



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA  
AFRO-BRASILEIRA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
CURSO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA

ANTÔNIO ISABEL PAZ PIRES

PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO:  
DA SUA ORIGEM HISTÓRICA AOS CRITÉRIOS DE EXTREMIZAÇÃO

ACARAPE - CE

2018

ANTÔNIO ISABEL PAZ PIRES

PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO:  
DA SUA ORIGEM HISTÓRICA AOS CRITÉRIOS DE EXTREMIZAÇÃO

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza com Habilitação em Física. Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga

Co-orientador: Prof. Dr. Levi Rodrigues Leite.

**Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro- Brasileira  
Direção de Sistema Integrado de Bibliotecas da UNILAB (DSIBIUNI)  
Biblioteca Setorial Campus Liberdade  
Catalogação na fonte**

**Bibliotecário: Gleydson Rodrigues Santos – CRB-3 / 1219**

---

P743p Pires, Antônio Isael Paz.

Princípio da mínima ação: da sua origem histórica aos critérios de extremização. / Antônio Isael Paz Pires. - Redenção, 2018.

50 f: il.

Monografia - Curso de Ciências Da Natureza e Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2017.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga.

Coorientador: Prof. Dr. Levi Rodrigues Leite.

Inclui figuras, tabelas e referências.

1. Física (Ensino e Estudo). 2. Mínima ação. 3. Derivada funcional. 4. Trajetórias perturbadas. I. Título

CDD 530

---

ANTÔNIO ISABEL PAZ PIRES

PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO:  
DA SUA ORÍGEN HISTÓRICA AOS CRITÉRIOS DE EXTREMIZAÇÃO


Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza com Habilitação em Física. Área de concentração: Física.

Aprovado em: 05 /06/ 2018.

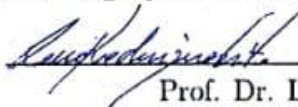
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof.<sup>a</sup> Dr. Silvia Helena Roberto de Sena  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof. Dr. Levi Rodrigues Leite  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

*À minha família, que me ama: o Zé Augusto,  
a Mazé, a Tinha, o Dim, a Guinha, a Nuêr e  
a Pichu. Vocês são amados e preciosos para  
mim!*

## AGRADECIMENTOS

À Deus, em quem não pode existir variação ou sombra de mudança, porque Ele procede toda boa dádiva e todo dom perfeito, dentre esses, a vida!

À minha família, pois embora desconhecidos do universo que conheci, me amam e confiam que ainda os amo, mesmo estando todo esse tempo longe.

À minha Miss, que suportou virtuosamente meus devaneios e indiferenças. E que, embora a entristecer-se, compreendeu todos os “tenho que ir”.

Aos meus dois amigos Adelino e Marcelo que realmente sabem quem eu sou e se preocupam para onde estou indo.

Aos meus professores, desde o dia em que me deparei com um. Enfaticamente, João Philipe Macedo Braga, Silvia Helena Roberto de Sena e Isaias Arruda, cada um de vocês são valiosos, simplesmente por ensinar.

Aos meus colegas de turma, todos eles! Mas, em especial, ao Paulo Ricardo Gonçalves Pereira, ao Rodolfo Ferreira de Oliveira e o dez ano do Luan pelos acertos, mas principalmente pelos erros. Para nós,  $1 \cdot 1 = 2$ , nesse ponto  $\vec{g}$  será sempre zero até mesmo no Crato onde se roubam manadas de fósseis! Carinhosamente vocês são uns “porcarias”.

Aos jovens da Física, Wellison Pires Lima (o mais elegante), Pedro Henrique Ferreira Oliveira (o mais formal), Ivanildo Rui Barbosa (o que não dorme), pelas discussões e os áudios infinitos sobre Física no Whatsapp.

Ao programa Pulsar, que como faróis no universo me iluminaram quanto ao meu desenvolvimento acadêmico, possibilitando inclusive os estudos para o desenvolvimento desse trabalho.

Quero agradecer também a toda instituição da UNILAB, desde o reitor aos que ficam na cozinha do Restaurante Universitário (principalmente estes), pois se um destes falta a UNILAB não funciona da mesma forma. Vocês foram imprescindíveis para a minha formação.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos que conheci nesses quatro anos, por me fazer viver momentos bons e ruins, por me deixarem participar de suas vivências e compartilhar as minhas. Hoje, devido a vocês, tenho uma rica mistura de experiências que perpassam quem sou!

*“Não há linguagem, nem há palavras, e deles não se ouve nenhum som; no entanto, por toda a terra se faz ouvir a sua voz, e as suas palavras, até aos confins do universo”*  
*(Sl 19:3,4)*

## RESUMO

Os princípios variacionais tem grande importância na descrição dos fenômenos naturais. Eles são construídos partindo da suposição de que a natureza pode ser descrita matematicamente por meio da minimização de uma grandeza. A história do princípio da mínima ação tornam explícitas muitas e interessantes conexões entre ideias científicas, pressupostos filosóficos, concepções religiosas e culturais que variam com a época e com a cultura subjacente. À vista disso, buscamos fazer uma descrição histórica das circunstâncias que levaram a formulação desse princípio que permitiu uma unificação satisfatória de várias teorias aparentemente desconectadas por um único postulado básico simples. Partindo desse princípio de ação mínima chegamos as equações de Euler-Lagrange que descrevem os sistemas mecânicos e possibilitam estabelecer de forma elegante a relação entre as leis de conservação e as simetrias contínuas. Todavia, todas essas descrições são apenas consequência da estacionaridade da ação, por isso no capítulo três desenvolve-se uma análise da derivada funcional de segunda ordem da ação para alguns potenciais. Por fim, o trabalho encerra-se com uma descrição da derivada segunda da ação, mas agora usando um método de perturbações, que permite uma visualização intuitiva dos resultados do capítulo três.

**Palavras-chave:** Mínima Ação. Derivada funcional. Perturbações.



## ABSTRACT

Variational principles have great importance in the description of natural phenomena. They are constructed from the assumption that nature can be described mathematically by minimizing a quantity. The story of the principle of least action makes explicit many interesting connections between scientific ideas, philosophical assumptions, religious and cultural conceptions that vary with the time and the underlying culture. In view of this, we seek to make a historical description of the circumstances that led to the formulation of this principle that allowed a satisfactory unification of several apparently disconnected theories by a single simple basic postulate. Starting from this principle of minimum action we arrive at the Euler-Lagrange equations that describe the mechanical systems and allow to establish in an elegant way the relation between the conservation laws and the continuous symmetries. Nevertheless, all these descriptions are only consequence of the stationarity of the action, so in chapter three an analysis of the second-order functional derivative of the action for some potentials is developed. Finally, the work ends with a description of the second derivative of the action, but now using a perturbation method, which allows an intuitive visualization of the results of chapter three.

**Keywords:** Least Action. Functional derivative. Disturbances.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do Funcional $A[q(t)]$ . . . . .	19
Figura 2 – Quando um sistema rotaciona por um ângulo de $\delta\theta$ . . . . .	29
Figura 3 – Representação de $z_p(t)$ em relação a $z(t)$ as quais passam pelos mesmos pontos no intervalo $[0, 2\pi]$ permitindo-nos comparar a ação de uma em relação a outra nesse mesmo intervalo. . . . .	41
Figura 4 – Ação em função do parâmetro de perturbação $\lambda$ . . . . .	42
Figura 5 – Mínimo global da Ação da partícula livre. . . . .	42
Figura 6 – Perturbação para o oscilador em um semi-período e outra para um período. . . . .	44
Figura 7 – Trajetórias perturbadas para um semi-período do oscilador. . . . .	45
Figura 8 – Ação em função do parâmetro de perturbação $\lambda = 0$ . . . . .	45
Figura 9 – Trajetórias perturbadas para um período do oscilador. . . . .	46
Figura 10 – Máximo global da Ação do oscilador para um período. . . . .	47

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relações entre as simetrias, coordenadas cíclicas e as grandezas conservadas.	31
Tabela 2 – Possíveis valores da derivada segunda de $A[q(t)]$ e suas respectivas consequências, conforme a equação (3.1.5).	34

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	O PRINCÍPIO DE HAMILTON E A MECÂNICA CLÁSSICA	18
2.1	Equações de Euler-Lagrange . . . . .	18
2.2	De Lagrange a Newton . . . . .	22
2.3	Simetrias e leis de conservação . . . . .	23
2.3.1	<i>Conservação da energia</i> . . . . .	24
2.3.2	<i>Conservação do Momento Linear</i> . . . . .	27
2.3.3	<i>Conservação do Momento Angular</i> . . . . .	29
2.3.4	<i>Um tributo a Emmy Noether</i> . . . . .	31
3	DERIVADA FUNCIONAL DE SEGUNDA ORDEM DA AÇÃO	33
3.1	Máximos e mínimos por meio da derivada de segunda ordem .	33
3.2	Análise de alguns potenciais . . . . .	36
3.2.1	<i>Um potencial para maximizar a Ação</i> . . . . .	36
3.2.2	<i>Potenciais que minimizam a ação</i> . . . . .	36
3.2.3	<i>Potencial que é ponto de sela da ação</i> . . . . .	37
4	ANÁLISE DA AÇÃO A PARTIR DE TRAJETÓRIAS PERTURBADAS . . . . .	40
4.1	Ação da partícula livre . . . . .	40
4.2	Ação do Oscilador Harmônico Simples . . . . .	43
5	CONCLUSÕES . . . . .	48
	Referências . . . . .	49

## 1 INTRODUÇÃO

Os extremos máximos e mínimos são conceitos que muitos compreendem com relativa facilidade, até mesmo os mais despercebidos. Na verdade, seus significados são tão comuns ao pensamento humano que se usa constantemente essas ideias para expressarmos inúmeros fenômenos que nos rodeiam, exemplos disso são: a nota máxima, o menor percurso, o mínimo de trabalho e porque não o máximo de prazer? A todo instante estamos querendo extremizar os vários parâmetros inseridos na nossa existência está, agora mesmo estou tentando minimizar o tempo para escrever essa monografia e, certamente, você está com o mesmo objetivo para lê-la!

Para os antigos, essas ideias de extremização já eram comum. Vejamos por exemplo em [1] e [2] a lenda de Dido e o problema isoperimétrico como é conhecido hoje, o qual é descrito no livro Eneida de Publio Virgílio Maronis. A história diz que Dido (ou Elisa), filha de um rei fenício, refugiou-se no norte da África depois que seu marido foi assassinado. Neste lugar, Foi-lhe confiada a extensão de terra que ela pudesse cercar com o couro de um boi. Diz à história que ela preparou com o couro uma grande e fina correia e cercou um terreno semi-circular beirando o mar Mediterrâneo. Esse terreno tornou-se a cidade de Cartago. Mas, não é sobre a fundação de Cartago que queremos saber, e sim sobre o fato de que esse problema consiste em encontrar a curva plana com comprimento fixo que encerra a *maior* área possível (o problema de Dido só foi resolvido formalmente por Weierstrass em 1870 [2]).

O Grego Arquimedes (287 a.C-212 a.C) que ao estimar o número  $\pi$ , partiu de um hexágono regular inscrito e outro circunscrito à circunferência e calculou os perímetros dos polígonos obtidos dobrando sucessivamente (maximizando) o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados [3], o que demonstra um conceito de extriemização. Segundo o historiador Dirk Jan Struik (1894-2000) citado por [2] o primeiro problema de máximo que temos conhecimento é a proposição 27, no livro *IV* dos Elementos de Euclides (330-275 a.C.), que reside na prova que de todos os retângulos de um dado perímetro, o quadrado é o que tem a área máxima. Esses problemas são importantes, pois nos fazem concluir que desde tempos muito remotos o homem tem sido atraído pelos conceitos de máximos e mínimos.

Por volta do século III a.C encontraremos a mente de Euclides de Alexandria que em seu tratado *Catoptrica* inicia uma busca que se tornaria uma novela na história da Física. Ele demonstra que o caminho percorrido pela luz refletida em um espelho tem ângulos de incidência e reflexão iguais. Até então, nenhum problema. No entanto, no século I a.C, Héron de Alexandria coloca “lenha na fogueira” e demonstra que o caminho percorrido pela luz, ao ir de um ponto O a um ponto P com reflexão no espelho, é o menor entre todos os caminhos que saem do ponto P, refletem no espelho e atingem o ponto O. Observemos a expressão “menor entre todos”. O que Héron está fazendo aqui

é minimizando uma quantidade, ou melhor, ele não, mas a natureza! Como qualquer um suspeitaria, ou pelo menos aqueles mais crentes, os pós-gregos, com base nesses problemas de reflexão, propuseram a doutrina de que a natureza tem nesse exemplo a intrigante característica de agir da maneira mais otimizada possível, nunca sendo supérflua ou desnecessária, [5]. É certo que os pós-gregos não tinham rigor suficiente para justificar com precisão sua doutrina, pois embora dominassem bem a geometria, suas alegações quanto a essa característica da natureza de um modo geral eram mais intuitiva ou, dizendo de forma mais enfática, era uma crença.

Na verdade, essa época era permeada pelas ideias de Aristóteles (384 a.C - 322 a.C) que influenciou não só os sábios de sua época, mas os que estariam cerca de dez séculos a sua frente. Apenas quando Galileu Galilei introduziu os experimentos e suas observações empíricas à Filosofia Natural é que suas ideias ficaram ultrapassadas. Aristóteles tinha usado na antiguidade a ideia de causas finais, na qual está associada a um princípio de simplicidade ou economia: a natureza realiza seus fins da forma mais simples possível 4. No caso dos objetos da natureza, correspondia a um fim ao qual um sistema tende (por exemplo, uma semente tende a se tornar uma árvore), já no caso de ações humanas, a ideia era de finalidade intencional. Desse modo, a busca mais precisa dessa causa final se tornou o objetivo de muitos pensadores após Aristóteles.

Apenas cinco séculos depois o francês Pierre de Fermat (1601-1665) dá mais um capítulo a essa “novela” da reflexão e refração da luz que fora iniciada por Euclides. Fermat iniciou uma das maiores polêmicas da história da ciência ao ser totalmente contra as ideias de Descartes, que afirmavam ferrenhamente que todas as tentativas de atribuir finalidades aos fenômenos físicos, que eram batizadas de “metafísicas”, deveriam ser destinadas a ser descartadas *a priori*. Ao deduzir a lei dos senos para a refração da luz, Descartes usa umas séries de pressupostos que são desgostosos para Fermat, então ele procura formular sua própria dedução. Após vinte e cinco anos de muitas tentativas infrutíferas, Fermat formula sua demonstração com o pressuposto de que o tempo gasto para a luz se propagar de um ponto a outro é mínimo [5]. Então, Fermat foi o primeiro a elaborar, propor e justificar o uso de um princípio de mínimo, e que por sinal era fortemente matematizado. Fermat, ficou tão espantado com seu sucesso que repetiu inúmeras vezes as operações algébricas [5], felizmente encontrando o mesmo resultado, confirmando assim, que seu princípio era válido.

Ora, os Cartesianos não ficariam para trás quanto a essa questão e, como previsto elaboraram inúmeras críticas. Sua principal crítica se referia ao caráter moral, teológico e, portanto, inaceitável na ótica cartesiana. O pressuposto de que a natureza segue vias mais curtas e simples pressupõe um caráter moral, ao invés de físico. Como a natureza sabe o caminho a percorrer? Não era de se esperar que ela seguiria o caminho mais curto, a reta, já que o princípio diz que suas vias são as mais curtas e simples? Em resposta Fermat ironicamente responde dizendo que não é e nem pretende ser o confidente

secreto da natureza, que apenas fez uma pretenciosa conquista em Física [5]. Assim, ele terminaria o embate.

Toda a “novela” iniciada por Euclides teria uma trégua, se não fosse a pessoa de Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), que foi quem tomou sobre si todo o opróbrio de acreditar e defender piamente um princípio de máximos e mínimos que descreveria os vários fenômenos da natureza. Em 1744, Maupertuis publica um artigo chamado *Acordo entre diferentes leis da natureza que até agora pareciam incompatíveis*, no qual ele estabelece um princípio de mínimo esforço para o comportamento da luz [5]. Nesse artigo ele diz que a quantidade a ser minimizada não é o tempo como afirmara Fermat, mas uma grandeza denominada por ele de ação. Para ele a quantidade de ação é proporcional à soma dos espaços multiplicados cada um pela velocidade com a qual o corpo os percorre  $\delta(\sum v\Delta s) = 0$  [5]. Maupertuis discordava de Fermat pelo fato de defender as ideias conceituais de Newton, pois Fermat pressupunha que a luz se propaga mais rapidamente em meio mais densos, um conceito que era oposto ao de Newton [5]. Ao argumentar contra Fermat, Maupertuis diz

Com efeito, que preferência deveria ter aqui o tempo sobre o espaço? A luz não podendo mais seguir o mesmo tempo pelo trajeto mais curto e pelo mais rápido, por que iria por um deles e não pelo outro? A luz não segue nenhum dos dois trajetos, ela toma um caminho que tem uma vantagem mais real: o caminho que ela toma é aquele no qual a quantidade de ação é mínima. Falta explicar agora o que entendo por quantidade de ação (...). Ela é proporcional a soma dos espaços multiplicados cada um pela velocidade com a qual o corpo os percorre. É essa quantidade de ação que é aqui o verdadeiro dispendido da natureza e o que ela economiza o máximo possível no movimento da luz (Maupertuis, *apud* [5], p.184).

Como o mesmo Maupertuis menciona, Leibniz no início do século XVIII, já tinha introduzido um conceito de ação, embora muito obscuro e não aplicável a casos específicos.

O que percebemos em Maupertuis é que ele usa uma dedução similar a de Fermat, no entanto, agora com uma nova quantidade a ser minimizada, a “ação”. De acordo com Fermat, o trajeto era escolhido de modo que o tempo fosse minimizado, já para Maupertuis o trajeto é o que ação é minimizada. Pode parecer que seja apenas uma questão de conveniência escolher se a grandeza minimiza é a Ação ou o tempo, o que na verdade para época era mesmo, pois nenhuma das duas teorias se mostrava consistente o suficiente para responder todos os questionamentos. No entanto, para Maupertuis a escolha da Ação ser a grandeza minimizada possibilita deduzir o princípio de forma correta com o pressuposto newtoniano de que a luz se propaga mais rapidamente em meios mais densos.

Como qualquer outro estudioso da época, a exemplos de Newton, Descartes, Leibniz, e até mesmo Euler, Maupertuis era movido por crenças, muitas delas, se não todas religiosas[5]. De fato, ao se usar a razão e tirar conclusões científicas, pressupõe-

se que o universo é ordenado, e esse pressuposto, que poderíamos chamar de fé, não é nada mais que uma crença, como também da mesma forma ao fazermos julgamentos morais, pressupomos valores absolutos, já que defendemos aquilo que acreditamos ser o correto. Mas, esse ponto não poderia ser considerado o ponto mais fraco da formulação de Maupertuis, pois embora ele fosse movido por pressupostos religiosos e muito criticado, isso se dava de modo injusto, porque seu princípio está absolutamente integrado e baseado, de forma coerente, em desenvolvimentos anteriores naquilo que chamaríamos hoje de física matemática da época [5]. O ponto mais fraco de sua formulação seria a ousadia de Maupertuis tentar estender seu princípio para além da ótica, ele queria analisar fenômenos na dinâmica das partículas.

Em 1746, ele tenta essa proeza em um artigo intitulado: *Les lois du mouvement et du repos déduites dum principe métaphysique* em que ele claramente afirma que “em todas as mudanças que ocorrem no universo, a soma dos produtos de cada corpo multiplicados pela distância em que ele se move e pela velocidade com qual se move, é a mínima possível” [5]. Para ele seu princípio era universal, válido para colisões elásticas e não elásticas como também para o caso de equilíbrio de alavancas. Para esse trabalho de Maupertuis devemos compreender que seu objetivo era “estabelecer um princípio geral e universal que explicasse os fenômenos de colisão entre corpos elásticos e inelásticos e o equilíbrio da alavanca” e também, como consequência da universalidade e finalidade, que justificasse a existência divina através de sua demonstração matemática ([4]).

Quando Maupertuis aplica seus princípios a colisões de corpos não elásticos ele comete erros que ficamos duvidosos se ele sabia ou não que os estava cometendo. De acordo com [4], ao analisar a argumentação de Maupertuis percebe-se que ele introduz conceitos difíceis de compreender fisicamente como ‘planos imateriais’ e, mesmo que esses conceitos fossem de fácil compreensão, sua dedução só é válida para um referencial especial que seria o do centro de massa. Para o caso de corpos elásticos, a argumentação é muito semelhante, no entanto, há um problema mais grave ainda, pois nessa análise Maupertuis soma grandezas medidas em referenciais distintos, o que um estudante de Física Básica perceberia como um erro grave. Ele finaliza o artigo com a demonstração da lei das alavancas, ou como ele disse “lei do repouso dos corpos”. Quanto a sua argumentação, ([4],p.630) diz que “a demonstração é simples e leva ao resultado correto. Há, porém, um problema grave. O princípio de ação mínima de Maupertuis deveria se aplicar a qualquer movimento e não apenas ao movimento da alavanca quando ela está em equilíbrio”. O texto de [4], usando as mesmas definições de Maupertuis, termina sua análise mostrando que se a alavanca não estiver em equilíbrio e se mover, o princípio não descreve mais corretamente esse movimento.

Ora, não demorou para que ao longo do século XVIII críticas severas chegassem à porta de Maupertuis. D’Alembert foi um dos mais militantes. Ele critica o fato de Maupertuis tomar a diferença e não a soma (como no caso da ótica) das variações das



quantidades de ações. Também critica para o caso das alavancas, o fato de Maupertuis só conseguir chegar ao resultado correto se escolher como incógnita a distância entre o corpo e ponto de equilíbrio, pois uma vez mudada essa distância, o resultado é errôneo [4]. D’Arcy levou 3 anos para olhar o artigo de 1746, e então, mostrar que as demonstrações eram incoerentes. Como se pode verificar na carta que Daniel Bernoulli escreve a Bougueros Bernoulli, há críticas ao trabalho de Maupertuis, dizendo que o pobre Maupertuis lhe faz pena, (Patricia Radelet, *apud* [4]). Com tantas críticas e insucesso poderíamos pensar que Maupertuis foi um fracasso naquilo que se propôs a fazer. No entanto, como disse Richard Feynman, um admirador dos princípios variacionais, tudo é interessante se você olhar o suficiente. Leonard Euler por motivos da própria sobrevivência e manutenção de sua família, pois tinha muitos filhos ([6], p.166), olhou o suficiente para o trabalho de Maupertuis ao ponto de publicar um artigo para defendê-lo. Na verdade, Euler em seus estudos de máximos e mínimos de curvas em 1744, analisando o movimento de um projétil em um meio não-resistivo se deparou com o fato de que a integral do produto da massa pela velocidade e pelo espaço sendo mínima, descreveria o movimento. Maupertuis até cita em seu artigo de 1746, que isso seria uma aplicação de seu princípio de mínima ação. Euler não só corrobora com Maupertuis, mas como também procura explicar esse princípio para o caso das colisões [4]. Devemos estar conscientes da participação de Maupertuis quanto a essas questões. Todas as críticas ao seu trabalho mostram que ele não conseguiu o que pretendia, que era demonstrar matematicamente a existência divina por meio do seu princípio universal. No entanto, como poderíamos pensar em uma mecânica analítica da forma como temos hoje se não fosse à pessoa de Maupertuis? É verdade que ele não tinha um respaldo como muitos outros de sua época, mas ele acreditava que o universo era uma ordem criada e essa forma de pensar influenciou a mecânica analítica, através de seus formuladores.

Diferente de Maupertuis, Euler tinha um rigor matemático mais acentuado, e embora tivesse suas crenças, não era por meio delas que argumentava na academia para sustentar seu princípio [4]. Como diz Zupano em [7], a principal contribuição de Euler talvez seja seu estudo sobre cálculo variacional, denominação por ele criada em trabalho apresentado na Academia de Berlim em 1756. Podemos definir um funcional de uma forma pouco rigorosa, mas compreensível, como uma correspondência que associa um número real a uma função (ou curva) pertencente a determinada classe de funções (ou de curvas). Assim, é interessante pensar em cada função pertencente a uma dada classe, como um ponto em algum espaço. O interessante é que como todo matemático Euler vagueia, buscando sentido em situações nas quais pontos geométricos são substituídos por objetos como funções ou curvas. Ele cria, inventa, dá existência a uma dinâmica que ocorre em um lugar que não é lugar, perde-se contato com o mundo ([7], p.2). Então, Euler fez uso de seus avanços em cálculo variacional para associar às inúmeras curvas ligadas por dois pontos fixo no plano a uma ação, assim já podemos notar que para ele a

ação seria um funcional. Para ele, a curva descrita por uma partícula que se movimenta no plano e que passe por dois pontos fixos seria aquela em que a variação da ação seria nula. Ainda que vagamente, Euler determina a taxa de variação de um funcional levando-o em 1744, deduzir uma equação que ficaria chamada mais tarde de Equação de Euler-Lagrange quando aplicada a sistemas mecânicos.

Então, a partir de Euler e das motivações de Maupertuis em 1746, o progresso dos princípios variacionais acelerou, principalmente com as contribuições do astrônomo e matemático francês Louis de Lagrange (1736-1813), que deu uma base matemática sólida, e generalizou o princípio para um número maior de problemas dinâmicos [7]. Em 1834, o físico e astrônomo irlandês William Rowan Hamilton chegou à forma atual básica e mais usada do princípio variacional da mecânica, que ganhou a denominação de princípio de Hamilton, enunciado do seguinte modo em ([8], p.203)

**Princípio de Hamilton:** *“De todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer restrições). O caminho real seguido é aquele que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinéticas e potenciais.”*

Esse princípio, da forma como acima está escrito é o que nos levará a ver a mecânica clássica de uma forma distinta da abordagem Newtoniana. Ademais, começarei examinando a estacionaridade da ação descrevendo a mecânica clássica de forma sucinta e didática no capítulo 2, restringindo-nos a sistemas conservativos,<sup>1</sup> e conectar de forma elegante a relação entre simetrias contínuas e as leis de conservação em mecânica. No capítulo 3, farei uma discussão a respeito da análise das derivadas funcionais de segunda ordem da ação, para que se possa ver se a natureza maximiza ou minimiza, ou ainda permite pontos de sela da Ação. Concluirei mostrando um método de perturbações simples que comparar trajetórias não físicas com a fisicamente permitida, possibilitando visualizarmos de modo mais claro que, sob certas condições a Ação tem valores máximos no trajeto real no qual o sistema evolui dando como exemplo o oscilador harmônico simples.

---

<sup>1</sup>Não pense que não é possível usar o princípio da mínima Ação para descrever sistemas dissipativos, apenas não quero me estender muito! Se convença do que estou dizendo consultando a referência [9]

## 2 O PRINCÍPIO DE HAMILTON E A MECÂNICA CLÁSSICA

O que nos proporemos agora é usar o princípio de Hamilton para descrevermos sistemas clássicos restritos a energia constante, ou seja, que são conservativos. Embora, as vezes pareça que ao longo do texto daremos atenção as definições matemáticas, estarei sempre enfatizando o poder do princípio de Hamilton, que é muito mais que uma construção matemática, é uma forma de como a natureza se comporta!

### 2.1 Equações de Euler-Lagrange

Começaremos com as noções básicas de cálculo de várias variáveis para, então, avançarmos para noções de cálculo variacional. O cálculo de várias variáveis trata de funções do tipo  $\psi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , em que relaciona um dado  $x = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$  e associa a um único  $\psi(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ . Funções desse tipo que são diferenciáveis em todo o seu domínio apresentam a propriedade de possuírem derivadas direcionais definidas como

$$\partial_u \psi(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ \frac{\psi(x + \alpha u) - \psi(x)}{\alpha} \right], \quad (2.1.1)$$

em que  $u = (u_1, \dots, u_n)$  é um vetor que define a direção ao qual estamos derivando  $\psi(x)$ . Usando o conceito de derivada unidimensional é fácil perceber que a definição dada pela equação (2.1.1) é equivalente a

$$\partial_u \psi(x) = \frac{d}{d\alpha} [\psi(x + \alpha u)] \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.1.2)$$

O que será uma definição extremamente relevante para nossos objetivos. Segue, também da regra da cadeia para função do tipo  $\psi(x)$  que

$$\partial_u \psi(x) = u \cdot \nabla \psi(x). \quad (2.1.3)$$

E por fim,  $x \in A \subset \mathbb{R}^n$  é ponto crítico de  $\psi$  se

$$\partial_u \psi(x) = 0 \quad \forall u \neq 0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1.4)$$

Essas definições são análogas para funcionais, [10]. Mas, diferente de funções de várias variáveis, um funcional é uma função que relaciona elementos de um espaço vetorial com elementos do conjunto dos reais. Ou seja, um funcional  $A$  é definido como  $A : K \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $K$  é um espaço vetorial sobre o conjunto dos números reais. Esse conceito de funcional ganhou um significado mais palpável quando Euler percebeu que o tão procurado conceito de Ação poderia ser expresso por meio dessa ferramenta matemática. A forma

atual pelo qual define-se a Ação clássica é

$$A[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (2.1.5)$$

definido  $\forall q(t) \in K$  com  $q(t)$  de classe  $C^2$  no intervalo  $[t_1, t_2]$ . Queremos ainda que todas essas funções  $q(t)$  passem pelos pontos  $q(t_1) = q_{t_1}$  e  $q(t_2) = q_{t_2}$ , ou seja, os pontos  $q_{t_1}$  e  $q_{t_2}$  devem ser fixos em  $\mathbb{R}$ . Em seu artigo [11], Gray e Taylor usam o conceito de “linhas de mundo” para descrever as possíveis trajetórias espaço-temporais que uma partícula pode seguir em um determinado potencial. Inclusive essas linhas de mundo podem não ser trajetórias reais no sentido físico. Usarei nesse trabalho a mesma nomenclatura, expressões como linha de mundo original, fisicamente aceitável e real tem o mesmo significado que as trajetórias que a partícula descreve no espaço. A função  $L(q, \dot{q}, t)$  na equação (2.1.5) é a lagrangiana do sistema, definida como  $L \equiv T - U$  onde  $U$  é a energia potencial do sistema e  $T$  é a energia cinética. Estas grandezas são expressas por meios das coordenadas generalizadas  $q_i$  e de suas velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  respectivamente, as quais com exatidão especificam o estado de um sistema. Casos particulares de coordenadas generalizadas são as coordenadas retangulares fixas, esféricas e cilíndricas. Devido a definição do funcional  $A$  a Lagrangiana é uma função com as duas primeiras entradas sendo números reais, mas a terceira restrita ao intervalo  $[t_1, t_2]$ , ou seja,  $L : \mathbb{R}^2 \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ . Fisicamente, tudo isso significa que o funcional  $A$  “pega” as linhas de mundo  $q(t)$  de um sistema no espaço  $K$  que é o espaço onde a partícula se movimenta e às relaciona com um número real por meio da integral da Lagrangiana do sistema no tempo. Um diagrama de seta (figura (1)) representa bem isso.

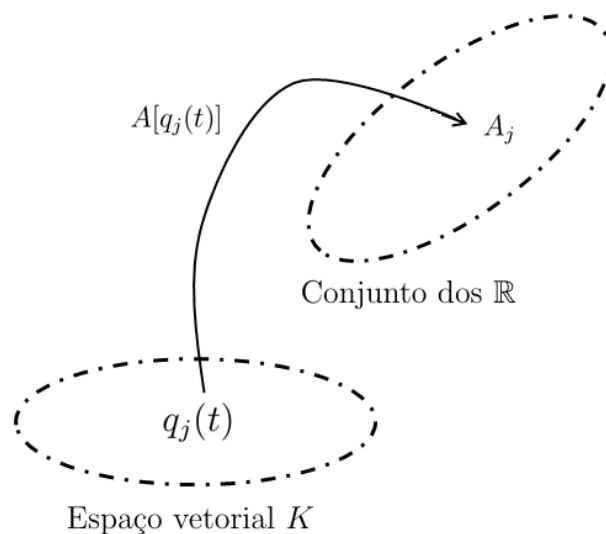


Figura 1: Representação do Funcional  $A[q(t)]$

Eu realmente espero que o caro leitor já tenha se perguntado: de todas essas funções  $q : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R} \in K$  com os pontos  $q(t_1) = q_{t_1}$  e  $q(t_2) = q_{t_2}$  fixos, qual delas é

a que descreve de fato o movimento da partícula? É extremamente importante destacar como o princípio de Hamilton é fundamental na forma como resolvemos esse problema. Se você for um matemático é possível que você pense: não existe nada de especial em uma dada  $q_i(t) \in K$ , TODAS elas são iguais quanto ao fato de serem funções e estarem em  $K$ ! Por que uma dada função  $q_1(t)$  descreveria o movimento da partícula e a  $q_2(t)$  não? Se ambas tem as mesmas qualificações para tal serviço? Perguntas como essas, a lógica e as definições matemáticas não respondem. Quem responde é a natureza! Ela diz que *de todas essas funções  $q_i(t) \in K$ , a que descreverá o movimento do sistema é a que extremar o funcional  $A[q_i(t)]$* . Que é o princípio de Hamilton matematicamente dito e ainda com minhas palavras.

Desse modo, vamos nos aproveitar do fato da natureza possuir esse comportamento, que no mínimo é elegante, para encontrarmos a função  $q_i(t)$  que descreve o movimento do sistema. Para isso, buscaremos extremizar o funcional  $A[q(t)]$ . A derivada funcional é definida de forma semelhante a equação (2.1.2), conforme as derivadas funcionais de Gauteau são definidas em [12]

$$\left\langle DA[q], \phi \right\rangle = \frac{d}{dv} [A(q + v\phi)]|_{v=0}, \quad (2.1.6)$$

que denotaremos como  $D_\phi A[q]$ . Diferente de funções de várias variáveis, a "direção" aqui é uma função  $\phi$  definida como  $\phi \in \mathcal{L} \equiv \{X : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}\}$  sendo ainda de classe  $C^2$ . Como a expressão (2.1.6) envolve  $[A(q + v\phi)]$ , então  $q + v\phi$  deve pertencer ao domínio de  $K$ . Uma vez que as funções do domínio de  $K$  são do tipo  $q : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  com extremos fixos, de modo que

$$q_{t_1} = q(t_1) + \alpha\phi(t_1) \therefore \phi(t_1) = 0$$

$$q_{t_2} = q(t_2) + \alpha\phi(t_2) \therefore \phi(t_2) = 0$$

o que implica em  $\phi(t_1) = \phi(t_2) = 0$ . Fisicamente isso significa que, todas as trajetórias devem passar pelos mesmos dois pontos  $q(t_1), q(t_2)$ , o que faz sentido, pois não poderíamos comparar se uma linha de mundo  $q_i(t)$  extrema  $A[q(t)]$  ao invés de  $q_j(t)$  se avaliamos em intervalos diferentes. Essas funções  $\phi(t) \in \mathcal{L}$  que possuem a propriedade de  $\phi(t_1) = \phi(t_2) = 0$  são chamadas de admissíveis. Analogamente a funções de várias variáveis,  $q(t)$  é ponto crítico de  $A[q(t)]$  se

$$D_\phi A[q(t)] = 0 \quad \phi \in \mathcal{L} \quad (2.1.7)$$

Ou usando a definição (2.1.6),

$$\frac{d}{d\alpha} \{A[q + \alpha\phi]\}|_{\alpha=0} = 0 \quad (2.1.8)$$

Usando a forma funcional de  $A[q + \alpha\phi]$ , onde buscamos a direção  $\phi$  que extremiza  $A[q(t)]$

temos,

$$\frac{d}{d\alpha} \left[ \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \alpha\phi, \dot{q}_i + \alpha\dot{\phi}, t) dt \right] \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (2.1.9)$$

Como os intervalos de integração são fixos e o operador derivada é distributivo, podemos derivar sobre o sinal da integral e do somatório, em que esse é posto para dar conta das  $i$ -ésimas variáveis de  $L$ . De modo que,

$$D_{\phi}A[q] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\phi}{dt} \right) dt = 0. \quad (2.1.10)$$

Podemos usar uma integração por parte para trocarmos  $\dot{\phi}_i$  por  $\phi_i$ , ao custo de um termo de contorno, basta fazermos  $u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  e  $dv = \phi_i$  e encontramos

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \phi_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \phi_i \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \phi_i \right) dt = 0. \quad (2.1.11)$$

O primeiro membro vai a zero quando avaliado em  $t_1$  e  $t_2$ , pois  $q(t_1) = q(t_2) = 0$ . Reorganizando as outras duas integrais encontramos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \phi_i dt = 0. \quad (2.1.12)$$

Ora, como todas as  $\phi_i$  são arbitrárias, ou seja, podem assumir qualquer valor, inclusive diferente de zero, a integral só será igual a zero se o integrando for nulo. Isso é fortemente garantido pelo lema fundamental do cálculo de variações, conforme é demonstrado por ([13],p.55). Desse modo,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, s \quad (2.1.13)$$

Em que  $s$  é o número de grau de liberdades do sistema. Se estivermos trabalhando com uma partícula no espaço com coordenadas retangulares fixas, deveremos resolver a equação (2.1.13) para as três coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Esta equação é chamada de equação de Euler-Lagrange, pois primeiramente foi derivada por Euler em 1744, mas foi Lagrange que a aplicou em uma variedade de casos dinâmicos. Antes de nos voltarmos para essa equação tão importante devemos nos perguntar em que condições ela é válida. As duas condições a seguir garantem sua validade;

**Condição I** As forças que agem no sistema (exceto forças de restrição) devem ser deriváveis de um potencial, ou vários potenciais. Ou seja, o sistema tem que ser conservativo.

**Condição II** As equações de restrição devem ser expressões que relacionam as coordenadas da partícula uma com as outras, e podem ser funções do tempo, ou seja, devem ser expressões do tipo  $f_k(q_i, t) = 0$ .

Qualquer sistema restrito por condições auxiliares impostas como as descritas acima podem ser elegantemente descrita por meio dos multiplicadores indeterminados de Lagrange<sup>2</sup>.

## 2.2 De Lagrange a Newton

O famoso curso de Landau e Lifschitz [14], inicia sua descrição da mecânica clássica dizendo: “a formulação mais geral da lei que governa o movimento de um sistema mecânico é o princípio da menor ação, ou Princípio de Hamilton”. Em seu texto, [8] diz que tendo em vista seu longo alcance de aplicabilidade, o **Princípio de Hamilton** é mais “fundamental” que as equações de Newton, embora seja construída após os fatos. Outra característica que o Princípio de Hamilton se sobressai sobre o formalismo Newtoniano é sua economia de postulados fundamentais organizados de uma forma unificada. Por isso, irei mostrar que a equação de Euler-Lagrange é equivalente ao princípio fundamental da dinâmica de Newton, embora, o processo inverso seja de igual modo conseguido<sup>3</sup>. Você deve concordar comigo que se eu escolher as coordenadas generalizadas como as retangulares na equação (2.1.13) não perderei nenhuma generalidade, ou seja,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.1)$$

Nessas coordenadas retangulares e em sistemas conservativos a energia potencial só é função das posições generalizadas  $U = U(x_i)$  e a energia cinética das velocidades generalizadas  $T = T(\dot{x}_i)$ , de modo que,

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0. \quad (2.2.2)$$

Por fim, a equação de Euler-Lagrange fica

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}. \quad (2.2.3)$$

Como se sabe, para um sistema conservativo temos que

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i \quad (2.2.4)$$

---

<sup>2</sup>Para uma melhor compreensão disso consulte a referência ([13], p.64)

<sup>3</sup>Para ver como se pode fazer o processo inverso, ou seja, ir de Newton a Lagrange veja([8] cap.07, secção 06.)

então,

$$\begin{aligned}
 F_i &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_{j=1} \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \\
 &= \frac{d}{dt} \sum_j m \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \sum_j m \dot{x}_j \delta_{ij} \\
 &= \frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) \\
 F_i &= \frac{dp_i}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Que é princípio fundamental da Dinâmica Newtoniana. Assim, constatamos que a segunda lei de Newton é equivalente as equações de Euler-Lagrange!

### 2.3 Simetrias e leis de conservação

O formalismo lagrangiano permite de forma muito elegante estabelecer a relação entre simetrias e leis de conservação em mecânica clássica. Seja em coordenadas generalizadas uma Lagrangianas do tipo

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - U(x_i) \tag{2.3.1}$$

para a equação de Euler-Lagrange, percebemos que ao tomarmos a derivada em relação a velocidade generalizada  $k$  teremos,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m \dot{x}_k = p_k, \tag{2.3.2}$$

qu é o momento da partícula na em relação a coordenada  $x_i$ . É convenientemente definirmos então, o **momento generalizado** da partícula em relação a coordenada generalizada  $q_k$  como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \dot{q}_k = p_k, \tag{2.3.3}$$

Dizemos neste caso que, o momento generalizado  $p_k$  é conjugado à coordenada generalizada  $q_k$ . Suponhamos que a Lagrangiana com  $n$  graus de liberdade não dependa explicitamente da coordenada  $q_k$ , então, de acordo com a equação (2.1.13),

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \equiv \frac{dp_k}{dt} = 0. \tag{2.3.4}$$

A consequência imediata é que o momento conjugado a essa coordenada é uma constante de movimento. Se  $p_k$  é um ângulo veremos a seguir que o momento angular associado a esse ângulo é conservado, por outro lado, se  $p_k$  é o vetor deslocamento, então o momento



linear é conservado. E por fim, se  $p_k$  é o tempo a grandeza de movimento a ser conservada é a energia. Todas as coordenadas que tem a propriedade de levar seu momento conjugado a uma constante de movimento recebe o nome de **coordenada cíclica**. O nome é conveniente, pois o fato de ser cíclica significa que ao aplicarmos várias operações ao sistema modificando apenas a coordenada em questão, o sistema retornará ao seu mesmo estado, isso indefinitivamente. Como veremos, se o tempo  $t$  é uma coordenada cíclica, não importa a hora que eu vá fazer meu experimento em um dado sistema, a energia será sempre a mesma. Um planeta que gira em torno do sol é um sistema que possui simetria na coordenada angular  $\theta$ , pois o sistema planeta-sol não muda quando aplicamos uma rotação na direção de  $\theta$ . Assim, já sabemos antes de começar a resolver o problema de uma partícula sob a ação de uma força central(planeta-Sol é um caso particular desse problema mais geral) que o momento angular em relação a coordenada  $\theta$  é conservado. Como uma vez disse meu orientador João Philipe, passamos a sermos bons físicos quando ao olharmos o problema a nossa frente já sabemos quais grandezas se conservam.

Então, como já foi dito, mostrarei que as coordenadas  $t, x$  e  $\theta$  levam a conservação dos seus respectivos momentos generalizados energia, momento linear e momento angular.

### 2.3.1 Conservação da energia

Começemos tomando a derivada total da Lagrangiana em relação ao tempo,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{dt}. \quad (2.3.5)$$

Sabemos também que as equações de Euler-Lagrange dizem que,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.3.6)$$

Agora, substituimos isso na equação (2.3.5) ficando com

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{dt}. \quad (2.3.7)$$

Ou, usando a regra do produto para derivadas

$$\frac{dL}{dt} - \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{dt} = 0, \quad (2.3.8)$$

e melhor ainda podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.3.9)$$

Se a Lagrangiana não depender explicitamente do tempo (ou seja,  $t$  sendo uma coordenada cíclica) a grandeza entre parêntesis que denominaremos como  $H$  é conservada,

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = H. \quad (2.3.10)$$

Já nos restringimos a considerar que  $U$  é apenas função das coordenadas generalizadas, ou seja,  $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0$ , com isso a equação (2.1.13) torna-se

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.3.11)$$

Desse modo, podemos escrever a equação (2.3.10) como

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - T + U. \quad (2.3.12)$$

Devemos analisar agora “quem” é  $\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ . Para isso, iremos mostrar um resultado muito interessante a respeito da energia cinética, que em [8] é chamado de teorema. Seja, a energia cinética de um sistema de  $n$  partículas expressa em coordenadas retangulares fixas

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^2. \quad (2.3.13)$$

Ou seja, é uma função quadrática em  $\dot{x}_i$ . Podemos escrever  $T$  em coordenadas e velocidades generalizadas, dadas as seguintes transformações

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j, t) \quad j = 1, 2, 3 \dots s$$

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}.$$

Mas, o que desejamos é o quadrado de  $\dot{x}_{\alpha,i}$ ,

$$\dot{x}_{\alpha,i}^2 = \sum_{j,k} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_{\alpha,j} \dot{q}_{\alpha,k} + 2 \sum_j \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j + \left( \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2 \quad (2.3.14)$$

Logo, a energia cinética em coordenadas generalizadas em relação as coordenadas fixas

fica

$$T = \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_{\alpha,j} \dot{q}_{\alpha,k} + \sum_{\alpha} \sum_{i,j} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j \quad (2.3.15)$$

$$+ \sum_{\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_{\alpha} \left( \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2.$$

Definindo

$$a_{j,k} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha,i} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k},$$

$$b_j \equiv \sum_{\alpha,i} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \quad (2.3.16)$$

$$c \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha,i} m_{\alpha} \left( \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \right)^2$$

obtemos

$$T = \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j b_j \dot{q}_j + c. \quad (2.3.17)$$

Se a relação que conecta as coordenadas retangulares fixas com as generalizadas não depende explicitamente do tempo, então temos um caso particular muito interessante! Nessas condições temos

$$\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} = 0, \quad b_j = 0, \quad c = 0. \quad (2.3.18)$$

Com isso, a energia cinética,

$$T = \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (2.3.19)$$

é uma função quadrática homogênea das velocidades generalizadas, pois nessas condições temos que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_k a_{l,k} \dot{q}_k + \sum_j a_{j,l} \dot{q}_j. \quad (2.3.20)$$

Agora, multiplicamos a equação acima por  $\dot{q}_l$  e somando sobre  $l$ , encontramos

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k,l} a_{l,k} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{j,l} a_{j,l} \dot{q}_j \dot{q}_l. \quad (2.3.21)$$

Se observarmos os dois termos do lado direito da equação acima vemos que são idênticos, assim podemos soma-los, de modo que

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2 \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T, \quad (2.3.22)$$

que é a condição para que uma função seja quadrática homogênea na coordenada  $\dot{q}_l$ . Usando esse resultado na equação (2.3.9) considerando que a Lagrangiana não depende explicitamente do tempo, encontramos que

$$\frac{d(2T - L)}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0. \quad (2.3.23)$$

Assim, o fato de a Lagrangiana ser invariante no tempo, ou em palavras mais elegantes, ser simétrica no tempo, tem como consequência a conservação da energia. Essa função  $H$ , que para nosso caso é uma constante, é chamada de Hamiltoniana do sistema, definido de forma mais precisa pela equação (2.3.10). Nem sempre a Hamiltoniana de um sistema corresponde a energia total do mesmo. É necessário que algumas condições sejam estabelecidas, na verdade duas. São elas:

**Condição I** As transformações que relacionam as coordenadas retangulares e generalizadas não podem depender do tempo. Porque se assim for, não se garante que a energia cinética seja uma função quadrática homogênea de  $\dot{q}_i$ .

**Condição II** A energia potencial deve ser independente da velocidade. Porque se assim não for, não se elimina as derivadas em termos das velocidades na equação de Euler-Lagrange para se chegar em 2.3.10.

Devemos sempre ter em mente que é possível haver sistemas cujo a energia total não é igual a Hamiltoniana, no entanto, é conservativo. Para verificarmos isso é simples; seja um sistema conservativo, no qual é descrito em coordenadas generalizadas em movimento em relação aos eixos retangulares fixos, ou seja,  $q_i = q_i(x_k, t)$ . Desse modo, a energia cinética não será uma função quadrática homogênea de  $\dot{x}_k$ , implicando em  $E \neq H$ . Logo, como a escolha de um sistema de coordenadas generalizadas não pode alterar as grandezas físicas (nesse caso a energia), fica evidente que a Hamiltoniana não é igual a energia do sistema nas coordenadas generalizadas dependentes do tempo.

### 2.3.2 Conservação do Momento Linear

Vamos analisar agora como o fato de o espaço ser homogêneo em um sistema de referencial inercial leva a conservação do momento linear. Sem perda de generalidades, mas ganhando em simplicidade, escolheremos um sistema de uma única partícula<sup>4</sup>. Seja,  $L$  a lagrangiana que descreve esse sistema em coordenadas retangulares fixas  $L = L(x_i, \dot{x}_i)$ . Vamos considerar um deslocamento infinitesimal  $\delta\vec{r} = \sum_i \delta x_i \vec{e}_i$  que altera  $L$  no espaço, de modo que

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0. \quad (2.3.24)$$

<sup>4</sup>Para o caso de um sistema de  $n$  partículas bastemos fazer uma soma sobre todos os deslocamentos das  $n$ 's partículas e repetir as contas de modo equivalente.

Um deslocamento variado em uma dada direção não deve, ou pelo menos aqui não consideraremos que seja dependente explicitamente ou implicitamente do tempo. Por outro lado,  $\delta\dot{x}_i$  não é independente de  $x_i$ , de modo que podemos escrever

$$\delta\dot{x}_i = \delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x_i = 0. \quad (2.3.25)$$

Assim,  $\delta L$  é

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i = 0. \quad (2.3.26)$$

Ora, como cada  $\delta x_i$  são linearmente independente,  $\delta L$  é identicamente nulo somente se cada uma das derivadas parciais de  $L$  forem identicamente nulas,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$$

Usando a equação de Euler-Lagrange temos assim, que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0. \quad (2.3.27)$$

O que leva a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{constante}. \quad (2.3.28)$$

Como  $U$  não depende das velocidades generalizadas é verdade que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \text{constante}.$$

Escrevendo a energia cinética em sua forma funcional

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \frac{1}{2} m \sum_j \dot{x}_j^2 \right) = \text{constante}. \quad (2.3.29)$$

Diferenciando dentro do somatório encontramos finalmente

$$m\dot{x}_j = p_j = \text{constante}. \quad (2.3.30)$$

Portanto, concluímos que a homogeneidade do espaço implica na conservação temporal do momento linear  $\vec{p}$  para um sistema fechado. Eu posso dizer de uma forma mais didática que: se você deslocar um sistema em uma dada direção no espaço e conseguir verificar que a lagrangiana desse sistema não variou após o deslocamento, saiba que o momento linear naquela direção é conservado!

### 2.3.3 Conservação do Momento Angular

Vamos partir da hipótese de que as propriedades mecânicas do sistema são isotrópicas. Ou seja, para nossos desejos, significa que a Lagrangiana de um sistema fechado não deve mudar se o sistema for rotacionado em um ângulo infinitesimal. Ora, se o sistema é localizado pelo vetor  $\vec{r}$ , ao girarmos nosso sistema em um ângulo  $\delta\theta$  o vetor posição muda de  $\vec{r}$  para  $\vec{r} + \delta\vec{r}$ , conforme a figura 2.

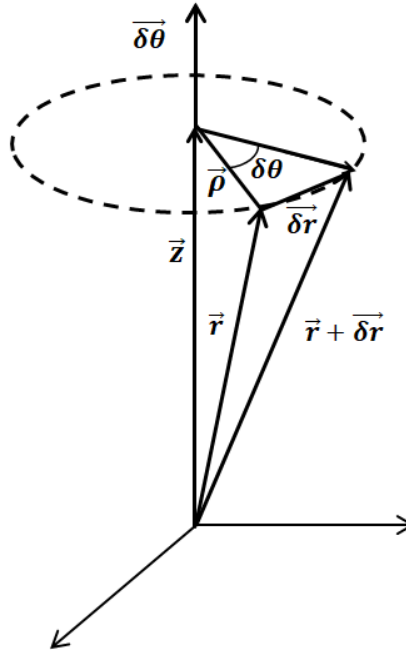


Figura 2: Quando um sistema rotaciona por um ângulo de  $\delta\theta$

Como o ângulo é infinitesimal podemos escrevê-lo como um vetor, de modo que a relação entre o deslocamento angular e o vetor deslocamento da partícula é

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\theta} \times \vec{r}. \quad (2.3.31)$$

O vetor velocidade é dado pela derivada da posição,

$$\delta \frac{d\vec{r}}{dt} = \delta\vec{\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.3.32)$$

Como já vimos, a equação (2.3.3) diz que as componentes retangulares do vetor momento linear são dadas por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}. \quad (2.3.33)$$

Assim, podemos escrever a equação de Euler-Lagrange como

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}. \quad (2.3.34)$$

A rotação infinitesimal do sistema deve causar uma variação na Lagrangiana  $\delta L$ , e como

assumimos que o espaço é isotrópico esta variação é nula, pois não muda, ou seja,

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0, \quad (2.3.35)$$

Onde escolhemos as coordenadas retangulares para expressar  $\delta L$ . Usando as equações, (2.3.33) e (2.3.34), a equação (2.3.35) pode ser escrita como

$$\delta L = \sum_i \dot{p}_i \delta x_i + \sum_i p_i \delta \dot{x}_i = 0. \quad (2.3.36)$$

Podemos escrever em forma vetorial

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \delta \vec{r} + \vec{p} \cdot \delta \frac{d\vec{r}}{dt} = 0. \quad (2.3.37)$$

Ora, agora vamos usar as equações (2.3.31) e (2.3.32) para escrever a equação (2.3.37) como

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot (\delta \vec{\theta} \times \vec{r}) + \vec{p} \cdot \left( \delta \vec{\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = 0. \quad (2.3.38)$$

Uma vez que o produto misto é na verdade um determinante, podemos permutar os vetores que são as linhas do determinante ciclicamente, de modo que o resultado não muda. Assim, podemos escrever

$$\delta \vec{\theta} \cdot \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right) + \delta \vec{\theta} \cdot \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right) = 0. \quad (2.3.39)$$

O produto escalar é distributivo, então

$$\delta \vec{\theta} \cdot \left[ \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right) + \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right) \right] = 0. \quad (2.3.40)$$

Vejam! os termos dentro dos colchetes são os termos da derivada de um produto vetorial,

$$\delta \vec{\theta} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \quad (2.3.41)$$

Como  $\delta \vec{\theta}$  é arbitrário, não pode ser sempre nulo. Ainda sim, você pode pensar que  $\vec{r}$  e  $\vec{p}$  são ortogonais e, portanto não poderei dizer que o momento angular se conserva. No entanto, de acordo com a figura 2 podemos escrever o vetor posição como a soma de  $\vec{z}$  com  $\vec{\rho}$ , de modo que

$$\delta \vec{\theta} \cdot \left[ \frac{d}{dt} ((\vec{z} + \vec{\rho}) \times \vec{p}) \right] = 0, \quad (2.3.42)$$

a componente do momento angular  $\vec{z} \times \vec{p}$  é perpendicular a  $\delta \vec{\theta}$  e de fato, o produto escalar é sempre nulo, mas a componente  $\vec{\rho} \times \vec{p}$  é paralelo a  $\delta \vec{\theta}$ , de modo que a equação (2.3.41)

só é satisfeita se

$$\vec{r} \times \vec{p} = \text{constante}. \quad (2.3.43)$$

Isso quer dizer que se você rotacionar um sistema na coordenada  $\theta$  e nada no sistema mudar (ou seja, possui simetria angular nessa coordenada) significa que o momento angular conjugado a coordenada  $\theta$  será conservado.

### 2.3.4 Um tributo a Emmy Noether

Todos esses resultados que obtivemos acima não são coincidências da natureza, ainda bem que não são! Eles são derivados de um dos teoremas que conecta de forma mais profunda e direta a relação entre simetria e as leis de conservação. Esse teorema recebe o nome da, então jovem, Emmy Noether, pois foi demonstrado por ela em 1915, logo após ter chegado na Universidade de Göttingen [15]. O teorema de Noether diz que para toda simetria contínua das leis da Física existe uma lei de conservação, e para toda lei de conservação existe uma simetria contínua associada. Isso não é elegante? O simples fato de um sistema sofrer um processo e não mudar já me garante que alguma grandeza associada a aquele sistema irá se conservar.

Conforme diz [8] existem sete constantes (ou integrais) de movimento para um sistema fechado: energia total, quantidade de movimento linear (três componentes) e quantidade de movimento angular (três componentes). Cada uma delas está relacionado a uma simetria do sistema. Os resultados da tabela 1 são consequências do teorema de Noether, portanto são atribuídos a ela: Não foi fácil para a jovem Noether desenvolver os

Tabela 1: Relações entre as simetrias, coordenadas cíclicas e as grandezas conservadas.

Simetria do sistema	Coordenada cíclica	Quantidade conservada
Homogêneo no espaço	Coordenada $t$	Momento Linear
Homogêneo no tempo	Coordenada $\vec{r}$	Energia Total
Isotrópico no espaço	Coordenada $\theta$	Momento Angular

resultados que temos hoje. Embora fosse excelente com os números sofreu muito preconceito por ser mulher. Em 1915, Hilbert e Klein (dois dos matemáticos mais respeitados da época) convidaram Emmy Noether para à universidade de Göttingen para conduzir sua pesquisa e ensinar. No entanto, a maioria dos membros do corpo docente argumentou contra isso: “Como se pode permitir que uma mulher torne-se um Privatdozent?”<sup>5</sup> Hilbert travou batalhas árduas com as autoridades da universidade para permitir que uma mulher viesse a se tornar um membro do corpo docente. Hilbert Respondendo ao corpo docente: “Senhores, eu não vejo que o sexo do candidato é um argumento contra sua

<sup>5</sup>aproximadamente, uma classificação acadêmica equivalente à de professor assistente. O que já não era muita coisa!



admissão como um Privatdozent. Afinal, o senado não é uma casa de banhos”. Em 1919, pelos esforços de Hilbert e os notáveis talentos de Noether, a habilitação foi finalmente concedida [15].

As barreiras para as mulheres na ciência não foram apenas para Noether, mas para tantas outras que não são lembradas, que não conhecemos e que certamente contribuíram ou contribuiriam eficazmente para a ciência. Embora tantas mulheres não tenham obtido a chance de serem lembrada por meio da ciência não devemos nos esquecer que Noether mostrou que um ponto do espaço é tão bom quanto qualquer outro, no que diz respeito as suas características espaço-temporais, e os físicos sabem o quanto isso é agradável de ouvir. Noether deu a uma ciência preconceituosamente feia uma sutileza rigorosamente bela.

### 3 DERIVADA FUNCIONAL DE SEGUNDA ORDEM DA AÇÃO

No capítulo anterior foi definido o conceito de Ação, e com a ajuda do princípio de Hamilton analisamos a derivada de primeira ordem da ação encontrando a equação de Euler-Lagrange, que descreve os sistemas conservativos. No entanto, você deve concordar comigo que em cálculo diferencial os problemas começam a ficar mais divertidos quando passamos a compreender o significado e o poder da análise da derivada de segunda ordem. É por meio da derivada de segunda ordem que sabemos se um dado ponto do domínio de uma função é ponto de máximo, mínimo ou de sela. Da mesma forma que no cálculo diferencial vamos explorar a derivada de segunda ordem. Todavia, nos voltaremos para funcionais, devido o fato da ação em si mesma ser um funcional. Em outras palavras, o que quero dizer é que os problemas ficarão mais divertidos!

#### 3.1 Máximos e mínimos por meio da derivada de segunda ordem

Assim como em [10], acho convenientemente didático compreendermos como o teorema de Taylor nos ajuda a analisar máximos e mínimos de uma função de várias variáveis, para que então, por analogia possamos estender esse resultado para funcionais. Do cálculo diferencial de várias variáveis entendemos que dado uma função  $\psi : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , o teorema de Taylor garante que

$$\psi(x + u) = \psi(x) + (u \cdot \nabla)\psi(x) + \frac{1}{2!}(u \cdot \nabla)^2\psi(x) + k(u), \quad (3.1.1)$$

onde  $k(u)$  vai a zero mais rápido que o quadrado da norma de  $u$ , ou seja,  $\lim_{u \rightarrow 0} \left[ \frac{k(u)}{|u|^2} \right] = 0$ . Para mais detalhes você pode consultar [16]. Pela própria definição de derivada direcional você concorda comigo que posso escrever

$$(u \cdot \nabla)\psi(x) = (\partial_u)\psi(x) \therefore u \cdot \nabla = \partial_u. \quad (3.1.2)$$

Por conseguinte,

$$(u \cdot \nabla)^2 = (u \cdot \nabla)(u \cdot \nabla) = \partial_u \partial_u = \partial_u^2. \quad (3.1.3)$$

Assim, é possível escrever o teorema de Taylor como

$$\psi(x + u) = \psi(x) + \partial_u \psi(x) + \frac{1}{2} \partial_u^2 \psi(x) + k(u). \quad (3.1.4)$$

Um ponto crítico  $x$  pertencente ao domínio de  $\psi(x)$  tem a propriedade de  $\partial_u \psi(x) = 0$ . Então, o teorema de Taylor se torna

$$\psi(x + u) = \psi(x) + \frac{1}{2} \partial_u^2 \psi(x) + k(u). \quad (3.1.5)$$

Matematicamente falando a equação (3.1.5) diz que se existir um disco aberto  $D$  pertencente ao domínio de  $\psi(x)$  centrado em  $x_0$  de modo que,  $\psi(x_0 + u) > \psi(x_0)$  para todo  $x_0 + u$  pertencente a  $D$ , então uma condição necessária para que  $x_0$  seja ponto mínimo de  $\psi(x)$  é que  $\partial_u^2 \psi(x_0) > 0$  para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ , tendo sempre em mente que  $\lim_{u \rightarrow 0} \left[ \frac{k(u)}{|u|^2} \right] = 0$ . Se tivermos  $\psi(x_0 + u) < \psi(x_0)$  nas mesmas condições, então,  $x_0$  é ponto máximo de  $\psi(x)$  se  $\partial_u^2 \psi(x_0) < 0$ . Por outro lado, se existir um  $\bar{u} \neq u$  de modo que  $\partial_{\bar{u}}^2 \psi(x_0) < 0$ , e ainda,  $\partial_u^2 \psi(x_0) > 0$ , então  $x_0$  é ponto de sela. E por fim, nada podemos concluir se viermos a nos depararmos com  $\partial_u^2 \psi(x_0) = 0$ .

Assim como fizemos na análise da derivada de primeira ordem, faremos também para a de segunda ordem. Conforme faz [10], tomaremos a semelhança da equação (3.1.5) para funcionais, que em nosso caso é a ação  $A[q(t)]$ . Penso que é mais didático tratarmos de um sistema de uma única partícula, devido ao fato de não ter que usar uma notação mais carregada. No entanto, o caso para  $n$  partículas é análogo, tomando-se a soma sobre todas as partículas. Dito isso, a equação (3.1.5) para o funcional Ação fica:

$$A[q(t) + \phi] = A[q(t)] + \frac{1}{2} D_\phi^2 A[q(t)] + T(\phi), \quad (3.1.6)$$

em que, devido o fato de estarmos analisando  $A[q(t)]$  em um “ponto” crítico, a derivada de primeira ordem é zero. De modo que, máximos, mínimos ou pontos de inflexão de  $A[q(t)]$  é definido pela derivada de segunda ordem. De sorte que, as seguintes conclusões possíveis estão na tabela abaixo:

Condição	Consequência
$D_\phi^2 A[q(t)] > 0$	Ponto de mínimo local de $A[q(t)]$
$D_\phi^2 A[q(t)] < 0$	Ponto de máximo local de $A[q(t)]$
$D_\phi^2 A[q(t)] > 0$ e $D_\chi^2 A[q(t)] < 0$	Ponto de sela de $A[q(t)]$
$D_\phi^2 A[q(t)] = 0$	Nada se conclui de $A[q(t)]$

Tabela 2: Possíveis valores da derivada segunda de  $A[q(t)]$  e suas respectivas consequências, conforme a equação (3.1.5).

( )

Nosso objetivo agora é calcular  $D_\phi^2 A[q(t)]$ . Para isso usaremos o fato de que,  $D_\phi^2 A[q(t)] = D_\phi \{D_\phi A[q(t)]\}$  e a já calculada  $D_\phi A[q(t)]$  dada pela equação (2.1.10). Assim, usando novamente a definição (2.1.2), temos

$$D_\phi^2 A[q(t)] = \frac{d}{d\alpha} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left( \phi \frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt \right]_{\alpha=0}. \quad (3.1.7)$$

Novamente, os intervalos de integração são fixos, de forma que podemos derivar sob o

sinal da integração. Assim,

$$D_\phi^2 A[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d\phi}{d\alpha} \frac{\partial L}{\partial q} + \phi \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right) \right. \\ \left. + \frac{d\dot{\phi}}{d\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\phi} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right) \right] dt. \quad (3.1.8)$$

As funções  $\phi$  e  $\dot{\phi}$  são dependentes apenas de  $t$ , de modo que as derivadas em relação a  $\alpha$  se anulam. Em contra partida,

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha}$$

merecem mais um pouco de cuidado, pois a notação poderá nos levar a um erro. Seria mais conveniente definirmos  $y(q, t) = q + \alpha\phi$  e, então, substituir  $L(q, \dot{q}, t)$  por  $L(y, \dot{y}, t)$  quando trabalharmos com  $A[q + \alpha\phi]$ . No entanto, isso mudaria a notação de  $q(t)$  para  $y(t)$ , o que não é proibido e nem feio, mas prefiro omitir essa mudança! Tendo em mente essa troca de variável, vemos que,

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = \phi, \quad \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} = \dot{\phi}$$

Usando todas essas considerações e reagrupando os termos do integrando, a equação (3.1.9) torna-se

$$D_\phi^2 A[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \phi^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \phi \dot{\phi} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \dot{\phi}^2 \right) dt, \quad (3.1.9)$$

em que as derivadas de  $L$  são avaliadas em  $(q, \dot{q}, t)$ . Vamos considerar a Lagrangiana clássica em coordenadas retangulares para uma única partícula com movimento unidimensional ao longo de  $z$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - U(z, \dot{z}, t)$$

. Aplicando isso a equação (3.1.9), temos que a derivada segunda da ação só dependerá da análise das derivadas segundas do potencial, pois

$$D_\phi^2 A[z] = - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \phi^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \dot{z}} \phi \dot{\phi} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{z}^2} - m \right) \dot{\phi}^2 \right] dt. \quad (3.1.10)$$

Se observarmos bem a equação (3.1.10) percebemos que o termo que contém  $\phi \dot{\phi}$  é o mais complicado de se analisar o sinal, pois depende da forma funcional de  $\phi$ , de sorte que não podemos analisar o sinal para cada  $\phi \in \mathcal{L}$ . A saída para esse problema é encontrada fazendo o que todo físico experiente faz, ou seja, analisa-se casos particulares para arrancar informações da situação para, só, então, partir para uma generalização. No meu caso, ficaremos só com o caso particular mesmo! A ideia é restringir a análise com o termo que contém  $\phi \dot{\phi}$  sendo nulo, o que fisicamente significa que potenciais que tem termos com

produtos da posição pela velocidade não entrarm nessa análise. Todavia, como afirma [10] não é uma restrição tão aguda, pois podemos escolher qualquer potencial do tipo

$$U(z, \dot{z}, t) = V(z, t) + W(\dot{z}, t), \quad (3.1.11)$$

ou seja, qualquer potencial que possa ser separado por uma parcela dependente da velocidade e outra da posição satisfará nossa restrição. Uma vez que para esse tipo de potencial o termo  $\dot{\phi}\phi$  se anulam na equação (3.1.10) e verificamos que,

$$D_\phi^2 A[z] = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( m - \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{z}^2} \right) \dot{\phi}^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \phi^2 \right] dt. \quad (3.1.12)$$

### 3.2 Análise de alguns potenciais

Buscaremos agora, analisar a equação (3.1.12) submetida a alguns potenciais que já conhecemos, tendo em mente as condições da tabela 2, que são as condições para que saibamos se uma dada linha de mundo  $q(t)$  maximiza, minimiza ou leva a um ponto de sela da Ação.

#### 3.2.1 *Um potencial para maximizar a Ação*

Analisando a equação (3.1.12) verificamos que  $\forall \phi$  admissível, e  $\forall (z, \dot{z}, t) \in [t_1, t_2]$ , vemos que se as seguintes condições forem verificadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &\geq 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{z}^2} &> m, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

a função  $z(t)$  que é encontrada pela equação de Euler-Lagrange maximiza a ação  $A[z]$ . Vejamos por exemplo, um potencial do tipo

$$U(z, \dot{z}, t) = [\lambda(t)z + \mu(t)] + \frac{1}{2}k\dot{z}^2, \quad \lambda \text{ e } \mu \in \mathbb{R}, \quad k < m, \quad (3.2.2)$$

ao qual satisfaz as condições de ponto de máximo, expressas pela tabela (2). Ou seja, se houver uma partícula de massa  $m$  sob a ação desse potencial a solução da equação de Euler-Lagrange fornece uma trajetória  $z(t)$  que maximiza a ação.

#### 3.2.2 *Potenciais que minimizam a ação*

Nos voltemos agora para o caso em que a ação é mínimo, ou seja,  $D_\phi^2 A[z] > 0$ . Para isso devemos verificar que  $\forall \phi$  admissível, e  $\forall (z, \dot{z}, t) \in [t_1, t_2]$ , as desigualdades

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &\leq 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{z}^2} &< m\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

devem ser satisfeitas. É muito fácil perceber que todo potencial do tipo

$$U(z, \dot{z}, t) = V(z, t) = \lambda(t)z + \mu(t),\tag{3.2.4}$$

satisfaz as condições expressas pelas desigualdades (3.2.3), pois  $m > \partial_{\dot{z}}^2 W = 0$  e  $\partial_z^2 V = 0$ . De modo que,

$$D_\phi^2 A[z] = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{\phi}^2 dt > 0\tag{3.2.5}$$

Para qualquer  $\phi$  admissível  $\in \mathcal{L}$ . Potenciais do tipo expresso pela equação (3.2.4) são muitos. Como exemplo, considere a partícula livre, onde  $U(z, \dot{z}, t) = 0$ , ou uma partícula sob a ação de um campo gravitacional  $g$  constante,  $U = V = mgz$ .

### 3.2.3 Potencial que é ponto de sela da ação

Um caso extremamente curioso é o oscilador harmônico simples. Devido à derivada do potencial em relação a coordenada  $z$  na equação (3.1.12) é possível que  $z(t)$  seja ponto de sela para  $A[z]$ , mesmo com  $W(\dot{z}, t)$  seja identicamente nulo. A ideia consiste em encontrar uma função  $\phi$  admissível  $\in \mathcal{L}$ , tal que tenha a propriedade de inverter a ação de máximo para mínimo a medida que o tempo passa. Eu poderia ficar chutando funções até encontrá-la, mas sabemos que isso é inviável. Usaremos uma série de Fourie que pode expressar funções em um dado intervalo como

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right),\tag{3.2.6}$$

vamos considerar nosso intervalo iniciando do zero, o que é um intervalo simples,  $[0, \tau]$ , mas que não perde a generalidade. O potencial do oscilador harmônico é

$$U(z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2\tag{3.2.7}$$

substituindo esse potencial na equação (3.1.12) e efetuando a derivada, encontramos

$$D_\phi^2 A[z] = \int_0^\tau m \left[ \dot{\phi}^2 - \omega^2 \phi^2 \right] dt.\tag{3.2.8}$$

Observe que se  $D_\phi^2 A[z]$  é máximo ou mínimo só depende exclusivamente de  $\phi$ . Substituindo a equação (3.2.6) e sua respectiva derivada em (3.2.8), ficamos com a seguinte expressão

$$D_\phi^2 A[z] = m \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \left( \frac{\tau}{\pi} \right) \left( \frac{n\pi}{\tau} \right) \left( \frac{m\pi}{\tau} \right) \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) \right. \\ \left. - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \left( \frac{\tau}{\pi} \right) \int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) \right] dx. \quad (3.2.9)$$

ao qual fiz uma substituição do tipo  $x = \frac{\pi t}{\tau}$ , e para não perdemos os termos cruzados de  $a_n^2$  tomei uma soma dupla sobre os  $a_n^2$ . Agora basta explorar a ortogonalidade das funções senos e cossenos, que diz que,

$$\int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx = \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n} \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (3.2.10)$$

em que  $\delta_{m,n}$  é o delta de Kronecker. Desse modo, para todo os termos com  $m \neq n$ , o delta de Kronecker assume o papel de “matar” os termos da soma, sobrando apenas os termos com  $m = n$ . Em que reorganizando os termos ficamos com

$$D_\phi^2 A[z] = m \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left( \frac{n^2 \pi^2}{2\tau} \right) - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left( \frac{\tau}{2} \right) \right], \quad (3.2.11)$$

que pode ser reorganizada da seguinte maneira

$$D_\phi^2 A[z] = \frac{m\tau}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left[ \left( \frac{n\pi}{\tau} \right)^2 - \omega^2 \right]. \quad (3.2.12)$$

Ora, sabemos que o período natural do oscilador em conformidade com a equação (3.2.7), é definido como sendo

$$\omega = \left( \frac{k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{T}$$

então, podemos ver pela equação (3.2.12) que para um tempo  $\tau$  menor que  $\frac{T}{2}$ , ou seja, um semi-período, a escolha de qualquer  $a_n$  e, portanto, para cada curva adjacente que não ultrapasse um semi-período a ação ao longo da linha do mundo é um mínimo no que diz respeito à cada uma dessas curvas adjacentes. Agora, pense em um  $\tau$  no qual é maior que um semi-período, neste caso, podemos escolher um  $a_n$  para encontrar curvas adjacentes com ação maior ou menor do que a ação ao longo da linha de mundo original. Por exemplo tomemos um  $a_n \neq 0$ , com  $n = B$  e os outros termos da série sejam nulos,  $a_n = 0$ , de modo que,  $\left( \frac{B\pi}{\tau} \right)^2 < \omega^2$  fazendo  $D_\phi^2 A[z] < 0$ , então a ação para a linha de mundo é maior que a curva original. Em contrapartida, se nós escolhermos  $a_n \neq 0$  para o qual  $n = C$  de modo que  $\left( \frac{C\pi}{\tau} \right)^2 > \omega^2$  e todos os outros  $a_n = 0$ , então,  $D_\phi^2 A[z] > 0$ , e a ação para essa

linha de mundo é menor que a curvas original. Em resumo, por um tempo final maior do que meio período do oscilador harmônico podemos ver que a Ação pode assumir valores máximos ou mínimos<sup>6</sup> dependendo da curva admissível que escolhermos, o que caracteriza um ponto de sela de  $A[z]$ .

---

<sup>6</sup>Gray e Taylor chamam de máximos e mínimos não verdadeiros.



## 4 ANÁLISE DA AÇÃO A PARTIR DE TRAJETÓRIAS PERTUBADAS

Os resultados encontrados no capítulo anterior são bastante significativos e até mesmo surpreendentes. No entanto, é possível que eles não tenham sido expostos de uma forma explícita e didática. Desse modo, procurarei analisar a Ação por um caminho menos abstrato neste capítulo, isso se dará por meio de comparações de linhas de mundo adjacentes a linha de mundo original, ou seja, a fisicamente aceitável.

### 4.1 Ação da partícula livre

Como primeiro caso, vamos analisar a ação para uma partícula livre, ou seja, que está sujeita a nenhum potencial. Sendo assim, a lagrangiana para a partícula livre em coordenadas retangulares é

$$L = T = \sum_{i=0}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2.$$

A equação de (2.1.13) diz que

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0. \quad (4.1.1)$$

Resolvendo essa equação encontramos que nas três direções a velocidade da partícula é constante, ou seja,

$$\dot{x}_i = c_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Consideraremos a origem para  $t = 0$ , então, as linhas de mundo que descrevem a partícula livre são:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_x t \\ y(t) &= v_y t \\ z(t) &= v_z t, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

onde consideramos  $c_1 = v_x$ ,  $c_2 = v_y$  e  $c_3 = v_z$ . Como as três linhas de mundo possuem a mesma forma funcional escolheremos a componente  $z(t)$  para analisarmos a ação, pois as outras seriam de forma análoga. De acordo com o princípio de Hamilton a linha de mundo  $z(t)$  possui a propriedade de extremizar o funcional ação num dado intervalo  $[t_1, t_2]$ , mas ela extremiza para um máximo ou para um mínimo? Vimos no capítulo anterior que é para um mínimo. Mas, como podemos visualizar isso de forma clara e evidente? A resposta consiste na ideia simples de comparar a linha de mundo física com linhas de mundo adjacentes a ela em um dado intervalo. Considere a linha de mundo no intervalo

$[0, 2\pi]$  do tipo

$$z_p(t) = v_z t + \lambda \sin(t), \quad (4.1.3)$$

ou seja, é a linha de mundo física acrescida de uma perturbação senoidal. Coloquei uma perturbação do tipo senoidal porque garante que  $z_p(t)$  passe pelos mesmos pontos que  $z(t)$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ , ou seja, a perturbação senoidal é admissível, portanto está contida em  $\mathcal{L}$ . A figura 3 ilustra isso.

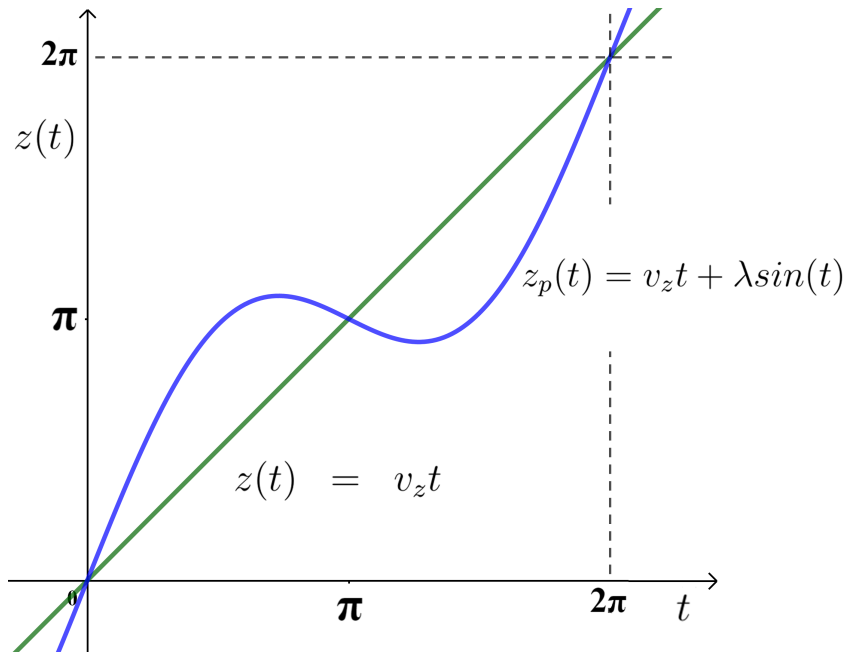


Figura 3: Representação de  $z_p(t)$  em relação a  $z(t)$  as quais passam pelos mesmos pontos no intervalo  $[0, 2\pi]$  permitindo-nos comparar a ação de uma em relação a outra nesse mesmo intervalo.

Já sabemos que  $z(t)$  no intervalo  $[0, 2\pi]$  é ponto crítico da ação, mas, de máximo ou de mínimo? Para sabermos, só nos resta calcular diretamente por meio da (2.1.5), comparando os valores de  $z_p(t)$ , em termos do parâmetro de perturbação com o valor de  $z(t)$ .

$$\begin{aligned} A[\lambda, t] &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} m (v_z + \lambda \cos(t))^2 \right] dt \\ &= \frac{1}{2} m \int_0^{2\pi} (v_z^2 + 2v_z \lambda \cos(t) + \lambda^2 \cos^2(t)) dt \\ A[\lambda] &= v_z^2 m \pi + \lambda^2 \frac{m\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Para uma partícula de massa  $m = 1g$  e  $v_z = 1m/s$  ação em função do parâmetro de perturbação  $\lambda$  é descrito pelo gráfico da figura 4. Logo, podemos ver que a ação no intervalo  $[0, 2\pi]$  é uma função agora, apenas do parâmetro de perturbação  $\lambda$ . Já é imediato que  $A[\lambda]$

possui um mínimo global em  $\lambda = 0$ , pois,

$$\frac{d^2 A[\lambda]}{d\lambda^2} = m\pi > 0 \text{ em } \lambda = 0.$$

E que pela equação 4.1.3 é exatamente quando a perturbação é zero, levando  $z_p(t) = z(t)$ . Ou seja, realmente  $z(t)$  é a linha de mundo que extremiza a ação para um mínimo e a medida que se afastamos dessa linha de mundo (variando  $\lambda$ ) a ação só aumenta! Conforme vemos na figura 5.

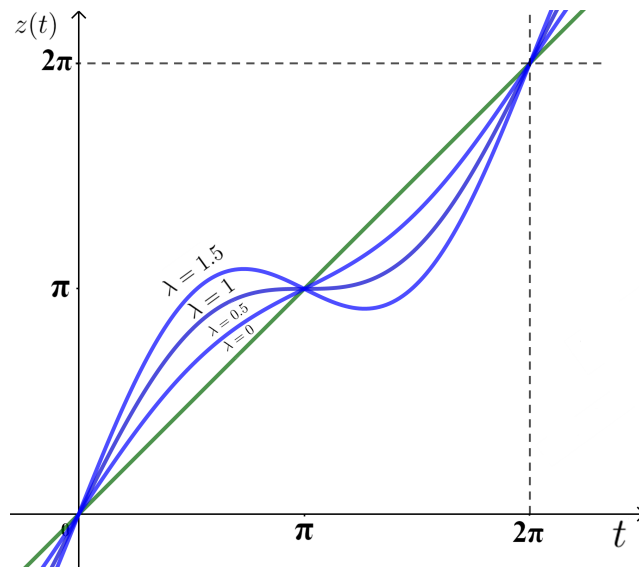


Figura 4: Ação em função do parâmetro de perturbação  $\lambda$

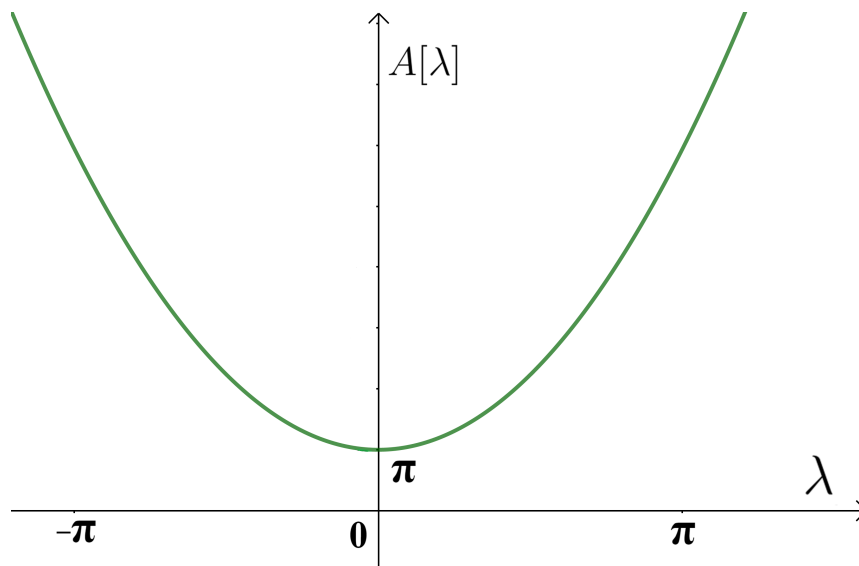


Figura 5: Mínimo global da Ação da partícula livre.

Portanto, podemos agora ver de modo intuitivo por meio desse modelo que a linha de mundo  $z(t) = v_z t$  minimiza o funcional  $A[z(t)]$  no intervalo  $[0, 2\pi]$  para a

partícula livre e que ao pegarmos algumas outras linhas de mundo próximo de  $v_z(t)$  por meio de uma perturbação senoidal, a ação só cresce, nunca assumindo um valor menor que a linha de mundo fisicamente aceitável, não importando o quão variamos o parâmetro de perturbação  $\lambda$ !

## 4.2 Ação do Oscilador Harmônico Simples

Para um oscilador unidimensional de massa  $m$  e frequência angular  $\omega$ , sua lagrangiana é dada por

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 z^2. \quad (4.2.1)$$

Ao resolvermos a equação de Euler-Lagrange para essa lagrangiana encontramos como solução a linha de mundo física

$$z(t) = A \sin(\omega t - \phi). \quad (4.2.2)$$

Em que  $A$  é a amplitude do oscilador e  $\phi$  é o ângulo de fase (uma alteração do ângulo da fase corresponde a uma mudança do instante que designamos como  $t=0$ , a origem da escala de tempos). Essa é a linha de mundo fisicamente aceitável que extremiza a ação desse sistema. Como no caso da partícula livre vamos tomar uma perturbação da linha de mundo real e estudarmos o comportamento da ação ao compararmos com a linha de mundo física. Para que possamos comparar a ação de duas linhas de mundo distinta é necessário que essas linhas de mundo passem pelos mesmos pontos em um intervalo  $[t_1, t_2]$ . Se tomarmos perturbações do tipo

$$z_p(t) = A \sin(\omega t) + \lambda(n\pi - t)t \quad n = 1, 2, \quad (4.2.3)$$

com  $\phi = 0$  para  $t = 0$ . Fica fácil de fixar as raízes de  $z_p(t)$  em  $\pi$  e  $2\pi$  que também são raízes da linha de mundo física. Desse modo, teremos a condição  $z(t) = z_p(t)$  para  $t = \pi$  e  $2\pi$  satisfeita, conforme a figura (6).

Dado essas condições vamos analisar a ação do oscilador nos intervalos  $[0, \pi]$  e  $[0, 2\pi]$ , pois sabemos por meio da equação (3.2.12) que para intervalos maiores que meio período a ação se comporta de modo diferente. Já sabemos que a linha de mundo  $z(t)$  extremiza a ação, mas e quanto as perturbações? Como anteriormente, resta-nos calcular por integração direta. Para uma análise menos trabalhosa,<sup>7</sup> Vamos considerar um sistema com  $m = 2g$  e  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , e como a amplitude independe da frequência angular escolheremos  $A = 1 \text{ cm}$ . Analisando primeiramente no intervalo  $[0, \pi]$

---

<sup>7</sup>Digo trabalhosa porque as integrais são bastante chatas de serem calculadas manualmente. No entanto, isso não restringe a análise para esses valores apenas, com a ajuda de um programa simples como o Geogebra ou o WolframAlpha verifica-se que os resultados independe do valor dessas constantes.

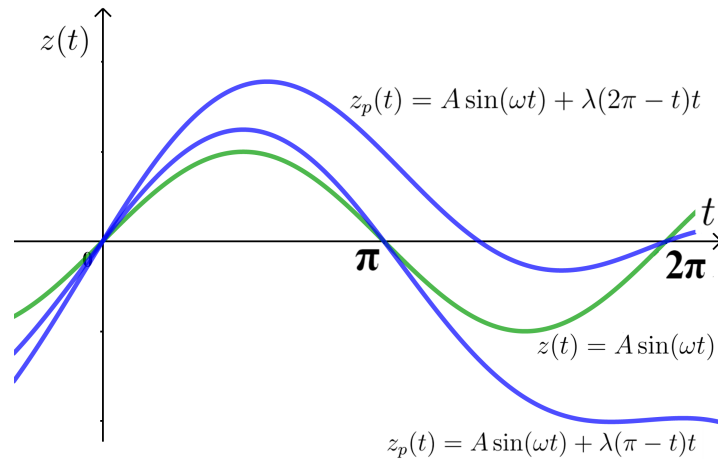


Figura 6: Perturbação para o oscilador em um semi-período e outra para um período.

$$A[\lambda, t] = \int_0^\pi (\dot{z}_p)^2 dt - \int_0^\pi (z_p)^2 dt \quad (4.2.4)$$

Chamando a primeira integral de  $I$  e a segunda de  $II$  podemos calculá-las separadamente.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi [\cos(t) + \lambda(\pi - 2t)]^2 dt \\ &= \int_0^\pi [\cos^2(t) + 2\cos(t)\lambda(\pi - 2t) + \lambda^2(\pi - 2t)^2] dt \\ I &= \frac{\pi}{2} + 8\lambda + \lambda^2 \frac{\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

O cálculo de  $II$  é

$$\begin{aligned} II &= \int_0^\pi [\sin(t) + \lambda(\pi - t)t]^2 dt \\ &= \int_0^\pi [\sin^2(t) + 2\sin(t)\lambda(\pi - t)t + \lambda^2(\pi - t)^2 t^2] dt \\ II &= \frac{\pi}{2} + 8\lambda + \lambda^2 \frac{\pi^5}{30}. \end{aligned}$$

Fazendo  $I - II$  podemos expressar  $A[\lambda]$  como

$$A[\lambda] = \lambda^2 \left( \frac{10\pi^3 - \pi^5}{30} \right) \cong \lambda^2 \frac{13}{100}. \quad (4.2.5)$$

Imediatamente verificamos que  $A[\lambda]$  possui um mínimo global em  $\lambda = 0$ , pois

$$\left. \frac{dA[\lambda]}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0 \quad e \quad \left. \frac{d^2A[\lambda]}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=0} > 0.$$

De fato, de acordo com a equação (4.2.3) quando  $\lambda = 0$  a perturbação não existe e a linha de mundo torna-se a fisicamente aceitável. Também podemos ver que a linha de mundo física (quando  $\lambda = 0$ ) é a que minimiza a ação, todas as outras (quando  $\lambda \neq 0$ ) apenas aumentam a ação conforme mostram as figuras 7,8.

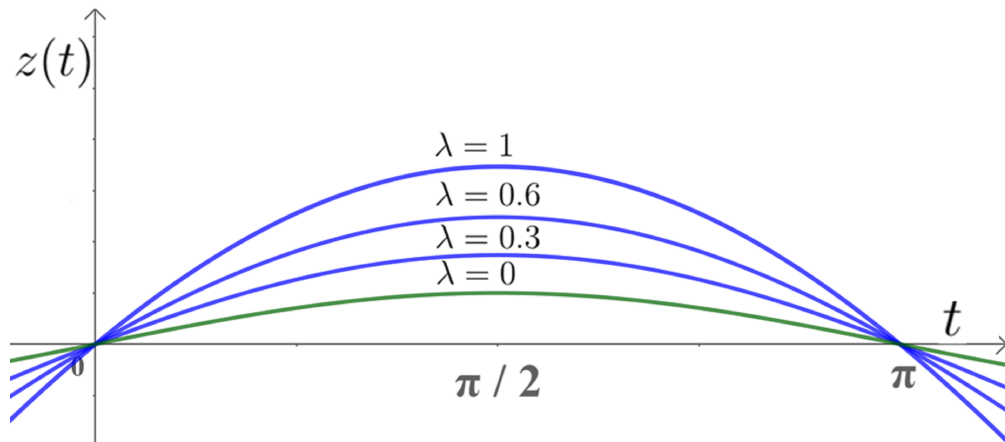


Figura 7: Trajetórias perturbadas para um semi-período do oscilador.

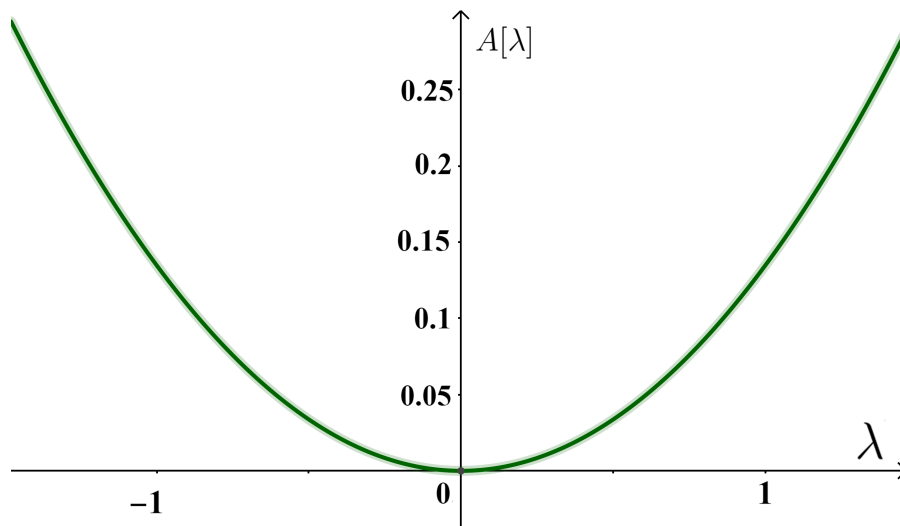


Figura 8: Ação em função do parâmetro de perturbação  $\lambda = 0$ .

Analisaremos agora, linhas de mundo para o intervalo de um período. Assim, a perturbação se torna

$$z_p(t) = \sin(t) + \lambda(2\pi - t)t.$$

A ação é calculada por integração direta,

$$A[\lambda, t] = \int_0^{2\pi} (\dot{z}_p)^2 dt - \int_0^{2\pi} (z_p)^2 dt. \quad (4.2.6)$$

Novamente dividindo em duas integrais temos

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} [\cos(t) + 2\lambda(\pi - t)]^2 dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [\cos^2(t) + 2\cos(t)2\lambda(\pi - t) + 4\lambda^2(\pi - t)^2] dt \\
 I &= \pi + \lambda^2 \frac{8\pi^3}{3}.
 \end{aligned}$$

Enquanto a segunda integral é dada por

$$\begin{aligned}
 II &= \int_0^{2\pi} [\sin(t) + \lambda(2\pi - t)t]^2 dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [\sin^2(t) + 2\sin(t)\lambda(2\pi - t)t + \lambda^2(2\pi - t)^2 t^2] dt \\
 II &= \pi + \lambda^2 \frac{16\pi^5}{15}.
 \end{aligned}$$

Fazendo  $I - II$  encontramos que a ação em função do parâmetro de perturbação é

$$A[\lambda] = \lambda^2 \left( \frac{40\pi^3 - 16\pi^5}{15} \right) \cong -\lambda^2 243.8. \quad (4.2.7)$$

Desta vez é imediato que  $A[\lambda]$  possui um **máximo global** em  $\lambda = 0$ , pois

$$\left. \frac{dA[\lambda]}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 0 \quad e \quad \left. \frac{d^2A[\lambda]}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=0} < 0.$$

Por certo, a medida que variamos o parâmetro de perturbação  $\lambda$  a ação só diminui atingindo o seu máximo em  $\lambda = 0$ , onde precisamente a perturbação recai sobre a linha de mundo física como respresentado nos gráficos 9 e 10.

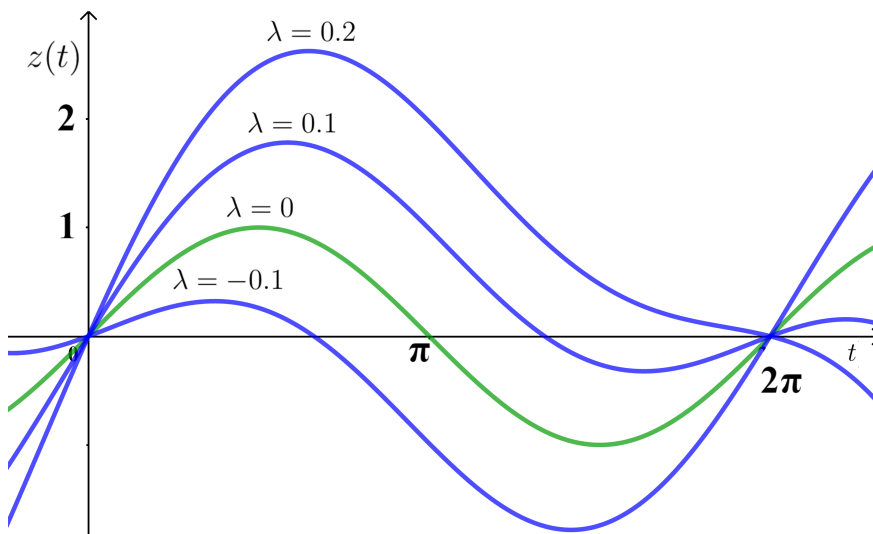


Figura 9: Trajetórias perturbadas para um período do oscilador.

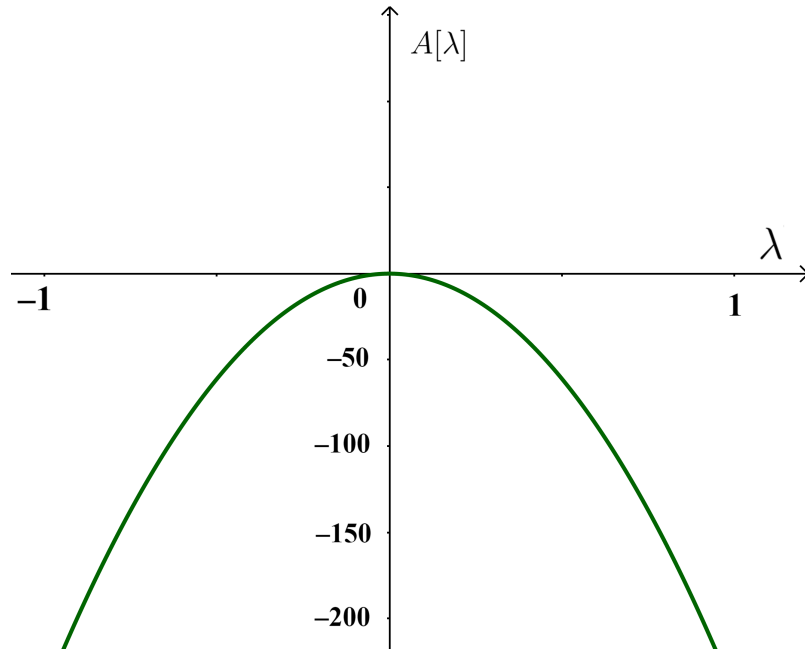


Figura 10: Máximo global da Ação do oscilador para um período.

Podemos ver por meio de um modelo simples que considera uma perturbação do tipo dado pela equação (4.1.3) que para tempos de observação igual um semi-período a ação tem um mínimo global dado pela linha de mundo fisicamente aceitável. Para tempos de observação igual a um período a ação tem um máximo global dado pela linha de mundo fisicamente aceitável. De acordo com a equação (3.2.12) isso já era previsível, pois ela demonstra uma análise mais geral. No entanto, é possível que você não tenha percebido a peculiaridade da ação do oscilador harmônico por meio da equação (3.2.12) que possui um caráter abstrato. Por isso, a análise feita nesse capítulo é muito importante, pois ela deixa claramente explícito o fato de que para o oscilador a ação pode ser um máximo!

Por outro lado, a análise da derivada segunda da ação não é um assunto discutido em livros de Física. Podemos ver que em [8], [9],[13], [14], e pouco ou quase nada é citado sobre o assunto. Assume-se muitas vezes que a solução da equação de Euler-Lagrange requer um mínimo nos problemas de dinâmica e nada mais é dito. Apenas em [17] é que se faz uma discussão detalhada do assunto em questão. É claro que se encontra muitos textos sobre o assunto como em [10] e [11], mas nenhum deles possui uma abordagem intuitiva para um curso inicial de mecânica analítica. No entanto, o presente capítulo deste trabalho possibilita de uma forma simples e didática uma alternativa para abordar esse assunto escasso em livros textos de mecânica.



## 5 CONCLUSÕES

Muitos textos de Mecânica Clássica continuam sendo escritos todos os anos. Isso parece um tanto paradoxal, pois o que há de novo para se dizer sobre esses assuntos? Sabemos que a Mecânica, a Termodinâmica e o Eletromagnetismo são ramos da Física bem discutidas há muitos anos, e tanto já se escreveu sobre elas, que nos parece curioso o porque tantos autores insistem em representar esses conteúdos de sua própria maneira.

Todavia, sabemos que é bastante claro em ciência que não existe ‘assunto encerrado’. Isso é uma verdade porque nunca existe uma única forma de observar, há sempre outras maneiras de ver. Não sei o que seria das novas mentes que se aventuram na Física se existisse apenas a abordagem de um único texto sobre Mecânica Clássica. Tão importante quanto fazer ciência é garantir que as novas gerações aprendam o que já foi descoberto.

É com o objetivo de fazer e divulgar ciência que esse trabalho foi escrito. Assim, como muitos outros fizeram, fiz uma revisão histórica da origem do princípio da mínima Ação na introdução, mostrando que os conceitos de máximo e mínimo são ideias antigas que a humanidade anelava desvendar. No capítulo dois, explorando a estacionaridade da Ação mostrei como o princípio de Hamilton é elegante para descrever os sistemas mecânicos, deduzindo as equações de Euler-Lagrange e mostrando as relações de simetria com as leis de conservação. No capítulo três, busquei fazer o que os famosos livros textos não fazem; analisar a derivada funcional de segunda ordem da Ação, mostrando que o Oscilador harmônico Simples corresponde a um ponto de sela da Ação e que constitui um máximo para tempos de observação suficientemente longos. Por fim, e o mais importante, ofereço no capítulo quatro a minha contribuição mais significativa. Mostro didaticamente para casos particulares que, para a partícula livre não existem linhas de mundo que levam a uma Ação maior do que a fisicamente aceitável e que para o Oscilador Harmônico Simples existem linhas de mundo que levam valores da Ação menores do que a linha de mundo real. É verdade que resolver um problema genericamente possibilita um poder maior a teoria, no entanto, devido o fato de que isso já foi feito, procurei uma nova maneira de ver esses resultados e mostrá-los claramente como foi feito no capítulo quatro, que consiste no método de perturbações da linha de mundo real.

Finalmente, esse texto é mais uma de tantas maneira que existem de ver o princípio de Ação mínima. De todas que eu li, não houve uma que não se mostrasse útil ou que mostrasse o principio como inútil. E, embora grandes mentes não se mostraram muito simpatizantes aos princípios variacionais [5], tenho visto em meus estudos que a Ação é a verdadeira beleza com sua economia de postulados fundamentais organizados de forma unificada.

## Referências

- [1] FIUZA, F. S. *A Lenda de Dido como Motivação Para o Estudo de Figuras Iso-perímetro na Educação Matemática: explorando a dedução lógica*. 2014. 32 f. Dissertação (Mestrado profissional em matemática)-Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. 2014.
- [2] LIMBERGER, R. *Abordagens do problema isoperimétrico*. 2011. 92 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática). Universidade Estadual de Campinas. São Paulo. 2011.
- [3] ALVARENGA, M. L. *O método de exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático*. Universidade Católica de Brasília. [S.l.].
- [4] MARTINS, A. R.; SILVA, A. P. B. Maupertuis e o princípio mecânico de ação mínima: uma análise crítica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 4, p. 625-633, 2007.
- [5] MOREIRA, I. C. Maupertuis (1698-1759) e o Princípio da Mínima Ação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, n. 1, 1999.
- [6] MARTINS, A. R.; SILVA, A. P. B. Voltaire, Maupertuis e o debate sobre o princípio de ação mínima no século XVIII: aspectos científicos e extracientíficos. *Filosofia Unisinos*, v. 8, n. 2, p. 146-169, 2007.
- [7] Zumpano, A. Princípio da Ação Mínima. *Revista Ciência Hoje*, v.36, 2005.
- [8] THORNTON, S. T; MARION, J. B. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5<sup>rd</sup>. Charlottesville, Virgínia: Cengage Learning, 2003.
- [9] GOLDSTEIN, H; POOLE, C; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. 3<sup>rd</sup>. San Francisco: Addison Wesley, 2002.
- [10] FREIRE, W. H. C. A derivada funcional de segunda ordem da ação: investigando minimalidade, maximalidade e “ponto” sela. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 34, n. 1, p. 1301, 2012.
- [11] GRAY, C.G; TAYLOR, E. F. When action is not least. *American Journal Of Physics*, v.75, n.5, 2007.
- [12] KOMECH, A.I. in: *Lecture Notes of The Max Plank Ins-titute for Mathematics in the Sciences*, LN 25/2005, Leipzig, 2005. Apêndice sobre derivadas funcionais direcionais (de Gauteau) e mecânica lagrangiana.

- [13] LEMOS, N. A. *Mecânica Analítica*. 2<sup>o</sup> ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007, 394 p.
- [14] LANDAU, L.D; LIFSHTITZ E. M. *Mechanics*. 3<sup>rd</sup>. Oxford: Butterworth-Heinenann, 1960, v.1.
- [15] LEDERMAN, L. M; CHRISTOPHER T. HILL. *Symetry and the Beautiful Universe*. New York: Prometheus Books, 2004, 364 p.
- [16] LIMA, E. L. *Análise Real*. Rio de Janeiro, 2004, v.2.
- [17] AGUIAR, M. A. M. *Tópicos de Mecânica Clássica*, versão que contém pequenas correções em relação ao livro publicado pela Livraria da Física. 2017, 307 p.