



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOYCE SILVA SOUSA

O USO DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI, DO TEOREMA DE
PAPPUS-GULDIN E DE CONHECIMENTOS BÁSICOS DO CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E
VOLUMES NO ENSINO BÁSICO

REDENÇÃO

2020

JOYCE SILVA SOUSA

O USO DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI, DO TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN E
DE CONHECIMENTOS BÁSICOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES NO ENSINO BÁSICO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciada em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO

2020

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Sousa, Joyce Silva.

S725u

O uso do princípio de Cavalieri, do teorema de Pappus-Guldin e de conhecimentos básicos do cálculo diferencial e integral para o cálculo de áreas e volumes no ensino básico / Joyce Silva Sousa. - Redenção, 2020.

89f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva.

1. Princípios e práticas da organização do ensino de matemática nos anos iniciais. 2. Geometria plana. 3. Áreas - Estudo e ensino. 4. Análise volumétrica. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 372.7

JOYCE SILVA SOUSA

O USO DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI, DO TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN E DE CONHECIMENTOS BÁSICOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES NO ENSINO BÁSICO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 30 / 10 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Amãnda Angélica Feltrin Nunes.

Prof.ª Dra. Amãnda Angélica Feltrin Nunes

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Prof. Dr. Rafael Jorge pontes Diógenes

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a toda minha família, em especial aos meus pais e ao meu esposo, pessoas que sempre estão ao meu lado, me apoiando e me dando forças para vencer os obstáculos da vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente eu agradeço a Deus por ter me dado vida para realizar este sonho, força e saúde para superar todas as dificuldades e fortaleza para que eu pudesse ver em todas fases, sejam elas boas ou ruins, que eu sempre terei de ter com quem contar.

Ao meu esposo Nilderlan dos Santos Oliveira, por todo seu amor, concretizado no apoio, parceria e paciência que tem tido comigo nesta trajetória, sempre me incentivando a prosseguir e não me deixando desistir diante das dificuldades, sempre buscando uma solução para os problemas e tentando me fazer ver o melhor lado em tudo.

Aos meus pais, José Coutinho de Sousa e Zenilda Santos Silva Sousa e à minha irmã, Josemara Silva Sousa, pelo apoio e incentivo que sempre me deram nos estudos, depositando em mim sempre grande confiança e credibilidade nos meus sonhos. Pessoas que me criaram e me ensinaram os valores da vida, me fazendo crescer com responsabilidade, fé e também esperança em dias melhores.

Aos meus sogros, em especial à minha sogra, Cícera Pereira dos Santos Oliveira, pela gentil ajuda que me disponibiliza sem cessar, e independente de toda e qualquer circunstância.

Ao meu orientador Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, pela confiança depositada em mim na realização deste trabalho quando até eu mesmo desacreditei ele estava lá, crente que ia dar tudo certo e que estava tudo bem.

Aos professores Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes e Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes, por aceitarem participar da banca examinadora, cedendo um pouco do seu tempo em prol de nos ajudar com as suas valiosas colaborações e sugestões.

Aos meus amigos de Curso que contribuíram significativamente com a minha trajetória acadêmica, em especial Marinaldo Braga da Silva que muito me ajudou no decorrer desses últimos anos e também nos estudos desse trabalho, Moisés de Sousa Ferreira, Cristina dos Santos Freitas, Carlos Alexandre Ramos de Souza e Jhordana Ellen Brasil Simão Maia, pessoas as quais a vida me presenteou do curso de matemática da Unilab pra vida. E também muitos outros, Érika Joyce, Luís Fernando, Luan, Sharmenya, Manfinapul, e etc. ...

Aos meus amigos e familiares, todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram na realização deste trabalho, seja com uma ajuda nas dificuldades do dia a dia ou em orações. A todos o meu sincero agradecimento, muito obrigada!

À escola de ensino médio Almir Pinto, onde fui residente no período de atuação no residência pedagógica, experiência maravilhosa na formação da identidade docente, nas pessoas do diretor, João Davi, do preceptor, Hildegarton e dos professores Elane, Francimar e Natana e de todos que fazem a escola acontecer.

À UNILAB nas pessoas de todos que fazem o curso de matemática acontecer,

em especial aos professores do curso de licenciatura em matemática que de forma direta contribuíram na minha trajetória acadêmica.

À CAPES pelo apoio financeiro na participação no Programa Residência Pedagógica, no qual fui bolsista de agosto de 2018 à fevereiro de 2020.

“Com efeito, tendes necessidade de perseverança, para que, havendo feito a vontade de Deus, alcanceis a promessa. Hebreus 10:36.”

RESUMO

O presente trabalho visa em sua essência abordar de modo simples alguns conhecimentos de geometria, campo da matemática associado ao estudo de medições, apresentado em divisões lineares que serão pré-requisitos para a consolidação do trabalho proposto. O estudo de dois teoremas para áreas e volumes, o Princípio de Cavalieri e o Teorema de Pappus-Guldin, como desenvolvimento que se faz ferramenta primordial para as aplicações propostas. E por fim, a aplicação de todo o conteúdo que antecede, nos cálculos de áreas e volumes de figuras e sólidos geométricos de uma maneira mais simples e didática que visa contribuir tanto com os professores do ensino secundário na mediação do conteúdo quanto com os estudantes na aceitação e assimilação das fórmulas.

Palavras-chave: Princípio de Cavalieri. Pappus-Guldin. Áreas e Volumes.

ABSTRACT

The present work essentially aims to approach in a simple way some knowledge of geometry, field of mathematics associated with the study of measurements, presented in linear divisions that will be prerequisites for the consolidation of the proposed work. The study of two theorems for areas and volumes, the Cavalieri Principle and the Pappus-Guldin Theorem, as a development that becomes a primary tool for the proposed applications. And finally, the application of all the above content, in the calculation of areas and volumes of figures and geometric solids in a simpler and more didactic way that aims to contribute both with secondary school teachers in mediation of content and with students in acceptance and assimilation of formulas.

Keywords: Cavalieri Principle. Pappus-Guldin. Areas and Volumes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Retas Reversas	20
Figura 2 – Retas Paralelas	21
Figura 3 – Planos Secantes	21
Figura 4 – Planos Paralelos	21
Figura 5 – Triângulo	22
Figura 6 – Quadrado	22
Figura 7 – Retângulo	23
Figura 8 – Losango	23
Figura 9 – Trapézio	23
Figura 10 – Circunferência	24
Figura 11 – Círculo	24
Figura 12 – Coroa Circular	24
Figura 13 – Elipse	25
Figura 14 – Cubo	26
Figura 15 – Prisma	26
Figura 16 – Paralelepípedo	26
Figura 17 – Pirâmide	27
Figura 18 – Tetraedro	27
Figura 19 – Cilindro	28
Figura 20 – Cone	28
Figura 21 – Esfera	28
Figura 22 – Área da Região R	33
Figura 23 – Área	33
Figura 24 – Dividindo R em sub-retângulos	34
Figura 25 – Volume de R por Aproximação por Caixas Retangulares	35
Figura 26 – Volume da Região R	35
Figura 27 – Gráfico de F	37
Figura 28 – Caixa B	40
Figura 29 – Subcaixas de B	40
Figura 30 – Tetraedro T	42
Figura 31 – Projeção D	42
Figura 32 – Cilindro de Revolução	43
Figura 33 – Cone de Revolução	44
Figura 34 – Esfera de Revolução	45
Figura 35 – Elipsóide de Revolução	45
Figura 36 – Toro de Revolução	46

Figura 37 – Cilindro	46
Figura 38 – Cilindro Planificado	47
Figura 39 – Região \mathfrak{R}	49
Figura 40 – Aproximação Poligonal de \mathfrak{R}	49
Figura 41 – Região Delimitada	51
Figura 42 – Volumes de Sólidos	56
Figura 43 – Seção Transversal de S	57
Figura 44 – Seções de S	57
Figura 45 – Região R e o Sólido Gerado	58
Figura 46 – Princípio de Cavalieri para Áreas	61
Figura 47 – Princípio de Cavalieri para Volumes	61
Figura 48 – Aproximação por Poligonal	64
Figura 49 – Rotação da Poligonal	65
Figura 50 – Região S	67
Figura 51 – Retângulos Justapostos em S	67
Figura 52 – Circunferência Inscrita no Hexágono	69
Figura 53 – Circunferência Aproximada por Poligonal	70
Figura 54 – Semicircunferência	71
Figura 55 – Círculo Gerado pelo Segmento \overline{OR}	72
Figura 56 – Área da Elipse via Princípio de Cavalieri	73
Figura 57 – Volume do Prisma via Princípio de Cavalieri	74
Figura 58 – Prisma de Base Triângular	75
Figura 59 – Volume da Pirâmide	75
Figura 60 – Triângulo	76
Figura 61 – Volume do Cone	76
Figura 62 – Volume do Cilindro	78
Figura 63 – Volume do Esfera via Princípio de Cavalieri	79
Figura 64 – Volume da Esfera via Teorema de Pappus-Guldin	81
Figura 65 – Volume do Elipsóide com a Semiesfera	82
Figura 66 – Volume do Elipsóide com o Tetraedro	83
Figura 67 – Superfície Geratriz	85
Figura 68 – Superfície Gerada: Toro	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação entre Domínio e Imagem	29
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

UNILAB - Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	PRELIMINARES	18
2.1	GEOMETRIA	18
2.1.1	Conceitos Primitivos	18
2.1.2	Postulados	19
2.1.3	Geometria de Posição	20
2.1.4	Geometria Plana	22
2.1.4.1	<i>Figuras Geometricas Planas</i>	22
2.1.5	Geometria Espacial	25
2.1.5.1	<i>Figuras Geometricas Espaciais</i>	25
2.2	NOÇÕES BÁSICAS DE LIMITES	29
2.2.1	Noção Intuitiva	29
2.2.2	Limite de uma Função de Variável Real	30
2.3	NOÇÕES BÁSICAS DE INTEGRAIS	31
2.3.1	Noção Geral (intuitiva)	31
2.3.2	Integral Definida	32
2.3.3	Integral Dupla	34
2.3.3.1	<i>Integral Dupla Sobre Retângulos</i>	34
2.3.3.2	<i>Integral Dupla Sobre Regiões Gerais</i>	37
2.3.3.3	<i>Propriedades das Integrais Duplas</i>	37
2.3.4	Integral Tripla	39
2.3.4.1	<i>Integral Tripla Sobre Caixas Retangulares</i>	39
2.3.4.2	<i>Integral Tripla Sobre uma Região Limitada Geral</i>	41
2.4	SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO	43
2.4.1	Sólidos de Revolução	43
2.4.2	Área de uma Superfície de Revolução	46
2.5	CENTRÓIDE	47
2.6	VOLUME	52
2.6.1	Noção Intuitiva de Volume	52
2.6.2	Definição Geral de Volume	56
3	PRINCÍPIOS DE CAVALIERI	60
3.1	UM POUCO DA HISTÓRIA DE FRANCESCO BONAVENTURA CAVALIERI	60
3.2	UM POUCO DA HISTÓRIA DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI	60
3.3	PRINCÍPIOS DE CAVALIERI	61
3.4	OS PRINCÍPIOS DE CAVALIERI COMO TEOREMAS	61

4	TEOREMAS DE PAPPUS-GULDIN	63
4.1	UM POUCO DA HISTÓRIA DE PAPPUS DE ALEXANDRIA	63
4.2	UM POUCO DA HISTÓRIA DE PAUL GULDIN	63
4.3	UM POUCO DA HISTÓRIA DO TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN	63
4.4	TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN PARA ÁREAS	64
4.5	TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN PARA VOLUMES	66
5	APLICAÇÕES	69
5.1	ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA (VIA NOÇÕES DE LIMITES)	69
5.2	ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA (VIA CÁLCULO INTEGRAL)	70
5.3	ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA (VIA TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN)	71
5.4	ÁREA DA ELIPSE (VIA PRINCÍPIO DE CAVALIERI)	72
5.5	VOLUME DO PRISMA	74
5.6	VOLUME DA PIRÂMIDE	74
5.7	VOLUME DO CONE	76
5.8	VOLUME DO CILINDRO	77
5.9	VOLUME DA ESFERA (VIA PRINCÍPIO DE CAVALIERI)	79
5.10	VOLUME DA ESFERA (VIA TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN)	80
5.11	VOLUME DO ELIPSÓIDE (VIA PRINCÍPIO DE CAVALIERI) - DEMONSTRAÇÃO UM	81
5.12	VOLUME DO ELIPSÓIDE (VIA PRINCÍPIO DE CAVALIERI) - DEMONSTRAÇÃO DOIS	83
5.13	ÁREA E VOLUME DO TORO	85
6	CONCLUSÃO	87
	REFERÊNCIAS	88

1 INTRODUÇÃO

O cálculo de áreas e volumes está relacionado às necessidades do dia a dia do homem, tal prática sempre esteve presente na sociedade desde a antiguidade, a começar pela natureza de medição. No decorrer das descobertas matemáticas, a civilização foi progredindo e avançando cada vez mais nos conhecimentos, em prol de suprir suas deficiências, e também, pelo próprio instinto da curiosidade humana.

O presente trabalho traz em seu estudo a abordagem da geometria, campo da matemática ligado à medições. Mais especificamente trataremos o estudo do cálculo de áreas e volumes de sólidos geométricos, de maneira mais paupável e de metodologia aplicável no ensino médio. Sua essência visa contribuir com os professores do ensino secundário na mediação do conteúdo de áreas e volumes, e para tal fim fazemos o uso da fundamentação de dois teoremas que auxiliam para um caminho de cálculos mais simples, mas que também justificam os meios, são eles, o Princípio de Cavalieri e o Teorema de Pappus-Guldin.

Desta forma, fundamentamos este trabalho inicialmente com alguns conhecimentos intitulados por preliminares, com o objetivo de prepararmos seguramente uma boa base para a construção dos conhecimentos que serão aqui apresentados.

Portando, no capítulo inicial, intitulado por Preliminares, abordaremos conhecimentos de Geometria que se subdividem em conceitos primitivos, postulados, geometria de posição, geometria plana e figuras geométricas planas, geometria espacial e figuras geométricas espaciais. Noções Básicas de Limites e Noções Básicas de Integrais, subdivididas em integral definida, dupla e tripla. Superfície de Revolução, subdividida em sólidos de revolução e área de uma superfície de revolução. Trataremos também conhecimentos básicos de Centróide e por fim, de Volume, abordando a noção intuitiva e em seguida sua definição geral.

No capítulo seguinte trataremos uma explanação dos estudos relacionados ao Princípio de Cavalieri, apresentando Um Pouco da História de Francesco Bonaventura Cavalieri, bem como Um Pouco da História do Princípio de Cavalieri, o enunciado deste princípio e posteriormente a mensão deste como teoremas para áreas e volumes.

Na sequência, trataremos um capítulo que aborda novamente uma explanação contextualizada historicamente como no capítulo anterior, porém, agora relacionada ao estudo do Teorema de Pappus-Guldin, contando Um Pouco da História de Pappus de Alexandria, de Paul Guldin e do Teorema de Pappus-Guldin, bem como a apresentação do Teorema de Pappus-Guldin para áreas e para volumes.

No penúltimo capítulo, apresentamos as Aplicações, onde trazemos um pouco da aplicabilidade dos estudos aqui apresentados de forma linear, objetivando que o leitor consolide conosco as intenções deste presente trabalho, calculando áreas e volumes de sólidos de modo mais fácil e também de forma que as fórmulas já conhecidas se façam

coerente na construção natural do processo. Trataremos do cálculo da área da circunferência e da elipse, bem como o cálculo do volume do prisma, da pirâmide, do cilindro, da esfera, do elipsóide e do toro.

Por fim, temos o capítulo de conclusão e as citadas referências que embasaram o trabalho.

2 PRELIMINARES

No presente capítulo, apresentaremos alguns conceitos preliminares sobre o conhecimento da Geometria; Noções Básicas de limites; Noções Básicas de Integrais; Superfície de Revolução, Centróide e Volume.

Algumas definições, observações, teoremas e exemplos que nos servirão de apoio para melhor compreensão do trabalho proposto de forma linear, clara e sucinta afim de consolidarmos um entendimento seguro e eficaz.

2.1 GEOMETRIA

Traremos nesta seção um pouco do conhecimento dos conceitos primitivos, postulados, geometria de posição, geometria plana, figuras geométricas planas, geometria espacial e figuras geométricas espaciais, em definições baseadas em Dolce e Pompeo (1993) e Dolce e Pompeo (2005).

Inicialmente recapitulemos o significado da palavra geometria. A palavra “Geometria” vem do grego e corresponde a união dos termos “geo” de terra e “metria” de medida, que significa “medir terra”.

Na nossa área de trabalho a **Geometria** é a parte da matemática cujo objetivo é o estudo do espaço e das figuras que podem ocupá-lo.

2.1.1 Conceitos Primitivos

Conceitos Primitivos são aqueles que não necessitam de definições para sua afirmação e, na geometria, são as bases para a construção do conhecimento.

Os conceitos primitivos da geometria são os que nos levam a compreensão dos elementos matemáticos que dão base para a construção dos conhecimentos geométricos. Desses elementos, **ponto, reta, plano e espaço**, o que temos a seu respeito são apenas noções primitivas, ou seja, não existe uma definição precisa para eles.

Sabendo disso, o importante é conhecer sua utilidade para a geometria e o modo como os sólidos e figuras estabelecem suas relações com os mesmos. A seguir registramos algumas características dos citados elementos:

Ponto: O ponto é um objeto que não possui definição, dimensão nem forma. Sua única propriedade garantida é a sua localização e por isso são usados para representar localizações no espaço. Ainda assim o ponto é a base de toda a Geometria, pois é a partir de conjuntos deles que são formadas as figuras geométricas.

Reta: A reta é um conjunto de infinitos pontos colineares subsequentes. Assim sendo, a reta é uma entidade unidimensional simbolizada por uma linha que conceitualmente se estenderia infinitamente para os dois sentidos opostos.

Outras figuras unidimensionais são as semirretas e os segmentos de reta, que, respectivamente, são uma reta que possui começo, mas não possui fim, e uma parte da reta que possui ponto inicial e ponto final.

Plano: O plano também não tem definição, entretanto, podemos estudar sua formação e algumas de suas características. Assim como a reta é a figura formada pela justaposição de pontos, o plano é o objeto formado pelo enfileiramento de retas. Um plano, portanto, é um conjunto infinito e ilimitado de retas.

É dentro dos planos que são definidas as figuras geométricas bidimensionais.

Espaço: Assim como o plano é uma justaposição de retas, o espaço é uma justaposição de planos. O espaço é o local onde toda a geometria espacial acontece e faz sentido, onde todos os sólidos e figuras geométricas podem ser construídos. É todo o espaço que nos envolve e que segue infinita e ilimitadamente do ponto onde estamos para todas as direções. Trata-se da extensão natural do plano para a terceira dimensão e, por isso, sólidos geométricos construídos no espaço podem ter profundidade, além de largura e comprimento.

2.1.2 Postulados

Postulados ou Proposições Primitivas, na matemática, podem ser definidos como pontos de partidas dos quais a teia de informações e desenvolvimentos é iniciada. Assim sendo, são o que se considera como fato reconhecido, como uma verdade inquestionável. O postulado é uma afirmação aceita sem demonstração.

Na Geometria Euclidiana Plana, existem cinco postulados essenciais para a formação das noções seguintes.

Postulado da Existência:

- a) “Numa reta, bem como fora dela há infinitos pontos”.
- b) “Num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos”.

Postulado da Determinação:

- a) “Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles”.
- b) “Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles”.

Postulado da Inclusão:

- a) “Se uma reta possui dois pontos distintos contidos no plano, então essa reta está contida no plano.”

Postulado das Retas Paralelas:

- a) “Por um ponto P passa uma única reta r paralela a uma reta s dada”

Retas Concorrentes:

a) Qualquer reta r que passe por um ponto P , externo à uma reta dada s , que não possua inclinação igual à da reta s , então r será uma reta concorrente a reta dada s .

2.1.3 Geometria de Posição

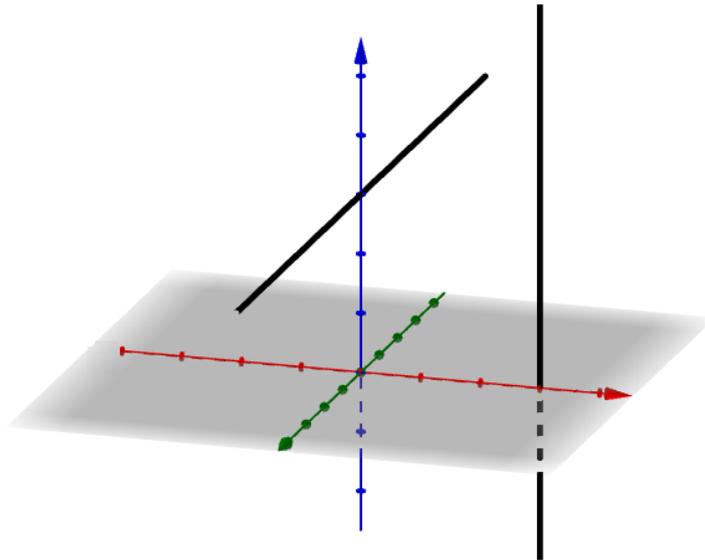
A Geometria Espacial de Posição compreende as possíveis posições relativas entre retas, entre planos e também as possíveis posições relativas entre retas e planos. Suas conclusões foram reunidas por Euclides, em 300 a.C. na obra “Os Elementos”, dividida em treze livros que reúnem os conhecimentos de geometria, álgebra e aritmética.

Neste trabalho destacaremos duas das posições relativas entre retas e duas das posições relativas entre planos:

Posições Relativas Entre Retas:

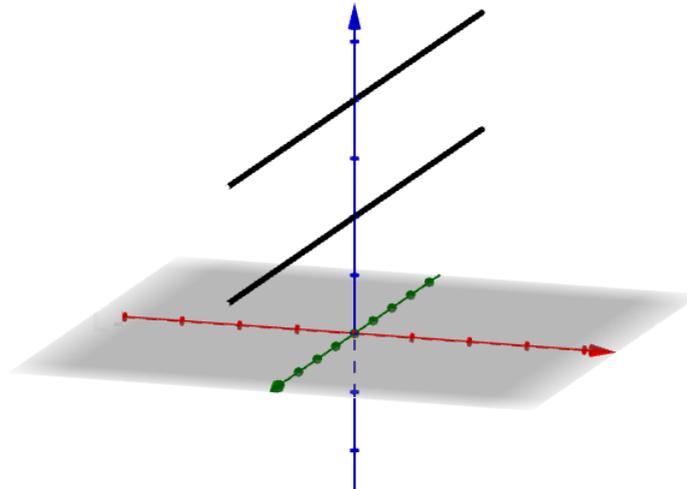
1. Duas retas são *reversas* se não existe um plano que as contêm.

Figura 1 – Retas Reversas



Fonte: Própria Autora.

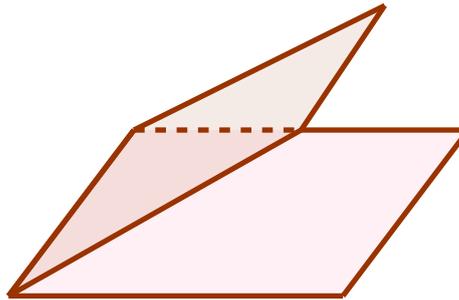
2. Duas retas são *paralelas* se existe um plano que as contenha e não tenham pontos em comum, ou seja, a interseção entre elas é vazia.

Figura 2 – Retas Paralelas

Fonte: Própria Autora.

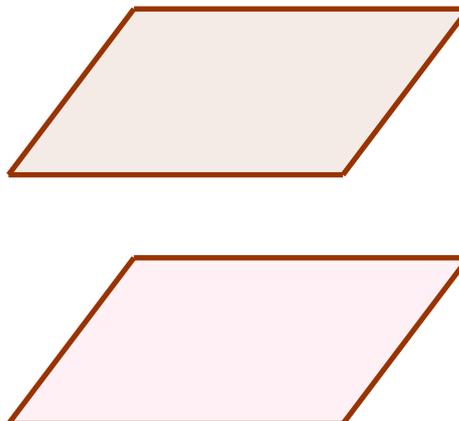
Posições Relativas Entre Planos:

1. Dois planos distintos são secantes se, se interceptam.

Figura 3 – Planos Secantes

Fonte: Própria Autora.

2. Dois planos distintos são paralelos se não se interceptam, ou seja, a interseção entre eles é vazia.

Figura 4 – Planos Paralelos

Fonte: Própria Autora.

2.1.4 Geometria Plana

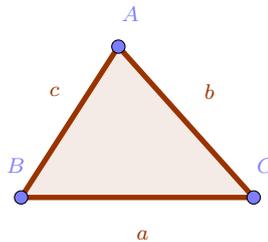
A Geometria Plana é a área da matemática que estuda as figuras planas, aquelas que não possuem volume, também chamada de euclidiana, em homenagem ao geômetra Euclides de Alexandria, considerado o “pai da geometria”. Inicia-se nos conceitos primitivos de ponto, reta e plano, e, com base neles, desenvolve-se até a construção das figuras planas, com o cálculo de suas respectivas áreas e perímetros.

2.1.4.1 Figuras Geométricas Planas

Definimos como figura plana qualquer representação fechada feita no plano, como por exemplo, a circunferência, e os casos especiais conhecidos como *polígonos*, as principais figuras planas, formadas pela união de segmentos de retas fechados, estes possuem propriedades e fórmulas que dependem da sua forma.

Triângulo: Polígono de três lados. Figura geométrica plana formada por três segmentos de retas não paralelas duas a duas.

Figura 5 – Triângulo

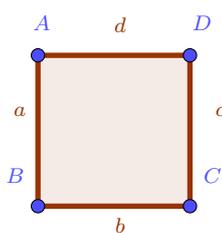


Fonte: Própria Autora.

Definição 2.1 *Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , e \overline{CD} , \overline{DA} interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um Quadrilátero.*

Quadrado: Quadrilátero regular formado por quatro lados congruentes (mesma medida). Ele é formado por quatro ângulos internos de 90° , os quais são chamados de ângulos retos.

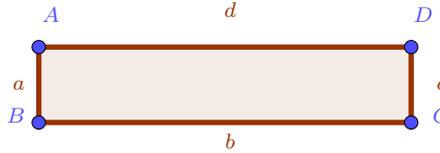
Figura 6 – Quadrado



Fonte: Própria Autora.

Retângulo: Quadrilátero formado por quatro lados, dois a dois paralelos e congruentes entre si. O retângulo possui todos os ângulos internos congruentes e a soma totaliza 360° .

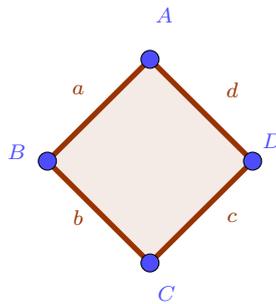
Figura 7 – Retângulo



Fonte: Própria Autora.

Losango: Quadrilátero equilátero formado por quatro lados iguais. Apresenta dois lados e ângulos opostos congruentes e paralelos, com duas diagonais que se cruzam perpendicularmente. Ele possui dois ângulos agudos (menores que 90°) e dois ângulos obtusos (maiores que 90°).

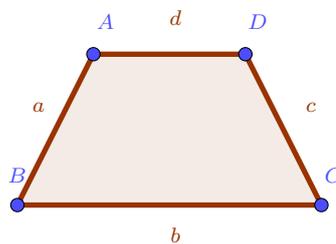
Figura 8 – Losango



Fonte: Própria Autora.

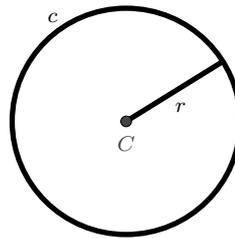
Trapézio: Quadrilátero notável com dois lados e bases paralelas, donde uma é maior e outra menor. A soma de seus ângulos internos totaliza 360° .

Figura 9 – Trapézio



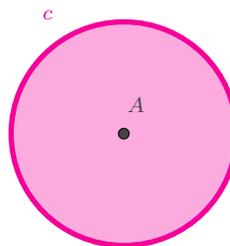
Fonte: Própria Autora.

Circunferência: É um conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é igual a uma distância (não nula) dada. O ponto dado é o centro e a distância dada é o raio da circunferência.

Figura 10 – Circunferência

Fonte: Própria Autora.

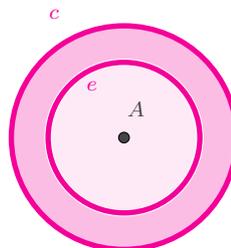
Círculo: O círculo não é considerado um polígono, afinal ele não possui lados, mas é uma figura plana de grande importância. O raio do círculo representa a medida entre o ponto central da figura e uma das extremidades. Seu diâmetro equivale duas vezes o raio, posto que representa o segmento de reta que passa pelo centro do círculo, dividindo-o em duas metades iguais.

Figura 11 – Círculo

Fonte: Própria Autora.

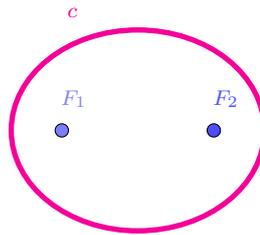
Observação 2.1 Chamamos de circunferência o contorno e de círculo toda a região desde o centro até o contorno.

Coroa Circular: Coroa circular é uma região limitada por dois círculos concêntricos, (círculos de mesmo centro).

Figura 12 – Coroa Circular

Fonte: Própria Autora.

Elipse: O lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, distintos, F_1 e F_2 (focos) do mesmo plano, é uma constante ($2a$), onde $2a > d(F_1, F_2)$.

Figura 13 – Elipse

Fonte: Própria Autora.

2.1.5 Geometria Espacial

A Geometria Espacial está pautada nos conceitos basilares e intuitivos que chamamos *conceitos primitivos* os quais possuem origem na Grécia Antiga e na Mesopotâmia (cerca de 1000 anos a.C.). Diferente da Geometria Plana que é o estudo das figuras bidimensionais, a Geometria Espacial corresponde a área da matemática que se encarrega de estudar os objetos que possuem mais de uma dimensão e ocupam lugar no espaço, ou seja, é a geometria para objetos tridimensionais, que por sua vez, são conhecidos como “sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais”.

2.1.5.1 Figuras Geométricas Espaciais

Figuras geométricas espaciais são aquelas que têm três dimensões: comprimento, altura e largura. Essas figuras são divididas em dois grupos: os poliedros, superfícies delimitadas por figuras geométricas planas, e os corpos redondos, sólidos delimitados por alguma superfície arredondada.

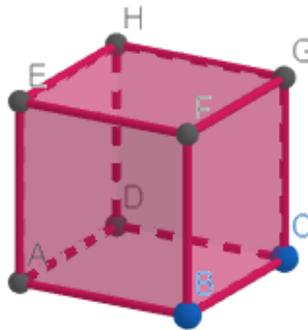
Os poliedros são figuras formadas por três elementos básicos: vértices, arestas e faces. Recebem nomes especiais de acordo com número de faces e seus principais representantes são as pirâmides e os prismas. Na geometria espacial, os poliedros são classificados em convexos, quando se encontram totalmente no semiespaço que essa face determina e, côncavos, quando duas das faces do poliedro não estão contidas em mesmo semiespaço.

Dentre os poliedros convexos existem os poliedros regulares, que são figuras que todos os lados possuem a mesma medida e com ângulos internos congruentes entre si. O tetraedro é um exemplo de poliedro regular e, os poliedros irregulares que são os sólidos geométricos com faces formadas por polígonos regulares e irregulares. Os dois tipos mais conhecidos são: as pirâmides e os prismas. Vejamos alguns exemplos de poliedros:

Cubo: O cubo é um poliedro regular com 6 faces poligonais regulares e congruentes. Cada face tem 4 arestas; de cada vértice partem 3 arestas e arestas formam ângulos poliédricos

congruentes.

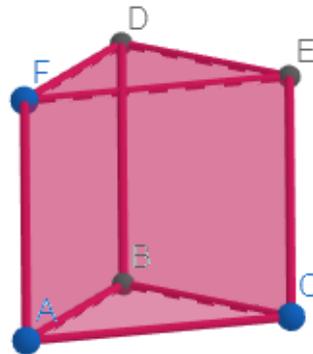
Figura 14 – Cubo



Fonte: Própria Autora.

Prisma: É um caso particular de poliedro. Para definir um prisma, consideremos dois planos distintos e paralelos, α e β , um polígono convexo contido em α e uma reta t concorrente a esses planos. A reunião de todos os segmentos de reta paralelos a t com uma das extremidades no polígono e a outra em β denomina-se *prisma*.

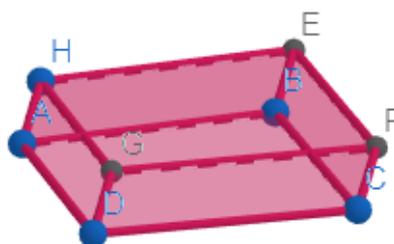
Figura 15 – Prisma



Fonte: Própria Autora.

Paralelepípedo: O Paralelepípedo é um prisma que possui base e faces em formato de paralelogramos (polígono de quatro lados). Em outras palavras, o paralelepípedo é um prisma quadrangular com base de paralelogramos.

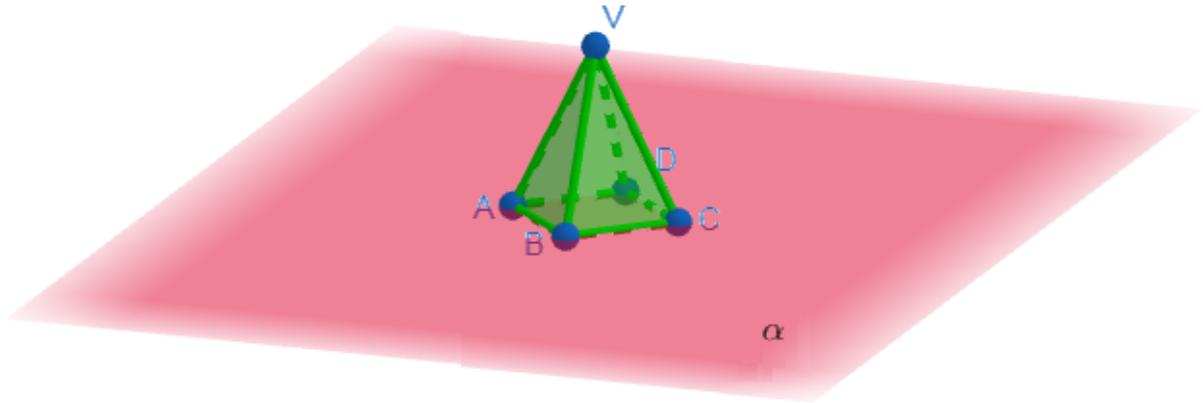
Figura 16 – Paralelepípedo



Fonte: Própria Autora.

Pirâmide: Para definir uma pirâmide, consideremos um plano α , um polígono convexo contido em α e um ponto V , fora do plano. A reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e outra em um ponto de um polígono é denominada *pirâmide*.

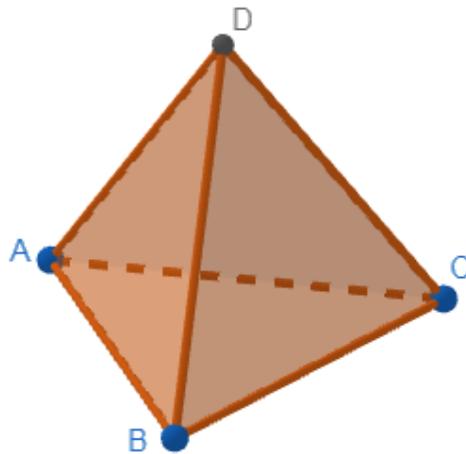
Figura 17 – Pirâmide



Fonte: Própria Autora.

Tetraedro: O tetraedro é um poliedro regular, também conhecido como uma pirâmide triangular, que apresenta as quatro faces congruentes e as seis arestas também congruentes.

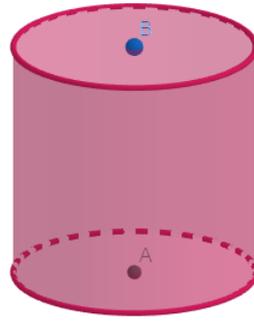
Figura 18 – Tetraedro



Fonte: Própria Autora.

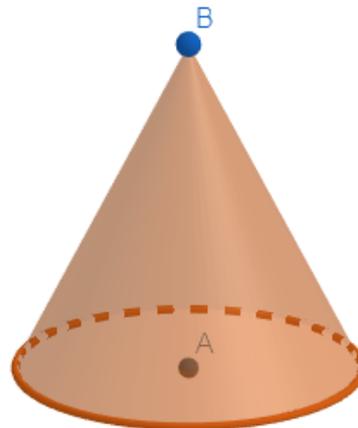
Já os corpos redondos são figuras geométricas que apresentam pelo menos uma parte arredondada em sua superfície. Vejamos alguns exemplos:

Cilindro: Para definir um cilindro, consideremos dois planos distintos e paralelos, α e β , um círculo de centro O e raio r , contido em α , e um segmento AB , com $A \in \alpha$ e $B \in \beta$. Denomina-se *cilindro circular* ou simplesmente *cilindro*, o conjunto de todos os segmentos paralelos e congruentes a \overline{AB} com uma extremidade no círculo de centro O em α e outra em β .

Figura 19 – Cilindro

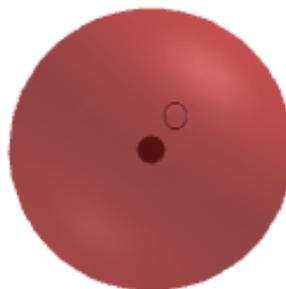
Fonte: Própria Autora.

Cone: Para definir um cone, consideremos um círculo de centro O e raio r situado num plano α e um ponto V fora de α . Denomina-se *cone circular* ou simplesmente *cone* à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

Figura 20 – Cone

Fonte: Própria Autora.

Esfera: Para definir a esfera, consideremos um ponto O e um segmento de medida r . Denomina-se *esfera* de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância \overline{OP} seja menor ou igual a r .

Figura 21 – Esfera

Fonte: Própria Autora.

2.2 NOÇÕES BÁSICAS DE LIMITES

Traremos nesta seção um pouco do conhecimento de limites, tanto em sua noção intuitiva quanto em sua definição, bem como também apresentaremos alguns exemplos. Todo conteúdo abordado baseado em Stewart (2016) e Guidorizzi (2001).

2.2.1 Noção Intuitiva

A noção de limite é basicamente intuitiva, pois estudamos a relação entre o domínio e a imagem de uma função, atribuindo valores a x e verificando os valores próximos da imagem, por isso dizemos que o número tende a um valor específico.

No estudo de limites estamos interessados em valores de x próximos a a e não quando $x = a$. Dessa forma, mesmo quando a função não está definida em a ainda é possível calcular seu limite, como nos mostrará os exemplos 2.1, 2.2 e 2.3.

O limite estuda fundamentalmente a relação entre o domínio e a imagem de uma função, e tem por objetivo estudá-la à medida que o seu domínio se aproxima de determinado valor. Dessa forma, analisamos o valor da imagem de acordo com o domínio.

Por exemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$ tende a zero quando o x tende ao ∞ .

Pois, à medida que o valor de x aumenta, o respectivo valor de y diminui, aproximando-se de zero. Vejamos a tabela a seguir:

Tabela 1 – Relação entre Domínio e Imagem

x	$f(x)$
10	0,1
100	0,01
1000	0,001
10000	0,0001
100000	0,00001

Fonte: Própria Autora

A notação utilizada para expressar que $f(x)$ tende a L quando x tende ao ∞ é,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

Para o exemplo anterior temos,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Exemplo 2.1 *Utilizando a ideia intuitiva de limite, vamos calcular o seguinte limite:*

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}.$$

Solução: Seja $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$, $x \neq 2$; f não está definida em $x = 2$. Então, para $x \neq 2$, temos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = (x - 2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0. \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.2 Utilizando a ideia intuitiva de limite, vamos calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$$

Solução: Seja $f(x) = \frac{x^2 + x}{x}$, $x \neq 0$; f não está definida em $x = 0$. Então, para $x \neq 0$, temos:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x} = (x + 1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1. \quad \blacksquare$$

2.2.2 Limite de uma Função de Variável Real

Definição 2.2 Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f . Dizemos que f tem limite L , em p , se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tal número L , que quando existe é único, será indicado por

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x).$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases}$$

Em palavras, a definição afirma que os valores da função $f(x)$ tendem a um limite L quando x tende a um número p , se o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e L puder se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de p , mas não igual a p .

Exemplo 2.3 Vamos mostrar, usando a definição, que $\lim_{x \rightarrow 5} 4x - 11 = 9$.

Solução: Devemos provar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que,

$$0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow |(4x - 11) - 9| < \epsilon.$$

De fato, observe que,

$$|(4x - 11) - 9| = |4x - 20| = 4|x - 5| < 4\delta.$$

Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{4}$, teremos,

$$\begin{aligned} 4|x - 5| < 4 \cdot \frac{\epsilon}{4} &\Rightarrow (4|x - 5|) < \epsilon \\ &\Rightarrow |x - 5| < \epsilon, \end{aligned}$$

como queríamos. ■

2.3 NOÇÕES BÁSICAS DE INTEGRAIS

Nesta subseção, traremos um pouco dos conhecimentos de integral definida, de modo “informal” com a noção mais intuitiva, e de modo formal na sua definição, observações, teorema e exemplo, todo conteúdo baseados em Leithold (1994).

2.3.1 Noção Geral (intuitiva)

No cálculo, a integral de uma função foi criada originalmente para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano. Existem várias definições para a integração, todas elas visando resolver alguns problemas conceituais relacionados a limites, continuidade e existência de certos processos utilizados na definição. O processo de se calcular a integral de uma função é chamado de integração.

Seja f uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$. A integral definida desta função é denotada como

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

onde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

A ideia desta notação utilizando um S comprido é generalizar a noção de somatório. Isto porque, intuitivamente, a integral de $f(x)$ sobre o intervalo $[a, b]$ pode ser entendida como a soma de pequenos retângulos de base Δx tendendo a zero e altura $f(x_i^*)$ onde x_i^* é um ponto amostral arbitrário do subintervalo, obtido na divisão do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ e o produto $f(x_i^*)\Delta x$ é a área deste retângulo. A soma de todas estas pequenas áreas (áreas infinitesimais), fornece a área entre a curva $y = f(x)$ e o eixo das abscissas. Mais precisamente, pode-se dizer que a integral acima é o valor limite da soma:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i^*)\Delta x.$$

2.3.2 Integral Definida

Definição 2.3 *Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Então, f será integrável em $[a, b]$ se existir um número L satisfazendo a seguinte condição:*

Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda partição Δ inclusive para a norma do maior comprimento do subintervalo, acontece, $\|\Delta\| < \delta$, com ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$, temos

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - L \right| < \epsilon.$$

Nessas condições, escrevemos

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = L.$$

Definição 2.4 *Se f for uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, então a integral definida de f de a até b , denotada por $\int_a^b f(x) dx$, será dada por*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x,$$

se o limite existir.

Observação 2.2 A afirmação “a função f é integrável no intervalo fechado $[a, b]$ ” significa dizer que “a integral definida de f de a até b existe”.

Observação 2.3 Na notação de integral definida $\int_a^b f(x) dx$, $f(x)$ é chamada integrando, a de limite inferior e b de limite superior. O símbolo \int é chamado de sinal de integração. O sinal de integração lembra um S maiúsculo, o que é apropriado, pois a integral definida é o limite de uma soma.

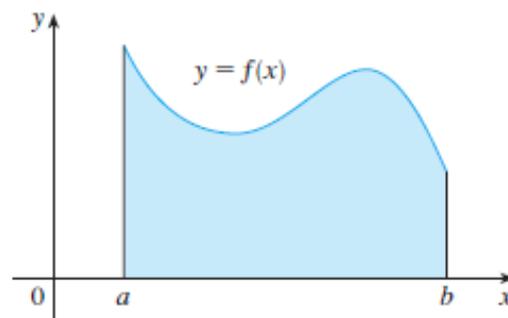
Teorema 2.1 *Se uma função for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então ela será integrável em $[a, b]$.*

Definição 2.5 *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, a medida A da área da região R é dada por*

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \Leftrightarrow A = \int_a^b f(x) dx.$$

Essa definição estabelece que se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, a integral definida $\int_a^b f(x) dx$ poderá ser interpretada geometricamente como a medida da área da região R mostrada na figura abaixo.

Figura 22 – Área da Região R



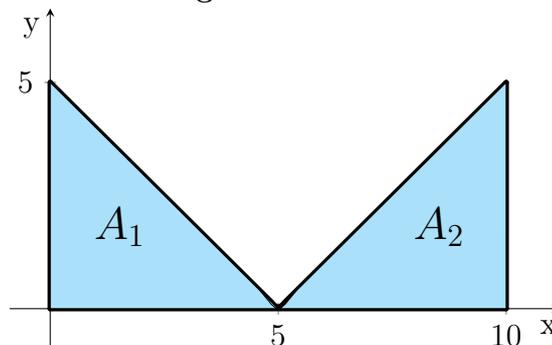
Fonte: Stewart (2016, p. 338).

Exemplo 2.4 Vamos calcular a integral a seguir, interpretando-a em termos de área:

$$\int_0^{10} |x - 5| dx.$$

Solução: Uma vez que $f(x) = |x - 5| \geq 0$, podemos interpretar essa integral como a área da curva $y = |x - 5|$ de 0 até 10. Então o gráfico de $y = |x - 5|$, pode ser interpretado como a soma das áreas dos dois triângulos:

Figura 23 – Área



Fonte: Própria Autora.

$$\int_0^{10} |x - 5| dx = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}(5) \cdot (5) + \frac{1}{2}(5) \cdot (5) = 2 \left[\frac{1}{2}(5 \cdot 5) \right] = 25.$$

■

2.3.3 Integral Dupla

Nesta subseção, traremos um pouco dos conhecimentos de integral dupla sobre retângulos, sobre regiões gerais, e propriedades da integrais duplas, em definição e exemplos baseados em Stewart (2013).

2.3.3.1 Integral Dupla Sobre Retângulos

Considere uma função $f \geq 0$ de duas variáveis definidas em um retângulo fechado,

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

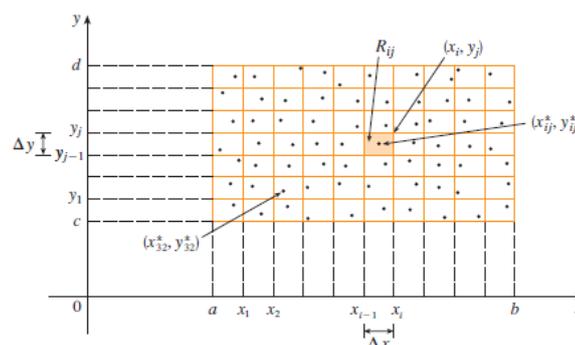
Vamos dividir o retângulo R em sub-retângulos, do seguinte modo:

- Dividindo o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/m$.
- Dividindo o intervalo $[c, d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de mesmo comprimento $\Delta y = (d - c)/n$.
- Traçando retas paralelas aos eixos coordenados, passando pelas extremidades dos subintervalos, formamos assim os sub-retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada um dos quais com área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

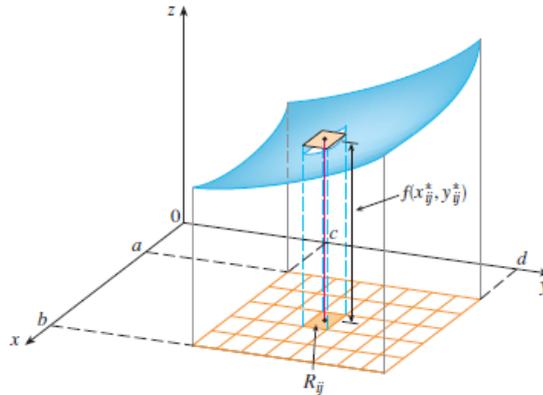
Figura 24 – Dividindo R em sub-retângulos



Fonte: Stewart(2013, p. 875).

Escolhamos um ponto arbitrário, que chamaremos ponto de amostragem, (x_{ij}^*, y_{ij}^*) , em cada R_{ij}^* , e tome $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ imagem desse ponto.

Figura 25 – Volume de R por Aproximação por Caixas Retangulares



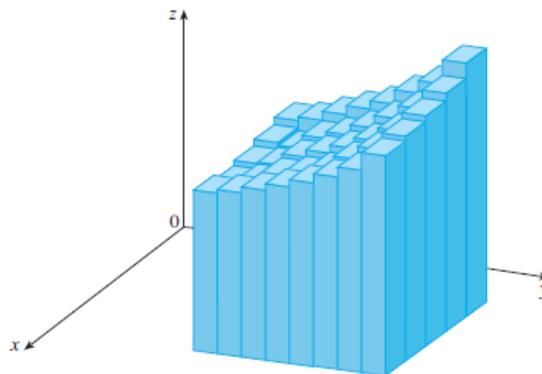
Fonte: Stewart (2013, p. 875).

Façamos agora a seguinte multiplicação $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$ e obteremos o volume de uma caixa retangular fina de base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$.

Seguindo esse processo para todos os retângulos, somando o volume das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume do sólido S que está acima da região R e abaixo do gráfico de f .

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A.$$

Figura 26 – Volume da Região R



Fonte: Stewart (2013, p. 875).

Exemplo 2.5 Estime o volume do sólido que está abaixo da superfície $z = xy$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$. Utilize a soma de Riemann com $m = 3, n = 2$ e tome como ponto de amostragem o canto superior direito de cada sub-retângulo.

Solução: A superfície é o gráfico de $f(x, y) = xy$ e a área de cada sub-retângulo $\Delta A = 4$. Então, estimando o volume pela soma de Riemann com $m = 3, n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) \Delta A = f(2, 2) \Delta A + f(2, 4) \Delta A + f(4, 2) \Delta A + f(4, 4) \Delta A + f(6, 2) \Delta A \\ &\quad + f(6, 4) \Delta A \\ &= (4)4 + (8)4 + (8)4 + (16)4 + (12)4 + (24)4 \\ &= 288. \end{aligned}$$

■

Definição 2.6 A integral dupla de f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A,$$

se esse limite existir.

Se $f(x, y) \geq 0$, então o volume V do sólido que está acima do retângulo R e abaixo da superfície $z = f(x, y)$ é

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

Exemplo 2.6 Calcule a integral dupla, identificando-a antes com o volume de um sólido.

$$\iint_R (5 - x) dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3\}.$$

Solução: Seria difícil calcular a integral diretamente da definição anterior, mas como $z = (5 - x) \geq 0$, pois $0 \leq x \leq 5$, podemos calcular a integral interpretando-a como um volume. Se $z = 5 - x$, então $z + x = 5$ e $z \geq 0$, logo a integral dupla dada representa o volume do sólido que está abaixo do plano $z = 5 - x$ e acima do retângulo, cujo volume é igual a $\frac{1}{2}x \cdot y \cdot z$. Logo,

$$V = A_b \cdot h = \frac{1}{2}(3 \cdot 5) \cdot 5 = 37,5.$$

■

2.3.3.2 Integral Dupla Sobre Regiões Gerais

Queremos integrar a função f não somente sobre retângulos, mas também sobre uma região D de forma mais geral. Vamos supor que D seja uma região limitada, o que significa que D pode estar contida em uma região retangular R .

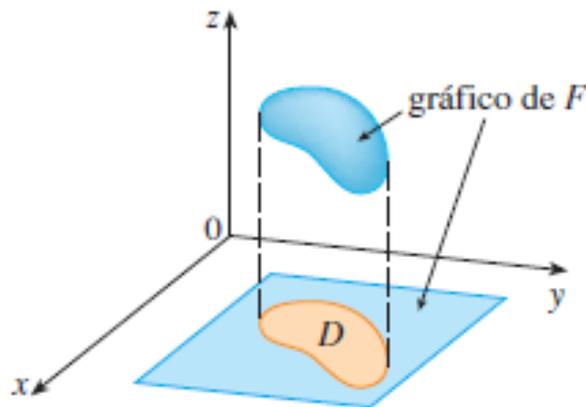
Definimos, então, uma nova função F , com domínio R , por $F(x, y) = f(x, y)$ se (x, y) está em D , 0 se (x, y) está em R mas não em D . Se F for integrável em R , então definimos a integral dupla de f em D por

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA,$$

onde F é dada pela equação anterior.

No caso em que $f(x, y) \geq 0$, podemos ainda interpretar $\iint_D f(x, y) dA$ como o volume do sólido que está acima de D e abaixo da superfície $z = f(x, y)$, (o gráfico de f). Você pode constatar que isso é razoável comparando os gráficos de f e F e lembrando que $\iint_R F(x, y) dA$ é o volume abaixo do gráfico de F .

Figura 27 – Gráfico de F



Fonte: Stewart (2013, p. 888).

2.3.3.3 Propriedades das Integrais Duplas

1. $\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA$
2. $\iint_D cf(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA$

Se $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) em R , então,

$$3. \iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$$

Se $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 e D_2 não se sobrepõem exceto talvez nas fronteiras, então

$$4. \iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$$

Se integrarmos a função constante $f(x, y) = 1$ sobre uma região D , obteremos a área de D :

$$5. \iint_D 1 dA = A(D)$$

Se $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo (x, y) em D , então

$$6. mA(D) \leq \iint_D f(x, y) dA \leq MA(D).$$

Exemplo 2.7 Calcule a integral dupla,

$$\iint_D y^2 dA, D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1, -y - 2 \leq x \leq y\}.$$

Solução:

$$\begin{aligned} \iint_D y^2 dA &= \int_{-1}^1 \int_{-y-2}^y y^2 dx dy = \int_{-1}^1 [y^2 x]_{-y-2}^y dy = \int_{-1}^1 y^2 (y - (-y - 2)) dy \\ &= \int_{-1}^1 y^2 (y + y + 2) dy = \int_{-1}^1 (2y^3 + 2y^2) dy = \left[2\frac{y^4}{4} + 2\frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \left[\left(\frac{2}{4} + \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{3} \right) \right] = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.8 . Determine o volume do sólido que está abaixo do plano $x - 2y + z = 1$ e acima da região limitada por $x + y = 1$ e $x^2 + y = 1$.

Solução: Podemos escrever a região limitada como,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Portanto, o volume abaixo de $z = 1 - x + 2y$ e acima de D é:

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (1 - x + 2y) dA = \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} (1 - x + 2y) dy dx = \int_0^1 [y - xy + y^2]_{1-x}^{1-x^2} dx \\
 &= \int_0^1 [((1 - x^2) - x(1 - x^2) + (1 - x^2)^2) - ((1 - x) - x(1 - x) + (1 - x)^2)] dx \\
 &= \int_0^1 [(1 - x^2 - x + x^3 + 1 - 2x^2 + x^4) - (1 - x - x + x^2 + 1 - 2x + x^2)] dx \\
 &= \int_0^1 [(x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2) - (2x^2 - 4x + 2)] dx \\
 &= \int_0^1 (x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\
 &= \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2} \right) - (0) \right] = \frac{17}{60}.
 \end{aligned}$$

■

2.3.4 Integral Tripla

Nesta subseção, trataremos um pouco dos conhecimentos de integral tripla sobre caixas retangulares e sobre uma região limitada geral, em definição e exemplos, baseados em Stewart (2013).

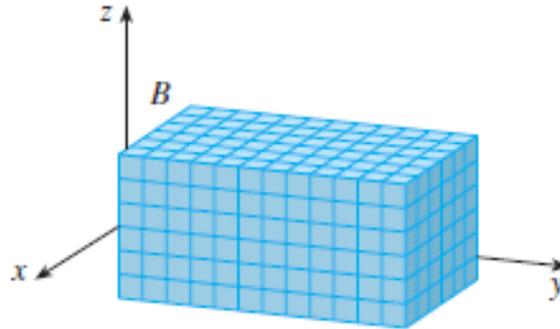
2.3.4.1 Integral Tripla Sobre Caixas Retangulares

Inicialmente trataremos o caso mais simples, quando f é definida em uma caixa retangular

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}.$$

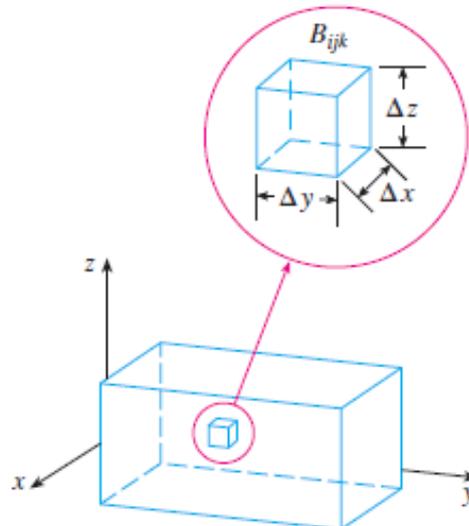
Devemos dividir B em subcaixas do seguinte modo:

- Divide-se $[a, b]$ em l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimentos iguais Δx .
- Divide-se $[c, d]$ em m subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de comprimentos iguais Δy .
- Divide-se $[r, s]$ em n subintervalos $[z_{k-1}, z_k]$ de comprimentos iguais Δz .

Figura 28 – Caixa B 

Fonte: Stewart (2013, p. 913).

Os planos que passam pelas extremidades desses subintervalos, paralelos aos planos coordenados, subdividem a caixa B em lmn subcaixas, $B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, cada subcaixa tem volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

Figura 29 – Subcaixas de B 

Fonte: Stewart(2013, p. 913).

Assim formamos a soma tripla de Riemann,

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

onde o ponto de amostragem $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está em B_{ijk} . Deste modo definimos a integral tripla como o limite das somas triplas de Riemann.

Definição 2.7 A integral tripla de f na caixa B é,

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

se esse limite existe.

2.3.4.2 Integral Tripla Sobre uma Região Limitada Geral

Agora definiremos a integral tripla sobre uma região limitada geral E no espaço tridimensional pelo mesmo método usado para as integrais duplas. Envolvendo E por uma caixa B do tipo $B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, definiremos em seguida uma função F de modo que ela coincida com f em E e seja 0 nos pontos de B fora de E , por definição;

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_B F(x, y, z) dV.$$

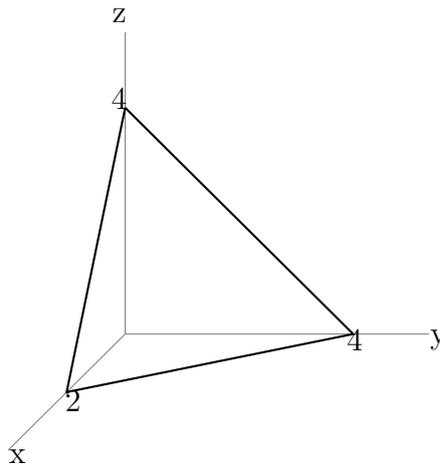
Essa integral existe se f for contínua e se o limite de E for “razoavelmente liso”.

A interpretação correspondente para a integral tripla $\iiint f(x, y, z) d(V)$, onde $f(x, y, z) \geq 0$, não é muito útil, porque seria um “hipervolume” de um objeto de quatro dimensões e, é claro, de muito difícil visualização. (Lembre-se de que E é somente o domínio da função f ; o gráfico de f pertence ao espaço quadridimensional.) Vamos nos deter o caso especial, onde $f(x, y, z) = 1$ para todos os pontos em E . Nesse caso, a integral tripla representa o volume de E :

$$V(D) = \iiint_E d(V)$$

Exemplo 2.9 Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$.

Solução: O tetraedro T e sua projeção D sobre o plano xy são dados nas figuras 30 e 31, abaixo. O limite inferior de T é o plano $z = 0$ e o limite superior é o plano $2x + y + z = 4$, isto é, $z = 4 - 2x - y$.

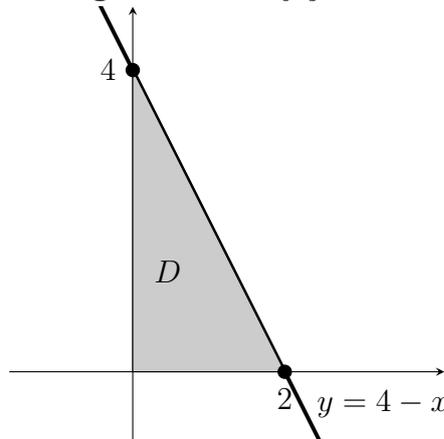
Figura 30 – Tetraedro T 

Fonte: Própria Autora.

Logo,

$$T = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - 2x, 0 \leq z \leq 4 - 2x - y\}.$$

Já a projeção D tem seus limites dados por $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 4 - 2x$.

Figura 31 – Projeção D 

Fonte: Própria Autora.

Portando, temos,

$$\begin{aligned} V(T) &= \iiint_T dV = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{4-2x-y} dz dy dx = \int_0^2 \int_0^{4-2x} (4 - 2x - y) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[4y - 2xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{4-2x} dx = \int_0^2 \left[4(4 - 2x) - 2x(4 - 2x) - \frac{(4 - 2x)^2}{2} \right] dx \\ &= \int_0^2 16 - 8x - 8x + 4x^2 - \left(\frac{16 - 16x + 4x^2}{2} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 16 - 16x + 4x^2 - (8 - 8x + 2x^2) dx = \int_0^2 8 - 8x + 2x^2 dx \\
&= \left[8x - 4x^2 + \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \left[\left(8(2) - 4(2)^2 + \frac{2(2)^3}{3} \right) - (0) \right] = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

■

2.4 SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Nesta seção traremos um pouco do conhecimento de Superfícies de Revolução, sólidos de revolução e área de uma superfície de revolução, em definições baseadas em Dolce e Pompeo (2005) e Stewart (2016).

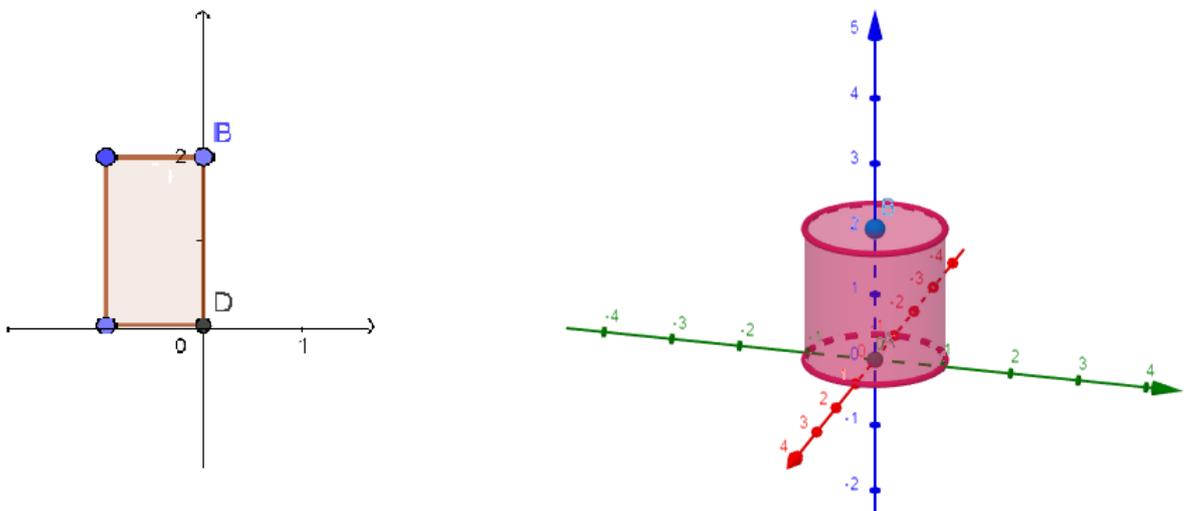
Superfície de Revolução é uma superfície no espaço euclidiano criada pela rotação de uma curva (a geratriz) em torno de um eixo de rotação. Em outras palavras, uma superfície de revolução é formada quando uma curva é girada em torno de uma reta. Essa superfície é a fronteira lateral de um sólido de revolução.

2.4.1 Sólidos de Revolução

Cilindro é a reunião da parte do cilindro circular ilimitado, compreendida entre dois planos de suas secções circulares paralelas e distintas em relação a essas secções.

Os segmentos com uma extremidade em um ponto da circunferência de centro O e raio r e a outra no ponto O' e raio r , são chamados *Geratrizes*.

Figura 32 – Cilindro de Revolução



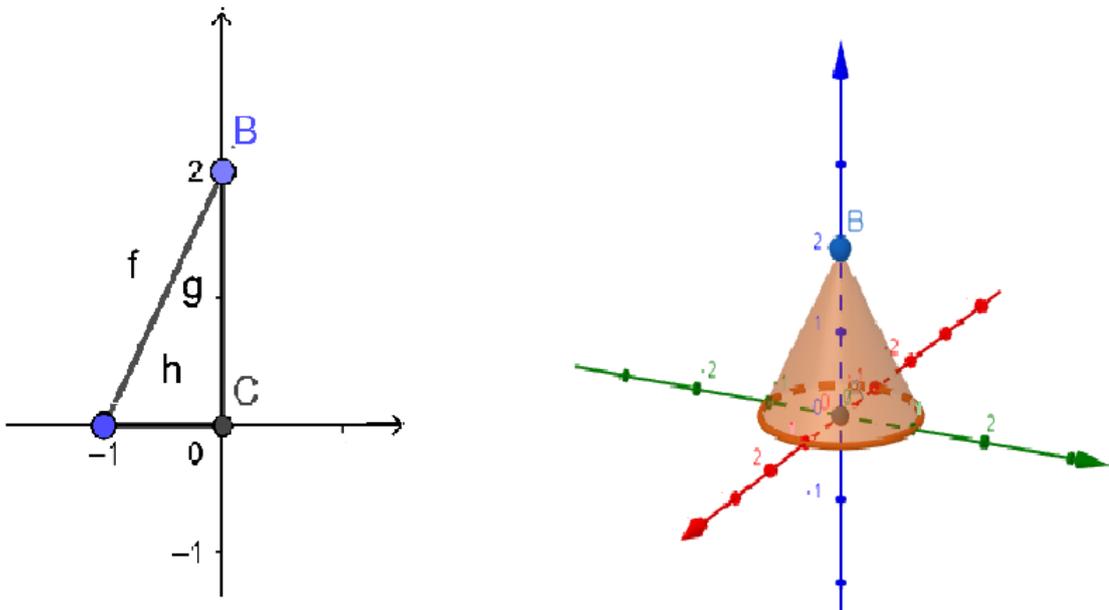
Fonte: Própria Autora.

Se as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases, temos um cilindro circular reto, que também é chamado de **cilindro de revolução**, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.

Cone é a parte do cone ilimitado que contém o vértice quando se divide este cone pelo plano de uma secção circular, reunida com esta secção.

Se a reta VO (a reta que passa pelo vértice V e centro O) é perpendicular ao plano da base, temos um cone circular, que também é chamado de **cone de revolução**, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.

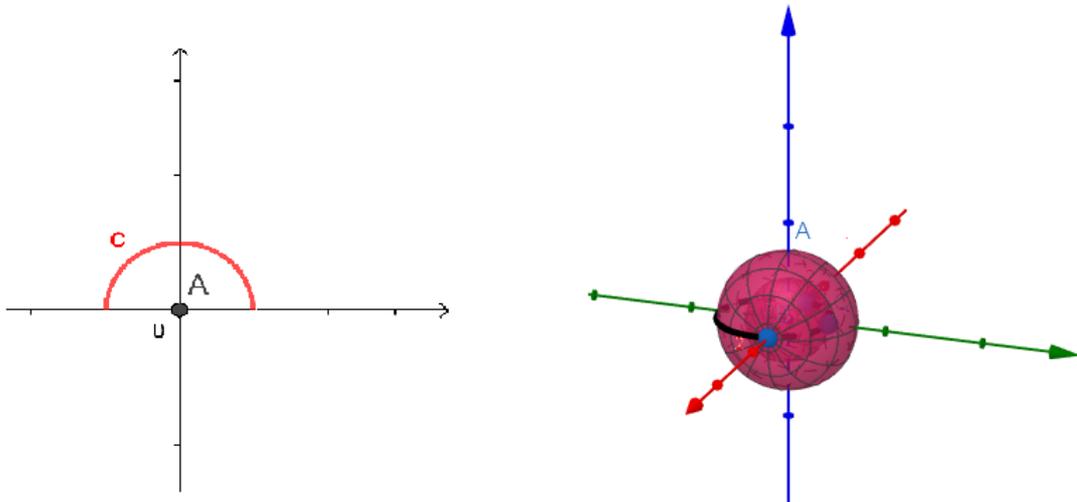
Figura 33 – Cone de Revolução



Fonte: Própria Autora.

Esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

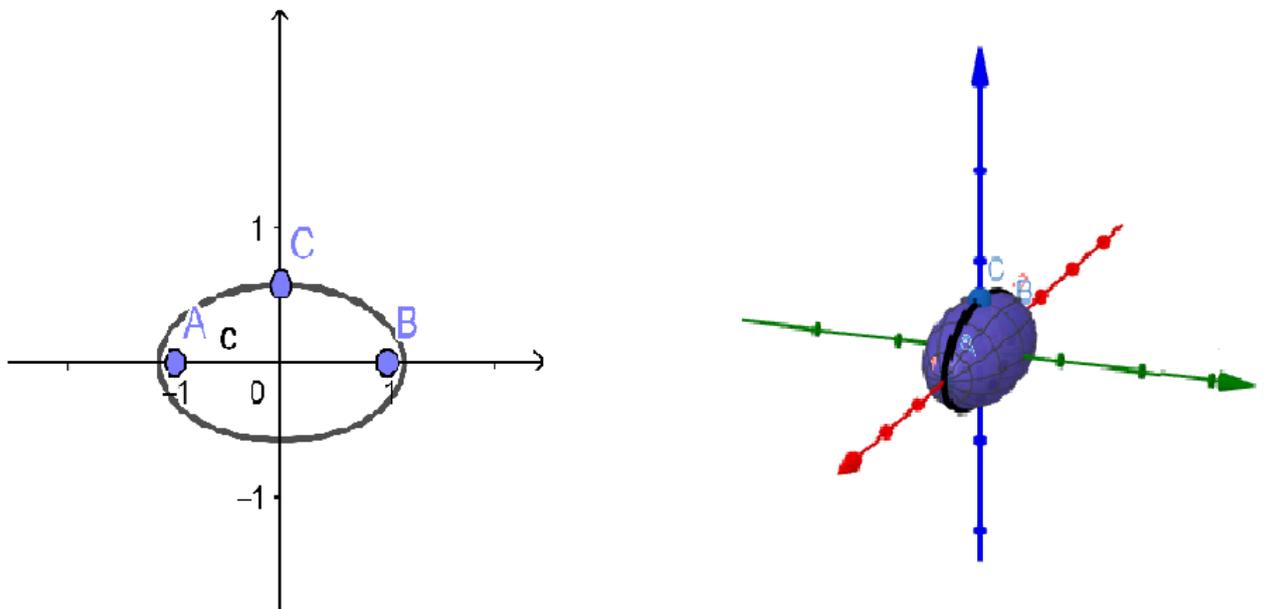
Figura 34 – Esfera de Revolução



Fonte: Própria Autora.

Elipsóide é um sólido de revolução gerado pelo movimento de uma elipse em torno de um eixo. Será achatada se rodar em torno do eixo menor e alongada se a elipse rodar em torno do eixo maior.

Figura 35 – Elipsóide de Revolução

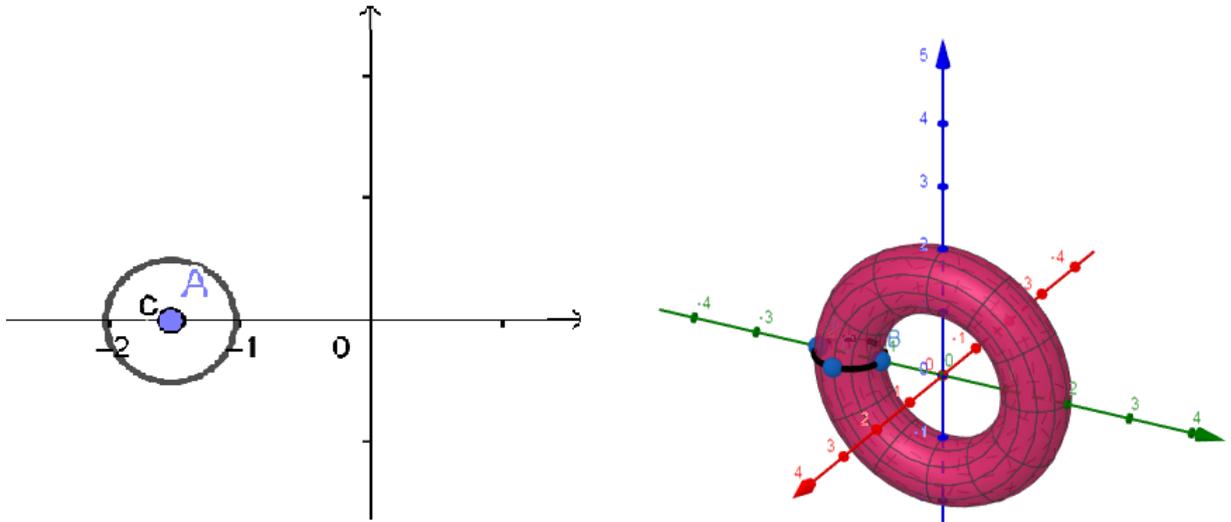


Fonte: Própria Autora.

Toro é uma superfície de revolução obtida ao girar uma circunferência em volta de um eixo contido no plano da circunferência e que não a intersecta.

É gerado pela deslocação de um círculo que apoia o seu centro numa circunferência.

Figura 36 – Toro de Revolução



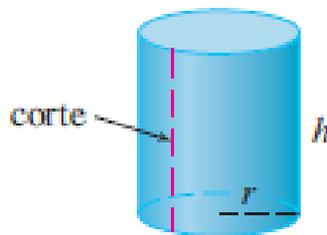
Fonte: Própria Autora.

2.4.2 Área de uma Superfície de Revolução

Queremos definir a área de uma superfície de revolução de maneira que ela corresponda à nossa intuição. Pensemos; se temos uma superfície de área A podemos ver que para pintá-la será necessário a mesma quantidade de tinta que para pintar uma região plana com área A , essa é a nossa “primeira intuição lógica” a respeito da área de uma superfície de revolução.

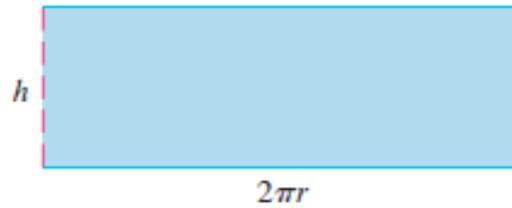
Resumidamente vejamos de um modo simples que, a área da superfície lateral de um cilindro circular com raio r e altura h como mostra a figura a seguir,

Figura 37 – Cilindro



Fonte: Stewart (2016, p. 495).

Logo, $A = 2\pi rh$. Assim, podemos imaginar um corte vertical para o desenrolarmos e neste caso obteremos um retângulo com dimensões $2\pi r$ e h como mostra a próxima figura,

Figura 38 – Cilindro Planificado

Fonte: Stewart (2016, p. 495).

De modo geral, nas superfícies de revolução mais complicadas seguimos com a estratégia de aproximar a curva por uma poligonal, onde facilmente encontramos seu perímetro apenas somando os comprimentos dos segmentos de reta que forma a poligonal e numa curva geral podemos aproximá-la por uma poligonal tomando o limite quando o número de segmentos da poligonal aumenta. Desta forma, podemos sempre aproximar a curva original por um polígono.

Quando esse polígono é girado ao redor de um eixo, ele cria uma superfície mais simples cuja área da superfície se aproxima da área da superfície real. Tomando o limite, podemos determinar a área exata da superfície.

2.5 CENTRÓIDE

Nesta seção tratemos um pouco do conhecimento de Centróide em definição e exemplo, baseados em Stewart (2016).

Definição 2.8 *O centróide, conhecido como centro geométrico de uma região \mathfrak{R} do plano ou mesmo como o centro de massa de uma placa.*

O centróide pode ser encontrado usando o princípio de simetria, que diz que se a região \mathfrak{R} é simétrica em relação à reta l então o centróide de \mathfrak{R} encontra-se em l . Se \mathfrak{R} é refletida em torno de l , então \mathfrak{R} continua a mesma, logo seu centróide permanece fixo, e os únicos pontos fixos estão em l . Assim, o centróide de um retângulo, por exemplo, é o seu centro.

De modo geral para encontrarmos o ponto P no qual uma fina placa de qualquer formato se equilibra horizontalmente, primeiro consideramos a situação mais simples onde duas massas m_1 e m_2 são presas a um bastão de massa desprezível em lados opostos a um apoio e a distâncias d_1 e d_2 do apoio. O bastão ficará em equilíbrio se

$$m_1 d_1 = m_2 d_2.$$

Supondo que o bastão esteja ao longo do eixo x com m_1 em x_1 e m_2 em x_2 e

o centro de massa em \bar{x} , teremos,

$$\begin{aligned} m_1(\bar{x} - x_1) &= m_2(x_2 - \bar{x}) \\ m_1\bar{x} + m_2\bar{x} &= m_1x_1 + m_2x_2 \\ \bar{x}(m_1 + m_2) &= m_1x_1 + m_2x_2 \\ \bar{x} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Os números m_1x_1 e m_2x_2 são denominados momentos das massas m_1 e m_2 em relação à origem, e a última equação nos diz que o centro de massa \bar{x} é obtido somando-se os momentos das massas e dividindo pela massa total.

Em geral, se tivermos um sistema de n partículas com massas m_1, \dots, m_n localizadas nos pontos x_1, \dots, x_n sobre o eixo x , podemos mostrar, analogamente, que o centro de massa do sistema está localizado em,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M}{m},$$

onde $m = \sum_{i=1}^n m_i$ é a massa total do sistema, e a soma dos momentos individuais,

$$M = \sum_{i=1}^n m_i x_i,$$

é chamada momento do sistema em relação à origem.

Agora, considerando um sistema de n partículas com massas m_1, \dots, m_n nos pontos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ no plano xy , por analogia com o caso unidimensional, definiremos o momento do sistema com relação ao eixo y como

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i,$$

e o momento do sistema com relação ao eixo x como

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i.$$

Como no caso unidimensional, as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de massa são dadas em termos dos momentos pelas fórmulas

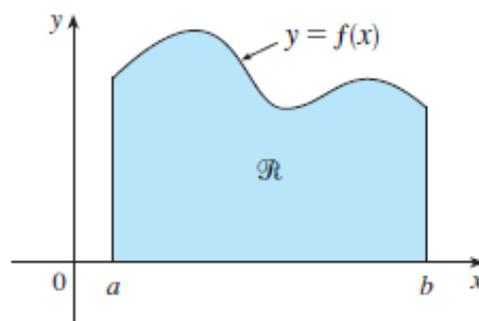
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

onde $m = \sum_{i=1}^n m_i$ é a massa total.

Como $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$, o centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) é o ponto em que uma única partícula de massa m teria os mesmos momentos do sistema, e os momentos devem ser definidos de maneira que, se a massa total da região está concentrada no centro de massa, então seus momentos permanecem inalterados. E ainda, o momento da união de duas regiões sem intersecção deve ser a soma dos momentos das regiões individuais.

Em linhas mais gerais, consideremos uma região \mathcal{R} do tipo mostrado na Figura 39, onde \mathcal{R} está entre as retas $x = a$ e $x = b$, acima do eixo x e abaixo do gráfico de f , onde f uma função contínua.

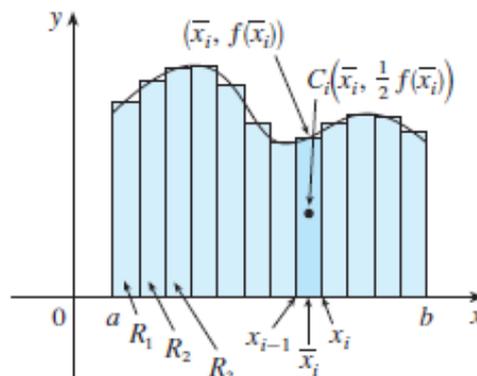
Figura 39 – Região \mathcal{R}



Fonte: Stewart (2016, p. 505).

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades x_0, \dots, x_n e larguras iguais a Δx e escolhendo o ponto amostral x_i^* como o ponto médio \bar{x} do i -ésimo subintervalo, que é o $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Determinamos a aproximação poligonal de \mathcal{R} mostrada na Figura 40, onde o centróide do i -ésimo retângulo aproximador de R_i é seu centro $C_i \left(\bar{x}_i, \frac{1}{2}f(\bar{x}_i) \right)$.

Figura 40 – Aproximação Poligonal de \mathcal{R}



Fonte: Stewart (2016, p. 505).

Sua área é $f(\bar{x}_i)\Delta x$ e sua massa é $\rho f(\bar{x}_i)\Delta x$, onde ρ é a densidade uniforme

do i -ésimo retângulo que ocupa a região \mathfrak{R} no plano. O que nos faz chegar ao momento de R_i em relação ao eixo y . Como o produto de sua massa pela distância de C_i ao eixo y , que é \bar{x}_i ,

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\Delta x]\bar{x}_i.$$

Somando esses momentos, obtemos o momento de aproximação poligonal de \mathfrak{R} e tomando o limite quando $n \rightarrow +\infty$, obtemos o momento da própria região \mathfrak{R} em relação ao eixo y :

$$M_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x = \rho \int_a^b x f(x) dx.$$

De modo análogo calculamos o momento de R_i em relação ao eixo x , como o produto de sua massa pela distância de C_i ao eixo x :

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\Delta x] \frac{1}{2} f(\bar{x}_i).$$

Do mesmo modo, somamos esses momentos e tomamos o limite para obter o momento de \mathfrak{R} em relação ao eixo x :

$$M_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho \frac{1}{2} [f(\bar{x}_i)]^2 \Delta x = \rho \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx.$$

Como no caso do sistema de partículas, o centro de massa da placa é definido de maneira que $m\bar{x} = M_y$ e $m\bar{y} = M_x$. Mas a massa da placa é o produto de sua densidade por sua área, onde no caso, temos,

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x) dx$$

e assim,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x f(x) dx}{\rho \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \\ \bar{y} &= \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{\rho \int_a^b f(x) dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}. \end{aligned}$$

Em resumo, o centro de massa da placa (ou centróide de \mathfrak{R}) está localizado no ponto (\bar{x}, \bar{y}) , onde

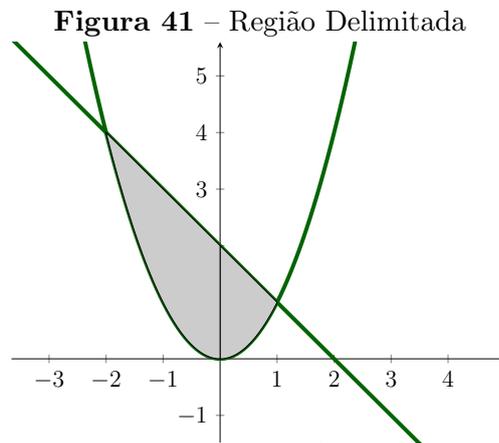
$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx$$

Esse estudo é baseado no conteúdo encontrado no livro Cálculo, de James (2016), para mais detalhes ou interesse de aprofundação no assunto o leitor deve consultá-lo.

Exemplo 2.10 Calcule o centróide da região delimitada pelas curvas $x + y = 2$ e $y = x^2$.

Solução: A região é esboçada na figura abaixo. Tomamos $f(x) = 2 - x$ e $g(x) = x^2$.



Fonte: Própria Autora.

Primeiro calculamos a área da região:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_{-2}^1 (2 - x) - x^2 dx = \int_{-2}^1 2 - x - x^2 dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 \\ &= \left[\left(2(1) - \frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^3}{3} \right) - \left(2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right) \right] \\ &= \left[\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3} \right) \right] = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = 8 - \frac{1}{2} - \frac{9}{3} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Portando,

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx \\
 &= \frac{1}{A} \int_{-2}^1 x[(2-x) - x^2] dx = \frac{1}{A} \int_{-2}^1 (2x - x^2 - x^3)dx \\
 &= \frac{1}{A} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^1 \\
 &= \frac{1}{A} \left[\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(4 + \frac{8}{3} - 4\right) \right] = \frac{1}{A} \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 4 - \frac{8}{3} + 4 \right] \\
 &= \frac{1}{A} \left[1 - \frac{1}{4} - 3 \right] = \frac{1}{\frac{9}{2}} \left[\frac{4 - 1 - 12}{4} \right] = \frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{9}{4} \right) = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx \\
 &= \frac{1}{A} \int_{-2}^1 \frac{1}{2} [(2-x)^2 - (x^2)^2] dx = \frac{1}{A} \int_{-2}^1 \frac{1}{2} [4 - 4x + x^2 - x^4] dx \\
 &= \frac{1}{2A} \int_{-2}^1 [4 - 4x + x^2 - x^4] dx = \frac{1}{2A} \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^1 \\
 &= \frac{1}{2A} \left[\left(4 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(-8 - 8 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{2A} \left[2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 16 + \frac{8}{3} - \frac{32}{5} \right] = \frac{1}{2A} \left[18 + 3 - \frac{33}{5} \right] \\
 &= \frac{1}{2A} \left[21 - \frac{33}{5} \right] = \frac{1}{2A} \left[\frac{105 - 33}{5} \right] = \frac{1}{2A} \cdot \frac{72}{5} = \frac{72}{10A} = \frac{2}{9} \cdot \frac{72}{10} = \frac{8}{5}.
 \end{aligned}$$

O que nos diz que o centróide da região delimitada pelas curvas dadas é o ponto

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{8}{5} \right).$$

■

2.6 VOLUME

Nesta subseção traremos um pouco do conhecimento de Volume em sua noção intuitiva e também em sua definição mais geral, proposições, análises e exemplos baseados em Stewart (2016) e Lima (2009).

2.6.1 Noção Intuitiva de Volume

Intuitivamente o volume de um sólido é a quantidade de espaço ocupado por ele. Estamos interessados em medir a grandeza “volume” e para isso deveremos compará-la

com uma unidade. O resultado dessa comparação será um número: a medida do volume.

Costuma-se tomar como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual será denominado cubo unitário. Seu volume por definição será igual a 1.

Assim sendo, o volume de um sólido S deverá ser um número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Consolidaremos o exposto acima com as seguintes proposições:

Proposição 2.1 *Mostre que o volume do cubo de aresta $n \in \mathbb{R}_+^*$ é igual a n^3 .*

O cubo é um caso particular de bloco retangular em que as arestas têm todas o mesmo comprimento. As 6 faces de um cubo são quadrados iguais. Um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento chama-se cubo unitário; por definição seu volume é 1.

Demonstração: 1º caso: Se $n \in \mathbb{N}$.

Se n é um número natural, ou seja, inteiro positivo, então o cubo de aresta n pode ser decomposto em n^3 cubos unitários justapostos. Portanto, o volume do cubo de aresta n é igual a soma dos volumes dos n^3 cubos unitários.

$$V = n^3.$$

2º caso: Se $n \in \mathbb{Q}$.

Se $n \in \mathbb{Q}$, então $n = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$.

Considerando um cubo unitário, dividimos suas arestas em q partes iguais e isso gera q^3 cubos de aresta $\frac{1}{q}$.

Chamaremos V' o volume desses cubos menores, então,

$$q^3 \cdot V' = 1 \Rightarrow V' = \frac{1}{q^3} = \left(\frac{1}{q}\right)^3.$$

Logo, o volume de cada cubo menor é,

$$V' = \left(\frac{1}{q}\right)^3.$$

Pensando agora, em um cubo de aresta $\frac{p}{q}$, podemos dividi-la em p partes iguais e teremos cada umas dessas partes medindo $\frac{1}{q}$, o que gera p^3 cubos de aresta $\frac{1}{q}$.

Portanto, o volume do cubo de aresta n será igual a soma dos volumes desses p^3 cubos menores, e como vimos, cada um desses cubos tem volume $\left(\frac{1}{q}\right)^3$.

Desta forma, realizando a soma, o volume (V) do cubo de aresta n será:

$$V = \underbrace{p^3}_{\text{quantidade dos cubos menores}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{q}\right)^3}_{\text{volume de cada cubo menor}} = n^3.$$

3º caso: Se $n \in \mathbb{I}$.

Seja a um número irracional. Para qualquer $x < n^3$ existe um número racional $r < n$, tão próximo de n quanto se queira, de forma que $x < r^3 < n^3$.

Note que desta forma, o cubo de aresta r pode ser inserido dentro do cubo de aresta n , e portanto, $V_r < V_n$. Sendo r racional, $V_r = r^3$. Então $r^3 < V_n$, como $x < r^3$, por segue que $x < V_n$.

Analogamente, para qualquer $y > n^3$ existe um número racional $s > n$, tão próximo de n quanto se queira, de forma que $n^3 < s^3 < y$.

Então, um cubo de aresta s contém um cubo de aresta n e portanto, $V_n < V_s$. Sendo s racional, $V_s = s^3$. Então, $V_n < s^3$, como $s^3 < y$, segue que $V_n < y$.

Portanto, para quaisquer x, y existem racionais tais que $x < n^3 < y$, tem-se $x < V_n < y$. Logo,

$$V_n = V = n^3.$$

■

Proposição 2.2 *Mostre que o volume de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ é igual a $V = (a \cdot b \cdot c)$.*

Demonstração: 1º caso: Se $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Consideremos que todas as arestas são números racionais. Então podemos escrever: $a = \frac{x}{q}, b = \frac{y}{q}, c = \frac{z}{q}$, onde $x, y, z, q \in \mathbb{N}^*$.

Primeiramente consideremos um cubo unitário, e depois dividamos suas arestas em q partes iguais. Então teremos q^3 cubos de aresta $\frac{1}{q}$. Seja V' o volume desses cubos, então teremos:

$$q^3 \cdot V' = 1 \Rightarrow V' = \left(\frac{1}{q}\right)^3.$$

Portanto,

$$V' = \left(\frac{1}{q}\right)^3$$

é o volume de cada cubo menor.

Agora pensando no paralelepípedo de arestas $a = \frac{x}{q}, b = \frac{y}{q}, c = \frac{z}{q}$, podemos dividi-las em $x \cdot y \cdot z$ arestas de tamanho $\frac{1}{q}$, o que gera $x \cdot y \cdot z$ cubos de arestas $\frac{1}{q}$.

Desta forma, o volume (V_{abc}) do paralelepípedo será o somatório dos volumes desses $x \cdot y \cdot z$ cubos menores, e como vimos acima, cada um desses cubos menores tem

volume $\left(\frac{1}{q}\right)^3$, então,

$$V_{abc} = x \cdot y \cdot z \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^3 = \frac{x \cdot y \cdot z}{q^3} = \frac{x}{q} \cdot \frac{y}{q} \cdot \frac{z}{q}$$

Logo,

$$V_{abc} = a \cdot b \cdot c.$$

2º caso: Pelo menos uma das dimensões é um número racional.

Para qualquer $x < abc$, existem racionais r, s, t tão próximos de a, b, c (respectivamente) quanto se queira, de modo que,

$$r < a, s < b, t < c \text{ e que } x < rst < abc.$$

Assim, o paralelepípedo de dimensões a, b, c contém um paralelepípedo de dimensões r, s, t e,

$$x < rst = V_{rst} < V_{abc} \Rightarrow x < V_{abc}.$$

De modo análogo, para qualquer $y > abc$ existe racionais j, k, l tão próximos de a, b, c (respectivamente) quanto se queira, de modo que,

$$j > a, k > b, l > c \text{ e que } abc < jkl < y.$$

Então, o paralelepípedo de dimensões a, b, c pode ser inserido dentro de um paralelepípedo de dimensões j, k, l e,

$$y > jkl = V_{jkl} > V_{abc} \Rightarrow y > V_{abc}.$$

Portanto, para quaisquer x, y existem racionais, tais que,

$$x < abc < y, \text{ tem-se } x < V_{abc} < y.$$

Logo,

$$V_{abc} = a \cdot b \cdot c.$$

■

Acabamos de ver que a ideia intuitiva de volume de um sólido, como o “número de vezes” que esse sólido contém o cubo unitário, conduz diretamente a uma fórmula para o cálculo do volume de um bloco retangular.

Abordaremos em seguida o problema de calcular o volume de sólidos mais irregulares do que blocos. Como foi dito acima, é necessário possuímos uma definição mais precisa daquilo que entendemos por “volume de um sólido”. Nosso objetivo nesta seção é chegar a uma tal definição geral.

2.6.2 Definição Geral de Volume

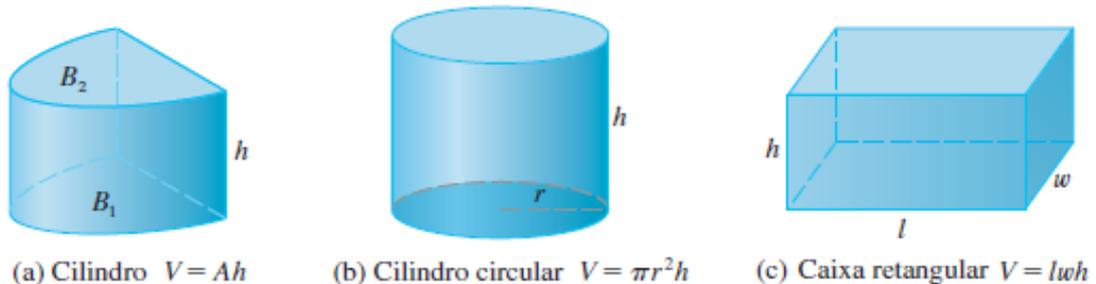
Na tentativa de encontrar o volume de um sólido, nos deparamos com o mesmo tipo de problema que para calcular áreas. Temos uma ideia intuitiva do significado de volume, mas devemos torná-la precisa usando o cálculo para chegar à sua definição exata.

Começamos com um tipo simples de sólido chamado cilindro, mais precisamente, um cilindro reto. Como ilustrado na Figura 42(a), para recapitular a definição e as características do cilindro, rever o capítulo 2, subsubseção 2.1.5.1 *Figuras Geometricas Espaciais*. Se a área da base é A e a altura é h , então, o volume V do cilindro é definido como

$$V = A \cdot h.$$

Em particular, se a base é um círculo com raio r , então o cilindro é um cilindro circular com o volume $V = \pi r^2 h$ [veja a Figura 42(b)], e se a base é um retângulo com comprimento l e largura w , então o cilindro é uma caixa retangular, também chamado paralelepípedo retangular, com o volume $V = lwh$ [veja a Figura 42(c)].

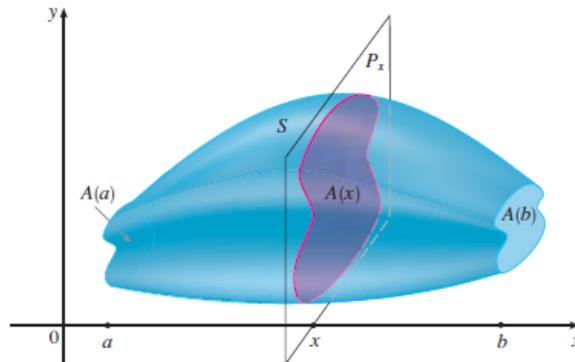
Figura 42 – Volumes de Sólidos



Fonte: Stewart (2016, p. 389).

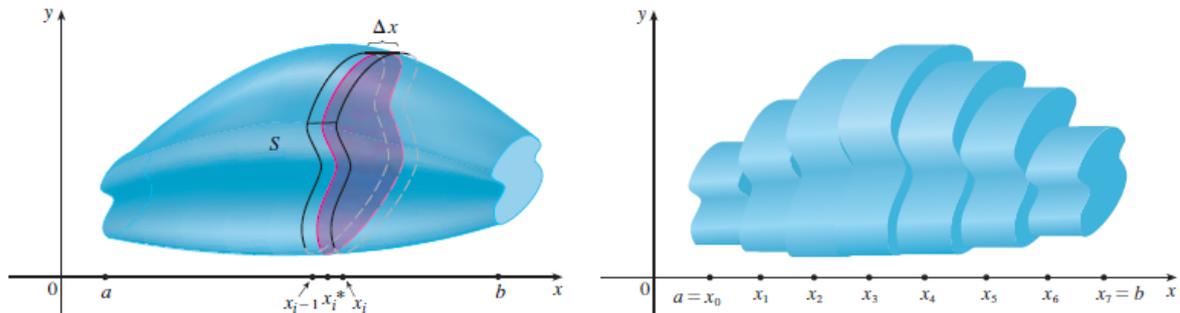
Para um sólido S que não é um cilindro, primeiramente nós o “cortamos” em pedaços e aproximamos cada parte por um cilindro, e depois, estimamos o volume de S adicionando os volumes dos cilindros. Assim chegamos ao volume exato de S através de um processo de limite em que o número de partes torna-se grande.

Começamos interceptando S com um plano e obtendo uma região plana que é chamada secção transversal de S . Seja $A(x)$ a área da secção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x , onde $a \leq x \leq b$. (Veja a Figura 43.) A área da secção transversal $A(x)$ irá variar quando x aumenta de a para b .

Figura 43 – Seção Transversal de S 

Fonte: Stewart (2016, p. 389).

Vamos dividir S em n “fatias” de larguras iguais a Δx usando os planos P_{x_1}, P_{x_2}, \dots para fatiar o sólido. Se escolhermos pontos amostrais x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i -ésima fatia a um cilindro com área da base $A(x_i^*)$ e “altura” Δx . (Veja a Figura 44).

Figura 44 – Seções de S 

Fonte: Stewart (2016, p. 390).

O volume desse cilindro é $A(x_i^*)\Delta x$, assim, uma aproximação para a nossa concepção intuitiva do volume da i -ésima fatia S_i é

$$V(S) \approx A(x_i^*)\Delta x.$$

Adicionando os volumes dessas fatias, obtemos uma aproximação para o volume total do sólido (isto é, o que pensamos intuitivamente como volume):

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x.$$

Esta aproximação parece melhorar quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, definimos o volume como o limite dessas somas quando $n \rightarrow \infty$. Mas reconhecemos o limite da soma de Riemann como uma integral definida, e dessa forma temos a seguinte definição.

Definição 2.9 Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x , passando por x e perpendicular ao eixo x , é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é

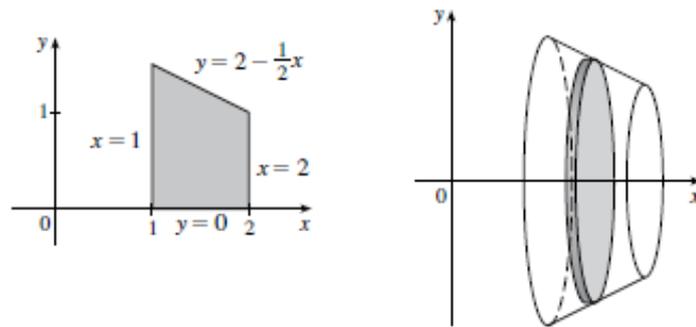
$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx.$$

Quando usamos a definição de volume $V = \int_a^b A(x) dx$, é importante lembrar que $A(x)$ é a área de uma secção transversal móvel, obtida fatiando em x perpendicularmente ao eixo x , e observe que, para um cilindro, a área da secção transversal é constante: $A(x) = A$ para todo x . Então, nossa definição de volume resulta em $V = \int_a^b A dx = A(b - a)$; isso coincide com a fórmula $V = Ah$.

Exemplo 2.11 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região R delimitada pelas curvas $y = 2 - \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; em torno do eixo X .

Solução: Se fizermos a rotação em torno do eixo X obteremos o sólido mostrado na Figura 45.

Figura 45 – Região R e o Sólido Gerado



Fonte: Stewart (2016, p. A83).

Quando fatiamos pelo ponto x , obtemos um disco com raio $2 - \frac{1}{2}x$. A área da secção transversal é

$$A(x) = \pi \left(2 - \frac{1}{2}x \right)^2 = \pi \left(4 - 2x + \frac{x^2}{4} \right)$$

e o volume do cilindro é aproximadamente (um disco de espessura Δx) é

$$A(x)\Delta x = \left[\pi \left(4 - 2x + \frac{x^2}{4} \right) \right] \Delta x.$$

O sólido se encontra entre $x = 1$ e $x = 2$, assim o seu volume é:

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 A(x) dx = \int_1^2 \pi \left(4 - 2x + \frac{x^2}{4} \right) dx = \pi \int_1^2 \left(4 - 2x + \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= \pi \left[4x - 2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right]_1^2 = \pi \left[\left(4(2) - (2)^2 + \frac{(2)^3}{12} \right) - \left(4(1) - (1)^2 + \frac{(1)^3}{12} \right) \right] \\ &= \pi \left[\left(8 - 4 + \frac{8}{12} \right) - \left(4 - 1 + \frac{1}{12} \right) \right] = \pi \left[\left(\frac{96 - 48 + 8}{12} \right) - \left(\frac{48 - 12 + 1}{12} \right) \right] \\ &= \pi \left(\frac{56}{12} - \frac{37}{12} \right) = \pi \left(\frac{19}{12} \right). \end{aligned}$$

■

3 PRINCÍPIOS DE CAVALIERI

Neste capítulo apresentaremos um pouco da biografia de Francesco Bonaventura Cavalieri, traremos brevemente um pouco da história dos Princípios de Cavalieri, bem como os citaremos, e por fim, enunciaremos e demonstraremos os Princípios de Cavalieri como teoremas para áreas e para volumes.

3.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DE FRANCESCO BONAVENTURA CAVALIERI

Francesco Bonaventura Cavalieri, nascido em 1598 na cidade de Milão, na Itália, foi um sacerdote matemático, discípulo de Galileu. Estudou astronomia, trigonometria esférica e cálculo logarítimo. Na sua trajetória de vida, no ano de 1615 entrou para a ordem jesuíta em Milão e em 1616 se transferiu para o monastério de Pisa, se formou na Universidade de Pisa, onde se interessou por matemática após conhecer Galileu, por meio do Cardeal Federico Borromeo. Em 1621, tornou-se assistente do Cardeal Federico Borromeo no monastério de Milão. Em 1623 depois de ensinar teologia, tornou-se prior de São Pedro, em Lodi, e após três anos, foi para o monastério de Parma. Em 1629 foi professor na Universidade de Bolonha, nomeado para cadeira de matemática, período este em que já estava desenvolvendo a famosa teoria dos indivisíveis, a qual apresentou em 1635 na sua obra *Geometria indivisibilis continuorum nova*, que deu início a uma nova era para a geometria e abriu o caminho para a introdução do cálculo integral.

A geometria proposta por Cavalieri foi o primeiro passo rumo ao cálculo infinitesimal. Ponderava que toda figura plana seria formada por retângulos de largura infinitesimal, chamados de indivisíveis, e com esta nova visão, permitia-se concluir que se duas figuras planas comprimidas entre retas paralelas formam uma relação constante, as áreas das figuras também possuem a mesma relação. E assim, consolidou que se estabelecer dois sólidos com a mesma altura, estes terão volumes iguais se as secções planas de iguais altura possuírem a mesma área. (Princípio de Cavalieri).

Francesco Bonaventura Cavalieri ficou conhecido pelo Princípio de Cavalieri e faleceu em 30 de novembro de 1658 na Bolonha, Itália.

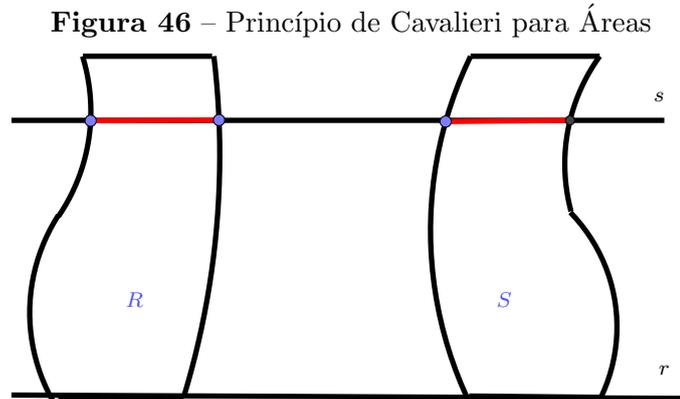
3.2 UM POUCO DA HISTÓRIA DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

O matemático italiano Bonaventura Cavalieri, foi considerado o autor do método capaz de achar áreas e volumes de sólidos com mais facilidade. A principal ideia deste método surgiu ao perceber que mesmo os sólidos com formatos geométricos modificados seu volume permanecera o mesmo, a menos de ganho ou perda de massa.

Desta forma, considerando que dois sólidos A e B sejam fatiados com igual número de fatias (quanto mais finas, maior a aproximação), cortando todas a mesma altura, e secções de mesma área, esses sólidos terão aproximadamente o mesmo volume.

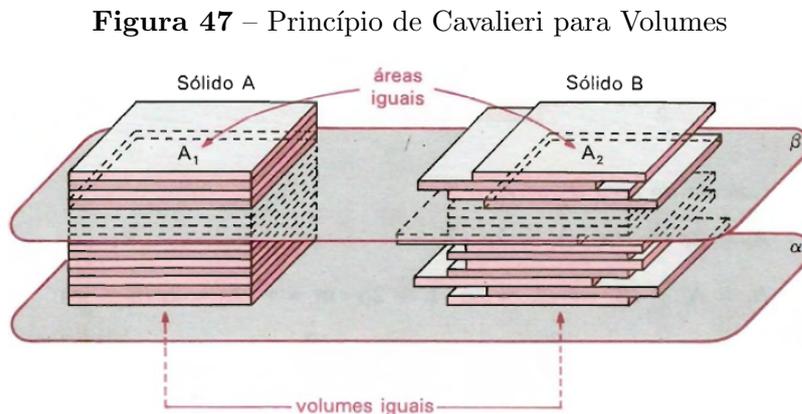
3.3 PRINCÍPIOS DE CAVALIERI

Princípio de Cavalieri para Áreas - Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r , as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos seja constante. Então a razão entre as áreas de R e S é essa mesma constante.



Fonte: Própria Autora.

Princípio de Cavalieri para Volumes - Sejam A e B sólidos limitados, e seja α um plano. Suponha que, para todo plano β paralelo a α , as interseções de A e B com β sejam vazias ou regiões tais que a razão entre suas áreas seja constante. Então a razão entre os volumes de A e B é essa constante.



Fonte: Dolce e Pompeo (2005).

3.4 OS PRINCÍPIOS DE CAVALIERI COMO TEOREMAS

Teorema 3.1 (Primeiro Princípio de Cavalieri) - Consideremos em um plano um sistema de coordenadas cartesianas Oxy , e seja R a região delimitada por $y = 0$, $y = b > 0$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = f_1(y)$ e $x = f_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $f_1(y) \leq f_2(y)$ para todo y . Seja S a região delimitada por $y = 0$, $y = b > 0$ e pelos gráficos das funções contínuas $x = g_1(y)$ e $x = g_2(y)$, $0 \leq y \leq b$, com $g_1(y) \leq g_2(y)$ para todo y .

Suponhamos que exista $k > 0$, tal que, $f_2(y) - f_1(y) = k[g_2(y) - g_1(y)]$ para todo y . Então $A(R) = kA(S)$.

Demonstração: Da teoria de integração de funções reais temos:

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \iint_R dx dy = \int_0^b \left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} dx \right) dy \\
 &= \int_0^b (f_2(y) - f_1(y)) dy = \int_0^b k[g_2(y) - g_1(y)] dy \\
 &= k \int_0^b [g_2(y) - g_1(y)] dy = k \int_0^b \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx \right) dy \\
 &= k \int_0^b \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx dy = k \iint_S dx dy = kA(S).
 \end{aligned}$$

O que prova o teorema, como queríamos. ■

Teorema 3.2 (Segundo Princípio de Cavalieri) - Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e seja P um sólido finito e delimitado por $z = 0, z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja P_t a interseção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido finito delimitado por $z = 0, z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja Q_t a interseção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $A(P_t) = kA(Q_t)$ para todo t . Então $V(P) = kV(Q)$.

Demonstração: Da teoria de integração de funções reais temos:

$$\begin{aligned}
 V(P) &= \iiint_P dx dy dz = \int_0^c \left(\iint_{P_t} dx dy \right) dz \\
 &= \int_0^c a(P_t) dz = \int_0^c ka(Q_t) dz = \int_0^c k \left(\iint_{Q_t} dx dy \right) dz \\
 &= k \int_0^c \left(\iint_{Q_t} dx dy \right) dz = k \iiint_Q dx dy dz = kV(Q).
 \end{aligned}$$

O que prova o teorema, como queríamos. ■

4 TEOREMAS DE PAPPUS-GULDIN

Neste capítulo apresentaremos um pouco da biografia de Pappus de Alexandria e de Paul Guldin, traremos brevemente um pouco da história do Teorema de Pappus-Guldin e por fim, enunciaremos e demonstraremos o teorema de Pappus-Guldin para áreas e para volumes.

4.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DE PAPPUS DE ALEXANDRIA

Pappus de Alexandria, nascido no ano 290 d. C., foi um matemático grego, considerado por muitos um dos mais importantes da Grécia Antiga. Geômetra e também um importante pesquisador e autor de textos sobre cientistas da antiga civilização grega.

Sua principal obra foi “Coleção”, sua contribuição mais importante para a matemática, oito livros escritos em língua grega, dos quais o primeiro e parte do segundo se perderam. Esta obra é importante por vários fatores, continha informações inéditas para a época e hoje é uma rica fonte histórica da matemática grega, apresentando novas provas e lemas suplementares para as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu. O tratado contém descobertas e generalizações não encontradas em nenhuma outra obra. Alguns dos tópicos abordados por Pappus são: Superfícies de Revolução, Geometria Plana, Sólidos, Mecânica, Linhas retas e Tangente a certas curvas.

Descobriu vários teoremas precursores da geometria projetista e suas conclusões foram ponto de partida para a invenção da geometria analítica treze anos depois, por Descartes. Também escreveu sobre música e hidrostática.

Pappus de Alexandria faleceu em algum lugar na Grécia no ano de 350 d. C., aos 60 anos.

4.2 UM POUCO DA HISTÓRIA DE PAUL GULDIN

Paul Guldin, nascido em 12 de junho de 1577, em Mels, na Suíça. Matemático e astrônomo jesuíta, se formou na Pontifícia Universidade Gregoriana, universidade da igreja católica, com sede em Roma. Foi professor de matemática em Graz e Viena, e “ganhou destaque” por formular o teorema de Pappus, que determina a área da superfície e o volume do sólido de revolução.

Paul Guldin faleceu em Graz, na Áustria, 03 de novembro de 1643, aos 66 anos de idade.

4.3 UM POUCO DA HISTÓRIA DO TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN

O Teorema de Pappus-Guldin leva os nomes dos matemáticos Pappus de Alexandria e de Paul Guldin e constitui-se em uma ferramenta importante para o cálculo de áreas de volumes de sólidos de revolução. Esse teorema foi estabelecido por Pappus de

Alexandria, que por sua vez não deixou provas formais dos teoremas indicados, e assim, estes foram formalizados, em sua prova, por Paul Guldin, pelo qual se referencia hoje o teorema de Pappus por Teorema de Pappus-Guldin.

4.4 TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN PARA ÁREAS

Teorema 4.1 *A área de uma superfície de revolução é igual ao produto do comprimento da curva geratriz pelo comprimento do caminho percorrido pelo centróide dessa mesma curva ao longo da rotação do ângulo que gera a superfície.*

Sendo,

L : O comprimento da curva geratriz.

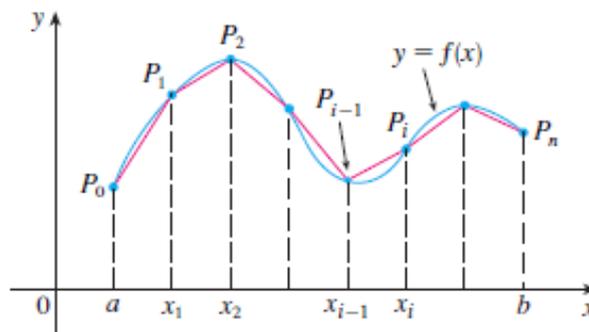
\bar{y} : Distância do centróide ao eixo de rotação X .

θ : O ângulo de rotação.

$$A = L \cdot \bar{y} \cdot \theta$$

Demonstração: Considere uma curva qualquer $y = f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$. Considere a linha poligonal determinada pelos pontos $P_i, 1 \leq i \leq n$, onde $P_i = (x_i, f(x_i))$.

Figura 48 – Aproximação por Poligonal



Fonte: Stewart(2016, p. 488).

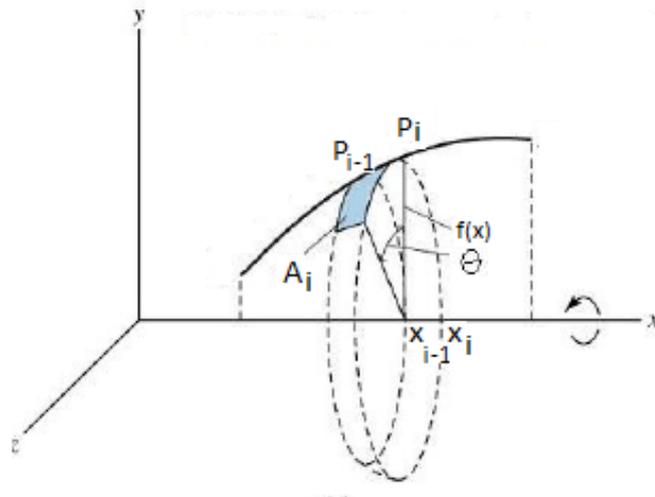
Assim, o comprimento da curva é

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

onde $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$, $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ e $\Delta y_i = (f(x_i) - f(x_{i-1}))$.

Façamos nesta curva, uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo X e observemos o segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$ da poligonal.

Figura 49 – Rotação da Poligonal



Fonte: Própria Autora.

Veja que a área A_i formada pela rotação do segmento $\overline{P_{i-1}P_i}$ é

$$A_i = \theta |P_{i-1}P_i| \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right)$$

e corresponde a área de uma seção de tronco de cone.

Daí, a área da rotação da poligonal é $\sum_{i=1}^n A_i$. Desta forma, fazendo n tender ao infinito, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \theta |P_{i-1}P_i| \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) \\ &= \theta \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) \end{aligned}$$

onde A é a área da figura formada pela rotação da curva em um ângulo θ .

Note que a coordenada \bar{y} do centróide da poligonal é dado por:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right)}{\sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|}$$

e tomando o limite fazendo n tender ao infinito temos a coordenada \bar{y} do centróide da

curva original, $y = f(x)$.

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|} \\ \Rightarrow \bar{y} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x)}{2} \right) \\ \Rightarrow \bar{y} \cdot L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x)}{2} \right) \\ \Rightarrow \bar{y} \cdot L \cdot \theta &= \theta \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x)}{2} \right) \\ \Rightarrow \bar{y} \cdot L \cdot \theta &= A\end{aligned}$$

Portando,

$$A = L \cdot \bar{y} \cdot \theta$$

Como queríamos provar. ■

4.5 TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN PARA VOLUMES

Teorema 4.2 *O volume de um sólido de revolução é igual ao produto da área da superfície geratriz, pelo comprimento do caminho percorrido pelo centróide dessa mesma superfície ao longo da rotação do ângulo que gera o sólido. Sendo,*

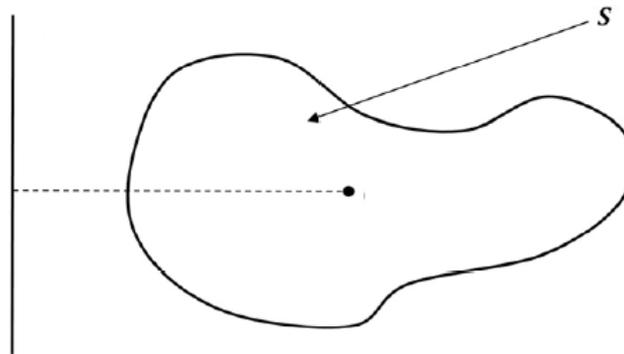
$A(S)$: Área da superfície geratriz.

\bar{x} : Distância do centróide ao eixo de rotação Y .

θ : O ângulo de rotação.

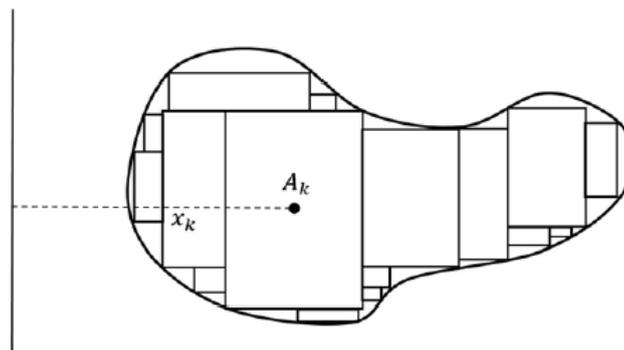
$$V = A(S) \cdot \bar{x} \cdot \theta$$

Demonstração: Considere uma região S qualquer no plano \mathbb{R}^2 que não intersecta o eixo Y .

Figura 50 – Região S 

Fonte: Costa(2017, p.11).

Considere retângulos internos a essa região S , cada qual com área $A_i, 1 \leq i \leq n$, sendo que a base de A_i é $(x_i - x_{i-1})$ e sua altura, h_i . A área da união desses retângulos é $\sum_{i=1}^n A_i$, que é aproximadamente a área de $S, A(S)$.

Figura 51 – Retângulos Justapostos em S 

Fonte: Costa (2017, p.11).

Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que $A(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i$.

Note que, rotacionando essa região S em θ graus em torno do eixo Y , cada retângulo descreverá um volume, $V_i = \frac{\theta}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2)h_i$.

Daí, o volume da rotação da união de todos os retângulos é,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n V_i &= \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2)h_i = \sum_{i=1}^n \theta \frac{(x_i + x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})h_i \\ &= \theta \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + x_{i-1})}{2} \cdot A_i \end{aligned}$$

Tomando o limite do volume da rotação da união dos retângulos, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos o volume da rotação da região S .

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + x_{i-1})}{2} A_i.$$

Agora observe que a abcissa do centróide da união dos retângulos é,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}.$$

Então, fazendo $n \rightarrow \infty$, teremos que a abcissa do centróide da região S será,

$$\bar{x} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) \\ \Rightarrow \bar{x} \cdot A(S) \cdot \theta &= \theta \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) A_i \\ \Rightarrow \bar{x} \cdot A(S) \cdot \theta &= V(S). \end{aligned}$$

Portanto,

$$V(S) = A(S) \cdot \bar{x} \cdot \theta.$$

Como queríamos provar. ■

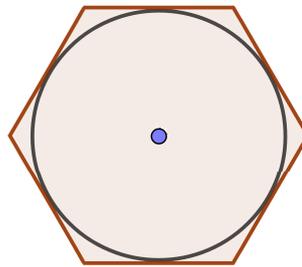
5 APLICAÇÕES

Neste capítulo trataremos algumas aplicações do conteúdo estudado, sobretudo dos Princípios de Cavalieri e dos Teoremas de Pappus-Guldin apresentados anteriormente, para fins dos cálculos de áreas e volumes de algumas figuras e sólidos geométricos, por exemplo, o cálculo da área da circunferência, via noções de limites, via noções de integral e também via Teorema de Pappus-Guldin e a área da elipse, via Princípio de Cavalieri. Calcularemos também alguns volumes, como, o volume do prisma e da pirâmide, via Princípio de Cavalieri. Volume do cone e do cilindro, via Teorema de Pappus-Guldin. Volume da esfera via Princípio de Cavalieri e também via Teorema Pappus-Guldin. Volume do elipsóide via Princípio de Cavalieri e por fim, área e volume do toro via Teorema Pappus-Guldin.

5.1 ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA (VIA NOÇÕES DE LIMITES)

Consideraremos a priori, a circunferência inscrita em um polígono regular, como por exemplo, o hexágono (polígono regular de 6 lados iguais).

Figura 52 – Circunferência Inscrita no Hexágono



Fonte: Própria Autora.

Para notação teremos,

$A_p \rightarrow$ Área do polígono.

$A_c \rightarrow$ Área da circunferência.

$P \rightarrow$ Perímetro do polígono.

$C \rightarrow$ Comprimento da circunferência.

Sabemos dos conhecimentos de geometria que obtemos a área do polígono e seu perímetro, respectivamente, por:

$$A_p = n \cdot \frac{l \cdot a}{2} \simeq A_c \quad \text{e} \quad P = n \cdot l \simeq C$$

onde,

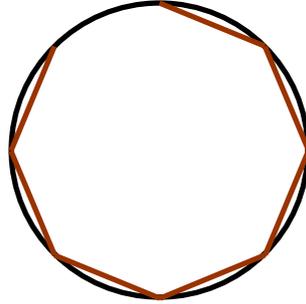
$n \rightarrow$ número de lados do polígono.

$l \rightarrow$ medida dos lados do polígono.

$a \rightarrow$ apótema (= altura do triângulo).

Assim, fazendo n , o número de lados do nosso polígono tender ao infinito, teremos:

Figura 53 – Circunferência Aproximada por Poligonal



Fonte: Própria Autora.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nla}{2} = A_c \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nl = C.$$

Tanto sua área, quanto seu perímetro se igualará com a área e o perímetro da circunferência. Como o raio da circunferência inscrita coincide com o apótema do polígono, $r = a$, então temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nlr}{2} = A_c \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nl = C.$$

Lembre que, $\pi = \frac{C}{2r}$ e daí teremos:

$$\pi = \frac{C}{2r} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} nl}{2r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nl}{2r}.$$

Então,

$$A_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nlr}{2} \cdot \frac{r}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2 nl}{2r} = r^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nl}{2r} = r^2 \cdot \pi.$$

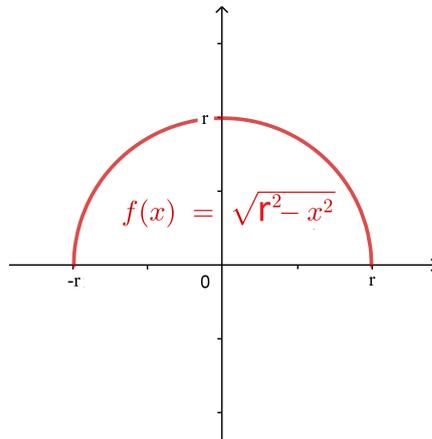
■

5.2 ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA (VIA CÁLCULO INTEGRAL)

Consideremos no plano cartesiano o eixo Oxy e nele definida a seguinte equação: $x^2 + y^2 = r^2$ que descreve uma circunferência de raio r , centrada na origem.

Para fins de nosso interesse, consideraremos nos nossos cálculos, a semicircunferência definida na parte positiva do nosso plano.

Figura 54 – Semicircunferência



Fonte: Própria Autora.

Seja $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, a área da região semi circular será definida por $\frac{A_c}{2} = \int_{-r}^r f(x)dx$.

Então teremos: $\frac{A_c}{2} = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$, fazendo $x = r \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, temos $dx = -r \sin \theta$.

Agora, realizando a mudança de intervalos teremos:

◇ Para $x = -r$, segue, $-r = r \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -1 \Rightarrow \theta = \pi$

◇ Para $x = r$, segue, $r = r \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{A_c}{2} &= - \int_{\pi}^0 \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 \theta} (r \sin \theta d\theta) = \int_0^{\pi} r \sqrt{1 - \cos^2 \theta} (r \sin \theta) d\theta \\ &= r^2 \int_0^{\pi} (\sin \theta)(\sin \theta)d\theta = r^2 \int_0^{\pi} (\sin^2 \theta)d\theta = r^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= r^2 \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = r^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{4}(0 - 0) \right] = r^2 \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

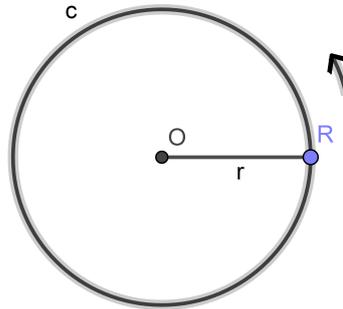
$$A_c = \pi r^2.$$

■

5.3 ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA (VIA TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN)

Consideremos o eixo Oxy e nele o segmento de extremidades $(0, 0)$ e $(R, 0)$, $R > 0$, como sendo a curva geratriz da região circular.

Figura 55 – Círculo Gerado pelo Segmento \overline{OR}



Fonte: Própria Autora.

O comprimento da curva geratriz é $L = r$ e seu centróide tem coordenada \bar{x} coincidente com o seu ponto médio. Portanto a distância do centróide ao eixo de rotação é, $\bar{x} = \frac{r}{2}$.

O comprimento do caminho percorrido pelo centróide desta curva em torno do eixo de rotação (a origem do eixo Oxy) é dado por, $\theta \cdot \bar{x} = 2\pi \cdot \frac{r}{2}$.

Nestas condições podemos aplicar o Teorema de Pappus-Guldin para áreas.

Portanto,

$$A = L \cdot \theta \cdot \bar{x}$$

$$A = r \cdot (2\pi) \cdot \frac{r}{2}$$

$$A = \pi r^2.$$

■

5.4 ÁREA DA ELIPSE (VIA PRINCÍPIO DE CAVALIERI)

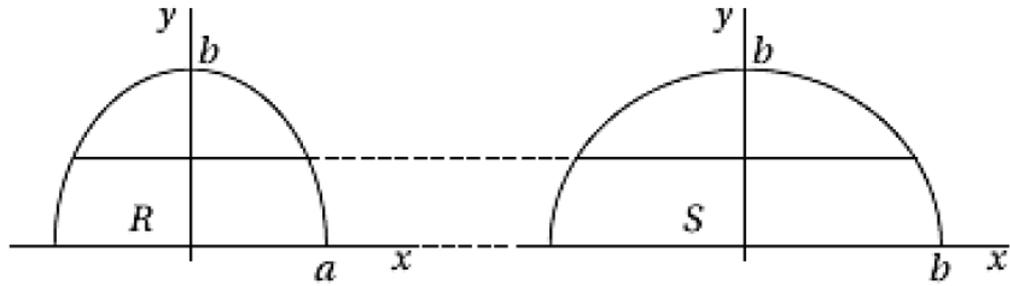
Vamos supor que $b \geq a > 0$. Consideremos um sistema de coordenadas Oxy , e R a região semi-elíptica dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ e $y \geq 0$. Seja $f_1(y) = -a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ e $f_2(y) = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$, para $0 \leq y \leq b$.

Demonstraremos que a área da região elíptica é πab .

Então, consideremos também, o semidisco S dado por $x^2 + y^2 < b^2$ com $y \geq 0$. Seja $g_1(y) = -\sqrt{b^2 - y^2}$ e $g_2(y) = \sqrt{b^2 - y^2}$ para $0 \leq y \leq b$.

Tomando uma reta s paralela ao eixo Ox , e de ordenada y , a intersecção dessa reta com a região R é o segmento de comprimento $f_2(y) - f_1(y)$, e com a região S é o segmento de comprimento $g_2(y) - g_1(y)$.

Figura 56 – Área da Elipse via Princípio de Cavalieri



Fonte: Paterline (2010).

Agora, notemos que,

$$\begin{aligned}
 f_2(y) - f_1(y) &= a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} - \left(-a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\right) \\
 &= a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} + a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \\
 &= 2a\sqrt{\frac{b^2 - y^2}{b^2}} = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \\
 &= \frac{a}{b}2\sqrt{b^2 - y^2} = \frac{a}{b}[g_2(y) - g_1(y)].
 \end{aligned}$$

Então nós temos uma razão constante entre os comprimentos dos segmentos das interseções de s com as regiões limitadas R e S .

Assim, podemos aplicar o Princípio de Cavalieri para áreas com razão $\frac{a}{b}$ entre os comprimentos.

$$\text{Área}(R) = \frac{a}{b} \text{Área}(S)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Área}(R) &= \frac{a}{b} \frac{\pi b^2}{2} \\
 &= \frac{\pi ab}{2}.
 \end{aligned}$$

Essa é a área da metade da região elíptica, logo,

$$\text{Área da Elipse é, } 2 \cdot \frac{\pi ab}{2}.$$

$$A_{elipse} = \pi ab.$$

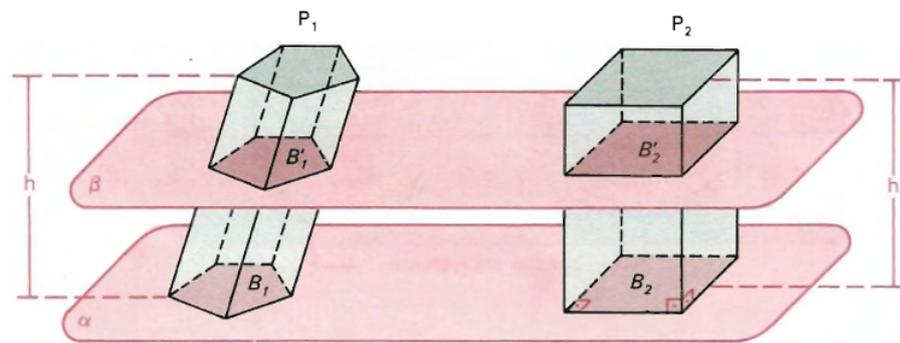
■

5.5 VOLUME DO PRISMA

Considere um prisma de altura h e área da base A . Seja α o plano no qual a base se apoia. Considere um paralelepípedo reto retângulo de altura h , área da base $A = a \cdot b$ que também se apoia sobre α .

Seja β o plano paralelo a α que secciona os sólidos a uma altura h_0 de α . O plano β produz secções B'_1 e B'_2 , no prisma e no paralelepípedo, respectivamente.

Figura 57 – Volume do Prisma via Princípio de Cavalieri



Fonte: Dolce e Pompeo (2005).

Como o paralelepípedo também é um prisma, e toda secção feita em um prisma paralela à sua base, produz uma figura congruente a base, temos que:

$$A = \text{Área}(B'_1), A = \text{Área}(B'_2) \Rightarrow \text{Área}(B'_1) = \text{Área}(B'_2).$$

Então nós temos uma razão constante entre as áreas das intersecções de β com o Prisma e com o Paralelepípedo. Logo, pelo princípio de Cavalieri,

$$\text{Volume}(\text{Prisma}) = 1 \cdot \text{Volume}(\text{Paralelepípedo})$$

Portanto, os dois sólidos tem o mesmo volume.

$$V_{\text{prisma}} = V_{\text{paralelepípedo}} = A \cdot h.$$

■

5.6 VOLUME DA PIRÂMIDE

Volume de uma Pirâmide Triangular

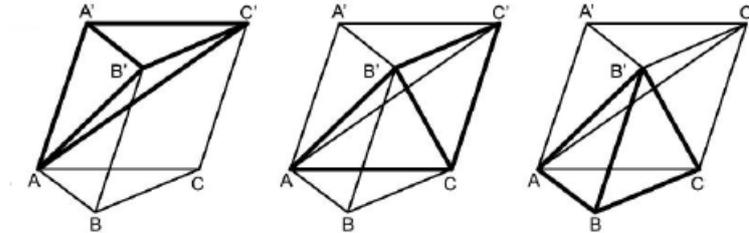
Sabemos que numa pirâmide as secções paralelas a base são semelhantes, e ainda, duas pirâmide de mesma base e mesma altura tem o mesmo volume. É com base nesses conhecimentos que afirmamos o seguinte:

Afirmção: O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto de sua altura

pela área de sua base.

Prova: Considere um prisma triangular de bases ABC , $A'B'C'$ e altura h . O volume deste prisma é $V = A_{ABC} \cdot h$. Este prisma pode ser dividido em três pirâmides triangulares de mesmo volume.

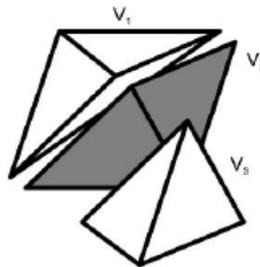
Figura 58 – Prisma de Base Triangular



Fonte: Própria Autora.

De fato, considere as pirâmides de bases ABC , $A'B'C'$, ACC' com vértices B' , A' , B' respectivamente.

Figura 59 – Volume da Pirâmide



Fonte: Própria Autora.

Observe que $A_{ABC} = A_{A'B'C'}$ e como essas pirâmides possuem a mesma altura h , então têm o mesmo volume $V_{ABC} = V_{A'B'C'}$.

Note também, que, $A_{AA'C'} = A_{ACC'}$ e considerando B' como vértice comum, as pirâmides tem mesma altura, logo também terão o mesmo volume, $V_{ACC'} = V_{A'B'C'}$.

De onde segue que $V_{ABC} = V_{A'B'C'} = V_{ACC'}$.

Portanto,

$$V_{prisma} = 3V_{ABC} \Rightarrow V_{ABC} = \frac{1}{3}V_{prisma}$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_{ABC} \cdot h.$$

■

Volume de uma Pirâmide Qualquer

Afirmção: O volume de uma pirâmide qualquer é um terço do produto de sua altura pela área de sua base.

Prova: Basta observar que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de bases triangulares. Seja h a altura e suponha que a base seja dividida em n triângulos. Então,

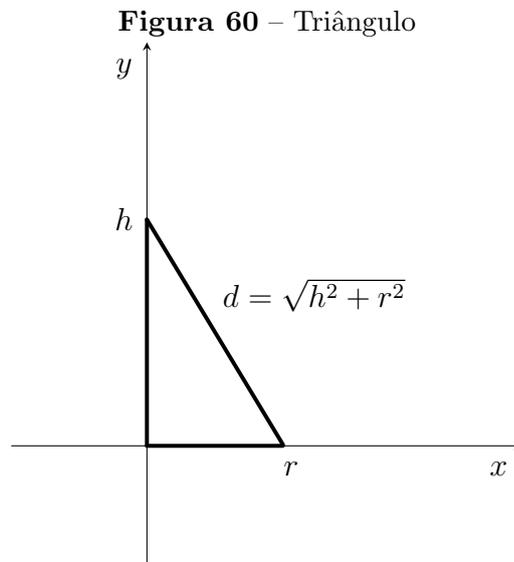
$$V = \frac{1}{3}A_1 \cdot h + \frac{1}{3}A_2 \cdot h + \cdots + \frac{1}{3}A_n \cdot h = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \cdot h = \frac{1}{3}A \cdot h.$$

■

5.7 VOLUME DO CONE

Demonstraremos o volume do cone usando o Teorema de Pappus- Guldin.

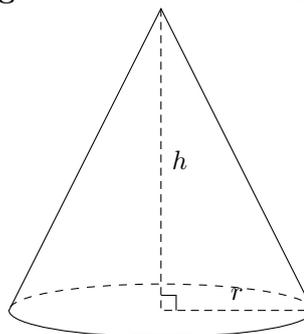
Considere o eixo Oxy e o triângulo definido pelas retas $x = 0, y = 0$ e $y = -\frac{hx}{r} + h$.



Fonte: Própria Autora.

Este triângulo é a nossa superfície geratriz, observe que rotacionando-o em torno do eixo y , temos um cone de revolução de altura h e raio r , com $r, h > 0$.

Figura 61 – Volume do Cone



Fonte: Própria Autora.

Agora, calculando a abcissa do centróide deste triângulo, obtemos:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int_0^r x f(x) dx}{\int_0^r f(x) dx} = \frac{\int_0^r x \left(-\frac{hx}{r} + h\right) dx}{\int_0^r \left(-\frac{hx}{r} + h\right) dx} = \frac{\int_0^r \left(-\frac{hx^2}{r} + hx\right) dx}{\int_0^r \left(-\frac{hx}{r} + h\right) dx} \\ &= \frac{\left[\frac{-hx^3}{3r} + \frac{hx^2}{2}\right]_0^r}{\left[\frac{-hx^2}{2r} + hx\right]_0^r} = \frac{\left[\frac{-hr^3}{3r} + \frac{hr^2}{2}\right]}{\left[\frac{-hr^2}{2r} + hr\right]} = \frac{\left[\frac{-hr^2}{3} + \frac{hr^2}{2}\right]}{\left[\frac{-hr}{2} + hr\right]} \\ &= \frac{\frac{-2hr^2 + 3hr^2}{6}}{\frac{-hr + 2hr}{2}} = \frac{\frac{hr^2}{6}}{\frac{hr}{2}} = \frac{r}{3}.\end{aligned}$$

O comprimento do caminho percorrido pelo centróide da superfície geratriz em torno do eixo de rotação (eixo y) é dado por, $\bar{x} \cdot \theta$.

A área da superfície geratriz, (a área da região triangular), é $A(S) = \frac{rh}{2}$.

Então, agora temos condições de aplicar o teorema de Pappus-Guldin para volumes. .

Portanto,

$$\begin{aligned}V &= A(S) \cdot \bar{x} \cdot \theta \\ V &= \frac{hr}{2} \cdot \frac{r}{3} \cdot 2\pi \\ V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h\end{aligned}$$

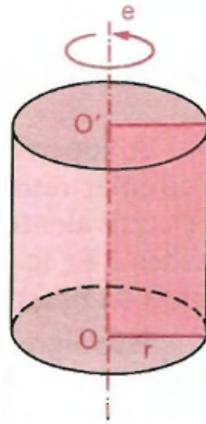
■

5.8 VOLUME DO CILINDRO

Considere o retângulo limitado pelas retas $x = 0, x = r, y = 0, y = h$, com r, h constantes positivas. Note que a rotação dessa região retangular em torno do eixo y gera um cilindro de altura h e raio da base igual a r . (O retângulo será a nossa superfície geratriz).

Vamos usar o Teorema de Pappus-Guldin para calcular o volume desse cilindro.

Figura 62 – Volume do Cilindro



Fonte: Dolce e Pompeo (2005).

Calculemos a abscissa do centróide da superfície geratriz,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int_0^r x f(x) dx}{\int_0^r f(x) dx} = \frac{\int_0^r x h dx}{\int_0^r h dx} = \frac{h \int_0^r x dx}{h \int_0^r dx} \\ &= \left[\frac{h \frac{x^2}{2}}{h x} \right]_0^r = \left[\frac{h \cdot \frac{r^2}{2}}{h \cdot r} \right] = \frac{hr^2}{2} \cdot \frac{1}{hr} \\ \bar{x} &= \frac{r}{2}.\end{aligned}$$

Logo, a distância do centróide ao eixo de rotação é $\bar{x} = \frac{r}{2}$.

O comprimento do caminho percorrido pelo centróide da superfície geratriz em torno do eixo de rotação, (eixo y), é dado por $\bar{x} \cdot \theta$.

A área da superfície geratriz, (área da região retângular), é $A(S) = rh$.

Veja,

$$A = \int_0^r f(x) dx = \int_0^r h dx = h \int_0^r dx = h \cdot x \Big|_0^r = h \cdot r.$$

Então, agora temos condições de aplicar o teorema de Pappus-Guldin para volumes.

$$\begin{aligned}V &= A(S) \cdot \bar{x} \cdot \theta \\ V &= rh \cdot \frac{r}{2} 2\pi \\ V &= \pi r^2 h.\end{aligned}$$



5.9 VOLUME DA ESFERA (VIA PRINCÍPIO DE CAVALIERI)

Demonstraremos o volume da esfera usando o Segundo Princípio de Cavalieri, (Princípio de Cavalieri para Volumes).

Inicialmente considere a semi-esfera S de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$. Agora consideremos sua intersecção S_t com o plano $z = t$.

Resultando,

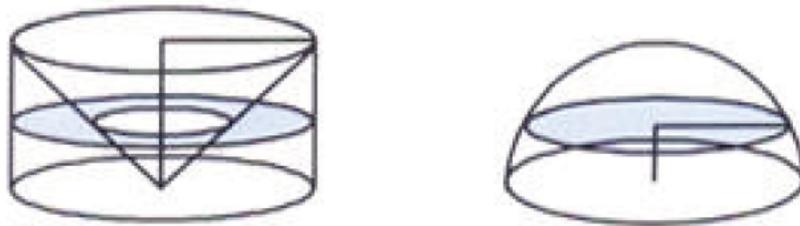
$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + t^2 = R^2 &\Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 - t^2 \\x^2 + y^2 &= (\sqrt{R^2 - t^2})^2 = r^2\end{aligned}$$

Desta forma temos a descrição de uma secção no nível $z = t$, com $0 \leq t \leq R$, de área,

$$\begin{aligned}A(S_t) &= \pi r^2 \\&= \pi(\sqrt{R^2 - t^2})^2 \\&= \pi(R^2 - t^2)\end{aligned}$$

De modo análogo, consideremos um cilindro com a seguinte equação: $x^2 + y^2 = R^2$ com $0 \leq z \leq R$ e um cone de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com $0 \leq z \leq R$.

Figura 63 – Volume do Esfera via Princípio de Cavalieri



Fonte: Saraiva (2003).

Note que o cilindro contém o cone descrito e suas intersecções no nível $z = t$ são respectivamente as circunferências $x^2 + y^2 = R^2$ e $x^2 + y^2 = t^2$.

A coroa circular C_t obtida da delimitação destas duas circunferências concêntricas tem área,

$$A(C_t) = (\pi R^2) - (\pi t^2) = \pi(R^2 - t^2)$$

Assim as secções S_t e C_t tem áreas iguais no nível $z = t$, e com isso podemos aplicar agora o Princípio de Cavalieri para volumes onde teremos que:

O volume $V(S) = \text{Volume do Cilindro} - \text{Volume do Cone}$

$$\begin{aligned} V(S) &= (\pi R^2 \cdot R) - \left(\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\right) \\ &= \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Como o volume da esfera é o dobro do volume de S, temos que o resultado procurado é:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

■

5.10 VOLUME DA ESFERA (VIA TEOREMA DE PAPPUS-GULDIN)

Demonstraremos o volume da esfera usando o Teorema de Pappus-Guldin.

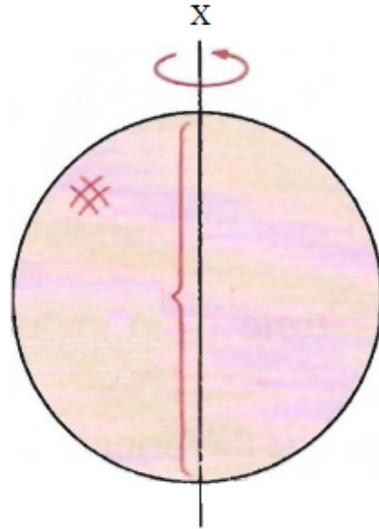
Considere o semicírculo de equação $x^2 + y^2 \leq r^2$, com $0 \leq y \leq 1$, a nossa superfície geratriz.

O eixo de rotação será o eixo x , então calculemos a ordenada do centróide da superfície geratriz.

$\bar{x} = 0$ (pois pelo princípio de simetria o centro de massa está sobre o eixo y)

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{A} \int_{-r}^r \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi r^2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi r^2} \cdot 2 \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi r^2} \cdot \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \cdot \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{2}{\pi r^2} \cdot \frac{2r^3}{3} \\ \bar{y} &= \frac{4r}{3\pi}. \end{aligned}$$

Figura 64 – Volume da Esfera via Teorema de Pappus-Guldin



Fonte: Dolce e Pompeo (2005).

O comprimento do caminho percorrido pelo centróide da superfície geratriz em torno do eixo de rotação, (eixo x), é dado por $\bar{y} \cdot \theta$.

A área da superfície geratriz é $A(S) = \frac{1}{2}\pi r^2$.

Então, agora temos condições de aplicar o Teorema de Pappus-Guldin para volumes.

$$\begin{aligned} V &= A(S) \cdot \bar{y} \cdot \theta \\ V &= \frac{1}{2}\pi r^2 \frac{4r}{3\pi} 2\pi \\ V &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

■

5.11 VOLUME DO ELIPSÓIDE (VIA PRINCÍPIO DE CAVALIERI) - DEMONSTRAÇÃO UM

Demonstraremos que o volume do elipsóide de semieixos ab e c é $\frac{4}{3}\pi abc$.

Suponhamos que $c \geq b \geq a > 0$.

Consideremos o semi-elipsóide P definido por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0.$$

Note que P é delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = c$ e para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a intersecção P_t de P com o plano $z = t$ é obtida da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{t^2}{c^2} = \frac{c^2 - t^2}{c^2}.$$

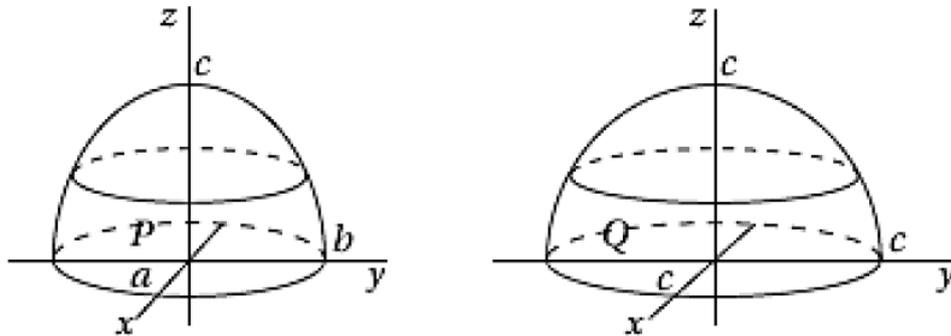
Seja $d = \sqrt{\frac{c^2 - t^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 - t^2}$.

Então P_t é uma região elíptica dada por: $\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} \leq 1$ tem área igual a:

$$\pi(ad)(bd) = \pi abd^2 = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2).$$

Agora consideremos a semiesfera Q definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2$, com $z \geq 0$.

Figura 65 – Volume do Elipsóide com a Semiesfera



Fonte: Paterline (2010).

Note que esse sólido Q é delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = c$ e para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a intersecção Q_t de Q com o plano $z = t$ é dada por:

$$x^2 + y^2 + t^2 \leq c^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq c^2 - t^2.$$

Seja $r = \sqrt{c^2 - t^2}$.

Então Q_t é um disco de raio r e sua área é $\pi r^2 = \pi(c^2 - t^2)$.

Notemos que para cada t , temos:

$$\text{área}(P_t) = \pi(ad)(bd) = \pi abd^2 = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2) = \frac{ab}{c^2} \text{área}(Q_t).$$

Agora sim, estamos em condições para aplicar o Princípio de Cavalieri para volumes, sendo $\frac{ab}{c^2}$ a razão entre as áreas das secções.

Então,

$$\begin{aligned} \text{volume}(P) &= \frac{ab}{c^2} \cdot \text{volume}(Q) \\ &= \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi c^3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

Observe que este é o volume do semielipsóide, logo o volume que procuramos é o dobro de resultado encontrado. Portanto o volume do elipsóide será,

$$V_{\text{elipsóide}} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

■

5.12 VOLUME DO ELIPSÓIDE (VIA PRINCÍPIO DE CAVALIERI) - DEMONSTRAÇÃO DOIS

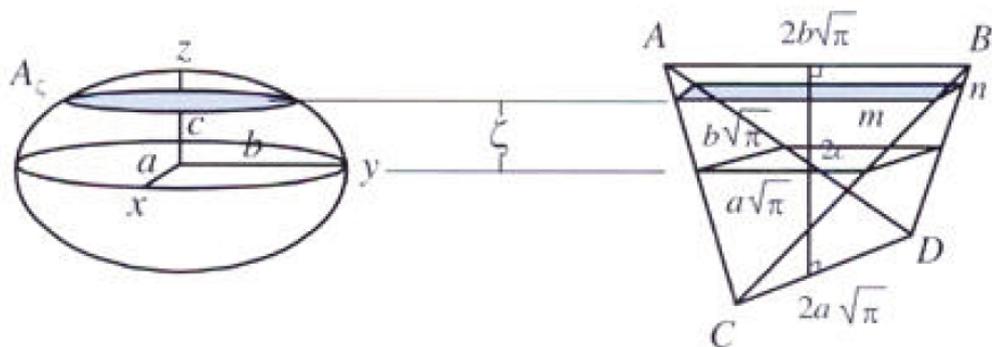
Dizemos que dois sólidos que verificam o segundo Princípio de Cavalieri (O Princípio de Cavalieri para volumes) são *Cavalieri equivalentes*.

Essa demonstração consiste em encontrar um tetraedro Cavalieri equivalente, a um elipsóide de semieixos a , b e c .

Considere esse elipsóide de semieixos a , b e c e planos tangentes a ele nos extremos do eixo de comprimento $2c$. Determinamos os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} de comprimentos $2b\sqrt{\pi}$ e $2a\sqrt{\pi}$, respectivamente, reversos, ortogonais um ao outro e contidos nesses planos, e além disso o seguimento que une os seus pontos médios seja uma perpendicular comum.

Dessa forma temos o tetraedro $ABCD$ cortado pelo plano equatorial do elipsóide num retângulo de lados $a\sqrt{\pi}$ e $b\sqrt{\pi}$.

Figura 66 – Volume do Elipsóide com o Tetraedro



Fonte: Saraiva (2003).

Afirmção: No nível $z = t$, com $0 < t \leq c$, o plano paralelo ao plano equatorial determina no elipsóide a seção elíptica de semieixos (ad) e (bd) , onde $d = \sqrt{\frac{c^2 - t^2}{c^2}}$.

Prova: O elipsóide em questão assume a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, e sua intersecção

com on plano $z = t$ será:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 - \frac{t^2}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{c^2 - t^2}{c^2}\end{aligned}$$

então,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = d^2 \Rightarrow \frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} = 1.$$

Desta forma, chegamos à secção elíptica de semieixos ab e bd . Calculando então a área desta secção elíptica A_{E_t} , temos:

$$A_{E_t} = \pi(ad)(bd) = \pi(ab)d^2 = \pi ab \left(\frac{c^2 - t^2}{c^2} \right).$$

Por outro lado a secção no tetraedro pelo mesmo plano $z = t$ é um retângulo de lados m e n , onde o lado de medida m é paralelo ao seguimento \overline{AB} e o de medida n paralelo ao segmento \overline{CD} .

Por semelhança de triângulos estabelecemos as seguintes relações:

$$\frac{m}{b\sqrt{\pi}} = \frac{c+t}{c} \Rightarrow m = b\sqrt{\pi} \left(\frac{c+t}{c} \right)$$

e

$$\frac{n}{a\sqrt{\pi}} = \frac{c-t}{c} \Rightarrow n = a\sqrt{\pi} \left(\frac{c-t}{c} \right).$$

Isto nos permite calcular a área da secção retangular A_{R_t} :

$$\begin{aligned}A_{R_t} = m \cdot n &= b\sqrt{\pi} \left(\frac{c+t}{c} \right) \cdot a\sqrt{\pi} \left(\frac{c-t}{c} \right) \\ &= ab\pi \left(\frac{c^2 - t^2}{c^2} \right).\end{aligned}$$

Portanto, as áreas das secções A_{E_t} e A_{R_t} são iguais e com isso podemos usar o Princípio de Cavalieri para volumes, para concluir que o volume do elipsóide é igual ao volume do tetraedro, que é $\frac{4}{3}\pi abc$.

Então,

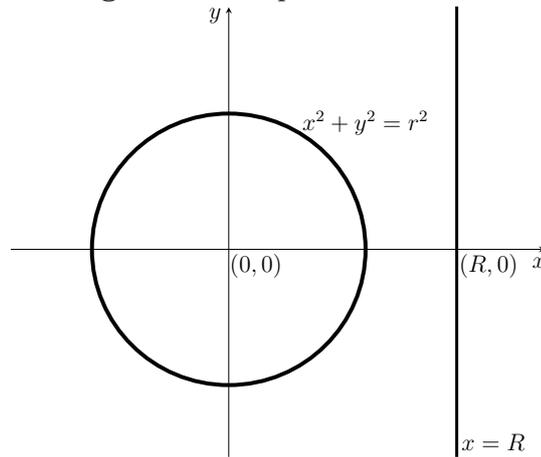
$$V_{\text{elipsóide}} = \frac{4}{3}\pi abc.$$



5.13 ÁREA E VOLUME DO TORO

Consideremos no eixo Oxy a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, centrada na origem e de raio r , e a reta $x = R$, com $R > 0$ e $R > r$.

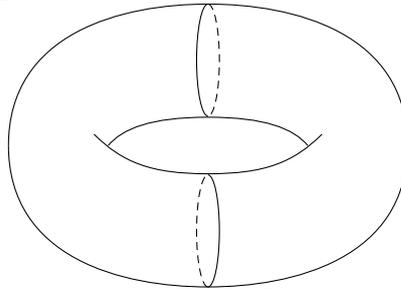
Figura 67 – Superfície Geratriz



Fonte: Propria Autora.

Ao rotacionarmos essa circunferência em torno desta reta geramos a superfície de revolução denominada *toro*.

Figura 68 – Superfície Gerada: Toro



Fonte: Propria Autora.

Vamos calcular a área e o volume deste sólido.

Nota-se que o centróide da região circular é $(0, 0)$ e sua distância ao eixo de rotação, (a reta $x = R$) é $\bar{x} = R$.

O comprimento do caminho percorrido pelo centróide da região circular, em torno desta reta, é dado por, $\bar{x} \cdot \theta$.

O comprimento da curva geratriz, (comprimento da circunferência), é dado por, $L = 2\pi r$.

A área da superfície geratriz, (área da circunferência), é dada por, $A(S) = \pi r^2$. Portanto, com tais informações, podemos usar o Teorema de Pappus-Guldin

para áreas e volumes, e teremos que:

$$\begin{aligned}A_{(Toro)} &= L \cdot \bar{x} \cdot \theta \\A_{(Toro)} &= (2\pi r) \cdot (R) \cdot (2\pi) \\A_{(Toro)} &= 4\pi^2 r R.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}V_{(Toro)} &= A(S) \cdot \bar{x} \cdot \theta \\V_{(Toro)} &= (\pi r^2) \cdot (R) \cdot (2\pi) \\V_{(Toro)} &= 2\pi^2 r^2 R.\end{aligned}$$



6 CONCLUSÃO

Diante das dificuldades de assimilação dos conteúdos matemáticos, desde os anos iniciais que por consequência leva ao déficit da aprendizagem também no ensino superior, foi que pensamos na proposta desse trabalho.

As dificuldades encontradas no decorrer da trajetória escolar se não sanadas geram lacunas no perfil que está em formação e pela própria política educacional o sujeito vai levando essas dificuldades adiante fazendo com que só acumule até chegar o ponto do ápice, onde o mesmo “radicaliza ao decidir por dois caminhos,” enfrentar o então sofrimento de aprender tudo aquilo que não absorvera no passar de todos os anos escolares, por ventura agora “de maneira sozinha”, ou acaba por desistir de tudo, em não ver sentido nas coisas que por todos esses anos escrevera, pronunciara, calculara...É o momento em que somos convidados a pisar no chão da realidade.

Não caberia neste trabalho, tampouco a nós, sanar as dificuldades matemáticas, que por vezes advém de diversos fatores, visualizada de modo comum na sociedade. Porém nos lançamos por meio deste, voltados a abordar de modo construtivo os conhecimentos relacionados à geometria, desde os fundamentos elementais aos conteúdos um pouco mais requisitados. Com a intenção de oferecer aos professores do ensino secundário um material que por hora lhe sirva de apoio na mediação de suas aulas.

Para isso é que abordamos os conteúdos apresentados aqui de maneira linear e sempre que possível definida e exemplificada, para fins de maior clareza nos estudos do leitor e de modo geral objetivando que não apenas que o professor recapitule alguns conhecimentos, mas que também os discentes se sintam confortáveis ao estudar o cálculo de áreas e volumes de figuras e sólidos geométricos, vendo o porquê e de onde se conclui tais análises que geram as fórmulas estudadas, por vezes somente apresentadas e aplicadas nas resoluções de problemas.

Portando o nosso capítulo “Aplicações” está diretamente ligado aos nossos resultados, abordar de maneira mais simples os cálculos de áreas e volumes que já conhecemos há muito tempo, porém agora do modo diferenciado onde o leitor pode se sentir como participante ativo na construção do conhecimento ao ver e compreender os passos lógicos que usamos e os requisitos que destacamos necessários para fundamentar uma boa bagagem conteudista para tal fim.

REFERÊNCIAS

COSTA, Maurício Rafael Oliveira. **Teoremas de Pappus: Superfícies e Sólidos de Revolução** 2017. 66 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.

DOLCE, Jose Nicolau., Oswaldo e POMPEO. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana**. Vol 9. 7 . ed. São Paulo: Atual, 1993.

DOLCE, Jose Nicolau., Oswaldo e POMPEO. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria espacial, posição e métrica**. Vol 10. 6 . ed. São Paulo: Atual, 2005.

GUIDORIZZI, Hamilon L. **Um Curso de Cálculo**. Vol 1. 5 . ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol 1. 3 . ed. São Paulo: HARBRA ltda, 1994.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**. 4 . ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

PATERLINI, Roberto Ribeiro. **Os “Teoremas” de Cavalieri**. Rio de Janeiro: SBM, RPM 72, p.43-47, 2010. Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/72/11.html>>. Acesso em: 14 agost. 2020.

SARAIVA, José Cloves V. **O Volume do Elipsóide no Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, RPM 52, p.21-24, 2003. Disponível em: <<http://www.rpm.org.br/cdrpm/52/5.htm>>. Acesso em: 14 agost. 2020.

STEWART, James. **Cálculo**. Vol 2. 7 . ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, James. **Cálculo**. Vol 1. 7 . ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.