UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARINALDO BRAGA DA SILVA

FUNÇÕES COMPLEXAS HOLOMORFAS E CAMPOS DE VETORES CONFORMES

REDENÇÃO - CE
2020

MARINALDO BRAGA DA SILVA

FUNÇÕES COMPLEXAS HOLOMORFAS E CAMPOS DE VETORES CONFORMES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

REDENÇÃO - CE

2020

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Silva, Marinaldo Braga da.

S578f

Funções complexas holomorfas e campos de vetores conformes / Marinaldo Braga da Silva. - Redenção, 2020.
37f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. Funções de variáveis complexas. 2. Campos de vetores. 3. Campos conformes. I. Título

CE/UF/BSP CDD 510

MARINALDO BRAGA DA SILVA

FUNÇÕES COMPLEXAS HOLOMORFAS
E CAMPOS DE VETORES CONFORMES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Aprovada em 10 de Fevereiro de 2020

BANCA EXAMINADORA

João F^co da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab)

Weslley Marinho Lozório

Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab)

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab)

Dedico esse trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Senhor Jesus pela Graça e Paz.

Aos meus avós e tia pela educação, e cuidados.

Aos meus pais pela paciência e amor.

Ao meu irmão de fé e colega de turma Moisés Sousa Ferreira e sua familia pelas orações em cada momento que passamos juntos.

À minha amiga Nayane Oliveira Silva pela companhia, simpatia, alegria e atenção nos últimos anos.

A todos os meus colegas de turma, em particular Manfinapul Armando Blez e Danildo José Nhaga, guineenses, pela sinceridade e carisma.

A meus novos amigos que conheci na monitoria da disciplina lógica, conjuntos e funções, pela amizade no último semestre, em particular José Messias pelas reflexões acerca da matemática.

A meu primeiro professor de matemática Marcos Cleiton de Oliveira pelo apoio em me conceder os primeiros ensinos e livros sobre o assunto.

A meu professor de matemática de ensino médio Gustavo Junior pela simplicidade e coerência no ensino da disciplina.

Ao Professor José Bernardo por me auxiliar na obtenção dos livros que necessitei durante esse curso e pela sua alegria e disponibilidade em poder me ajudar.

À minha amiga professora Geraldina Saldanha Peixoto pela acolhida em sua casa nos dias em que me senti cansado das viagens.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira pela sua disposição em me ensinar assuntos de pós-graduação e me encorajar a continuar nos estudos.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho pela orientação, ensinamentos, paciência, conselhos e sensatez.

Aos membros da banca examinadora Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva e Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório pelas correções, sugestões e disponibilidade.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”(Galileu Galilei)

RESUMO

Esse trabalho tem como objetivo estudar as funções complexas holomorfas e os campos de vetores conformes definidos sobre um subconjunto aberto do espaço Euclidiano, estabelecendo uma interessante relação entre as funções complexas holomorfas e os campos de vetores conformes definidos sobre um subconjunto aberto do espaço Euclidiano de dimensão dois. Mais precisamente, mostraremos como construir campos de vetores conformes no espaço Euclidiano a partir das partes real e imaginária de uma função complexa holomorfa. Reciprocamente, estaremos verificando que pode-se fazer o processo inverso, ou seja, a partir das funções componentes de um campo de vetores conforme no espaço Euclidiano de dimensão dois, construir uma função holomorfa. Por fim, analisamos como tais relações influenciam certos casos particulares de campo de vetores conforme no espaço Euclidiano de dimensão dois.

Palavras-chave: Funções holomorfas. Campos de vetores. Campos conformes.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	9
2	**PRELIMINARES**	10
2.1	**Números Complexos**	10
2.2	**Limite e Continuidade de Funções Complexas**	13
2.3	**Derivada de Funções Complexas**	16
3	**CAMPOS DE VETORES CONFORMES**	23
3.1	**Campos de Vetores no Espaço Euclidiano**	23
3.2	**Campos Conformes no Espaço Euclidiano**	27
4	**FUNÇÕES HOLOMORFAS E CAMPOS CONFORMES**	29
4.1	**Resultados Principais**	29
4.2	**Algumas Aplicações**	31
5	**CONCLUSÃO**	34
	REFERÊNCIAS	35

1 INTRODUÇÃO

As funções em uma variável complexa são funções cujo dominio e contradominio são subconjuntos não vazios dos números complexos. Dentre essas funções, destaca-se aquelas que são chamadas *holomorfas*, as quais possuem derivada em todos pontos do seu domínio. As funções complexas holomorfas possuem uma estreita relação com os *campos de vetores conformes* (ou simplesmente, campos conformes) sobre o espaço Euclidiano de dimensão dois.

Os campos conformes correspondem a uma generalização dos campos de Killing e dos campos homotéticos, pois os campos de Killing são campos conformes com fator conforme identicamente nulo, enquanto os campos homotéticos são campos conformes com fator conforme constante. Os campos conformes aparecem com frequência na Geometria Diferencial, podemos encontrá-los no espaço Euclidiano, na esfera Euclidiana e espaço Hiperbólico (cf. Heintze (1988)).

No presente trabalho, estudam-se as funções complexas holomorfas e os campos conformes sobre o espaço Euclidiano, enfatizando uma interessante relação entre as funções complexas holomorfas e os campos conformes sobre o espaço Euclidiano de dimensão dois. Por fim, deve-se ainda destacar que esse trabalho encontra-se organizado e dividido em 05 (cinco) capítulos, intitulados por *Introdução*, *Preliminares*, *Campos de Vetores Conformes*, *Funções Holomorfas e Campos Conformes* e *Conclusão*, obedecendo essa ordem e divididos em seções, conforme detalhado no sumário.

2 PRELIMINARES

Nesse capítulo, apresentamos algumas preliminares sobre números complexos e funções de uma variável complexa, bem como as noções de limite, continuidade e derivada no contexto de funções de uma variável complexa.

2.1 Números Complexos

Os números complexos compõem um conjunto numérico, representado por $\mathbb{C}$ e que estende os números reais. Um número $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito na *forma algébrica*, dada por

$$z = x + iy,$$

onde "i" corresponde à unidade imaginária ($i^2 = -1$), enquanto x e y denotam as partes real e imaginária de z, respectivamente.

Observação 2.1 De forma alternativa, um número complexo z pode ser escrito na seguinte forma

$$z = (Re\, z) + (Im\, z)\, i,$$

onde $Re\, z$ e $Im\, z$ denotam as partes real e imaginária, respectivamente.

Na sequência, apresentamos duas definições elementares sobre o conjunto dos números complexos.

Definição 2.1 Dizemos que dois números $z, w \in \mathbb{C}$ são iguais, quando são satisfeitas as igualdades

$$Re\, z = Re\, w \qquad \text{e} \qquad Im\, z = Im\, w.$$

Definição 2.2 Dizemos que o conjugado do elemento $z = x + iy \in \mathbb{C}$ é o complexo, definido por

$$\overline{z} = x - iy.$$

Podemos definir, sobre os números complexos, operações de soma e produto, conforme descrito a seguir.

Definição 2.3 A soma e produto de $z = x_1 + iy_1, w = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ são definidas por:

(a) $z + w = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$;

(b) $z \cdot w = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$.

Proposição 2.1 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, valem as seguintes propriedades:

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$;

(b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Demonstração: Decorre diretamente da definição de conjugado.

Agora vamos estender a noção de módulo (ou valor absoluto) dos números reais para os números complexos.

Definição 2.4 Dado um número $z = x + iy \in \mathbb{C}$ arbitrário, define-se seu módulo por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observação 2.2 Os conceitos e notações introduzidas nos permite deduzir as seguintes igualdades:

(a) $z + \overline{z} = 2Re\, z$; (b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Proposição 2.2 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, tem-se as propriedades:

(a) $|z + w| \leq |z| + |w|$; (b) $|z \cdot w| = |z||w|$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Soares (2014).

Considerando as operações de soma e produto usuais de números complexos, também é possível estender as definições de simétrico e inverso multiplicativo.

Definição 2.5 Dado um número $z = x + iy \in \mathbb{C}$ arbitrário, define-se:

(a) $-z = (-x) + i(-y)$; (b) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ para $z \neq 0$.

Na sequência, podemos ainda definir subtração e quociente entre números complexos.

Definição 2.6 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, define-se a subtração e o quociente por:

(a) $z - w = z + (-w)$; (b) $\dfrac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$ para $w \neq 0$.

Os números complexos podem ainda ser representados na forma trigonométrica (ou forma polar). Mais precisamente, tem-se que um número $z = x + iy \in \mathbb{C}$ arbitrário pode ser escrito na forma

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

onde $0 \leq \theta < 2\pi$ é chamado de argumento de z.

Para concluir a seção, apresentamos expressões para produto e potência de números complexos na forma trigonométrica.

Proposição 2.3 Dados $n \in \mathbb{N}$ e $z, w \in \mathbb{C}$, cujas formas trigonométricas são

$$z = |z|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \quad \text{e} \quad w = |w|(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$$

então valem as igualdades:

(a) $z \cdot w = |z||w|[\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)]$;

(b) $z^n = |z|^n[\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)]$.

Demonstração:

(a) Por um cálculo direto, tem-se que

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z||w|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) \\ &= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) \\ &= |z||w|[(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) + i(\operatorname{sen}\alpha\cos\ \beta + \operatorname{sen}\beta\cos\ \alpha)], \end{aligned}$$

daí usam-se as fórmulas do seno e do cosseno da soma de arcos (cf. Carmo et al. (1992)) para obter

$$z \cdot w = |z||w|[\cos(\alpha+\beta) + i \operatorname{sen}(\alpha+\beta)].$$

(b) Fazendo a prova por indução, tem-se que o caso $n = 1$ corresponde à forma trigonométrica. Supondo a igualdade válida para $k \in \mathbb{N}$, tem-se como hipótese de indução

$$z^k = |z|^k[\cos(k\alpha) + i \operatorname{sen}(k\alpha)],$$

então partindo da hipotese, obtém-se

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z \ = \ |z|^k|z|[\cos(k\alpha) + i \operatorname{sen}(k\alpha)][\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha] \\ &= |z|^{k+1}[\cos(k\alpha)\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha\cos(k\alpha) + i \operatorname{sen}(k\alpha)\cos\alpha - \operatorname{sen}(k\alpha)\operatorname{sen}\alpha] \\ &= |z|^{k+1}\{[\cos(k\alpha)\cos\alpha - \operatorname{sen}(k\alpha)\operatorname{sen}\alpha] + i[\operatorname{sen}\alpha\cos(k\alpha) + \operatorname{sen}(k\alpha)\cos\alpha]\}, \end{aligned}$$

daí usam-se as fórmulas do seno e do cosseno da soma de arcos (cf. Carmo et al. (1992)) para obter

$$z^k \cdot z = |z|^{k+1}\{\cos[(k+1)\alpha] + i \sin[(k+1)\alpha]\},$$

que conclui a prova. $\square$

Observação 2.3 A igualdade do ítem (b) da Proposição 2.3 é conhecida como fórmula de De Moivre.

2.2 Limite e Continuidade de Funções Complexas

Nessa seção, apresentamos os conceitos relacionados à limite e continuidade de funções complexas.

Definição 2.7 Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ e um número real $a > 0$, dizemos que:

(a) $D(z_0, a) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < a\}$ é o disco aberto de raio a e centro z_0.
(b) $D[z_0, a] = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq a\}$ é o disco fechado de raio a e centro z_0.

Agora, vamos definir subconjuntos aberto e fechado no plano complexo.

Definição 2.8 Seja $U \subset \mathbb{C}$ um subconjunto, então dizemos que:

(a) U é aberto, se dado $z \in U$ qualquer, existe um real $a > 0$, tal que

$$D(z, a) \subset U;$$

(b) U é fechado, se seu complementar $\mathbb{C} \setminus U$ é aberto.

Em seguida, apresentamos as definições de ponto de acumulação e função complexa.

Definição 2.9 Se $U \subset \mathbb{C}$ é um subconjunto não vazio e $z_0 \in \mathbb{C}$, então z_0 é ponto de acumulação de U, quando todo disco aberto $D(z_0, a)$ contém pelo menos um ponto de U, distinto de z_0.

Definição 2.10 Dado $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto não vazio, então uma função $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita ser complexa em uma variável complexa.

Exemplo 2.1 Nos itens a seguir, vejamos alguns exemplos de funções complexas:

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $f(z) = z$. (b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $g(z) = \overline{z}$.

(c) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $h(z) = z^2$. (d) $j : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, tal que $j(z) = \dfrac{1}{z}$.

Abaixo é dada a definição de limite de uma função complexa.

Definição 2.11 Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto, $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa e z_0 um ponto de acumulação de U. Diz-se que $w_0 \in \mathbb{C}$ é o limite de f (se existir) quando $z \in U$ tende a z_0, se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Nesse caso, escreve-se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

Em seguida, vejamos algumas propriedades do limite de funções complexas.

Proposição 2.4 Dadas funções $f, g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas em um subconjunto aberto e um elemento $z_0 \in U$, tais que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{z\to z_0} g(z) = w_2,$$

então:

(a) $\lim_{z\to z_0} c \cdot f(z) = c \cdot w_1$, onde $c \in \mathbb{C}$ é constante;

(b) $\lim_{z\to z_0} [f(z) + g(z)] = w_1 + w_2$;

(c) $\lim_{z\to z_0} f(z) \cdot g(z) = w_1 \cdot w_2$.

Demonstração:

(a) Pela definição de limite, tem-se para cada $\varepsilon > 0$ que existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_1| < \frac{\varepsilon}{|c|},$$

com $z \in U$. Assim, vem que

$$|cf(z) - cw_1| = |c(f(z) - w_1)| = |c| \cdot |f(z) - w_1| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,$$

logo $\lim_{z\to z_0} c \cdot f(z) = c \cdot w_1$.

(b) Pela definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - w_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

bem como

$$0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - w_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

com $z \in U$.

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $z \in U$, tais que

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

então

$$\begin{aligned} |(f(z) + g(z)) - (w_1 + w_2)| &= |f(z) - w_1 + g(z) - w_2| \\ &\leq |f(z) - w_1| + |g(z) - w_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

que prova o item (b).

(c) Primeiramente, observe que

$$
\begin{aligned}
|f(z) \cdot g(z) - w_1 \cdot w_2| &= |f(z)g(z) - f(z)w_2 + f(z)w_2 - w_1 w_2| \\
&= |f(z) \cdot (g(z) - w_2) + w_2 \cdot (f(z) - w_1)| \\
&\leq |f(z)| \cdot |g(z) - w_2| + |w_2| \cdot |f(z) - w_1| \\
&\leq |f(z)| \cdot |g(z) - w_2| + (|w_2| + 1) \cdot |f(z) - w_1|,
\end{aligned}
$$

ou apenas,

$$|f(z) \cdot g(z) - w_1 \cdot w_2| \leq |f(z)| \cdot |g(z) - w_2| + (|w_2| + 1) \cdot |f(z) - w_1|.$$

Agora dado $\varepsilon > 0$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - w_1| < \varepsilon,$$

daí supondo $\varepsilon < 1$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &= |f(z) - w_1 + w_1| \\
&\leq |f(z) - w_1| + |w_1| \\
&< \varepsilon + |w_1| < 1 + |w_1| = k,
\end{aligned}
$$

onde $k > 0$ é uma constante.

Como $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$ e $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w_2$, então existem $\delta_2, \delta_3 > 0$, tais que

$$0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - w_1| < \frac{\varepsilon}{2(|w_2| + 1)}$$

e também

$$0 < |z - z_0| < \delta_3 \Rightarrow |g(z) - w_2| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Diante das informações obtidas e tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, segue-se que

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

implica que

$$
\begin{aligned}
|f(z) \cdot g(z) - w_1 \cdot w_2| &< k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} + (|w_2| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2|w_2| + 2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

portanto $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = w_1 \cdot w_2$. $\square$

Daremos agora a definição de uma função complexa contínua em um ponto do seu domínio.

Definição 2.12 Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que f é contínua no ponto $z_0 \in U$, quando

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Abaixo são descritas as propriedades de continuidade de funções complexas.

Proposição 2.5 Seja $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ abertos, $f, g : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $h : U_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções complexas, de modo que $f(U_1) \subset U_2$. Suponha que f e g são contínuas em $z_0 \in U_1$ e que h é contínua em $f(z_0)$, então valem as afirmações:

(a) A função $cf : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0;
(b) A função $f + g : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0;
(c) A função $f \cdot g : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0;
(d) A composta $h \circ f : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0.

Demonstração: Decorre da definição de continuidade (cf. Definição 2.12) e das propriedades de limite (cf. Proposição 2.4).

2.3 Derivada de Funções Complexas

Daremos, inicialmente, a definição de derivada de uma função complexa em um ponto do seu domínio.

Definição 2.13 Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto de $\mathbb{C}$ e $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa, então f é derivável em um ponto $z_0 \in U$ se existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

que será chamado de derivada de f em z_0.

Observação 2.4 O limite apresentado na definição anterior pode ser reescrito na forma

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Tal como acontece em funções reais, a derivabilidade de funções complexas implica em continuidade. Isso é mostrado na proposição abaixo.

Proposição 2.6 Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é derivável em $z_0 \in U$, então f é continua em z_0.

Demonstração:

Se f é derivável em z_0, então existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

daí

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

portanto $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, ou seja, f é contínua em z_0. □

Em seguida, vemos algumas propriedades basicas advindas da definição de derivada.

Proposição 2.7 Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto, $f, g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ deriváveis em $z_0 \in U$ e $c \in \mathbb{C}$ uma constante, então as funções $cf, f + g, f \cdot g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ também são deriváveis em z_0 e valem as igualdades:

(a) $(cf)'(z_0) = c \cdot f'(z_0)$.

(b) $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.

(c) $(fg)'(z_0) = f(z_0) \cdot g'(z_0) + g(z_0) \cdot f'(z_0)$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Soares (2014). □

A seguir, vemos a Regra da Cadeia para funções complexas.

Proposição 2.8 (Regra da Cadeia) Sejam $f : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $g : U_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas em abertos de $\mathbb{C}$ com $f(U_1) \subset U_2$. Se f é derivável em $z_0 \in U_1$ e g é derivável em $f(z_0) \in U_2$, então $g \circ f : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é derivável em z_0 e vale a igualdade

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Demonstração:

Se f é derivável em z_0 e g é derivável em $w_0 = f(z_0)$, então existem os limites

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

e

$$g'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0},$$

com $z \in U_1$ e $w \in U_2$.

Definindo a função $h : U_2 \to \mathbb{C}$, de modo que

$$h(w) = \begin{cases} \dfrac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0), & \text{se} \quad w \neq w_0 \\ 0, \quad \text{se} \quad w = w_0 \end{cases},$$

tem-se

$$\lim_{w \to w_0} h(w) = \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) = g'(w_0) - g'(w_0) = 0 = h(w_0),$$

logo h é contínua em w_0.

Como $f(U_1) \subset U_2$ e f é continua em z_0, obtém-se

$$\lim_{w \to w_0} (h \circ f)(z) = h(f(z_0)) = h(w_0) = 0,$$

onde o limite acima advém do fato da composta de funções continuas ainda ser continua (cf. Proposição 2.5(c)).

Quando $w \neq w_0$ e $w = f(z)$, pela definição de h obtemos:

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) \quad = \quad [h(f(z)) + g'(f(z_0))] \cdot [f(z) - f(z_0)],$$

consequentemente,

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} \quad = \quad [h(f(z)) + g'(f(z_0))] \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Calculando o limite na última igualdade, vamos ter

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} \quad = \quad \lim_{z \to z_0} [h(f(z)) + g'(f(z_0))] \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ou ainda,

$$(g \circ f)'(z_0) = [0 + g'(f(z_0))]f'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0),$$

que conclui a prova. □

A proposição abaixo traz as *condições de Cauchy-Riemann*, que tem importância crucial na demonstração dos resultados principais desse trabalho.

Proposição 2.9 Dada $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa definida num aberto e escrita na forma

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Se a derivada de f em $z = x + iy$ existe, então são satisfeitas as condições

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Demonstração: Seja f derivável num ponto $z = x + iy$, então

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

daí observe que:

a) Se $\Delta z = t$ com $t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{u(x+t,y) - u(x,y) + i \cdot [v(x+t,y) - v(x,y)]}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{u(x+t,y) - u(x,y)}{t} + i \cdot \lim_{t \to 0} \frac{v(x+t,y) - v(x,y)}{t}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

b) Se $\Delta z = it$ com $t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{it} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{u(x,y+t) - u(x,y) + i \cdot [v(x,y+it) - v(x,y)]}{it} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{v(x,y+t) - v(x,y)}{t} - i \cdot \frac{u(x,y+t) - u(x,y)}{t}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f'(z) \quad = \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Já que a derivada existe, então conclui-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),$$

conforme enunciado. $\square$

Veja em seguida, as condições suficientes para que uma função complexa seja derivável em um ponto.

Proposição 2.10 Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa definida num aberto e escrita na forma

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

tal que as derivadas parciais no ponto $z = x + iy \in U$ existem e são contínuas. Se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas, então f é derivável em z_0.

Demonstração: Considere o subconjunto $V \subset U$, definido por

$$V = \{z + \Delta z \in U; \Delta z = h = s + it \text{ e } |h| < \delta\},$$

daí tem-se que

$$f(z + \Delta z) - f(z) = u(x+s, y+t) - u(x,y) + i[v(x+s, y+t) - v(x,y].$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} & u(x+s, y+t) - u(x,y) \\ = \quad & u(x+s, y+t) - u(x+s, y) + u(x+s, y) - u(x,y) \end{aligned}$$

então pelo Teorema do valor medio, existem $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$, tais que

$$u(x+s, y) - u(x,y) = s\frac{\partial u}{\partial x}(x + \theta_1 s, y)$$

e

$$u(x+s,y+t)-u(x+s,y)=t\frac{\partial u}{\partial y}(x+s,y+\theta_2 t).$$

Pela continuidade das derivadas parciais, podemos escrever

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta_1 s,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\delta_1$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x+s,y+\theta_2 t)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\delta_2$$

onde $\delta_1,\delta_2\to 0$, quando $h\to 0$.

Dessa forma, vem que

$$\begin{aligned}
u(x+s,y+t)-u(x,y) &= s\frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta_1 s,y)+t\frac{\partial u}{\partial y}(x+s,y+\theta_2 t)\\
&= s\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\delta_1\right]+t\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\delta_2\right]\\
&= s\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+s\delta_1+t\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+t\delta_2,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$u(x+s,y+t)-u(x,y)=s\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+t\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+s\delta_1+t\delta_2.$$

De modo análogo, tem-se que

$$v(x+s,y+t)-v(x,y)=s\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)+t\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)+s\delta_3+t\delta_4,$$

onde $\delta_3,\delta_4\to 0$, quando $h\to 0$.

Nessas condições, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\
&= \frac{s\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+t\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+s\delta_1+t\delta_2+i\left[s\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)+t\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)+s\delta_3+t\delta_4\right]}{h},
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\
&= \frac{s\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+it\frac{\partial v}{\partial y}+i\left[s\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)-it\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right]}{h}+\frac{s}{h}(\delta_1+i\delta_3)+\frac{t}{h}(\delta_2+i\delta_4).
\end{aligned}$$

Como por hipótese, sabe-se que

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

então

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{k}{h}(\delta_1 + i\delta_3) + \frac{t}{h}(\delta_2 + i\delta_4).$$

Por fim, observa-se ainda que

$$\left|\frac{k}{h}\right| \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \left|\frac{t}{h}\right| \leqslant 1,$$

bem como $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e $\delta_4 \to 0$, quando $h \to 0$, então conclui-se que

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

portanto f é derivável em $z = x + iy$. □

Finalizamos essa seção com a definição de função holomorfa.

Definição 2.14 (Função Holomorfa) Uma função complexa $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida em um subconjunto aberto é dita ser holomorfa, quando existe a derivada $f'(z)$ para todo ponto $z \in U$.

3 CAMPOS DE VETORES CONFORMES

No presente capítulo, apresentamos conceitos e informações essenciais ao estudo dos campos de vetores conformes no Espaço Euclidiano.

3.1 Campos de Vetores no Espaço Euclidiano

Daremos as definições de campo de vetores suave e de gradiente de uma função suave.

Definição 3.1 Um campo de vetores suave sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ do espaço Euclidiano é uma aplicação suave

$$X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

que associa a cada ponto $p \in U$ um vetor $v \in \mathbb{R}^n$.

Observação 3.1 Denotaremos por $\mathfrak{X}(U)$ e $\mathrm{C}^\infty(U)$ o conjunto dos campos de vetores suaves e das funções reais suaves definidos sobre o aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, respectivamente.

Observação 3.2 Denotaremos por $E_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, o campo de vetores que associa cada $p \in U$ ao vetor $e_i \in \mathbb{R}^n$, cuja i-ésima coordenada é igual a um e as demais nulas. Mais precisamente, temos que

$$E_i(p) = e_i,$$

para todo ponto $p \in U$.

Definição 3.2 O gradiente de uma função suave $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida num aberto é o campo de vetores, definido por

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i,$$

onde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial de f em relação à variável x_i.

Agora, iremos definir um campo de vetores gradiente.

Definição 3.3 Dizemos que $X \in \mathfrak{X}(U)$ é gradiente, quando existe uma função suave $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que

$$X = \nabla f,$$

enquanto f é chamada de função potencial de X.

Exemplo 3.1 O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definido por

$$X = xE_1 + yE_2$$

é gradiente com função potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Podemos também definir divergente de campos de vetores suaves e laplaciano de funções suaves.

Definição 3.4 O divergente de um campo de vetores suave $X \in \mathfrak{X}(U)$ é definido por

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_i}.$$

onde E_i denota o campo de vetores definido na Observação 3.2.

Exemplo 3.2 Considere o campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, definido por

$$X = (x^2 - 3y^2)E_1 + (x^8 - 3xyz)E_2 + (y^2 - 3z^4)E_3,$$

então o divergente de X é dado por

$$divX = \frac{\partial \langle X, E_1 \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle X, E_2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle X, E_3 \rangle}{\partial z} = 2x - 3xz - 12z^3.$$

Definição 3.5 O laplaciano de uma função suave $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definido por

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Exemplo 3.3 Dada a função suave $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y, z) = x^4 y^5 z^6,$$

então o laplaciano de f é expresso por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 12x^2y^5z^6 + 20x^4y^3z^6 + 30x^4y^5z^4.$$

Vejamos a seguir mais algumas definições envolvendo campos de vetores suaves.

Definição 3.6 Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, definimos a função $\langle X, Y \rangle : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\langle X, Y \rangle(p) = \langle X(p), Y(p) \rangle,$$

para todo ponto $p \in U$.

Exemplo 3.4 Dados os campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definidos por

$$X = 2xyE_1 + 3xy^2E_2 \qquad \text{e} \qquad Y = (x - 3xy)E_1 + 4xyE_2,$$

obtemos a função

$$\langle X, Y\rangle = 2x^2y - 6x^2y^2 + 12x^2y^3.$$

Definição 3.7 Dados $X \in \mathfrak{X}(U)$ e uma função suave $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos a função $X(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$X(f) = \langle X, \nabla f\rangle.$$

Exemplo 3.5 Sejam $X \in \mathfrak{X}(U)$ e $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definidos por

$$X = (x^2 - y^2)E_1 + 2xyE_2 \qquad \text{e} \qquad f(x, y) = x^3 - y^3,$$

então

$$X(f) = \langle X, \nabla f\rangle = 3x^4 - 3x^2y^2 - 6xy^3.$$

Definição 3.8 Dados $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(U)$ arbitrários, definimos a aplicação

$$V_1^\flat \otimes V_2^\flat : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathrm{C}^\infty(U)$$

por

$$V_1^\flat \otimes V_2^\flat(X, Y) = \langle V_1, X\rangle\langle V_2, Y\rangle,$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$.

Observação 3.3 Para simplificar notações, denotaremos as aplicações $E_i^\flat \otimes E_i^\flat$ e $E_i^\flat \otimes E_j^\flat$. por dx_i^2 e $dx_i dx_j$, respectivamente.

A importante definição de hessiano de uma função suave está descrita logo abaixo:

Definição 3.9 Dada uma função suave $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida num aberto, dizemos que o hessiano de f é a aplicação $Hess\, f : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, definida por

$$Hess\, f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

Observação 3.4 Note que $Hess\, f(E_k, E_l) = \delta_{ik}\delta_{jl}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definimos, a seguir, a derivada de Lie de campos de vetores suaves.

Definição 3.10 Dado $X \in \mathfrak{X}(U)$ arbitrário, dizemos que a derivada de Lie de X é a aplicação $\mathcal{L}_X : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$, dada por

$$\mathcal{L}_X = \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle X, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j.$$

Observe, na proposição seguinte, as propridades obtidas a partir da definição de derivada de Lie.

Proposição 3.1 Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, $f \in C^\infty(U)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem as propriedades:

(a) $\mathcal{L}_{(X+\lambda Y)} = \mathcal{L}_X + \lambda \mathcal{L}_Y$.

(b) $\mathcal{L}_{\nabla f} = 2\, Hess f$.

Demonstração:

(a) Usando a definição de derivada de Lie, tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X+\lambda Y} &= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle X+\lambda Y, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle X+\lambda Y, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle X, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \\
&+ \lambda \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle Y, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle Y, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \\
&= \mathcal{L}_X + \lambda \mathcal{L}_Y,
\end{aligned}$$

concluindo o primeiro item.

(b) Por um cálculo direto, segue-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\nabla f} &= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle \nabla f, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle \nabla f, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right] dx_i dx_j \\
&= 2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \\
&= 2 Hess f,
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Schwarz (cf. Lima (2006)). $\square$

3.2 Campos Conformes no Espaço Euclidiano

A definição de campo vetores conformes é dada abaixo e está relacionada com a derivada de Lie.

Definição 3.11 Dizemos que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(U)$ definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é conforme, se sua derivada de Lie satisfaz

$$\mathcal{L}_X = 2\psi \sum_{i=1}^{n} dx_i^2,$$

onde $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é chamado *fator conforme* (ou *fator de conformidade*).

Observação 3.5 Um campo de vetores conforme é chamado *homotético* se o seu fator conforme é constante. Em particular, um campo de vetores homotético com fator conforme nulo é chamado de campo de *Killing.*

Nesse momento, apresentamos dois exemplos de campos de vetores conformes sobre o espaço Euclidiano.

Exemplo 3.6 O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definido por

$$X = (x^2 - y^2)E_1 + 2xyE_2$$

é conforme não-homotético com fator conforme $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dado por

$$\psi(x, y) = 2x.$$

Exemplo 3.7 Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}\psi|x|^2,$$

onde $\psi \in \mathbb{R}$ é uma constante real. Nessas condições, temos que $X = \nabla f$ é um campo de vetores homotético com fator conforme ψ.

Exemplo 3.8 O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, definido por

$$X = x^3yE_1 + y^2E_2,$$

não é conforme.

O próximo resultado dessa seção estabelece uma relação entre o divergente de um campo de vetores conforme com o seu fator conforme. Mais precisamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.2 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ um campo de vetores conforme, então

$$\psi = \frac{1}{n} divX,$$

onde ψ denota o fator conforme de X.

Demonstração:

Fazendo um cálculo direto, tem-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_X(E_k, E_k) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle X, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j(E_k, E_k) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle X, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] \delta_{ik} \delta_{jk} \\
&= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \langle X, E_k \rangle}{\partial x_k} = 2divX,
\end{aligned}$$

ou simplesmente,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_X(E_k, E_k) = 2divX. \tag{1}$$

Sabendo que X é conforme, obtém-se

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_X(E_k, E_k) = 2\psi \sum_{k=1}^{n} dx_k^2(E_k, E_k) = 2n\psi, \tag{2}$$

daí compara-se (1) e (2) para concluir que

$$\psi = \frac{1}{n} divX,$$

como queríamos provar. $\square$

4 FUNÇÕES HOLOMORFAS E CAMPOS CONFORMES

Nesse último capítulo, apresentamos os principais resultados do trabalho, que trazem uma interessante relação entre funções complexas holomorfas e campos de vetores conformes no espaço Euclidiano de dimensão dois. Mais informações sobre o assunto, podem ser encontradas em contexto mais geral em Manno e Metafune (2012).

4.1 Resultados Principais

O primeiro teorema que vamos apresentar nos mostra como construir um campo conforme no Espaço Euclidiano de dimensão dois, partindo de uma função complexa holomorfa.

Teorema 4.1 Seja $\varphi : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa sobre um subconjunto aberto, então o campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(U)$, definido por

$$X = (Re\,\varphi)E_1 + (Im\,\varphi)E_2,$$

é conforme com fator conforme satisfazendo

$$\psi = \frac{\partial(Re\,\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial(Im\,\varphi)}{\partial y}.$$

Demonstração:

Primeramente, vamos escrever φ na forma

$$\varphi = u + iv,$$

onde $u, v : U \to \mathbb{R}$ correspondem às partes real e imaginária da função φ, respectivamente. Como φ é uma função holomorfa, então u e v satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Por outro lado, observe que o campo de vetores X pode ser escrito na forma

$$X = uE_1 + vE_2,$$

enquanto isso sua derivada de Lie será dada por

$$\mathcal{L}_X = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y}dy^2\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)(dxdy + dydx).$$

Por fim, combinamos as condições de Cauchy-Riemann com a última igualdade, obtendo

$$\mathcal{L}_X = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y}dy^2\right),$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}_X = 2\psi(dx^2 + dy^2),$$

onde

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

donde concluímos que X é conforme com fator conforme ψ. $\square$

O próximo teorema apresenta a recíproca do Teorema 4.1, mostrando que é possível obter uma função complexa holomorfa, a partir de um campo conforme no espaço Euclidiano de dimensão dois.

Teorema 4.2 Seja $X \in \mathfrak{X}(U)$ um campo conforme sobre um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então a função $\varphi : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por

$$\varphi = \langle X, E_1 \rangle + \langle X, E_2 \rangle i,$$

é holomorfa.

Demonstração:

Primeiramente, vamos escrever X na forma

$$X = \langle X, E_1 \rangle E_1 + \langle X, E_2 \rangle E_2,$$

daí usamos que X é um campo conforme para obter

$$\mathcal{L}_X = 2\psi(dx^2 + dy^2),$$

onde ψ é a função suave que denota o fator conforme.

Por outro lado, a expressão da derivada de Lie de X é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X &= 2\left[\frac{\partial \langle X, E_1 \rangle}{\partial x}dx^2 + \frac{\partial \langle X, E_2 \rangle}{\partial y}dy^2\right] \\
&+ \left[\frac{\partial \langle X, E_2 \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle X, E_1 \rangle}{\partial y}\right](dxdy + dydx),
\end{aligned}$$

então comparando com a igualdade anterior, obtém-se que

$$\begin{aligned} & 2\left(\frac{\partial\langle X,E_1\rangle}{\partial x}dx^2+\frac{\partial\langle X,E_2\rangle}{\partial y}dy^2\right)+\left(\frac{\partial\langle X,E_2\rangle}{\partial x}+\frac{\partial\langle X,E_1\rangle}{\partial y}\right)(dxdy+dydx) \\ = \; & 2\psi(dx^2+dy^2). \end{aligned}$$

Da última igualdade, conclui-se que

$$\frac{\partial\langle X,E_1\rangle}{\partial x}=\frac{\partial\langle X,E_2\rangle}{\partial y}=\psi \quad \text{e} \quad \frac{\partial\langle X,E_2\rangle}{\partial x}+\frac{\partial\langle X,E_1\rangle}{\partial y}=0,$$

portanto as funções $\langle X,E_1\rangle$ e $\langle X,E_2\rangle$ satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, implicando que φ é uma função holomorfa. □

4.2 Algumas Aplicações

Nessa seção, apresentamos como aplicações dos Teoremas 4.1 e 4.2 alguns corolários, que correspondem a casos particulares de resultados sobre campos conformes já conhecidos na literatura.

Corolário 4.1 Dado $X\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ um campo conforme, valem as seguintes afirmações:

a) O conjunto dos zeros de X é discreto.
b) As funções componentes de X são harmônicas conjugadas.

Demonstração:

a) Primeiro, observe que o Teorema 4.2 nos garante que $\varphi:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, definida por

$$\varphi=\langle X,E_1\rangle+\langle X,E_2\rangle i,$$

é holomorfa, portanto φ é analítica e o conjunto dos zeros

$$\mathcal{Z}(\varphi)=\{z\in\mathbb{C};\varphi(z)=0\}$$

é discreto.

Por outro lado, observe que $\mathcal{Z}(\varphi)$ pode ser escrito da forma

$$\mathcal{Z}(\varphi)=\{x+yi\in\mathbb{C};Re\,\varphi(z)=Im\,\varphi(z)=0\},$$

podendo ser identificado com o conjunto

$$\mathcal{Z}(X)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\langle X,E_1\rangle(x,y)=\langle X,E_1\rangle(x,y)=0\},$$

ou ainda,

$$\mathcal{Z}(X) = \{p \in \mathbb{R}^2; X(p) = 0\},$$

que é o conjunto dos zeros de X.

b) Novamente usando o Teorema 4.2, tem-se que componentes $\langle X, E_1\rangle$ e $\langle X, E_2\rangle$ de X correspondem às partes real e imaginária de uma função holomorfa. Sendo assim, essas funções satisfazem as condições de Cauchy-Riemann (cf. Proposição 2.9), dadas por

$$\frac{\partial \langle X, E_1\rangle}{\partial x} = \frac{\partial \langle X, E_2\rangle}{\partial y} = \psi \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \langle X, E_2\rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle X, E_1\rangle}{\partial y} = 0,$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \Delta\langle X, E_1\rangle &= \frac{\partial^2 \langle X, E_1\rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle X, E_1\rangle}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2 \langle X, E_1\rangle}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \langle X, E_1\rangle}{\partial x^2} = 0, \end{aligned}$$

portanto $\langle X, E_1\rangle$ é uma função harmônica e da mesma forma, verifica-se que a função componente $\langle X, E_2\rangle$ é harmônica. $\square$

Agora vamos descrever explicitamente a função potencial de um campo conforme gradiente no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$.

Corolário 4.2 Dado um $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ campo conforme gradiente, então X é homotético com função potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\psi(x^2 + y^2) + ax + by + c,$$

onde ψ é o fator conforme e a, b, c constantes reais.

Demonstração: Como X é um campo gradiente, então existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$X = \nabla f,$$

ou seja,

$$X = \frac{\partial f}{\partial x}E_1 + \frac{\partial f}{\partial y}E_2.$$

Como X é conforme, então segue do Teorema 4.2 que

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}i$$

é holomorfa, logo satisfaz as condições de Cauchy-Riemann (cf. Proposição 2.9) e assim

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

donde concluímos que f pode ser escrita na forma

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\psi(x^2 + y^2) + bx + cy + d,$$

onde ψ é o fator conforme e a, b, c constantes reais. $\square$

Podemos usar o Teorema de Liouville (cf. Soares (2014)) para obter o próximo corolário.

Corolário 4.3 Dado um $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ campo de vetores conforme com norma limitada, então X é Killing gradiente com função potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ da forma

$$f(x,y) = ax + by + c,$$

onde a, b e c são constantes reais.

Demonstração: Usando o Teorema 4.2, tem-se que

$$\varphi = \langle X, E_1 \rangle + \langle X, E_2 \rangle i$$

é holomorfa, tal que

$$|\varphi|^2 = \langle X, E_1 \rangle^2 + \langle X, E_2 \rangle^2 = |X|^2,$$

implicando que φ é limitada.

Decorre do Teorema de Liouville (cf. Soares (2014)) que φ deve ser constante, logo $\langle X, E_1 \rangle$ e $\langle X, E_2 \rangle$ também são constantes. Sendo assim, podemos escrever

$$X = aE_1 + bE_2, \tag{3}$$

implicando pelo Teorema 4.1 que

$$\psi = \frac{\partial \langle X, E_1 \rangle}{\partial x} = 0,$$

ou seja, X é um campo de Killing.

Para além disso, segue da expressão (4) que

$$X = \nabla f,$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é da forma

$$f(x,y) = ax + by + c,$$

para a, b e c constantes reais. $\square$

5 CONCLUSÃO

Diante do que foi apresentado no decorrer do trabalho, podemos dizer que chegamos aos resultados esperados. Mostramos como obter campos de vetores conformes no espaço Euclidiano de dimensão dois, atráves das partes real e imaginária de uma função complexa holomorfa. Sabendo que encontrar uma função holomorfa é menos trabalhoso, essa relação nos fornece uma maneira mais simples de obter exemplos campo de vetores conformes.

Devemos notar também que, de forma semelhante, foi possível verificar a possibilidade de usar um campo de vetores conforme sobre o espaço Euclidiano de dimensão dois para obter uma função holomorfa definida num subconjunto aberto dos complexos, porém esse processo não tem um efeito muito prático, visto que é menos trabalhoso obter exemplos de funções complexas holomorfas.

Por fim, mostramos ainda algumas aplicações dessas relações na demonstração de casos particulares de resultados sobre campos de vetores conformes. Como por exemplo, os resultados de caracterização dos campos de vetores conformes gradientes e os campos de vetores conformes com norma limitada, definidos sobre subconjuntos abertos do espaço Euclidiano de dimensão dois.

REFERÊNCIAS

BUENO, H. P. *Álgebra Linear: Um Segundo Curso.* Rio de Janeiro: SBM, 2006.

CARMO, M. P. et al. *Trigonometria e Números Complexos.* Rio de Janeiro: SBM, 1992.

CARMO, M. P. do *Geometria Riemanniana.* 3a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).

FERNANDEZ, C. S.; BERNARDES Jr, N. C. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa.* Rio de Janeiro: SBM, 2004.

GUIDORIZZI, H. G. *Um Curso de Cálculo - Volume 1.* 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. G. *Um Curso de Cálculo - Volume 2.* 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. G. *Um Curso de Cálculo - Volume 3.* 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. G. *Um Curso de Cálculo - Volume 4.* 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

HEINTZE, E. Extrinsic upper bounds for λ_1. *Mathematische Annalen*, v. 280, p. 389-402, 1988.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear.* 8a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. *Análise Real - Volume 1.* 11a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E. L. *Análise Real - Volume 2: Funções de n variáveis.* 6a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. *Análise Real - Volume 3: Análise Vetorial*, 4a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. *Curso de Análise - Volume 1.* 14a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. *Curso de Análise - Volume 2.* 10a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LINS Neto, A. *Funções de uma Variável Complexa.* 2a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

MANNO, G.; METAFUNE, G. On the extendability of conformal vector fields of 2-dimensional manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, v. 30, p. 365-369, 2012.

OLIVEIRA, F.; PEREIRA, O.; SILVA, M. B.; SILVA Filho, J. F. Campos Conformes sobre o Espaço Hiperbólico. Redenção, 2018 (Artigo Submetido).

PEREIRA, O. Raízes de Equações do Terceira Grau. 2017, 33f. Monografia (Graduação) - Curso de Ciências da Natureza e Matemática, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2017.

SOARES, M. G. Cálculo em uma Variável Complexa. 5a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.