UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JHORDANA ELLEN SIMÃO BRASIL MAIA

REVISITANDO OS TERNOS PITAGÓRICOS

REDENÇÃO - CE
2019

JHORDANA ELLEN SIMÃO BRASIL MAIA

REVISITANDO OS TERNOS PITAGÓRICOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

REDENÇÃO - CE

2019

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Maia, Jhordana Ellen Simão Brasil.

M217r

Revisando os Ternos Pitagóricos / Jhordana Ellen Simão Brasil Maia. - Redenção, 2020.
41f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. História da Matemática. 2. Ternos Pitagóricos. 3. Triângulos Pitagóricos. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 510.981

JHORDANA ELLEN SIMÃO BRASIL MAIA

REVISITANDO OS TERNOS PITAGÓRICOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 30 DE AGOSTO DE 2019

BANCA EXAMINADORA

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Kelma Gomes de Melo

Profa. Esp. Kelma Gomes de Melo
Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC)

Dedico este trabalho a meus pais por sempre me apoiarem e me incentivarem a acreditar em meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que contribuiram de forma direta ou indiretamente para mais essa conquista em minha vida, dentre as quais gostaria de destacar meus queridos pais por me fazerem acreditar e nunca me permitirem desistir nos momentos mais difíceis. Aos meus amigos e colegas, em especial, agradeço por terem feito parte desta jornada, pelo apoio nos momentos tristes e felizes, pois sem vocês tudo teria sido mais difícil. À turma de Matemática 2015.1 por ser a melhor turma de Licenciatura em Matemática que esta universidade poderia ter.

Agradeço minha banca avaliadora composta pelos excelentíssimos Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima e pela Profa. Esp. Kelma Gomes de Melo, para mim é uma extrema alegria terem aceito o convite para realizarem minha avaliação. Agradeço ao meu ilustríssimo orientador Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho por ter aceitado a difícil tarefa de me orientar, pelos incentivos, pela ajuda com a escolha do tema e principalmente, pela excelente orientação.

Agradeço à CAPES por ter me dado a oportunidade de participar do programa Residencia Pedagogica que auxilia na aproximação do futuro profissional com a profissão de professor. Agradeço à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira por realizar o sonho de poder ter uma graduação, espero que esta instituição prossiga realizando os sonhos de diversos jovens de conseguirem entrar em uma universidade e conquistarem uma vida e um futuro melhor.

Quero agradecer a todos aqueles que compõem a coordenação do curso de Matemática, pois exercem um excelente trabalho de assistência aos estudantes, a todos os professores que acompanham minha jornada e detém a difícil tarefa de ajudar a chegarmos no conhecimento, que despertam a curiosidade e mostram para diversas pessoas o quanto o mundo da Matemática é fascinante. Finalmente, gostaria de agradecer a Deus por ter me dado forças nessa caminhada.

“Como pode a Matemática, sendo produto do pensamento humano, independente da experiência, se adaptar tão admiravelmente aos objetos da realidade?” (Albert Einstein)

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo revisitar os ternos pitagóricos, mostrando como algo simples pode ser muito importante para o desenvolvimento da Matemática, ressaltando também a importância histórica de inúmeros matemáticos, que na busca por demonstrar problemas seculares como a última conjectura de Fermat, acabaram por contribuir na construção de diferentes campos da Matemática. Por fim, apresentamos ainda uma nova maneira de construir ternos pitagóricos usando operações elementares de números complexos. Os ternos pitagóricos contemplam uma temática que consiste em estudar os ternos de números inteiros que correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo. Para desenvolver este trabalho foi realizada uma pesquisa bibliográfica que tem embasamento em relevantes teóricos, historiadores e matemáticos. Com base na pesquisa desses estudiosos, foi traçado um plano de abordagem do tema seguindo perspectivas de suas concepções, trazendo conceitos básicos de geometria dos triângulos e a construção dos ternos pitagóricos, ressaltando assim a importância dos ternos pitagóricos e da história da Matemática para a construção dos saberes humanos.

Palavras-chave: História da Matemática. Ternos Pitagóricos. Triângulos Pitagóricos.

ABSTRACT

This work aims to revisit the Pythagorean triples, showing how something simple can be very important for the development of Mathematics, also emphasizing the historical importance of many mathematicians, which in the search to demonstrate secular problems such as Fermat's last conjecture, ended up contributing in the construction of different fields of mathematics. Finally, we present a new way to build Pythagorean triples using elementary operations of complex numbers. Pythagorean triples have a theme that consists of studying the triples of integers that correspond to the measurements of the sides of a right triangle. To develop this work, a bibliographic research was carried out, based on relevant theoreticians, historians and mathematicians. Based on the research of these scholars, a plan to approach the theme was drawn up, following perspectives of their conceptions, bringing basic concepts of triangle geometry and the construction of Pythagorean triples, thus emphasizing the importance of Pythagorean triples and the history of Mathematics for construction of human knowledge.

Keywords: History of Mathematics. Pythagorean Triples. Pythagorean triangles.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	9
2	**PRELIMINARES**	10
2.1	O TEOREMA DE PITÁGORAS	10
2.1.1	**Quem foi Pitágoras?**	10
2.1.2	**Prova do Teorema**	11
2.2	EUCLIDES E OS TERNOS PITAGÓRICOS	17
2.2.1	**Quem foi Euclides?**	17
2.2.2	**Euclides e sua relação com os ternos Pitagóricos**	18
2.3	LEI DOS COSSENOS E OS TERNOS PITAGÓRICOS	19
3	**O TEOREMA DE FERMAT-WILES**	23
3.1	A ÚLTIMA CONJECTURA DE FERMAT	23
3.2	TENTATIVAS DE PROVAR A CONJECTURA	25
3.3	QUEM É ANDREW WILES?	29
4	**NÚMEROS COMPLEXOS E TERNOS PITAGÓRICOS**	32
4.1	NÚMEROS COMPLXOS E O TEOREMA DE PITAGÓRAS	32
4.2	CONSTRUINDO TERNOS PITAGÓRICOS	35
5	**CONCLUSÃO**	38
	REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

Os ternos pitagóricos são ternos de números naturais que derivam do famoso *Teorema de Pitágoras* e correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo. Nesse trabalho, apresentamos um pouco da sua história, algumas importantes generalizações e sua relação com os números complexos. Esse trabalho encontra-se dividido nos seguintes capítulos: Introdução, Preliminares, O Teorema de Fermat-Wiles, Números Complexos e Ternos Pitagóricos e Conclusão.

O primeiro capítulo corresponde à presente introdução, na qual apresentamos uma visão geral sobre o trabalho realizado. O segundo capítulo contém as preliminares, que faz uma breve revisão sobre triângulos e suas características, possibilitando uma melhor compreensão do Teorema de Pitágoras, dos ternos pitagóricos e do contexto no qual estão inseridos, desde suas primeiras aparições até os dias atuais, culminando com uma recente generalização dos referidos ternos, a partir da lei dos cossenos.

No terceiro capítulo, abordamos o Teorema de Fermat-Wiles, destacando-o dentro da história dos ternos pitagóricos e sua relação com a história de Fermat, que adaptando a identidade fornecida pelo Teorema de Pitágoras, conjecturou um resultado que perdurou durante mais de 300 anos sem solução. Essa conjectura instigou a curiosidade de muitos matemáticos, que na tentativa de solucionar o mistério por trás da demonstração, acabou por impulsionar o desenvolvimento de diversas subáreas da Matemática, vindo a ser demonstrado recentemente pelo matemático britânico Andrew Wiles.

O quarto capítulo, intitulado *Números complexos e os Ternos Pitagóricos*, apresenta uma interessante relação entre os números complexos e os ternos pitagóricos, que corresponde aos resultados de um recente trabalho escrito em parceria com o orientador, no qual conseguimos utilizar os números complexos e suas propriedades mais elementares para encontrar ternos pitagóricos sem a necessidade de memorizar as expressões obtidas por Euclides.

No último capítulo, observamos que apesar de ser um conceito simples, os ternos pitagóricos ajudaram na construção da Matemática atual e ainda hoje transmitem uma curiosidade que leva estudiosos a buscarem formas de construí-los, utilizando abordagens diversas que moldam as definições e estruturas da evolução nos campos da Matemática.

2 PRELIMINARES

No presente capítulo, abordaremos conceitos preliminares da geometria, descrevendo o triângulo e suas classificações, além de trazer uma abordagem histórica sobre os ternos pitagóricos, seu aparecimento durante a constituição da Matemática e algumas generalizações, tendo como base, principalmente Barbosa (2011), Iezzi (2013), Boyer (2012), Dolce e Pompeu (2013), Blez e Silva Filho (2019), dentre outras referências que serão mencionadas ao longo do texto.

2.1 O TEOREMA DE PITÁGORAS

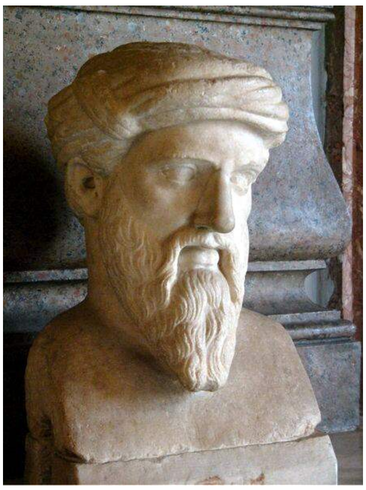
Nessa seção serão apresentadas algumas informações sobre o matemático Pitágoras e o seu resultado mais famoso, que leva o seu nome, conhecido como Teorema de Pitágoras.

2.1.1 Quem foi Pitágoras?

Pitágoras nasceu na ilha grega de Samos, foi um matemático, astrônomo, músico e filósofo, também tendo contribuído para as áreas da geografia e da medicina. Sua história está envolvida em grandes mistérios, com algumas pessoas acreditando que ele não passou de uma lenda ou uma figura mística criada pelos gregos, já que não existe nenhum documento escrito pelo próprio Pitágoras.

A história conta que Pitágoras viajou por diversos lugares em busca de conhecimento, entre esses lugares estão: Síria, Arábia, Caldeia, Pérsia, Índia e Egito, no qual viveu durante 20 anos como sacerdote, na intenção de obter o conhecimento sobre a Matemática e a religião egípcia.

Figura 1: Busto de Pitágoras.



Fonte: Wikipédia

Com o desejo de criar sua escola, Pitágoras retorna a sua terra natal, porém o atual governador Polícrates repudiava escolas e templos, sendo assim obrigado a ir para Crotone, no sul da Itália onde finalmente fixou e construiu sua escola pitagórica, onde repassava adiante tudo aquilo que havia aprendido em suas viagens. Seus alunos eram os filhos dos aristocratas e em sua escola eram aceitas mulheres. Além de ensinar suas especialidades também fazia parte da grade a religião e a moral.

A escola pitagórica foi uma sociedade parcialmente secreta que seguia rituais religiosos e tinha regras bastante rígidas, entre elas estão que todos deveriam crer na reencarnação, era terminantemente proibido beber vinho e comer carne, logo os membros deveriam ser vegetarianos. Os pitagóricos doavam seus bens para a Irmandade, e caso abandonassem a escola, receberiam o dobro daquilo que doavam, era proibido revelar descobertas científicas da sociedade para o mundo. A pena para os desobedientes era a morte e os membros deveriam respeitar a hierarquia da escola.

Existem duas histórias sobre a morte de Pitágoras, a primeira conta que os alunos que se formavam na escola de Pitágoras eram destinados para altos cargos no governo e apoiavam o partido aristocrático, ignorando as minorias que desproviam de conhecimentos e educação de qualidade, então a população irritada partiu para a violência e ateou fogo na escola pitagórica, prenderam e mataram Pitágoras e alguns de seus seguidores. A segunda conta que Pitágoras foi exilado em Metaponto, onde morreu com mais de 80 anos de idade.

Pitágoras marcou a história, tendo contribuído para a constituição da Matemática, principalmente na subárea da Geometria. Um de seus grandes teoremas sobre a construção de um triângulo retângulo, instigou a curiosidade de outros matemáticos, além de ajudar no desenvolvimento de diversos teoremas e demonstrações no decorrer dos tempos.

2.1.2 Prova do Teorema

A palavra triângulo tem origem do latim *triangulum*, sendo um polígono formado por três segmentos de retas que se interceptam apenas nos extremos. Este é o polígono de menor quantidade de lados, possui três ângulos internos e três ângulos externos suplementares aos ângulos internos adjacentes.

Definição 2.1 Dados três pontos distintos A, B e C não-colineares fixados em um plano, dizemos que a união dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ constituem o triângulo ABC com vértices A, B e C.

Na sequência, apresentamos um resultado sobre as medidas dos ângulos internos de um triângulo.

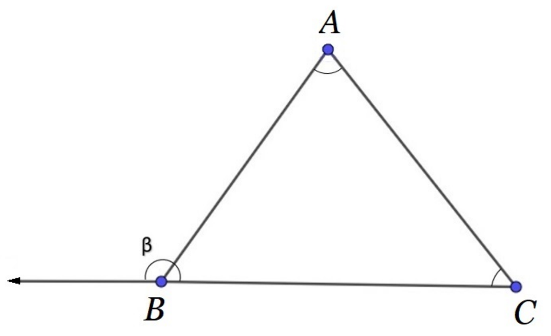
Lema 2.1 A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^0.

Demonstração: Dado um triângulo ABC qualquer com β denotando a medida do ângulo suplementar ao ângulo $\widehat{B}$, temos que

$$\widehat{B} + \beta = 180^0,$$

pois ângulos suplementares formam um ângulo raso (Figura 2).

Figura 2: Suplemento do ângulo interno $\widehat{B}$



Fonte: Elaborada pela autora.

Traçando um segmento de reta pelo ponto B paralelo ao lado $\overline{AC}$ (Figura 3), podemos perceber que

$$\theta = \widehat{A} \text{ (alternos internos)} \quad \text{e} \quad \varphi = \widehat{C} \text{ (correspondentes)},$$

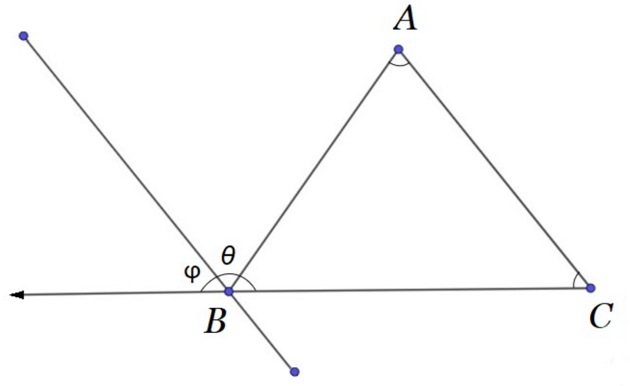
logo

$$\theta + \varphi = \beta,$$

que implica em

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \beta. \tag{1}$$

Figura 3: Segmento paralelo a $\overline{AC}$



Fonte: Elaborada pela autora.

Lembrando que

$$\widehat{B} + \beta = 180^0,$$

então decorre da igualdade (1) que

$$\widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{C} = 180^0,$$

como queríamos provar. □

Diante do resultado apresentado, podemos classificar um triângulo em relação às medidas dos seus ângulos internos.

Definição 2.2 Considerando os ângulos internos de um triângulo, dizemos que:

(a) Um triângulo é *retângulo*, se a medida de um dos ângulos internos é igual a 90º.
(b) Um triângulo é *acutângulo*, se as medidas dos ângulos internos são menores que 90º.
(c) Um triângulo é *obstusângulo*, se a medida de um dos ângulos internos é maior que 90º.

Observação 2.1 Convém ressaltar que as palavras acutângulo, retângulo e obtusângulo advêm do latim, onde *actus*, *angulus*, *rectus* e *obtus* significam agudo, canto, reto e obtuso, respectivamente.

Agora vamos apresentar um critério de semelhança entre triângulos, conhecido na literatura como o caso *ângulo-ângulo*.

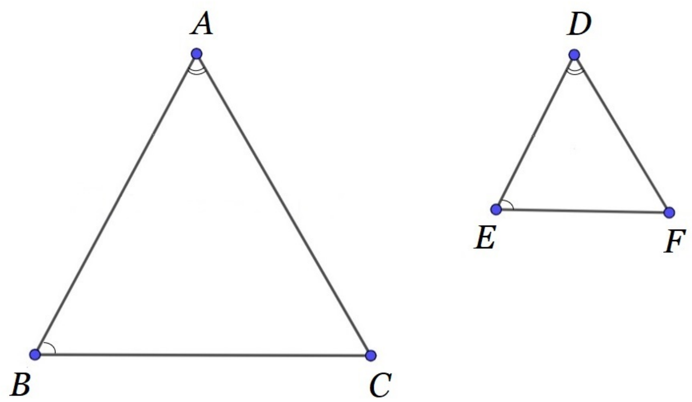
Lema 2.2 (Caso ângulo-ângulo - A.A.) Sejam ABC e DEF triângulos que satisfazem as congruências

$$\widehat{A} \equiv \widehat{D} \quad e \quad \widehat{B} \equiv \widehat{E},$$

então ABC e DEF são triângulos semelhantes.

Demonstração: Dados dois triângulos ABC e DEF (cf. Figura 4), conforme enunciado:

Figura 4: Triângulos ABC e DEF

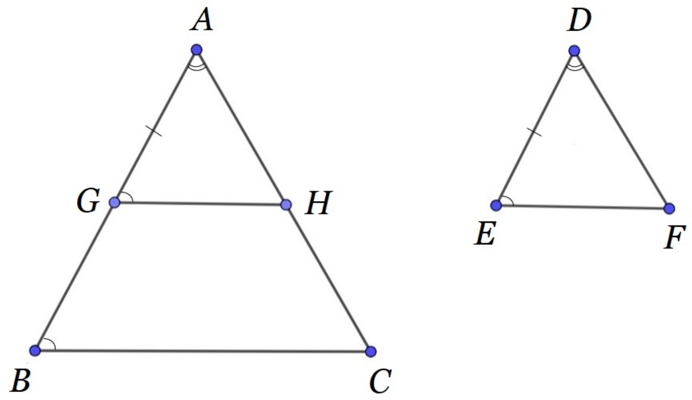


Fonte: Elaborada pela autora.

Na sequência, vamos tomar um ponto G sobre $\overline{AB}$ e um ponto H sobre $\overline{AC}$, tais que

$$\overline{AG} \equiv \overline{DE} \qquad \text{e} \qquad \widehat{G} \equiv \widehat{E} \quad \text{(cf. Figura 5).}$$

Figura 5: Triângulos ABC e DEF



Fonte: Elaborada pela autora.

Por hipótese temos, $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$, portanto $\widehat{G} \equiv \widehat{B}$. Logo, pelo caso ângulo, lado, ângulo podemos concluir que o triângulo $AGH \equiv DEF$. Observa-se ainda que

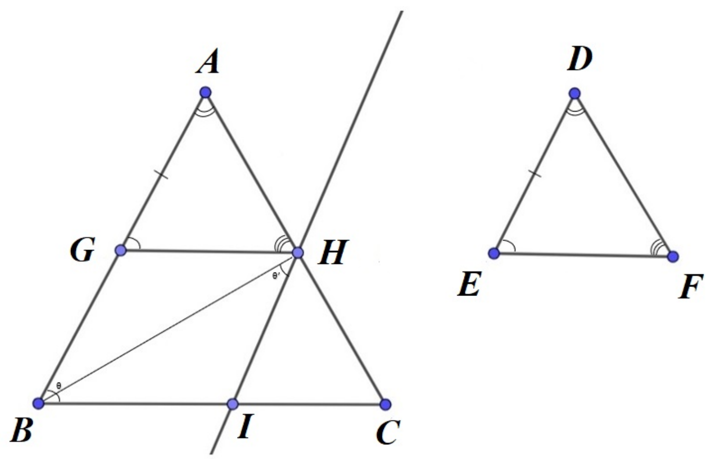
$$\overline{GH} \parallel \overline{BC} \Longrightarrow \widehat{G} \equiv \widehat{B} \qquad \text{e} \qquad \widehat{H} \equiv \widehat{C},$$

pois são ângulos correnpondentes. Pelo teorema de Tales

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}.$$

Pelo ponto H, traçamos um segmento de reta $\overline{HI} \parallel \overline{AB}$ com I pertencente a $\overline{BC}$ e em seguida, traçamos o segmento $\overline{BH}$ (Ver Figura 6).

Figura 6



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim temos, dois triângulos BGH e BHI, daí como citado anteriormente

$$\overline{GH} \parallel \overline{BC} \quad \text{e} \quad \overline{AB} \parallel \overline{HI},$$

implicando pelo teorema de Tales que

$$\overline{GB} \equiv \overline{HI}.$$

Podemos observar ainda que $\theta \equiv \theta'$ (correspondem a ângulos alternos) e que o segmento $\overline{BH}$ é comum aos triângulos BGH e BHI. Logo pelo caso lado, ângulo, lado, temos a congruência

$$BGH \equiv BHI,$$

consequentemente,

$$\therefore \overline{GH} \equiv \overline{BI}.$$

Como $\overline{GH} \equiv \overline{BI}$, pelo teorema de Tales, obtemos

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{BC}} \Longrightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BC}},$$

logo,

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BC}},$$

nos assegurando que $AGH \sim ABC$.

Pela propriedade da transitividade, podemos concluir que

$$ABC \sim AGH \quad \text{e} \quad AGH \sim DEF,$$

que implica em

$$ABC \sim DEF,$$

como queríamos demonstrar. □

O Teorema de Pitágoras é um dos mais importantes e conhecidos teoremas da atualidade, sua aplicação é feita em diversas áreas do conhecimento além da Matemática. Seu uso é de extrema importância, principalmente na solução de problemas nas áreas da trigonometria, geometria plana, espacial e analítica. O Teorema de Pitágoras tem relação direta com o triângulo retângulo, podendo ser enunciado da seguinte maneira.

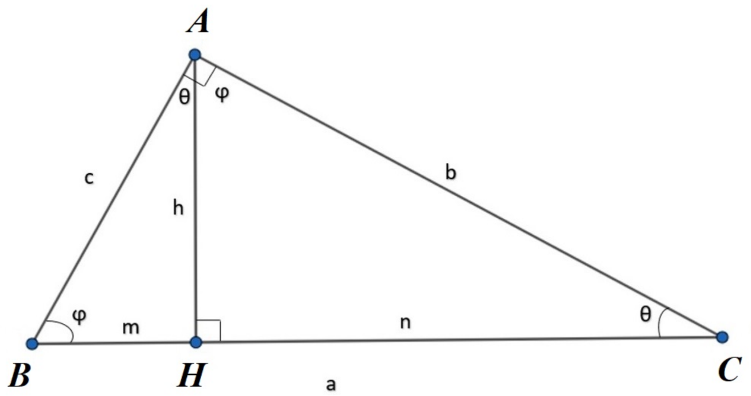
Teorema 2.1 (Teorema de Pitágoras) Dado um triângulo retângulo ABC com ângulo $\widehat{A}$ reto (i.e. medindo 90º), então vale a igualdade

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2,$$

onde BC é chamado de *hipotenusa*, enquanto os lados AB e AC são chamados de *catetos*.

Demonstração: Primeiro, traçamos a altura AH relativa ao lado $\overline{BC}$, conforme apresentado na Figura 7 a seguir:

Figura 7



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que na figura acima, estamos adotando as notações

$$a = \overline{BC}, \quad b = \overline{AC} \quad \text{e} \quad c = \overline{AB}$$

para representar as medidas dos lados de ABC. Da mesma forma, usamos as notações

$$h = \overline{AH}, \quad m = \overline{BH} \quad \text{e} \quad n = \overline{CH},$$

para representar as medidas da altura AH, bem como das projeções BH e CH dos lados AB e AC sobre BC, respectivamente.

Observação 2.2 O Lema 2.1 justifica as notações adotadas para as medidas dos ângulos internos dos triângulos ABH e ACH.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º (cf. Lema 2.1), temos por ABH que

$$\varphi + \theta + 90^\circ = 180^\circ,$$

consequentemente,

$$\varphi + \theta = 90^o.$$

Logo, os triângulos ABC, ABH e ACH são semelhantes. Desse modo, podemos observar,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Longrightarrow \frac{c}{m} = \frac{a}{c} \Longrightarrow c^2 = a \cdot m$$

Assim como,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Longrightarrow \frac{b}{n} = \frac{a}{b} \Longrightarrow b^2 = a \cdot n$$

Portanto,

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a \cdot m + a \cdot n \\ &= a(m + n). \end{aligned}$$

Como $m + n = a$, temos

$$b^2 + c^2 = a \cdot a,$$

ou simplesmente,

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2,$$

conforme queríamos provar. □

2.2 EUCLIDES E OS TERNOS PITAGÓRICOS

Nesta seção serão apresentadas algumas informações sobre o matemático Euclides e sua obra mais importante, chamada *Os Elementos*, destacando seu trabalho com os ternos pitagóricos e as fórmulas que desenvolveu para construi-los.

2.2.1 Quem foi Euclides?

Pouco se sabe sobre sua vida sendo desconhecido data de nascimento, morte ou cidade de origem. Era chamado de Euclides de Alexandria por ter sido convidado para ensinar Matemática na cidade de Alexandria. A imagem de Euclides é muito associada à de um velho bondoso.

Ficou conhecido como *Pai da Geometria* por ter lançado uma das obras mais famosas de todos os tempos a coleção de 13 volumes do livro *Os Elementos*. A partir de seus trabalhos, pode-se supor que Euclides tenha estudado na academia de Platão por seu pensamento ser bastante parecido com o pensamento platônico.

Figura 8: Representação artística de Euclides.

Fonte: Wikipédia

Em seu livro *Os Elementos*, Euclides retrata diversas descobertas sobre a geometria, tendo sido ele o primeiro matemático a apresentar esta como uma ciência lógica e dedutiva. O conteúdo de seus livros não se limitou apenas à geometria, mas abordava assuntos como ótica, astronomia, música, mecânica e um livro sobre seções cônicas.

Sua obra teve grande influência na história da Matemática por ser a mais antiga existente que se pode ter acesso, perdendo apenas para a Bíblia em número de edições. Acredita-se que seu livro teve cerca de 1000 edições. É inegável a importância deste matemático para a construção da geometria atual, pois a partir de seus escritos diversas portas de conhecimento se abriram para essa área.

2.2.2 Euclides e sua relação com os ternos Pitagóricos

Os ternos pitagóricos aparecem em registros da Matemática Babilônica do século XVIII antes de Cristo, posteriormente foram estudados no período grego com registro na obra *Os Elementos* de Euclides (ca. 300 a.C.), bem como estudados por matemáticos islâmicos. Os ternos pitagóricos despertaram a curiosidade de muitos estudiosos matemáticos da antiguidade, tais como Platão, Euclides, Pitágoras e ainda hoje, muitos trabalhos ainda abordam esta temática.

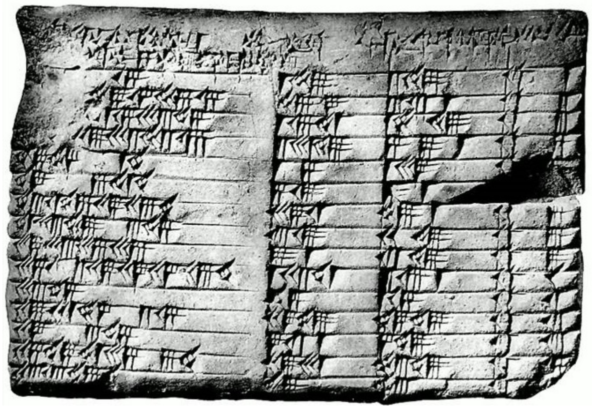
Dizemos que ternos pitagóricos são números naturais que satisfazem a identidade quadrática

$$x^2 = y^2 + z^2$$

cuja designação deve-se ao Teorema de Pitágoras, visto que as medidas dos lados de um triângulo retângulo satisfazem a identidade supracitada. Os ternos pitagóricos podem ser classificados em primitivos (constituídos por naturais relativamente primos) ou secundários (ternos pitagóricos não-primitivos).

Mesmo antes do conhecimento do Teorema de Pitágoras, já haviam registros sobre os ternos pitagóricos em placas de argila da época de Humurabi (ca. 1700 a. C.), tais como a tabuleta Plimpton 322 (Figura 9).

Figura 9: Plimpton 322.



Fonte: Wikipédia.

Na obra *Os Elementos*, Euclides verificou que os ternos pitagóricos primitivos podem ser obtidos através das expressões

$$x = m^2 + n^2, \quad y = m^2 - n^2 \quad \text{e} \quad z = 2mn \tag{2}$$

onde m e n são números naturais relativamente primos que satisfazem a condição $m > n$. Essas três expressões nos ajudam a encontrar qualquer terno pitagórico, pois se temos um terno pitagórico formado pelos números (x, y, z) e multiplicarmos por um número k natural encontraremos um terno secundário (kx, ky, kz).

Observação 2.3 Mais detalhes sobre os ternos pitagóricos, sua relação com a história e a construção da matemática encontram-se no livro *História da matemática* de Boyer (2012), que traz informações complementares.

2.3 LEI DOS COSSENOS E OS TERNOS PITAGÓRICOS

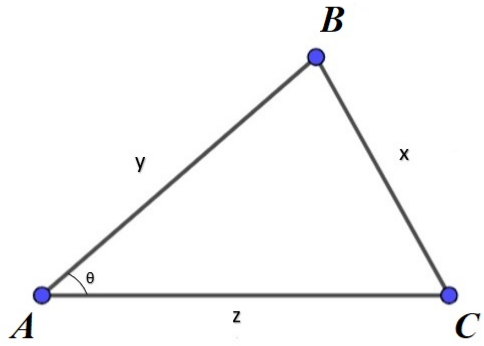
Mediante o que já foi citado até aqui sobre os ternos pitagóricos, podemos utilizar a lei dos cossenos para conseguir uma generalização dos ternos utilizando agora não mais triângulos retângulos, mas qualquer tipo de triângulo.

Proposição 2.1 (Lei dos cossenos) Dado um triângulo ABC qualquer com $x = \overline{BC}, y = \overline{AB}$ e $z = \overline{AC}$ e $\theta \in (0, \pi)$, então vale a igualdade

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\theta,$$

confira a figura a seguir

Figura 10



Fonte: Elaborada pela autora.

Demonstração: Pode ser encontrada em Iezzi (2013). $\square$

Observação 2.4 Podemos afirmar que se três números reais positivos x, y e z satisfazem a identidade

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\theta,$$

para algum $\theta \in (0, \pi)$, então estes correspondem às medidas de um triângulo.

De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} & (y-z)^2 < y^2 + z^2 - 2yzcos\theta < (y+z)^2 \\ \implies & (y-z)^2 < x^2 < (y+z)^2 \\ \implies & |y-z| < x < y+z, \end{aligned}$$

portanto existe um triângulo com medidas x, y e z. (cf. Barbosa (2016)).

Na sequência, apresentamos um resultado obtido no artigo *Generalizando os Ternos Pitagóricos* de Blez e Silva Filho (2019) publicado na Revista do Professor de Matemática, que generaliza as expressões (2) obtidas por Euclides.

Proposição 2.2 Dados $\theta \in (0, \pi)$ com cosseno racional, $a, b, n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\cos\theta = \frac{m}{n} \qquad \text{e} \qquad a > \left(1 - \frac{m}{n}\right) b,$$

então os números inteiros, dados por

$$x = n^2a^2 + (n^2 - m^2)b^2, \quad y = 2n^2ab, \quad \text{e} \quad z = (na + mb)^2 - n^2b^2.$$

correspondem às medidas dos lados de um triângulo, cujo ângulo oposto ao lado de medida x mede $\theta \in (0, \pi)$.

Demonstração: Por um cálculo direto, podemos verificar facilmente que

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\theta,$$

além disso, observa-se que

$$x = n^2a^2 + (n^2 - m^2)b^2 > 0 \quad \text{e} \quad y = 2n^2ab > 0, \tag{3}$$

visto que $a, b, n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n^2 > m^2$.

Por outro lado, desde que

$$a > \left(1 - \frac{m}{n}\right) b,$$

consequentemene,

$$z = (na + mb)^2 - n^2b^2 > [(n - m)b + mb]^2 - n^2b^2 = 0,$$

que combinado com (3) e com a Observação 2.4 conclui a prova. □

Para encerrar a seção, apresentamos dois exemplos que consistem de aplicações da Proposição 2.2.

Exemplo 2.1 Determine um triângulo com lados de medidas inteiras e um ângulo interno medindo $\cos\theta = 4/5$.

Solução: Tendo $cos\,\theta = 4/5$, vamos ter

$$m = 4 \qquad \text{e} \qquad n = 5,$$

obtemos assim as expressões

$$x = 25a^2 + 9b^2, \quad y = 50ab \quad \text{e} \quad z = (5a + 4b)^2 - 25b^2.$$

Tomando $a = 2$ e $b = 1$ teremos

$$x = 109, \quad y = 100 \quad \text{e} \quad z = 171,$$

ou seja,

$$109^2 = 100^2 + 171^2 - 2 \cdot 100 \cdot 171 \cdot 4/5$$

que são valores correspondem às medidas dos lados de um triângulo com ângulo interno oposto ao lado que mede $x = 109$ com $cos\,\theta = 4/5$.

Exemplo 2.2 Determine um triângulo com lados de medidas inteiras e um ângulo interno medindo $cos\,\theta = 6/7$.

Solução: Tendo $cos\,\theta = 6/7$, vamos ter

$$m = 6 \qquad \text{e} \qquad n = 7,$$

obtemos assim as expressões

$$x = 49a^2 + 13b^2, \quad y = 98ab \quad \text{e} \quad z = (7a + 6b)^2 - 49b^2.$$

Tomando $a = b = 1$ teremos

$$x = 62, \quad y = 98 \quad \text{e} \quad z = 120,$$

ou seja,

$$62^2 = 98^2 + 120^2 - 2 \cdot 98 \cdot 120 \cdot 6/7$$

que são valores correspondem às medidas dos lados de um triângulo com ângulo interno oposto ao lado que mede $x = 62$ com $cos\,\theta = 6/7$.

3 O TEOREMA DE FERMAT-WILES

No presente capítulo, abordaremos a história de uma das conjecturas mais famosas e intrigantes de todos os tempos, deixada por Pierre de Fermat e que despertou a curiosidade de diversos matemáticas no decorrer dos séculos, ajudando a construir a matemática atual e tendo como desfecho a demonstração exuberante de Andrew Wiles, cuja pesquisa realizada traz como principal fonte o livro *O Último Teorema de Fermat* do autor Simon Singh (2002), além do site da Universidade de Princeton.

3.1 A ÚLTIMA CONJECTURA DE FERMAT

Pierre de Fermat nasceu em Beaumont-de-Lomagne, França, no dia 20 de agosto de 1601. Foi conselheiro na câmara de requerimentos no qual servia de intermediário entre a população e a realeza e estava entre suas obrigações servir como juiz em casos considerados muito graves.

Figura 11: Pierre de Fermat.

Fonte: Wikipédia.

Para Fermat, a Matemática era considerada um passatempo, para ele não era importante compartilhar suas descobertas com matemáticos prezando pelo sigilo, assim como não era importante documentar o seu trabalho. Quando se comunicava com outros matemáticos ele enunciava seus teoremas sem fornecer a demonstração na intenção de irritar e zombar deles, chegando a ser insultado por alguns, entre eles Descartes (1596-1650) e John Wallis (1616-1703).

Entre seus campos de trabalho, Fermat esteve envolvido na criação da teoria da probabilidade, na qual trabalhou junto com Blaise Pascal (1623-1662) em uma de suas poucas parcerias. Ajudou na criação do campo de estudo do cálculo, mas sua verdadeira paixão era pela Teoria dos Números, área que o deixou marcado na história principalmente por seu último teorema conjecturado no ano de 1637, que afirma não existir números naturais satisfazendo a seguinte igualdade

$$x^n + y^n = z^n, \tag{4}$$

para n natural maior que 2.

Fermat teve como maior inspiração para estudar sobre Teoria dos Números o livro *Aritmética de Diofante* que trazia mais de cem problemas, esses problemas levaram Fermat a procurar novas formas de demonstrá-los ou criar novos teoremas, porém nunca deu importância para registrar as demonstrações que fazia e muitas vezes jogava suas anotações no lixo, pois para ele o que bastava era a satisfação de resolver qualquer problema.

Foi estudando o livro II da *Aritmética de Diofante* que Fermat fez descobertas importantes e era na margem deste livro que fazia a maior parte de suas anotações, demonstrações e enunciações de novos resultados (conjecturas, proposições, teoremas, etc). Ele era simplesmente fascinado pelo trabalho de Pitágoras, principalmente pelos ternos pitagóricos, bem como pela infinidade de ternos que existiam.

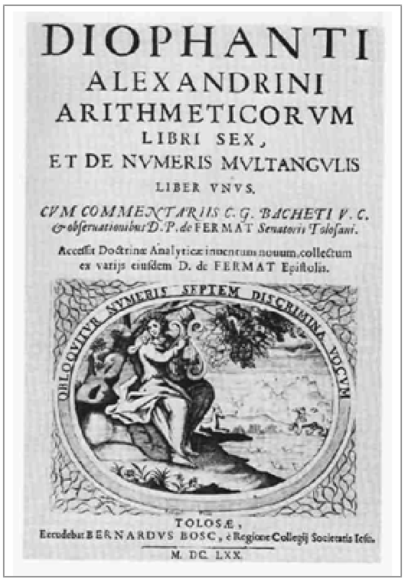
Modificando os expoentes da igualdade fornecida pelo famoso teorema de Pitágoras para números maiores que dois, Fermat acabou por descobrir uma nova equação que supostamente não admitia solução natural. Mais precisamente, chegando à conclusão que não existiam números naturais que satisfazem a equação (4), Fermat escreveu na margem do seu livro:

"Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas a margem é muito estreita para contê-la."(SINGH , 2016, p.71).

Só após sua morte suas descobertas viriam a ser publicadas, o filho mais velho de Fermat, Clément-Samuel (1634-1697), ao notar a importância das anotações de seu pai, passou cinco anos reunindo todo o material produzido por ele e em 1670 publicou uma edição especial do livro *Aritmética de Diofante* (Figura 12) no qual continham 48 observações feitas por Fermat.

Observação 3.1 A última conjectura de Fermat ficou por muito tempo conhecida como "O último Teorema de Fermat", por ser sua última anotação e por ser a mais difícil de ser demonstrada.

Figura 12: Aritmética de Diofante.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Fonte: Wikipédia.

3.2 TENTATIVAS DE PROVAR A CONJECTURA

Durante mais de 03 (três) séculos várias gerações de matemáticos tentaram encontrar uma demonstração plausível que provasse que a última conjectura de Fermat era verdadeira ou falsa. No decorrer de todos esses anos, apesar dos fracassos em conseguir essa prova, foi produzido um vasto material que contribuiu para o desenvolvimento de diversos campos da Matemática.

Grandes matemáticos tentaram provar a conjectura de Fermat, dentre eles destacamos os seguintes:

- **Leonard Euler (1707-1783)**: Matemático e Físico suíço, nascido na Basiléia, demonstrou a conjectura para o caso $n = 3$.

Figura 13: Leonard Euler.

Fonte: Wikipédia.

- **Sophie Germain (1776-1831)**: Provou que, para um determinado subconjunto de números primos, a conjectura era verdadeira.

Figura 14: Sophie Germain.

Fonte: Wikipédia.

- **Lejeune-Dirichlet (1805-1859)**: Matemático alemão, nascido em Göttingen, provou a conjectura parcialmente para $n = 5$.

Figura 15: Lejeune-Dirichlet.

Fonte: Wikipédia.

- **Adrien-Marie Legendre(1752-1833)**: Matemático francês, nascido em Paris, complementou a prova de Dirichlet para $n = 5$.

Figura 16: Adrien-Marie Legendre.

Fonte: Wikipédia.

- **Gabriel Lamé(1795-1870)**: Matemático e Físico francês, nascido em Tours, provou a conjectura para $n = 7$. Em 1847 alegou estar próximo de demonstrar a conjectura por completo.

Figura 17: Gabriel Lamé.

Fonte: Wikipédia.

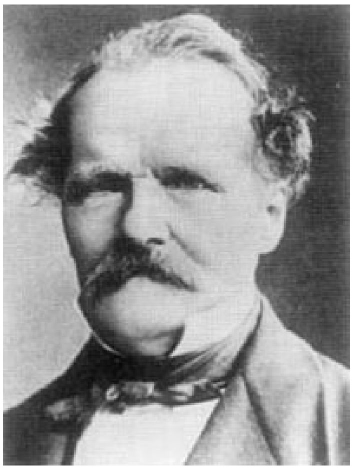
- **Augustin Louis Cauchy(1789-1857)**: Matemático francês, nascido em Paris, no ano de 1847 alegou estar trabalhando com uma abordagem semelhante à de Gabriel Lamé e que também encontrava-se bem próximo de demonstrar a conjectura de Fermat.

Figura 18: Augustin Louis Cauchy.

Fonte: Wikipédia.

- **Ernst Kummer(1810-1893)**: Físico e matemático alemão, nascido em Berlim, analisou as demonstrações feitas por Gabriel Lamé e Augustin Louis Cauchy, Kummer percebeu que ambas tinham um problema, os dois haviam utilizado a fatoração única que é verdadeira para os números naturais, porém não é válida para números imaginários em geral e ambas as demonstrações analisadas envolviam números imaginários.

Figura 19: Ernst Kummer.



Fonte: Wikipédia.

Em 1908 um industrial e amante da matemática Paul Wolfskehl (Figura 20), deixou em seu testamento que a quantia de 100 mil marcos deveria ser destinada a premiação daquele que conseguisse provar que o último teorema de Fermat era verdadeiro mas, ainda com um prêmio tão grande o interesse dos matemáticos renomados não foi despertado e a prova do teorema não foi encontrada.

Figura 20: Paul Wolfskehl.

Fonte: Wikipédia.

No dia 23 de junho de 1993, em uma Conferência realizada no Instituto Isaac Newton em Cambridge na Inglaterra, Andrew Wiles, após mais de 300 anos desde a apresentação da última Conjectura de Fermat, revelou a descoberta de sua demonstração em sua palestra.

"*Houve um silêncio respeitoso enquanto eu terminava a demonstração e encerrava com a declaração do Último Teorema de Fermat. Eu disse: 'acho que vou parar por aqui', e então houve um aplauso continuo.*"(SINGH , 2016, p.218)

Após a conferência, Wiles submeteu seu trabalho à revista Inventiones Mathematicae, então o editor da revista precisou nomear 06 (seis) examinadores para avaliar a demonstração, algo incomum e necessário já que Wiles usou diversos métodos para provar o teorema. Infelizmente um erro foi detectado por Nick Katz, uma pequena falha que fez com que Wiles se afastasse de todos durante mais de um ano na intenção de corrigir o erro e apresentar a nova demonstração reparada.

Depois de corrigir o erro, enfim a demonstração foi publicada na Revista *Annals of Mathematics* em 1995 (cf. Willes 1995) e finalmente reconhecida, então Andrew Wiles entra para a história ao conseguir demonstrar o problema mais antigo da Matemática, "A Última Conjectura de Fermat"foi finalmente solucionada, constante na literatura como o "O Teorema de Fermat-Wiles".

3.3 QUEM É ANDREW WILES?

Andrew Wiles nasceu em 11 de abril de 1953, ficando conhecido mundialmente por ter demonstrado a última conjectura de Fermat e por ter contribuído com importantes trabalhos em Teoria dos Números. Foi professor na Universidade de Princeton, aposentou-se em 2012 e retornou a Oxford como professor da Royal Society. Ele teve seu interesse despertado pelo teorema de Fermat aos 10 anos, após ler o livro O último problema de E.T. Bell, ao chegar ao final do livro e perceber que a demonstração era inexistente Andrew se sentiu furioso e decidiu utilizar todo o seu conhecimento para conseguir provar o teorema.

Figura 21: Andrew Willes.

Fonte: imgkid.com.

Wiles estudou matemática no Merton College, uma das faculdades que constituem a Universidade de Oxford no Reino Unido, teve sua pós-graduação feita no Clare College, uma das faculdades constituintes da Universidade Cambridge. Em sua pós-graduação estudou a teoria diofantina das equações cúbicas demonstrando um resultado que foi denotado como o Teorema de Coates-Wiles. Willes se tornou professor assistente na universidade de Harvad e lá demonstrou a principal conjectura da teoria de Iwasawa em parceria com Barry Mazur.

Durante sete anos, Wiles se isolou para estudar e conseguir produzir a demonstração da última conjectura de Fermat, ele decidiu estudar tudo o que era possível até mesmo os erros cometidos por todos os matemáticos que já haviam tentado encontrar a solução. Após anos de estudos constantes e depois de ter corrigido uma falha em sua demonstração Wiles finalmente havia solucionado o último teorema de Fermat, sua prova tinha nada menos do que 130 páginas.

Toda a dedicação de Wiles para provar a referida conjectura utilizando diversos conhecimentos matemáticos do século XX como as formas modulares, a conjectura de Taniyama-Shimura, os grupos de Galois e o método de Kolyvagin-Flach foi recompensado. Sua demonstração rendeu a ele diversos prêmios e seu nome escrito na história da matemática.

Devido à solução do teorema, Andrew Wiles ganhou diversos prêmios, dentre eles estão o Prêmio Fermat em 1995, Prêmio Wolf de matemática em 1995/1996, A Medalha Real em 1996, Prêmio da Fundação Wolfskehl no valor de 50 mil dólares pela demonstração do último teorema de Fermat em 1997, Prêmio Shaw de matemática em 2005, Prêmio Abel em 2016 e a Medalha Copley em 2017, além de ter entrado para o Guinness Book. Na sequência, descrevemos um pouco de cada uma dos prêmios anteriormente mencionados:

⋆ **Prêmio Fermat:** Foi criado em 1989 e é realizado a cada dois anos. Tem como principal intuito recompensar e reconhecer trabalhos de grande importância nas áreas as quais Fermat trabalhava como a teoria dos números, probabilidade, geometria analítica e cálculo de variações.

⋆ **Prêmio Wolf:** É concedido pela Fundação Wolf desde 1978 quase anualmente e premia grandes trabalhos matemáticos desenvolvidos durante os anos, além de também premiar outras áreas do conhecimento como física, medicina, agronomia, artes e química.

⋆ **Medalha Real:** Prêmio entregue anualmente pelo monarca do reino unido dentro da comunidade britânica aos grandes pesquisadores e a seus trabalhos de contribuição para o desenvolvimento do conhecimento nas áreas da matemática, física, biologia, anatomia, astronomia, química, geologia, fisiologia, botânica, engenharia estrutural e várias outras áreas.

⋆ **Prêmio da Fundação Wolfskehl:** Prêmio oferecido por Paul Wolfskehl para aquele conseguisse provar o ultimo teorema de Fermat.

⋆ **Prêmio Shaw:** O prêmio Shaw é concedido pela Fundação do Prêmio Shaw anualmente, tem como objetivo homenagear as pessoas que alcançam através da pesquisa nas áreas da astronomia, medicina e matemática avanços significativos para a sociedade.

- ⋆ **Prêmio Abel:** É o prêmio concedido anualmente a pesquisas e avanços na área da matemática, sua primeira edição aconteceu em 2003 e é avaliada em torno de 1 970 000,00 reais.
- ⋆ **Medalha Copley:** Concedida pela Royal Society anualmente desde 1731, premia trabalhos nas áreas das ciências físicas e da vida.

4 NÚMEROS COMPLEXOS E TERNOS PITAGÓRICOS

Os resultados aqui apresentados fornecem uma maneira simples de construir ternos pitagóricos, a partir de conceitos e operações elementares de números complexos. Na primeira seção, recordaremos um pouco sobre números complexos, tomamos como base a pesquisa bibliográfica realizada a partir dos livros de Iezzi (2013) e Carmo (1992), enquanto a segunda seção traz os principais resultados, que podem ser encontrados em Maia e Silva Filho (2020).

4.1 NÚMEROS COMPLXOS E O TEOREMA DE PITAGÓRAS

Os números complexos formam um conjunto numérico, denotado por $\mathbb{C}$, correspondente a uma extensão dos números reais. Um elemento arbitrário $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito na forma algébrica

$$z = x + iy,$$

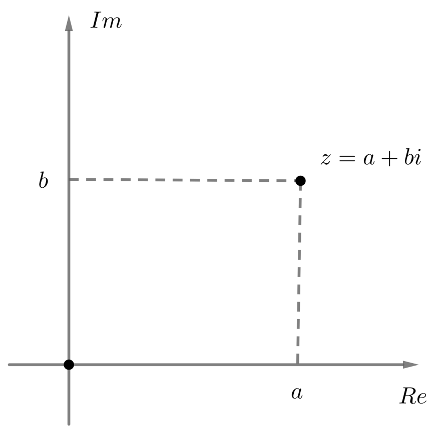
onde "i" é a unidade imaginária, enquanto x e y representam as partes real e imaginária, respectivamente. De outra forma, podemos ainda escrever

$$z = (Re\, z) + (Im\, z)\, i,$$

onde $Re\, z$ e $Im\, z$ denotam as partes real e imaginária de z, respectivamente.

O conjunto dos números complexos é representado geometricamente pelo *plano complexo* (ou *plano de Argand-Gauss*), que consiste de um plano cartesiano que associa cada ponto a um único número complexo. No plano complexo, representamos as partes real e imaginária pelos eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente, conforme a Figura 22 a seguir:

Figura 22: Plano Complexo.



Fonte: Elaborado pela Autora.

Apresentamos duas definições básicas sobre números complexos, que serão essenciais ao longo desta seção.

Definição 4.1 Dizemos que dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ são iguais, quando $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Definição 4.2 O conjugado de $z = x+iy \in \mathbb{C}$ é definido como sendo o número complexo, dado por $\overline{z} = x - iy$.

Podemos definir, sobre os números complexos, operações de soma e produto, que estendem as operações de soma e produto usuais dos reais.

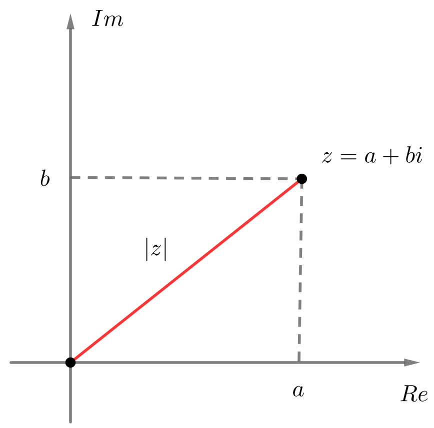
Definição 4.3 A soma e produto de números complexos $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ são definidas por:

(a) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$;

(b) $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$.

Baseado na representação do plano complexo, define-se o módulo de um número complexo $z = a + bi$ como sendo o número real, denotado por $|z|$ e que corresponde à distância obtida entre o ponto (a, b) (associado a z) e a origem do plano complexo (ponto de interseção dos eixos). Nestas condições, ilustramos a seguir (Figura 23), a noção de módulo de um número complexo:

Figura 23: Módulo de um Número Complexo.



Fonte: Elaborado pela Autora.

Dessa maneira, aplicamos o Teorema de Pitágoras ao triângulo destacado na Figura 24 para deduzir uma expressão para o módulo do número complexo $z = a + bi$ em termos das suas partes real e imaginária, dada por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

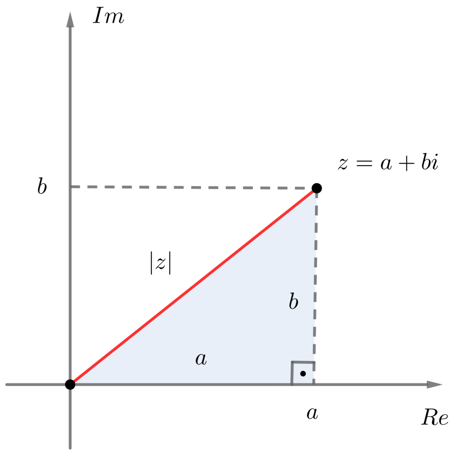
Portanto,

$$|z|^2 = a^2 + b^2,$$

ou, equivalentemente,

$$|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2.$$

Figura 24: Expressão do Módulo.



Fonte: Elaborado pela Autora.

Diante do exposto, formalizamos a seguir a definição de módulo de um número complexo, que estende a noção de módulo dos números reais.

Definição 4.4 Dado um número complexo $z = x + iy$, definimos seu módulo por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposição 4.1 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, valem as seguintes propriedades:

(a) $|z + w| \leq |z| + |w|$;

Demonstração:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2RE(\overline{w}z) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

(b) $|z \cdot w| = |z||w|$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (zw)(\overline{zw}) \\ &= (z\overline{z})(w\overline{w}) \\ &= |z|^2|w|^2 \end{aligned}$$

Observação 4.1 Decorre diretamente da igualdade

$$|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2,$$

que obter ternos pitagóricos equivale a encontrar números complexos com parte real, parte imaginária e módulo inteiros.

4.2 CONSTRUINDO TERNOS PITAGÓRICOS

Nesta última seção, vamos relacionar números complexos e ternos pitagóricos, apresentando um novo método para construção de ternos pitagóricos, onde usamos soma e produto de números complexos, bem como alguns conceitos elementares relacionados a este conjunto numérico.

Inicialmente, consideramos o subconjunto dos números complexos, dado por

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\},$$

então podemos observar que para $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ arbitrários, decorre da Definição 4.3 que

$$z + w, \; z \cdot w \in \mathbb{Z}[i],$$

que equivale a afirmar que soma e produto de números complexos são operações fechadas sobre $\mathbb{Z}[i]$.

Em particular, obtemos para todo $z \in \mathbb{Z}[i]$ que

$$z^2 = z \cdot z \in \mathbb{Z}[i],$$

portanto $Re(z^2)$ e $Im(z^2)$ são inteiros. Desde que o módulo do produto é o produto dos módulos em $\mathbb{C}$, segue-se ainda que

$$|z^2| = |z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2, \tag{5}$$

implicando que $|z^2|$ também é um número inteiro.

Agora escrevendo $z = a + bi$, vamos ter

$$z^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + 2abi,$$

ou seja,

$$Re(z^2) = a^2 - b^2 \qquad \text{e} \qquad Im(z^2) = 2ab, \tag{6}$$

que pode ser reescrito na forma

$$Re(z^2) = Re(z)^2 - Im(z)^2 \qquad \text{e} \qquad Im(z^2) = 2Re(z)Im(z). \tag{7}$$

Se as partes real e imaginária de $z \in \mathbb{Z}[i]$ são não-nulas e satisfazem

$$|Re(z)| \neq |Im(z)|,$$

então as expressões (7) implicam que $Re(z^2)$ e $Im(z^2)$ são não-nulos. Por definição de módulo, vamos ter

$$|z^2|^2 = Re(z^2)^2 + Im(z^2)^2, \tag{8}$$

donde concluímos que os inteiros

$$|z^2|, \qquad |Re(z^2)| \qquad \text{e} \qquad |Im(z^2)|$$

formam um terno pitagórico.

Conclusão 4.1 Dado $z \in \mathbb{Z}[i]$ com partes real e imaginária não-nulas satisfazendo

$$|Re(z)| \neq |Im(z)|,$$

tem-se que $|z^2|$, $|Re(z^2)|$ e $|Im(z^2)|$ constituem um terno pitagórico.

Usando a forma algébrica $z = a + bi$ e a identidade (5), deduzimos que

$$|z^2| = |z|^2 = a^2 + b^2,$$

então decorre das expressões obtidas em (6) que (8) pode ser reescrito na forma

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2,$$

que evidencia as expressões obtidas por Euclides (ca. 300 a. C.) e nos permite uma última observação:

Observação 4.2 As partes real e imaginária de $z \in \mathbb{Z}[i]$ são inteiros relativamente primos com módulos distintos, se e somente se,

$$|z^2|, \qquad |Re(z^2)| \qquad \text{e} \qquad |Im(z^2)|$$

formam um terno pitagórico primitivo.

Para concluir o trabalho, trazemos dois exemplos que ilustram as conclusões obtidas nesta última seção.

Exemplo 4.1 Construir um terno pitagórico a partir do número complexo $z_1 = 2 - i$.

Solução: Calculando o quadrado de $z_1 = 2 - i$, tem-se que

$$z_1^2 = (2 - i)(2 - i) = 3 - 4i,$$

então o seu módulo será

$$|z_1^2| = |z_1|^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5,$$

logo os inteiros

$$|z_1^2| = 5, \qquad |Re(z_1^2)| = 3 \qquad \text{e} \qquad |Im(z_1^2)| = 4$$

formam um terno pitagórico.

Exemplo 4.2 Construir um terno pitagórico a partir do número complexo $z_2 = 3 + 2i$.

Solução: Calculando o quadrado de $z_2 = 3 + 2i$, obtém-se

$$z_2^2 = (3 + 2i)(3 + 2i) = 5 + 12i,$$

então o seu módulo será

$$|z_2^2| = |z_2|^2 = 3^2 + 2^2 = 13,$$

portanto os inteiros

$$|z_2^2| = 13, \qquad |Re(z_2^2)| = 5 \qquad e \qquad |Im(z_2^2)| = 12,$$

formam um terno pitagórico.

5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, abordamos de forma simples e conceituada a construção dos ternos pitagóricos, mediante o seu desenvolvimento histórico e sua importância dentro da área da Matemática, podendo destacar a história da Matemática e seu desenvolvimento como principal objeto de pesquisa e de conhecimento, que contribui para uma maior apropriação da cultura matemática.

Como fruto da pesquisa aqui realizada, foi possível demonstrar que podemos expandir a visão sobre os triângulos retângulos e as medidas de seus lados, relacionando a Geometria Euclidiana Plana e a Teoria dos Números, através dos ternos pitagóricos, que para muitos ainda é um assunto desconhecido.

Por fim, devemos destacar que o trabalho aqui apresentado teve como objetivo conhecer um pouco mais sobre a história da matemática com os ternos pitagóricos, na perspectiva de contribuir com discentes e docentes, que possivelmente venham a ter interesse pelo estudo dos ternos pitagóricos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**, 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

BLEZ, Manfinapul Armando; SILVA-FILHO, João Francisco. Generalizando os Ternos Pitagóricos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 98, p.03-05, 2019.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**, 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

CARMO, Manfredo Perdigão. et al. **Trigonometria e Números Complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 9: Geometria Plana**, 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

FERMAT, Pierre. **Arithmetica de Diofanto Contendo Observações por P. de Fermat**, 1. ed. 1670.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar - Volume 3: Trigonometria**, 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 6: Complexos, Polinômios e Equações**, 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

KAMERS, Fernando. **Pitágoras de Samos e o Teorema de Pitágoras**. 2008. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática)- Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal De Santa Catarina, Florianópolis, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96613>. Acesso em: 02 jun.2019.

LOOMIS, Elisha Scott. **The Pythagorean Proposition**. USA: NCTM, 1940.

MAIA, Jhordana Ellen Simão Brasil.; SILVA-FILHO, João Francisco. Construindo Ternos Pitagóricos com Números Complexos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 101, p. 19-21, 2020.

MOREIRA, Carlos Gustavo; MARTÍNEZ, Fabio Brochero; SALDANHA, Nicolau. **Tópicos de Teoria dos Números**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

PRINCETON UNIVERSITY. Andrew Wiles, maio de 2013. Disponível em: <http://dof.princeton.edu/about/clerk-faculty/emeritus/andrew-john-wiles>. Acesso em: 02 jun. 2019.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**, 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.

SOARES, Márcio Gomes. **Cálculo em uma Variável Complexa**. 5a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

WIKIPÉDIA (https://pt.wikipedia.org/wiki/).

WILES, Andrew John.: Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem. **Annals of Mathematics**, v. 141, n. 3, p. 443-551, 1995.