê-la a partir do polinômio de Taylor com resto de Lagrange:

$$u(x) = u(0) + \nabla u(tx) \cdot x, \quad \forall x \in B_1 \quad e \quad t \in (0, 1)$$

Definindo:

$$P(x) := u(0) + \nabla u(0) \cdot x.$$

Então,

$$\begin{aligned} |u(x) - P(x)| &\leq |\nabla u(tx) \cdot x - \nabla u(0) \cdot x| \\ &= |(\nabla u(tx) - \nabla u(0)) \cdot x| \end{aligned}$$

Por Cauchy-Schwarz:

$$|u(x) - P(x)| \leq |\nabla u(tx) - \nabla u(0)| |x|$$

Mas:

$$\begin{aligned} |\nabla u(tx) - \nabla u(0)| &= \max_{1 \leq i \leq n} |D_i u(tx) - D_i u(0)| \\ &\leq C|tx|^\alpha \\ &\leq C|x|^\alpha \text{ pois } t \in (0, 1) \end{aligned}$$

Portanto:

$$|u(x) - P(x)| \leq C|x|^{1+\alpha}$$

□

**Proposição 2.9.** *Analogamente, se uma função  $u$  é de classe  $C^{2,\alpha}$  na origem, então existe um polinômio quadrático  $P(x) := x^t Ax + b \cdot x + c$  tal que*

$$|u(x) - P(x)| \leq C|x|^{2+\alpha}.$$

*E necessariamente*

$$c = u(0), \quad b = \nabla u(0) \quad e \quad A = \frac{1}{2} D^2 u(0).$$

*Demonstração.* Se  $u \in C^{2,\alpha}(0)$ , com  $\alpha \in (0, 1)$ , então  $u \in C^2(0)$  e  $D_{ij}u \in C^\alpha(0)$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Assim:

$$|D_{ij}u(0) - D_{ij}u(x)| \leq C|x|^\alpha$$

Como  $u$  é de classe  $C^2$  no ponto 0 podemos escrevê-la a partir do polinômio de Taylor com resto de Lagrange:

$$u(x) = u(0) + \nabla u(0) \cdot x + \frac{1}{2} x^t D^2 u(ax)x, \quad \forall x \in B_1 \quad e \quad a \in (0, 1)$$

Definindo:

$$P(x) := u(0) + \nabla u(0) \cdot x + \frac{1}{2} x^t D^2 u(0)x$$

Então,

$$\begin{aligned} |u(x) - P(x)| &\leq \left| \frac{1}{2} x^t D^2 u(ax)x - \frac{1}{2} x^t D^2 u(0)x \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} x^t (D^2 u(ax) - D^2 u(0))x \right| \\ &= \frac{1}{2} |x|^2 |D^2 u(ax) - D^2 u(0)| \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} |D^2u(ax) - D^2u(0)| &= \max_{1 \leq i, j \leq n} |D_{ij}u(ax) - D_{ij}u(0)| \\ &\leq C|ax|^\alpha \\ &\leq C|x|^\alpha \text{ pois } a \in (0, 1) \end{aligned}$$

Portanto:

$$|u(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2}C|x|^{2+\alpha}$$

Sendo  $\frac{1}{2}C := C_0$ , então:

$$|u(x) - P(x)| \leq C_0|x|^{2+\alpha}$$

□

Na Seção 5, estudaremos a Análise Tangencial sem levar em conta a solubilidade do problema de Dirichlet na bola. Ao invés usaremos a proximidade da solução do problema de Poisson de funções harmônicas na métrica  $L^2$ . Para tal, consideremos a definição abaixo, que se refere à continuidade Hölder no sentido  $L^2$ .

**Definição 2.25.** *Seja  $f : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\alpha \in (0, 1)$ . Dizemos que  $f$  é  $\alpha$ -Hölder contínua na origem no sentido  $L^2$ , se:*

$$[f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} := \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{r^\alpha} \left( \int_{B_r} |f - \bar{f}_{B_r}|^2 dx \right)^{1/2} < +\infty$$

Onde:

$$\bar{f}_{B_r} := \int_{B_r} f dx$$

## 2.5 Funções Harmônicas

**Definição 2.26.** *Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto. Dizemos que  $u$  é harmônica em  $\Omega$  se satisfaz a equação de Laplace, a saber:*

$$\Delta u = 0.$$

**Teorema 2.4.** *Seja  $u$  harmônica em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Assim:*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^\infty(B_r)}$$

Para qualquer  $B_r \subset \Omega$  com centro em  $x_0$  e raio  $r$ . Além disso,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  é um multi-índice da ordem  $k = |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ , onde:

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)}, \quad \text{com } k = 1, 2, \dots$$



*Demonstração.* A prova deste teorema pode ser encontrada na referência [5]. É o Teorema 7 da Seção 2.2 deste livro.  $\square$

**Teorema 2.5.** *Seja  $u$  harmônica em  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Então  $u$  é analítica em  $\Omega$ . Isto é, podemos expandir  $u$  localmente em Séries de Taylor. Como caso particular,  $u \in C^\infty(\Omega)$ .*

*Demonstração.* A demonstração deste resultado encontra-se no Teorema 10 da seção 2.2 da referência [9].  $\square$

## 2.6 Princípio do Máximo

**Teorema 2.6** (Princípio do Máximo Forte). *Suponha  $u \in C(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  harmônica em  $\Omega$ . Então*

$$\max_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

*Além disso, se  $\Omega$  é conexo e existe um ponto  $x_0 \in \Omega$  tal que*

$$u(x_0) = \max u,$$

*então  $u$  é constante em  $\Omega$ .*

Uma de suas consequências mais diretas e importantes é o princípio de comparação.

**Teorema 2.7** (Princípio de Comparação). *Sejam  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Delta f \geq 0$ , (respectivamente  $\Delta g \leq 0$ ) e  $f \leq 0$  em  $\partial\Omega$ , (respectivamente  $g \geq 0$ ) em  $\partial\Omega$  então  $f \leq 0$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Este é um resultado básico que, no geral, pode ser encontrado em qualquer livro introdutório de EDP's, por exemplo, a referência [6], [Corolário 2.8] do capítulo 2.  $\square$

Uma versão provavelmente mais conhecida do Princípio de Comparação segue rapidamente fazendo como uma combinação do resultado acima. Esta versão é a seguinte abaixo.

**Teorema 2.8** (Princípio de Comparação). *Sejam  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Delta f \geq 0$ ,  $\Delta g \leq 0$  e  $f \leq g$  em  $\partial\Omega$ , então  $f \leq g$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Aplique o Princípio de Comparação acima a  $f - g$ .  $\square$

**Exemplo 2.1.** *Considere a equação de Poisson na bola unitária  $B_1$*

$$\Delta u = f(x), x \in B_1.$$

*Mostre que*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}. \quad (1)$$

*Demonstração.* Defina

$$\begin{aligned} g(x) &:= u(x) - \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} - \frac{1 - |x|^2}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)} \\ &= u(x) - \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} - \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)} + \frac{|x|^2}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\leq 0, \forall x \in \partial B_1. \end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned} \Delta g(x) &= \Delta u(x) + \|f\|_{L^\infty(B_1)} \\ &= f(x) + \|f\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Daí, pelo Princípio do Máximo, tomando  $v \equiv 0$ , temos

$$g(x) \leq 0, \forall x \in B_1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1 - |x|^2}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(B_1)} &:= \max_{B_1} |u(x)| \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}. \end{aligned}$$

□

### 3 TEOREMA DE SCHAUDER

O Teorema de Schauder estabelece continuidade da Hessiana de uma função a partir da continuidade de seu laplaciano e estabelece teoria de regularidade para a equação de Poisson. Sem perda de generalidade, trabalharemos a equação de Poisson na bola unitária  $B_1$  devido a argumentos ‘‘standards’’ de cobertura.

$$-\Delta u = f(x); \quad x \in B_1. \quad (2)$$

Uma das principais motivações de se estudar o Teorema de Schauder é que ele garante que se  $u$  satisfaz (1) e se  $f$  é  $\alpha$ -Hölder contínua, então  $u \in C^{2,\alpha}$ . Em outras

palavras, ele garante que se o traço da Hessiana é  $\alpha$ -Hölder contínuo, então todas as demais entradas da Hessianas são contínuas, ou seja:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n D_{ii} \in C^\alpha \iff D_{ij} \in C^\alpha, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

**Teorema 3.1** (Schauder). *Seja  $u$  uma função limitada de classe  $C^2$  em  $B_1$ . Assuma  $\Delta u = f$  em  $B_1$  e que  $f \in C^\alpha(B_1)$  com  $0 < \alpha < 1$ . Então  $u \in C^{2,\alpha}(B_{1/2})$  e*

$$[D_{ij}u]_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_{1/2})} + [f]_{C^\alpha(B_1)}),$$

para uma constante universal  $C$  que depende apenas da dimensão  $n$  e do expoente  $\alpha$ .

**Teorema 3.2** (Versão pontual do Teorema de Schauder). *Seja  $u$  uma solução fraca da equação de Poisson,  $\Delta u = f$  em  $B_1$ . Suponha que  $f$  é  $\alpha$ -Hölder contínua na origem, ou seja  $[f]_{C^\alpha(0)} < \infty$ . Então existe uma constante  $C_0$  que depende apenas da dimensão e do expoente  $\alpha$ , e um polinômio quadrático  $p(x) := x^t Ax + b \cdot x + c$  tal que:*

$$|u(x) - p(x)| \leq C_0 ([f]_{C^\alpha(0)} + \|u\|_{L^2(B_1)}) |x|^{(2+\alpha)}.$$

Ademais,

$$|A| + |b| + |c| \leq C_0 \left( f(0) + [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} + \|u\|_{L^2(B_1)} \right)$$

**Teorema 3.3** (Versão  $L^2$  do Teorema de Schauder). *Seja  $u$  solução fraca da equação de Poisson,  $\Delta u = f$ , em  $B_1$ . Suponha que  $f$  é  $\alpha$ -Hölder contínua na origem no sentido  $L^2$ . Então existe uma constante  $C_0$  que depende apenas da dimensão e do expoente  $\alpha$ , e um polinômio quadrático  $p(x) := x^t Ax + b \cdot x + c$  tal que:*

$$\int_{B_r} |u(x) - p(x)|^2 dx \leq C_0 \left( [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} + \|u\|_{L^2(B_1)} \right) r^{2(2+\alpha)}$$

Além disso, temos  $Tr A = f(0)$  e:

$$|A| + |b| + |c| \leq C_0 \left( f(0) + [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} + \|u\|_{L^2(B_1)} \right)$$

#### 4 ANÁLISE TANGENCIAL

A Análise Tangencial pode ser dividida em alguns passos. O primeiro, o qual chamamos Regime de Pequenez, significa que podemos, sem perda de generalidade, provar o resultado admitindo pequenez do termo não-homogêneo e da oscilação dos coeficientes. Isto segue de argumentos padrões de cobertura. O segundo consiste em um resultado de aproximação, mais especificamente, significa que a solução do problema não-

homogêneo torna-se tão próxima do problema homogêneo quanto se queira, contanto que a oscilação dos coeficientes e o termo não homogêneo seja suficientemente pequena. Aqui usualmente utilizamos estimativas de regularidade da solução do problema homogêneo, também podemos utilizar o método de compacidade, que consiste em provar o resultado de aproximação por contradição, esta oriunda via compacidade. Como consequência do resultado de aproximação, obtemos o Passo Chave que consiste no caso em  $n = 1$  do processo de indução matemática do seguinte passo. Como já adiantamos, o próximo passo é obter uma regularidade discreta, usando indução. A hipótese de indução segue aplicando o passo chave convenientemente no *Scaling*. Após a obtenção da regularidade discreta a passagem do discreto para o contínuo, o último passo é *standard*. Finalmente, obtemos regularidade pontual, e sabe-se que regularidade pontual implica em regularidade local.

Afim de ficar melhor entendido, resumimos os passos em

1. Regime de pequenez.
2. Resultado de Aproximação (Método de Compacidade).
3. Passo Chave.
4. Regularidade Discreta.
5. Passagem do Discreto para o Contínuo.
6. Regularidade Pontual implica em Regularidade Local.

Faremos o estudo de tal técnica em um cenário mais simples, a saber: o Teorema de Schauder. Embora tal Teorema tenha sua importância em si, suficiente para um estudo, aqui ele será apenas pano de fundo, servindo de coadjuvante. O método aqui se faz mais importante que o resultado. Com efeito, o poder de aplicação do método transcende em muito o Teorema de Schauder como pode ser visto nas referências.

**Observação 4.1.** *É interessante ressaltar que muitos desses Passos são independentes e não precisam necessariamente de ordem para fazê-los, por exemplo, os últimos passos, cinco e seis, podem ser feitos primeiro. Uma base para tal trabalho é a referência [9].*

#### 4.1 Regime de Pequenez

Seguindo o método, provamos o resultado de regularidade em casos particulares que podem ser supostos perda de generalidade, tais como o fato de que  $f(0) = 0$ . Com efeito, se necessário, poderíamos substituir  $u$  por  $v$  onde

$$v(x) := u(x) - \frac{f(0)}{2n}|x|^2.$$

Note que a regularidade de  $u$  não se alterará ao somarmos a função analítica  $-\frac{f(0)|x|^2}{2n}$ . Se não fizéssemos isto, simplesmente a estimativa de  $\|f\|_{C^\alpha}$  dependeria do termo  $f(0)$ . Com isto, simplificamos os cálculos.

Podemos supor sem perda de generalidade outros fatos que, devido à sua im-

portância na análise, é dado a nomenclatura especial a qual é o título desta secção. O que queremos dizer com “regime de pequenez” é que suporemos:

1.  $\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$
2.  $\|f\|_{C^\alpha(0)} \ll \delta$

Isso é totalmente plausível. De fato, definindo:

$$w(x) := \frac{u(x)}{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\delta}}$$

Temos que  $u \in C^{2,\alpha} \iff w \in C^{2,\alpha}$ . Daí,

$$\begin{aligned} \|w\|_{L^\infty(B_1)} &= \left\| \frac{u(x)}{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\delta}} \right\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\leq \left\| \frac{u}{\|u\|_{L^\infty(B_1)}} \right\|_{L^\infty(B_1)} = 1 \implies \|w\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1 \end{aligned}$$

Agora, definindo  $\Delta w := \bar{f}$ , temos que:

$$\Delta w = \Delta \left( \frac{u(x)}{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\delta}} \right) = \frac{f}{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\delta}} \implies \bar{f} = \frac{f}{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\delta}}$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned} [\bar{f}]_{C^\alpha(0)} &= \frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\delta}} \\ &\leq \frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\frac{[f]_{C^\alpha(0)}}{\delta}} = \delta \implies [\bar{f}]_{C^\alpha(0)} \leq \delta \end{aligned}$$

## 4.2 Resultado de Aproximação

O próximo resultado indica, em um certo sentido, que soluções do problema não homogêneo, convergem para a solução do problema homogêneo. De outra forma, podemos tornar a solução do problema não-homogêneo tão próximo da solução do problema homogêneo (numa métrica conveniente) fazendo o problema não homogêneo suficientemente próximo do homogêneo.

**Lema 4.1** (Aproximação). *Para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que para qualquer solução fraca de  $\Delta u = f$  em  $B_1$  com*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1 \quad e \quad \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \delta$$

existe uma função harmônica  $h$  em  $B_{1/2}$  tal que

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon.$$

*Demonstração.* Seja  $h$  solução do problema:

$$\begin{cases} \Delta h = 0, & \text{em } B_1 \\ h = u, & \text{em } \partial B_1 \end{cases}$$

Assim,  $\Delta(u - h) = \Delta u = f(x)$ . Logo, aplicando a estimativa (1) para  $u - h$ , temos:

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_1)} \leq \|u - h\|_{L^\infty(\partial B_1)} + \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)}$$

Como  $u - h = 0$  em  $\partial B_1$ , segue que:

$$\begin{aligned} \|u - h\|_{L^\infty(B_1)} &\leq \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)} \\ &\leq \frac{1}{2n} \delta \end{aligned}$$

Defina:

$$\varepsilon := \frac{1}{2n} \delta$$

Assim:

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon$$

□

### 4.3 Passo Chave

**Lema 4.2** (Passo chave). *Fixado o expoente  $0 < \alpha < 1$ , existem constantes  $C_0 > 0, 0 < \lambda_0 < 1$  e  $\delta > 0$  tais que se  $\Delta u = f$  em  $B_1$  com*

$$\|u\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1 \quad e \quad \|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \delta$$

*então é possível obter um polinômio quadrático harmônico,  $P(x) = x^t A x + b \cdot x + c$ , satisfazendo  $|A| + |b| + |c| \leq C_0$  e*

$$|u(x) - P(x)| \leq \lambda_0^{(2+\alpha)} \quad \text{se } |x| \leq \lambda_0.$$

*Demonstração.* Considere  $h$  harmônica em  $B_1$  e com dado de fronteira  $u$ . Pelo Princípio do Máximo (ver Teorema (2.6)), como  $\Delta h = 0$  em  $\Omega$  e  $h = u$  em  $\partial\Omega$ , então  $\|h\| = \|u\|$

em  $\Omega$ , assim  $\|h\| \leq 1$ . Defina:

$$p(x) := h(0) + \nabla h(0) \cdot x + \frac{1}{2} x^t D^2 h(0) x$$

Logo, pela fórmula de Taylor, e pela limitação universal dos coeficientes de uma função harmônica em uma bola, para qualquer  $x \in B_{1/2}$ , temos

$$|h(x) - p(x)| \leq |D^3 h(0)| |x|^3$$

Mas  $h$  é harmônica, por consequência:

$$|D^3 h(0)| \leq \frac{C_3}{1^{n+3}} \|h\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_3 := C_0 \text{ (ver Teorema 2.4)}.$$

Note que  $C_0$  é constante universal. Agora, desigualdade triangular nos fornece

$$|u(x) - p(x)| \leq |u(x) - h(x)| + |h(x) - p(x)|.$$

Utilizando (1), temos

$$\begin{aligned} |u(x) - p(x)| &\leq \frac{1}{2n} \|f\|_{L^\infty(B_1)} + C_0 |x|^3 \\ &\leq \frac{1}{2n} \delta + C_0 |x|^3 \end{aligned}$$

Como  $0 < \alpha < 1$ , escolhemos  $\lambda_0 < 1$  tal que:

$$C_0 |x|^3 \leq \frac{1}{2} \lambda_0^{2+\alpha}, \quad |x| \leq \lambda_0$$

Fixado  $\lambda_0$ , basta tomar  $\delta$  de tal sorte que:

$$\frac{1}{2n} \delta \leq \frac{1}{2} \lambda_0^{2+\alpha}$$

Portanto,

$$|u(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2} \lambda_0^{2+\alpha} + \frac{1}{2} \lambda_0^{2+\alpha}$$

e

$$|u(x) - p(x)| \leq \lambda_0^{2+\alpha}, \quad |x| \leq \lambda_0.$$

□

#### 4.4 Regularidade Discreta

**Lema 4.3** (Processo iterativo). *Fixado o expoente  $0 < \alpha < 1$ , existem constantes  $C_0 > 0$ ,  $0 < \lambda_0 < 1$  e  $\delta_0 > 0$  tais que se  $\Delta u = f$  em  $B_1$  com*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \quad e \quad [f]_{C^\alpha(0)} \leq \delta$$

*então é possível obter um polinômio quadrático harmônico,  $p_k(x) = x^t A_k x + b_k \cdot x + c_k$ , satisfazendo  $|A_k| + |b_k| + |c_k| \leq C_0$ ,*

$$\begin{aligned} |A_{k+1} - A_k| &\leq C_0 \lambda_0^{k\alpha} \\ |b_{k+1} - b_k| &\leq C_0 \lambda_0^{k(1+\alpha)} \\ |c_{k+1} - c_k| &\leq C_0 \lambda_0^{k(2+\alpha)} \end{aligned}$$

e

$$|u(x) - p_k(x)| \leq \lambda_0^{k(2+\alpha)} \quad se \quad |x| \leq \lambda_0^k.$$

*Demonstração.* A prova é por indução. O caso  $k = 1$  é válido pois é o próprio Lema (4.2) acima. Suponha então o Lema (4.3) válido até um  $k \leq n$ . Isto é, temos polinômio quadrático harmônico  $p_n = x^t A_n x + b_n \cdot x + c_n$  tal que:

$$|u(y) - p_n(y)| \leq \lambda_0^{n(2+\alpha)}, \quad para \quad |y| \leq \lambda_0^n$$

Portanto, definindo:

$$v_n(x) := \frac{u(\lambda_0^n x) - p_n(\lambda_0^n x)}{\lambda_0^{n(2+\alpha)}}, \quad para \quad |x| \leq 1,$$

temos que  $\|v_n\|_{L^\infty(B_1)} \leq 1$ , o que cumpre a primeira hipótese do Lema 4.2. Resta mostrar que  $\tilde{f}$ , com  $\Delta v_n = \tilde{f}$ , possui norma  $L^\infty$  suficientemente pequena. Como  $p_n$  é harmônico por hipótese de indução, temos

$$\Delta v_n(\lambda_0^n x) = \frac{\lambda_0^{2n} \Delta u(\lambda_0^n x)}{\lambda_0^{n(2+\alpha)}} \implies \Delta v_n(\lambda_0^n x) = \frac{f(\lambda_0^n x)}{\lambda_0^{n\alpha}} := \tilde{f}(x)$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)| &= \left| \frac{f(\lambda_0^n x) - f(0\lambda_0^n)}{\lambda_0^{n\alpha}(x-0)^\alpha} \right| |x-0|^\alpha \\ &\leq [f]_{C^\alpha(0)} |x-0|^\alpha \\ &\leq [f]_{C^\alpha(0)}. \end{aligned}$$



A última desigualdade segue do fato que  $x \in B_1$ . Deste modo,

$$\|\tilde{f}\|_{L^\infty(B_1)} \leq [f]_{C^\alpha(0)} \leq \delta.$$

Assim, pelo Lema 4.2, existe polinômio quadrático harmônico  $P(x)$  tal que:

$$|v_n(x) - P(x)| \leq \lambda_0^{2+\alpha}.$$

Note que a afirmação acima é equivalente a:

$$\left| \frac{u(\lambda_0^n x) - p_n(\lambda_0^n x)}{\lambda_0^{n(2+\alpha)}} - P(x) \right| \leq \lambda_0^{2+\alpha} \implies \left| \frac{u(\lambda_0^n x) - p_n(\lambda_0^n x) - P(x)\lambda_0^{n(2+\alpha)}}{\lambda_0^{n(2+\alpha)}} \right| \leq \lambda_0^{2+\alpha}$$

$$\therefore |u(\lambda_0^n x) - p_n(\lambda_0^n x) - \lambda_0^{n(2+\alpha)}P(x)| \leq \lambda_0^{(n+1)(2+\alpha)}$$

Definindo:

$$p_{n+1}(y) := p_n(y) + \lambda_0^{n(2+\alpha)}P(\lambda_0^{-n}x)$$

Temos,

$$|u(y) - p_{n+1}(y)| \leq \lambda_0^{(n+1)(2+\alpha)}$$

Como  $p_n$  e  $P$  são quadráticos harmônicos, qualquer combinação linear dos mesmos é quadrático harmônico, isto é,  $p_{n+1}$  também é quadrático harmônico. Observe também que os coeficientes de  $p_{n+1}$  são universalmente limitados, pois isso acontece com os coeficientes de  $p_n$  e  $P$ , isto é, sendo  $p_{n+1} = x^t A_{n+1}x + b_{n+1} \cdot x + c_{n+1}$ , temos constante  $\tilde{C}_0 > 0$ , tal que:

$$|A_{n+1}| + |b_{n+1}| + |c_{n+1}| \leq \tilde{C}_0.$$

Mostremos agora as estimativas e, como consequência obteremos que os coeficientes  $A_k$ ,  $b_k$  e  $c_k$  são Cauchy.

$$\begin{aligned} |A_{k+1} - A_k| &\leq C_0 \lambda_0^{k\alpha} \\ |b_{k+1} - b_k| &\leq C_0 \lambda_0^{k(1+\alpha)} \\ |c_{k+1} - c_k| &\leq C_0 \lambda_0^{k(2+\alpha)} \end{aligned}$$

Do polinômio quadrático descoberto, temos:

$$A_{k+1} = A_k + \lambda_0^{k(2+\alpha)} \lambda^{-2k} A \implies |A_{k+1} - A_k| = |A| \lambda_0^{k\alpha} \implies |A_{k+1} - A_k| \leq C_1 \lambda_0^{k\alpha}$$

De modo análogo, obtemos:

$$|b_{k+1} - b_k| \leq C_2 \lambda_0^{k(1+\alpha)}$$

$$|c_{k+1} - c_k| \leq C_3 \lambda_0^{k(2+\alpha)}$$

Agora, tome  $p > k$ , isto é  $p = k + m$ . Desigualdade triangular nos fornece:

$$\begin{aligned} |A_p - A_k| &\leq |A_p - A_{p-1}| + |A_{p-1} - A_{p-2}| + \dots + |A_{k+1} - A_k| \\ &\leq C_1 \lambda_0^{\alpha(k+m-1)} + C_1 \lambda_0^{\alpha(k+m-2)} + \dots + C_1 \lambda_0^{k\alpha} \\ &\leq C_1 \lambda_0^{k\alpha} (1 + \lambda_0^\alpha + \lambda_0^{2\alpha} + \dots + \lambda_0^{(m-1)\alpha}) \\ &\leq C_1 \lambda_0^{k\alpha} \left( \frac{1}{1 - \lambda_0^\alpha} \right) \\ &\leq C_0 \lambda_0^{k\alpha} \end{aligned}$$

Do mesmo modo, obteremos séries de potência ao abrir os coeficientes  $b_k$  e  $c_k$ , de modo que teremos:

$$\begin{aligned} |b_p - b_k| &\leq |b_p - b_{p-1}| + |b_{p-1} - b_{p-2}| + \dots + |b_{k+1} - b_k| \\ &\leq C_2 \lambda_0^{(1+\alpha)(k+m-1)} + C_2 \lambda_0^{(1+\alpha)(k+m-2)} + \dots + C_2 \lambda_0^{k(1+\alpha)} \\ &\leq C_2 \lambda_0^{k(1+\alpha)} (1 + \lambda_0^{(1+\alpha)} + \lambda_0^{2(1+\alpha)} + \dots + \lambda_0^{(m-1)(1+\alpha)}) \\ &\leq C_2 \lambda_0^{k(1+\alpha)} \left( \frac{1}{1 - \lambda_0^{(1+\alpha)}} \right) \\ &\leq C_0 \lambda_0^{k(1+\alpha)} \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} |c_p - c_k| &\leq |c_p - c_{p-1}| + |c_{p-1} - c_{p-2}| + \dots + |c_{k+1} - c_k| \\ &\leq C_3 \lambda_0^{(2+\alpha)(k+m-1)} + C_3 \lambda_0^{(2+\alpha)(k+m-2)} + \dots + C_3 \lambda_0^{k(2+\alpha)} \\ &\leq C_3 \lambda_0^{k(2+\alpha)} (1 + \lambda_0^{(2+\alpha)} + \lambda_0^{2(2+\alpha)} + \dots + \lambda_0^{(m-1)(2+\alpha)}) \\ &\leq C_3 \lambda_0^{k(2+\alpha)} \left( \frac{1}{1 - \lambda_0^{(2+\alpha)}} \right) \\ &\leq C_0 \lambda_0^{k(2+\alpha)} \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes  $A_k$ ,  $b_k$  e  $c_k$  são Cauchy.

□

**Observação 4.2.** *É interessante notar que no passo chave podemos pedir apenas que a norma  $L^\infty$  do termo fonte (termo não homogêneo) seja suficientemente pequena e, no processo iterativo pedimos apenas que a seminorma Hölder seja suficientemente pequena. Assim como a norma Hölder é composta pela norma infinito mais a seminorma Hölder, devemos pedir, como hipótese, que a norma Hölder seja suficientemente pequena.*

#### 4.5 Passagem do discreto para o contínuo

No passo anterior obtemos as famosas estimativas de Schauder em um ambiente discreto. O objetivo agora é obter resultados mais robustos, mostrando que a solução do problema não homogêneo se aproxima da solução do problema homogêneo para qualquer  $x \in B_1$ . Isto é, existe polinômio quadrático harmônico tal que:

$$|u(x) - P(x)| \leq C|x|^{2+\alpha}, \quad C < \infty$$

Fixado  $0 < \lambda_0 < 1$ , dado  $x \in B_1$ ,  $\exists k \in \mathbb{N}$ , tal que  $|\lambda_0|^{k+1} \leq |x| < \lambda_0^k$ , isto é  $\lambda_0^k \leq \frac{|x|}{\lambda_0}$ . Além disso, no lema anterior, mostramos que os coeficientes  $A_k$ ,  $b_k$  e  $c_k$  são Cauchy, isto é, existem coeficientes  $A_\infty$ ,  $b_\infty$  e  $c_\infty$ , tais que:

$$A_k \rightarrow A_\infty, \quad b_k \rightarrow b_\infty, \quad c_k \rightarrow c_\infty$$

Surgem assim os candidatos naturais para os coeficientes de  $P$ , isto é, supomos  $P(x) = p_\infty(x) := x^t A_\infty x + b_\infty \cdot x + c_\infty$ . Por desigualdade triangular:

$$|u(x) - P(x)| \leq |u(x) - p_k(x)| + |p_k(x) - P(x)|$$

Além disso, note que, tomando o limite quanto  $p \rightarrow \infty$  nas estimativas acima, uma vez que o lado direito das desigualdades não dependem de  $p$ , obtemos

$$\begin{cases} |A_\infty - A_k| & \leq C_0 \lambda_0^{k\alpha} \\ |b_\infty - b_k| & \leq C_0 \lambda_0^{k(1+\alpha)} \\ |c_\infty - c_k| & \leq C_0 \lambda_0^{k(2+\alpha)}. \end{cases}$$

Pelo passo anterior, a distância  $|u(x) - p_k(x)|$  é majorada por  $\lambda_0^{k(2+\alpha)}$ . Daí:

$$\begin{aligned} |u(x) - P(x)| &\leq |u(x) - p_k(x)| + |p_k(x) - P(x)| \\ &\leq \lambda_0^{k(2+\alpha)} + |x^t Ax - x^t A_k x + b \cdot x - b_k \cdot x + c - c_k| \\ &\leq \lambda_0^{k(2+\alpha)} + |x^t Ax - x^t A_k x| + |b \cdot x - b_k \cdot x| + |c - c_k| \\ &= \lambda_0^{k(2+\alpha)} + |x|^2 |A - A_k| + |x| |b - b_k| + |c - c_k| \\ &\leq \lambda_0^{k(2+\alpha)} + |x|^2 C_0 \lambda_0^{k\alpha} + |x| C_0 \lambda_0^{k(1+\alpha)} + C_0 \lambda_0^{k(2+\alpha)} \\ &\leq \lambda_0^{k(2+\alpha)} + C_0 (\lambda_0^{2k} \lambda_0^{k\alpha} + \lambda_0^k \lambda_0^{k(1+\alpha)} + \lambda_0^{k(2+\alpha)}) \\ &= \lambda_0^{k(2+\alpha)} (1 + 3C_0) \\ &\leq \frac{1 + 3C_0}{\lambda_0^{2+\alpha}} |x|^{2+\alpha} \end{aligned}$$

Definindo:

$$\frac{1 + 3C_0}{\lambda_0^{2+\alpha}} := C$$

Temos o resultado, isto é:

$$|u(x) - P(x)| \leq C|x|^{2+\alpha}$$

#### 4.6 Regularidade Pontual implica em Regularidade Local

É interessante observar que o Teorema acima fornece regularidade pontual de  $u$  baseado na respectiva continuidade pontual de  $f$ . Não é difícil verificar que estimativas pontuais implicam em estimativas locais como enunciadas no Teorema. De fato, se assumirmos que  $f \in C^\alpha(B_1)$  e para cada  $x_0 \in B_{1/2}$  aplicarmos o Teorema à função

$$v(x) = 4u\left(x_0 + \frac{1}{2}x\right)$$

reobtemos o Teorema, i.e., a versão local do Teorema de Schauder.

### 5 MÉTODO DE COMPACIDADE

Repare que quando obtivemos  $C^{2,\alpha}$  regularidade local na secção anterior, usamos fortemente a solubilidade da equação de Poisson na bola. Em alguns caso podemos não contar com tal teoria de existência. Agora usaremos o Método de Compacidade para obter o resultado de aproximação.

#### 5.1 Resultado de Compacidade

Em problemas da forma divergente, usualmente, compacidade é obtida via desigualdade do tipo Caccioppoli, a qual pode ser pensado num resultado que torna  $\int_\Omega |\nabla u| dx$  uma norma em  $W^{1,2}(\Omega)$ .

**Lema 5.1.** *Suponha que  $u$  satisfaz  $\Delta u = f$  em  $B_1$ . Então, para toda  $\varphi$  suave com suporte compacto, vale:*

$$\int_{B_1} \varphi^2 |\nabla u|^2 dx \leq \int_{B_1} \varphi^2 f^2 dx + \int_{B_1} (4|\nabla \varphi|^2 + \varphi^2) u^2 dx$$

*Demonstração.* Seja  $u$  solução de  $\Delta u = f$  em  $B_1$ . Tomando  $\varphi^2 u$  como função teste, onde  $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ , temos seguinte formulação fraca:

$$\int_{B_1} \nabla u \nabla (\varphi^2 u) dx = - \int_{B_1} f \varphi^2 u dx$$

Pela regra do produto, chegamos que:

$$\nabla(\varphi^2 u) = 2u\varphi\nabla\varphi + \varphi^2\nabla u$$

Logo:

$$\int_{B_1} \varphi^2 |\nabla u|^2 dx = - \int_{B_1} f\varphi^2 u dx - \int_{B_1} 2u\varphi\nabla u\nabla\varphi dx$$

O que nos dá a estimativa:

$$\int_{B_1} \varphi^2 |\nabla u|^2 dx \leq \int_{B_1} f\varphi^2 u dx + \int_{B_1} 2|\varphi||\nabla u||\nabla\varphi||u| dx.$$

Pela Proposição (2.2),

$$fu \leq \frac{1}{2}(f^2 + u^2)$$

Por desigualdade análoga, também conseguimos majorar o integrando da integral mais à direita:

$$2|\varphi||\nabla u||\nabla\varphi||u| \leq \frac{1}{2}\varphi^2|\nabla u|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 u^2$$

Combinando as 3 estimativas acima, obtemos:

$$\frac{1}{2} \int_{B_1} \varphi^2 |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{B_1} (f^2 + u^2)\varphi^2 dx + \int_{B_1} 2|\nabla\varphi|^2 u^2 dx$$

Reorganizando os termos, chegamos ao resultado:

$$\int_{B_1} \varphi^2 |\nabla u|^2 dx \leq \int_{B_1} \varphi^2 f^2 dx + \int_{B_1} (4|\nabla\varphi|^2 + \varphi^2) u^2 dx$$

□

## 5.2 Resultado de Aproximação

Obtido o resultado de compacidade, seguindo a Análise Tangencial, obteremos o resultado que diz que a solução do problema Tangente (problema homogêneo de coeficientes constantes) é, em certo sentido, limite das soluções dos problemas aproximados.

**Lema 5.2.** *Para todo  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que para qualquer solução fraca de  $\Delta u = f$  em  $B_1$ , satisfazendo:*

$$\int_{B_1} u^2 dx \leq 1 \text{ e } \int_{B_1} f^2 dx \leq \delta$$

*Existe uma função harmônica  $h : B_{1/2} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:*

$$\int_{B_{1/2}} |u - h|^2 dx \leq \epsilon$$

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $\exists \epsilon_0 > 0$  tal que  $\forall n \in \mathbb{N}$  satisfazendo:

$$\Delta u_n = f_n, \int_{B_1} u_n^2 dx \leq 1 \text{ e } \int_{B_1} f_n^2 dx \leq \frac{1}{n}$$

Bem como para toda  $h$  harmônica, tenhamos a seguinte desigualdade:

$$\int_{B_{1/2}} |u - h|^2 dx \geq \epsilon_0$$

Pelo Lema 5.1, temos que  $|\nabla u_n|$  é limitado, assim, aplicando a Desigualdade de Sobolev, temos:

$$|u_n| \leq C|\nabla u_n|$$

Daí, como  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência limitada em um espaço de Banach, admite subsequência fracamente convergente, donde:

$$u_n \rightarrow u_0 \text{ em } H^1(B_{1/2})$$

Onde  $u_0$  é harmônica, pois  $f_n \rightarrow 0$ . Assim, tomando  $\varphi \in C_c^\infty(B_{1/2})$  função teste, temos que:

$$\int_{B_{1/2}} \nabla \varphi \nabla u_0 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{1/2}} \nabla \varphi \nabla u_n dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{1/2}} \varphi f_n dx = 0$$

Logo, para  $n \rightarrow \infty$  e tomando  $h = u_0$ , temos que a estimativa da hipótese por absurdo não é satisfeita. Isto é, para cada  $\epsilon > 0$ ,  $\exists h$  harmônica em  $B_{1/2}$  que obedece:

$$\int_{B_{1/2}} |u - h|^2 dx \leq \epsilon$$

Repare que a existência das soluções

$$\Delta u_k = f_k$$

segue por supor um argumento de contradição. Se não existissem, o resultado seria satisfeito trivialmente.  $\square$

### 5.3 Resultado Chave

Obtido o resultado de aproximação, seguindo a Análise Tangencial, podemos utilizá-lo a seguir para obter-se o o que denominamos de resultado chave devido o seu papel no desenvolvimento do método.

**Lema 5.3** (Passo Chave). *Fixado o expoente  $0 < \alpha < 1$ , existem constantes  $C_0 > 0, 0 <$*

$\lambda_0 < 1$  e  $\delta_0 > 0$  tais que se  $\Delta u = f$  em  $B_1$  com

$$\int_{B_1} u^2 dx \leq 1 \quad e \quad \int_{B_1} f^2 dx \leq \delta_0;$$

então é possível obter um polinômio quadrático harmônico,  $p(x) = x^t A x + b \cdot x + c$ , satisfazendo  $|A| + |b| + |c| \leq C_0$  e

$$\int_{B_{\lambda_0}} |u(x) - p(x)|^2 dx \leq \lambda_0^{2(2+\alpha)}.$$

#### 5.4 Processo Iterativo

Obtido o resultado chave, seguindo a Análise Tangencial, podemos iterar o processo via indução matemática. O caso de base de indução é o próprio resultado.

**Lema 5.4** (Processo Iterativo). *Fixado o expoente  $0 < \alpha < 1$ , existem constantes  $C_0 > 0$ ,  $0 < \lambda_0 < 1$  e  $\delta_0 > 0$  tais que se  $\Delta u = f$  em  $B_1$  com*

$$\|u\|_{L^2(B_1)} \leq 1 \quad e \quad [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} \leq \delta_0;$$

então é possível obter um polinômio quadrático harmônico,  $p_k(x) = x^t A_k x + b_k \cdot x + c_k$ , satisfazendo  $|A_k| + |b_k| + |c_k| \leq C_0$  e

$$\begin{aligned} |A_{k+1} - A_k| &\leq C_0 \lambda_0^{k\alpha} \\ |b_{k+1} - b_k| &\leq C_0 \lambda_0^{k(1+\alpha)} \\ |c_{k+1} - c_k| &\leq C_0 \lambda_0^{k(2+\alpha)} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\int_{B_{\lambda_0^k}} |u(x) - p_k(x)|^2 dx \leq \lambda_0^{2k(2+\alpha)}.$$

*Demonstração.* Faremos a prova por indução. O caso  $k = 1$  é válido pois é próprio Lema (5.3) (tomando  $p_0 \equiv 0$ ). Suponha o Lema (5.4) válido até um certo  $n \in \mathbb{N}$ , isto é, existe polinômio quadrático harmônico,  $p_n(x) = x^t A_n x + b_n \cdot x + c_n$ , com os coeficientes universalmente controlados satisfazendo:

$$\int_{B_{\lambda_0^n}} |u(x) - p_n(x)|^2 dx \leq \lambda_0^{2n(2+\alpha)}$$

Definimos o *scaling* da mesma forma que anteriormente:

$$v_n(x) := \frac{u(\lambda_0^n x) - p_n(\lambda_0^n x)}{\lambda_0^{n(2+\alpha)}}$$

Temos então de verificar se  $v_n$  assim definido obedece as hipóteses do lema chave. Note

inicialmente que  $v_n$  é normalizada, pois:

$$\begin{aligned}\|v_n\|_{L^2(B_1)} &= \frac{1}{\lambda_0^{n(2+\alpha)}} \left( \int_{B_1} |u(\lambda_0^n x) - p_n(\lambda_0^n x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\lambda_0^{n(2+\alpha)}} \left( \int_{B_1} |u(x) - p_n(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

A seguir, definamos:

$$f_n := \Delta v_n = \frac{\lambda_0^{2n} f(\lambda_0^n x)}{\lambda_0^{n(2+\alpha)}} = \frac{f(\lambda_0^n x)}{\lambda_0^{n\alpha}}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2(B_1)} &= \frac{1}{\lambda_0^{n\alpha}} \left( \int_{B_1} f_n^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\lambda_0^{n\alpha}} \left( \int_{B_1} |f(\lambda_0^n x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} \\ &\leq \delta_0.\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema (5.3), existe polinômio quadrático harmônico  $P(x) = x^t Ax + b \cdot x + c$  com os coeficientes universalmente controlados satisfazendo:

$$\int_{B_{\lambda_0}} |v_n(x) - P(x)|^2 dx \leq \lambda_0^{2(2+\alpha)}$$

De outro modo:

$$\begin{aligned}\int_{B_{\lambda_0}} \left| \frac{u(\lambda_0^n x) - p_n(\lambda_0^n x)}{\lambda_0^{n(2+\alpha)}} - P(x) \right|^2 dx &\leq \lambda_0^{2(2+\alpha)} \\ \int_{B_{\lambda_0}} \left| \frac{u(\lambda_0^n x) - p_n(\lambda_0^n x) - \lambda_0^{n(2+\alpha)} P(x)}{\lambda_0^{n(2+\alpha)}} \right|^2 dx &\leq \lambda_0^{2(2+\alpha)} \\ \int_{B_{\lambda_0}} |u(\lambda_0^n x) - p_n(\lambda_0^n x) - \lambda_0^{n(2+\alpha)} P(x)|^2 dx &\leq \lambda_0^{2(n+1)(2+\alpha)}\end{aligned}$$

Fazendo mudança de variável,  $y = \lambda_0^n x$ , obtemos  $x = \lambda_0^{-n} y$  e assim obtemos o candidato natural a ser o  $p_{n+1}$ , a saber:

$$p_{n+1}(y) := p_n(y) + \lambda_0^{n(2+\alpha)} P(\lambda_0^{-n} y)$$



Deste modo, temos:

$$\int_{B_{\lambda_0^{n+1}}} |u(y) - p_{n+1}(y)|^2 dy \leq \lambda_0^{2(n+1)(2+\alpha)}$$

Note que  $p_{n+1}$  assim definido é quadrático harmônico pois é combinação linear de quadráticos harmônicos. Além disso, dele retiramos que:

$$A_{n+1} = A_n + \lambda_0^{n(2+\alpha)} \lambda_0^{-2n} A, \quad b_{n+1} = b_n + \lambda_0^{n(2+\alpha)} \lambda_0^{-n} b, \quad c_{n+1} = c_n + \lambda_0^{n(2+\alpha)} c$$

O que nos dá:

$$|A_{n+1} - A_n| \leq C_0 \lambda_0^{n\alpha}, \quad |b_{n+1} - b_n| \leq C_0 \lambda_0^{n(1+\alpha)}, \quad |c_{n+1} - c_n| \leq C_0 \lambda_0^{n(2+\alpha)}$$

Dadas essas considerações fica evidente que o polinômio obtido possui os coeficientes controlados e além disso tais coeficientes geram sequências Cauchy. (Essa prova será omitida, pois é análoga à feita na seção anterior)  $\square$

Estamos aptos então a concluir a prova do Teorema (3.3). Pela convergência das sequências  $\{A_k\}$ ,  $\{b_k\}$  e  $\{c_k\}$ , temos coeficientes  $A_\infty$ ,  $b_\infty$  e  $c_\infty$  com  $A_k \rightarrow A_\infty$ ,  $b_k \rightarrow b_\infty$  e  $c_k \rightarrow c_\infty$ , o que nos revelam os candidatos naturais aos coeficientes de  $p_\infty$ . Combinando desigualdade triangular com a desigualdade clássica  $2ab \leq a^2 + b^2$ , temos:

$$\int_{B_r} |u(x) - p_\infty(x)|^2 dx \leq 2 \int_{B_r} |u(x) - p_k(x)|^2 dx + 2 \int_{B_r} |p_k(x) - p_\infty(x)|^2 dx$$

Onde  $r \in (0, 1)$  é tal que  $\lambda_0^{k+1} < r \leq \lambda_0^k$  para um certo  $k \in \mathbb{N}$ . Pelo Lema (5.4), temos:

$$\int_{B_{\lambda_0^k}} |u(x) - p_k(x)|^2 dx \leq \lambda_0^{2k(2+\alpha)}$$

Temos também:

$$|p_k(x) - p_\infty(x)| \leq C \lambda_0^{k(2+\alpha)}, \quad \text{em } B_{\lambda_0^k}$$

Daí, combinando essas duas estimativas e notando que  $\lambda_0^{2k(2+\alpha)} \leq r^{2(2+\alpha)}$ , pois  $0 < \lambda_0^{k+1} < r \leq \lambda_0^k < 1$ , obtemos o fim da prova do teorema:

$$\int_{B_r} |u(x) - p_\infty(x)|^2 dx \leq \bar{C} r^{2(2+\alpha)}$$

## 6 TEOREMA DE CAMPANATO

Na Seção 4 abordamos o método de Análise Tangencial considerando regularidade  $C^\alpha$  no sentido clássico e na Seção 5 estudamos o problema trabalhando com regularidade  $C^\alpha$  no sentido  $L^2$ . Nesta seção, objetivaremos mostrar a equivalência dessas duas definições, que recordaremos agora.

**Definição 6.1.** Uma função  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita  $C^\alpha$  no sentido clássico se para todo  $x, y \in \Omega$  ocorrer que:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

E definimos a semi-norma de Hölder  $[f]_{C^\alpha(\Omega)}$  por:

$$[f]_{C^\alpha(\Omega)} = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

**Definição 6.2.** Uma função  $f : B_r \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser  $C^\alpha$  no sentido  $L^2$  se:

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{r^\alpha} \left( \int_{B_r} |f - f_r|^2 dx \right)^{1/2} < +\infty,$$

onde

$$f_r := \int_{B_r} f dx$$

Diante dessas duas definições, apresentamos o primeiro resultado desta seção, que mostra que uma função  $C^\alpha$  no sentido  $L^2$  é também  $C^\alpha$  no sentido clássico.

**Teorema 6.1.** Seja  $f \in L^2(B_1)$  uma função  $\alpha$ -Hölder contínua no sentido  $L^2$ , então  $f$  é  $\alpha$ -Hölder contínua no sentido clássico, isto é:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \forall x, y \in B_1$$

Além disso, existe uma constante  $C(n, \alpha)$ , isto é, dependente apenas da dimensão  $n$  e do expoente  $\alpha$  tal que:

$$[f]_{C^\alpha} \leq C(n, \alpha)[f]_{C_{L^2}^\alpha}$$

*Demonstração.* Lembrando que estamos denotando:

$$f_a := \int_{B_a} f dx$$

O primeiro passo da prova é estimar a distância  $|f_r - f_R|$  para  $0 < r < R < 1$ . Note que sempre possível atribuir  $s, t \in \mathbb{R}$  tal que  $r \leq t < s < R < 1$ . Em vista da desigualdade clássica:

$$|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$$

Temos:

$$|f_t - f_s|^2 = |f_t - f + f - f_s|^2 \leq 2|f_t - f|^2 + 2|f - f_s|^2$$

Integrando ambos os membros com respeito à  $B_t$ , temos:

$$\int_{B_t} |f_t - f_s|^2 dx \leq 2 \left( \int_{B_t} |f_t - f|^2 dx + \int_{B_t} |f - f_s|^2 dx \right).$$

Daí:

$$\begin{aligned}
|f_t - f_s|^2 &= \frac{2}{|B_t|} \left( \int_{B_t} |f_t - f|^2 dx + \int_{B_t} |f - f_s|^2 dx \right) \\
&\leq \frac{c(n)}{t^n} \left( \int_{B_t} |f_t - f|^2 dx + \int_{B_s} |f - f_s|^2 dx \right) \\
&\leq c(n)t^{-n} [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)}^2 (t^{n+2\alpha} + s^{n+2\alpha})
\end{aligned}$$

Caso não tenha ficado claro ao leitor, o último passo é decorrência da hipótese de  $f$  ser  $C^\alpha$  no sentido  $L^2$ . Com isto, temos:

$$\begin{aligned}
|f_t - f_s| &\leq c'(n)t^{-n/2} [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} (t^{n/2+\alpha} + s^{n/2+\alpha}) \\
&\leq c'(n)t^{-n/2} [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} (s^{n/2+\alpha} + s^{n/2+\alpha}) \\
&\leq C(n) \left( \frac{s}{t} \right)^{n/2} [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} s^\alpha
\end{aligned}$$

Agora, faça  $t = R/2^{i+1}$  e  $s = R/2^i$  e assim temos:

$$\begin{aligned}
|f_{R/2^{i+1}} - f_{R/2^i}| &\leq C(n)2^{n/2} [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} \left( \frac{R}{2^i} \right)^\alpha \\
&\leq \frac{1}{2^{i\alpha}} C'(n) [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} R^\alpha
\end{aligned}$$

Note que para um  $k$  arbitrário, temos por desigualdade triangular:

$$|f_R - f_{R/2^k}| \leq |f_R - f_{R/2}| + |f_{R/2} - f_{R/2^2}| + \dots + |f_{R/2^{k-1}} - f_{R/2^k}|$$

Combinando as duas últimas desigualdades, temos:

$$\begin{aligned}
|f_R - f_{R/2^k}| &\leq C'(n) [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} R^\alpha \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i\alpha}} \\
&\leq C'(n, \alpha) [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} R^\alpha
\end{aligned}$$

Agora basta escolher  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $\frac{R}{2^k} \leq r < \frac{R}{2^{k-1}}$  e assim:

$$\begin{aligned}
|f_R - f_r| &\leq |f_R - f_{R/2^k}| + |f_{R/2^k} - f_r| \\
&\leq C(n, \alpha) [f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} R^\alpha
\end{aligned}$$

Com isso temos, que  $f \in L_{Loc}^1(B_1)$ , logo pelo Teorema (2.1), o limite  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r} f$  existe e coincide com  $f$  em quase todo ponto, isto é, a menos de um conjunto de medida nula.

Disto, temos a estimativa:

$$|f(x) - f_{x,R}| \leq C(n, \alpha)[f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} R^\alpha$$

Dados  $x, y \in B_1$ , seja definido  $R = |x - y|$ . Utilizando desigualdade triangular, temos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{x,2R}| + |f_{x,2R} - f_{y,2R}| + |f(y) - f_{y,2R}|$$

O primeiro e o terceiro termo já estão estimados. Agora, note que  $B_R(x), B_R(y) \subset$

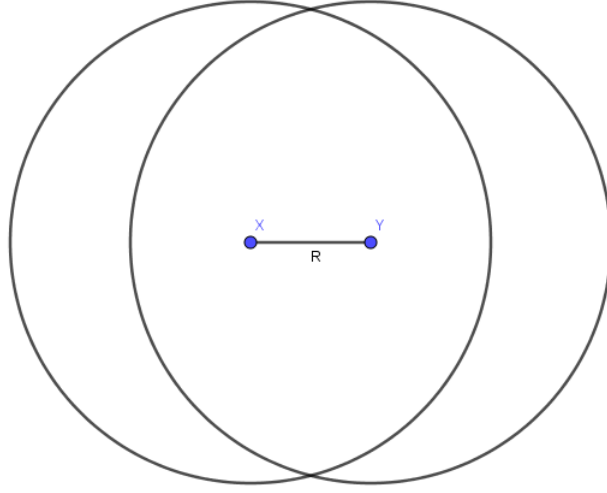


Figura 1:  $B_{x,2R} \cap B_{y,2R}$

$B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$ , como mostra a Figura 1 e tome  $z$  arbitrário nessa interseção. Por desigualdade triangular:

$$|f_{x,2R} - f_{y,2R}| \leq |f_{x,2R} - f(z)| + |f(z) - f_{y,2R}|$$

O que nos dá:

$$|f_{x,2R} - f_{y,2R}|^2 \leq 2|f_{x,2R} - f(z)|^2 + 2|f(z) - f_{y,2R}|^2$$

Integrando com respeito a  $z$  sobre a interseção  $B_{x,2R} \cap B_{y,2R}$ , temos:

$$\int_{B_{x,2R} \cap B_{y,2R}} |f_{x,2R} - f_{y,2R}|^2 dz \leq 2 \int_{B_{x,2R} \cap B_{y,2R}} |f(z) - f_{x,2R}|^2 dz + 2 \int_{B_{x,2R} \cap B_{y,2R}} |f(z) - f_{y,2R}|^2 dz$$

Como  $B_{x,R} \subset B_{x,2R} \cap B_{y,2R}$ ,  $B_{x,2R} \cap B_{y,2R} \subset B_{x,2R}$  e  $B_{x,2R} \cap B_{y,2R} \subset B_{y,2R}$ , temos:

$$\int_{B_{x,R}} |f_{x,2R} - f_{y,2R}|^2 dz \leq 2 \int_{B_{x,2R}} |f(z) - f_{x,2R}|^2 dz + 2 \int_{B_{y,2R}} |f(z) - f_{y,2R}|^2 dz$$

Daí como  $f \in C_{L^2}^\alpha$ , então:

$$|f_{x,2R} - f_{y,2R}|^2 \leq c(n, \alpha)[f]_{C_{L^2}^\alpha(0)}^2 R^{2\alpha}$$

Isto é:

$$|f_{x,2R} - f_{y,2R}| \leq C(n, \alpha)[f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} R^\alpha$$

Disto, temos:

$$|f(x) - f(y)| \leq C(n, \alpha)[f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} R^\alpha$$

Como  $R = |x - y|$ , temos:

$$|f(x) - f(y)| \leq C(n, \alpha)[f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} |x - y|^\alpha$$

Portanto,  $f$  é  $C^\alpha$  no sentido clássico. Ademais:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(n, \alpha)[f]_{C_{L^2}^\alpha(0)} \implies [f]_{C^\alpha(0)} \leq C(n, \alpha)[f]_{C_{L^2}^\alpha(0)}$$

□

Finalizada essa parte mostraremos agora a recíproca, isto é que uma função  $C^\alpha$  no sentido clássico é necessariamente  $C^\alpha$  no sentido  $L^2$  e assim concluiremos a equivalência de tais definições.

**Teorema 6.2.** *Seja  $f : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^\alpha$  no sentido clássico, então  $f$  é  $C^\alpha$  no sentido  $L^2$ , isto é:*

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{r^\alpha} \left( \int_{B_r} |f - f_r|^2 dx \right)^{1/2} \leq C < +\infty$$

*Demonstração.* Sendo  $f$  uma função  $\alpha$ -Hölder contínua no sentido clássico, isto é:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \forall x, y \in B_1.$$

Fixe então  $y \in B_1$ , então temos que  $f(y)$  é constante. É sabido que o ínfimo das integrais da forma:

$$\int_{B_r} |f(x) - c|^2 dx, c \in \mathbb{R},$$

é atingido quando  $c = f_r = \int_{B_r} f(x) dx$ . Sendo assim,

$$\int_{B_r} |f - f_r|^2 dx \leq \int_{B_r} |f(x) - f(y)|^2 dx \implies \left( \int_{B_r} |f - f_r|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_{B_r} |f(x) - f(y)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left( \int_{B_r} |f(x) - f(y)|^2 dx \right)^{1/2} &\leq C \left( \int_{B_r} (|x - y|^\alpha)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C \left( \int_{B_r} r^{2\alpha} dx \right)^{1/2} \\ &\leq C(r^{2\alpha})^{1/2} \left( \int_{B_r} dx \right) = Cr^\alpha. \end{aligned}$$

Disto, temos que,

$$\left( \int_{B_r} |f - f_r|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_{B_r} |f(x) - f(y)|^2 dx \right)^{1/2} \leq Cr^\alpha.$$

Portanto,

$$\frac{1}{r^\alpha} \left( \int_{B_r} |f - f_r|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{1}{r^\alpha} Cr^\alpha \implies \frac{1}{r^\alpha} \left( \int_{B_r} |f - f_r|^2 dx \right)^{1/2} \leq C.$$

O que nos permite concluir a prova. □

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ressaltamos a importância desse trabalho no fato do método de Análise Tangencial Geométrica ser largamente utilizado em matemática de ponta contemporânea. Ressaltamos que o Teorema de Schauder é o cenário onde menos pré-requisitos são requeridos e por isso foi o local adotado para a aplicação do método neste texto.

Na primeira parte, utilizamos fortemente a solvabilidade do Problema de Dirichlet na bola, mas em muitos casos não é possível assumir isso, como foi na segunda parte, mas mesmo assim, foi possível demonstrar o Teorema de Schauder a partir da Análise Tangencial, baseando-se no método de compacidade.

Por fim, vale ressaltar que a Análise Tangencial é utilizada fortemente nas pesquisas atuais da área buscando estudar problemas mais generalizados e alguns até então sem solução, como é o caso do infinito laplaciano.

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AMARAL, M. D. TEIXEIRA, E. V.. **Free Transmission Problems**. *In: Communications In Mathematical Physics*. v. 337, n. 3, p.1465-1489, 13 fev. 2015. Springer Nature. <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-015-2290-3>.
- [2] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. New York: Springer, 2011.

- [3] BRUM, V. F. M. C. BONORINO, L. P. **Regularidade de Mínimos Locais de Funcionais com Comportamento Quadrático**. Dissertação de Mestrado (62 p). Porto Alegre: UFRGS, 2004
- [4] CAFFARELLI, L. A. **Interior a Priori Estimates for Solutions of Fully Non-Linear Equations**. *In: The Annals Of Mathematics*, v. 130, n. 1, p.189-213, jul. 1989. JSTOR
- [5] EVANS, L. C. **Partial differential equations**. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. Providence: American Mathematical Society, 2010.
- [6] HAN, Q. LIN, F. **Elliptic Partial Differential Equations**. Providence: American Mathematical Society, 2010.
- [7] STEIN, M. E. SHAKARCHI, R. **Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces**. 1<sup>a</sup> ed. Londres: Princeton Lectures in Analysis, 2005.
- [8] STROOCK, D. W. **Weyl's Lemma, One of Many**. *In: Groups and Analysis - London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. pp. 164-173.
- [9] TEIXEIRA, E. V. **Introdução à teoria de regularidade elíptica: uma abordagem geométrica**. Fortaleza: UFC, 2014.