UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS DE OLIVEIRA BANDEIRA

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS TERNOS PITAGÓRICOS

REDENÇÃO - CE
2020

MATHEUS DE OLIVEIRA BANDEIRA

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS TERNOS PITAGÓRICOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

REDENÇÃO - CE

2020

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Bandeira, Matheus de Oliveira.

B214c

Construção geométrica dos ternos pitagóricos / Matheus de Oliveira Bandeira. - Redenção, 2020.
33f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. Construções geométricas. 2. Desenho geométrico. 3. Teorema de Pitágoras. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 516

MATHEUS DE OLIVEIRA BANDEIRA

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS TERNOS PITAGÓRICOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Aprovada em 10 de Fevereiro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

DTavares

Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Odete Elana Sousa Pereira

Profa. Esp. Odete Elana Sousa Pereira
Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC)

Dedico este trabalho a minha preciosa e querida mãe, Débora Cruz de Oliveira, a qual nunca me deixou desistir, ajudou a formar meu caráter e me amou mesmo nos meus momentos mais frágeis. A minha estimável avó, Maria Carmélia Bandeira, a qual por muitas vezes me tratou como muito além de um neto.

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho a Deus, o criador, o regente e senhor absoluto, a quem devo todas as qualidades que tenho, e que é o único digno de honra e glória.

A minha preciosa mãe Débora Cruz de Oliveira, que me incentivou em todos os momentos e planos, que sempre me amou e deu todas as condições para que eu pudesse chegar até aqui. Eu te amo.

Ao meu padrasto João Batista Paz Romão, que sempre me criou como um filho e que nunca me deixou faltar nada.

Aos meus queridos irmãos Lucas, João Guilherme e Marcus Vinícius, pelo companheirismo e amizade.

A minha querida avó Maria Carmélia Bandeira, que sempre me apoiou e me desejou o melhor.

A minha noiva Heloísa de Sousa Matos, pelos momentos de sorrisos e alegrias, que sempre esteve do meu lado, confiando em mim e me apoiando aonde quer que fosse.

Aos meus colegas de curso (sobretudo aos amigos e companheiros da turma 2015.1) pelos momentos de sorrisos e conversas de descontração. Em especial aos meus amigos Edivan (pão bola) e Roger (menino que grita) pelos momentos de risadas dentro destes quase 5 anos de curso.

Aos meus amigos do RPG, vocês sabem da importância e do valor que tem em meu coração.

Ao Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho por aceitar ser meu orientador, me ajudando a alcançar importante momento.

À banca pela tarefa e tempo dedicado a leitura nas correções, agradeço por cada colaboração neste trabalho.

Ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

Ao tempo em que fui bolsista de iniciação cientifica sob a tutela do Prof. Dr. Elcimar, ao programa Residência Pedagógica, que me auxiliou em minha formação.

À UNILAB por propiciar que eu chegasse até aqui.

"A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela". (Albert Einstein)

RESUMO

Esse trabalho tem por objetivo apresentar um método de construção de triângulos e ternos pitagóricos com o auxílio de ferramentas do desenho geométrico. Para isso, inicialmente, iremos expor dois casos particulares e em seguida, descrever os passos do caso geral para a construção, com régua não graduada e compasso, de triângulos e ternos pitagóricos. Antes disso, iremos enunciar o teorema principal desse trabalho, o qual irá dar suporte matemático e veracidade para o método geométrico supracitado. Essa parte será antecedida por definições e resultados sobre triângulos, que chegarão ao Teorema de Pitágoras, um dos teoremas mais importantes da história da matemática, bem como em definições elementares sobre trigonometria no triângulo retângulo.

Palavras-chave: Construções Geométricas. Desenho Geométrico. Ternos Pitagóricos. Triângulos Pitagóricos.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os ternos pitagóricos são ternos de números naturais que tiveram a sua origem a partir do Teorema de Pitágoras. Esses ternos correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo, no qual os lados menores são denominados catetos e o maior lado é chamado de hipotenusa. Com isto, abordaremos de forma objetiva a construção de triângulos e ternos pitagóricos, a partir de ferramentas elementares do desenho geométrico. Essas ferramentas servirão como base para a descrição dos passos do método geométrico que será apresentado.

O interesse do autor pelas construções geométricas se deu a partir da disciplina de desenho geométrico no curso de Licenciatura em Matemática, posteriormente começaram os estudos sobre os ternos pitagóricos, que resultaram nesse Trabalho de Conclusão de Curso. As figuras encontradas nesse trabalho foram produzidas com o recurso de desenho do Geogebra, porém tais figuras podem ser construídas com o auxílio de uma régua não graduada e um compasso. As construções geométricas elementares mencionadas no decorrer do trabalho podem ser conferidas no livro *Construções Geométricas* de Wagner (2007).

Esse trabalho encontra-se dividido e organizado em quatro capítulos, sendo que o primeiro corresponde a essa parte introdutória. No segundo capítulo, abordaremos o estudo dos triângulos dentro da Geometria Euclidiana, tendo início com algumas definições elementares, chegando ao enunciado do Teorema de Pitágoras e uma de suas inúmeras demonstrações. Finalizamos o Capítulo 2 com definições acerca das principais razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente), culminando com uma proposição, que apresenta a identidade fundamental da Trigonometria.

No terceiro capítulo, iremos abordar os ternos pitagóricos, discutindo sobre a sua origem, suas relações com o Teorema de Pitágoras e dando continuidade com a exposição do método geométrico de construção de triângulos e ternos pitagóricos, a partir das ferramentas do desenho geométrico. Para isso, iremos enunciar e demonstrar o teorema mais importantes desse trabalho, que será decisivo para justificar o funcionamento do referido método geométrico, a ser apresentado no final dessa mesma seção. Por fim, concluíremos com as discussões sobre os resultados obtidos, refletindo sobre o teorema central do nosso trabalho.

2 PRELIMINARES

No presente capítulo, iremos estabelecer alguns conceitos essenciais para o estudo de triângulos e alguns de seus elementos, enunciando ainda o Teorema de Pitágoras e recordando as principais razões trigonométricas no triângulo retângulo, bem como a Identidade Fundamental da Trigonometria.

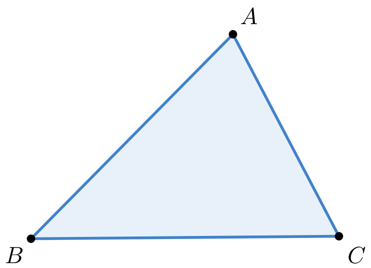
2.1 Elementos de um Triângulo

A seguir estão expostas algumas definições iniciais sobre triângulos e alguns dos seus elementos.

Definição 2.1 Um triângulo é uma figura plana (ou lugar geométrico) formado por três pontos não colineares e pelos três segmentos de reta determinados por esses pontos.

Observação 2.1 Se um triângulo é determinado por pontos não colineares A, B e C, então dizemos que A, B e C são os vértices, AB, AC e BC são os seus lados e o denotaremos por ABC.

Figura 1: Exemplo de Triângulo



Fonte: Autor, 2020.

Definição 2.2 Dois triângulos são ditos congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Observação 2.2 Se ABC e DEF são triângulos congruentes, escrevemos $ABC \equiv DEF$.

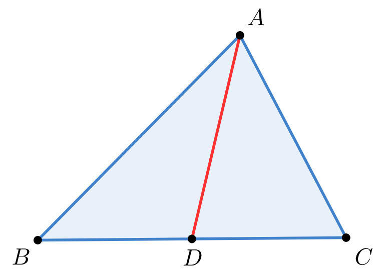
Definição 2.3 Um triângulo ABC é denominado:

a) Equilátero - Se os seus lados são congruentes entre si.
b) Isósceles - Se possui dois lados congruentes.
c) Escaleno - Se as medidas dos seus lados são distintas entre si.

Definição 2.4 Sejam ABC um triângulo e $D \in BC$ um ponto, então o segmento AD será designado:

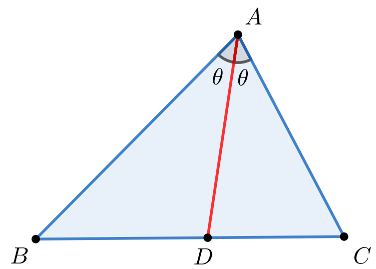
a) Mediana de ABC relativa a BC, quando D for ponto médio de BC (cf. Figura 2).
b) Bissetriz de $\widehat{A}$, quando AD dividir $\widehat{A}$ em dois ângulos congruentes (cf. Figura 3).
c) Altura de ABC relativa a BC, quando AD for perpendicular a BC (cf. Figura 4).

Figura 2: Mediana



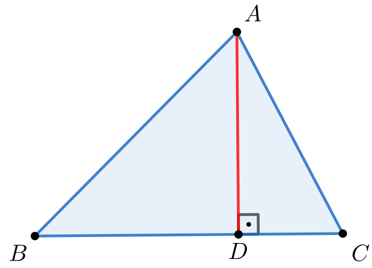
Fonte: Autor, 2020.

Figura 3: Bissetriz



Fonte: Autor, 2020.

Figura 4: Altura



Fonte: Autor, 2020.

Definição 2.5 Seja ABC um triângulo, então dizemos que os ângulos $C\widehat{A}B$, $A\widehat{B}C$ e $B\widehat{C}A$ são ângulos internos do triângulo, que por simplicidade, podem ainda ser denotados apenas por $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente.

Proposição 2.1 (Desigualdade triangular) Dados três pontos A, B e C distintos sobre o plano, temos que

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em Barbosa (2011).

Corolário 2.1 Sejam a, b, c três números reais positivos que satisfazem

$$|a - b| < c < a + b,$$

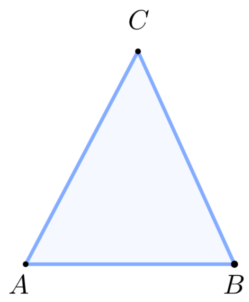
então podemos construir um triângulo cujos lados medem a, b e c.

Demonstração: Pode ser encontrada em Barbosa (2011).

Proposição 2.2 A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

Demonstração: Considere um triângulo ABC, conforme a figura a seguir:

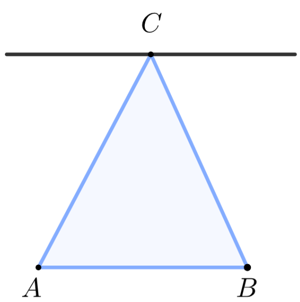
Figura 5: Triângulo ABC



Fonte: Autor, 2020.

Depois trace um segmento de reta paralelo a AB passando por C, conforme ilustrado.

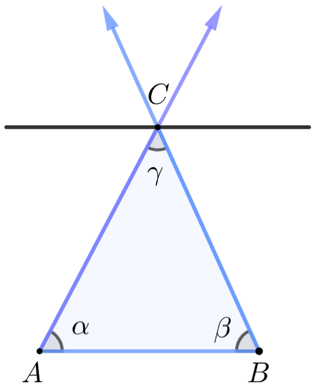
Figura 6: Segmento paralelo a AB



Fonte: Autor, 2020.

Considere as semi-retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$, depois denote por α, β e γ as medidas dos ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, e $\widehat{C}$, respectivamente.

Figura 7: Semi-retas



Fonte: Autor, 2020.

Agora lembre que ângulos opostos pelo vértice são congruentes e além disso, tem-se que:

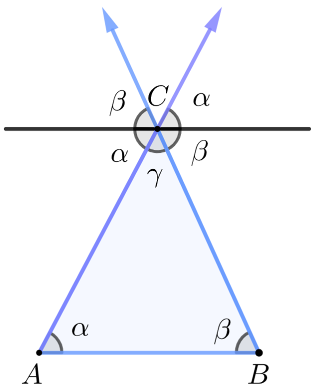
a) O ângulo formado entre $\overrightarrow{AC}$ e o segmento paralelo a AB mede α (ângulos alternos internos).

b) O ângulo formado entre $\overrightarrow{BC}$ e o segmento paralelo a AB mede β (ângulos alternos internos).

c) O ângulo adjacente a $\widehat{C}$, que está entre $\overrightarrow{AC}$ e o segmento paralelo a AB mede α.

d) O ângulo adjacente a $\widehat{C}$, que está entre $\overrightarrow{BC}$ e o segmento paralelo a AB mede β.

Figura 8: Soma dos ângulos internos



Fonte: Autor, 2020.

Por fim, observe que $\alpha + \beta + \gamma$ é a medida de um ângulo raso, portanto

$$med(\widehat{A}) + med(\widehat{B}) + med(\widehat{C}) = \alpha + \beta + \gamma = 180^o,$$

concluindo nossa prova. $\square$

Definição 2.6 Dado um triângulo ABC, podemos classificá-lo em relação à medida dos seu ângulos internos, como descrito a seguir:

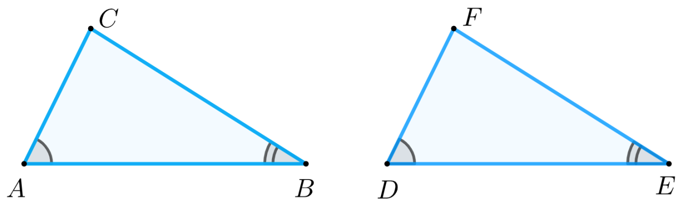
a) Acutângulo - Se todos os seus ângulos internos medirem menos que 90^o.
b) Obtusângulo - Se existir um ângulo interno com medida maior que 90^o.
c) Retângulo - Se um de seus ângulos internos for reto (ou seja, medir 90^o).

Definição 2.7 Dizemos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

Proposição 2.3 (Caso ângulo-ângulo - A.A.) Dados dois triângulos ABC e DEF com $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$, então os triângulos são semelhantes.

Demonstração: Considere os triângulos ABC e DEF, conforme ilustrado na Figura 9.

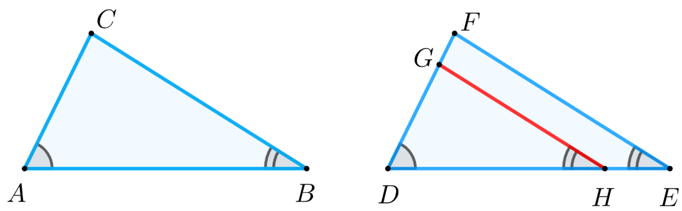
Figura 9: Triângulos ABC e DEF



Fonte: Autor, 2020.

Admita que $\overline{AB} \leq \overline{DE}$, então marque um ponto $H \in DE$, de tal forma que $DH \equiv AB$. Depois trace um segmento paralelo a EF, passando pelo ponto H e tendo o ponto $G \in DF$ como segunda extremidade.

Figura 10: Segmento de reta GH



Fonte: Autor, 2020

Nestas condições, observe que

$\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ (Por hipótese);
$AB \equiv DH$ (Por construção) e
$\widehat{B} \equiv \widehat{E}$ (Por hipótese) e $\widehat{E} \equiv \widehat{H}$ (Ângulos correspondentes) $\Rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{H}$,

portanto pelo caso de congruência A.L.A. (ângulo - lado - ângulo) (cf. Barbosa (2011)), tem-se que

$$ABC \equiv DHG.$$

Desde que GH é paralelo ao lado EF, então segue do Teorema de Tales que

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DE}}$$

consequentemente,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

e de modo análogo, prova-se ainda que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

Por fim, basta observar que

$$\widehat{A} \equiv \widehat{D} \quad \text{e} \quad \widehat{B} \equiv \widehat{E},$$

implicando pela Proposição 2.2 que

$$\widehat{C} \equiv \widehat{F},$$

logo os triângulos ABC e DEF são semelhantes, concluindo a prova da proposição. □

2.2 Teorema de Pitágoras

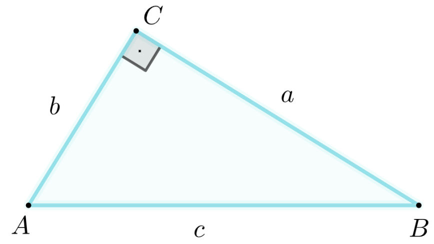
Nessa seção, abordaremos um dos teoremas mais importantes da história da Matemática, sua origem é uma das mais antigas, mas sua relevância perdura até hoje com diversas aplicações. O Teorema de Pitágoras possui diversas demonstrações diferentes, no entanto faremos uma demonstração, que envolve semelhança de triângulos.

Teorema 2.1 (Teorema de Pitágoras) Dado um triângulo ABC retângulo, tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e $med(\widehat{C}) = 90^o$, então vale a igualdade

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Demonstração: Considere um triângulo retângulo ABC, conforme a Figura 11 a seguir:

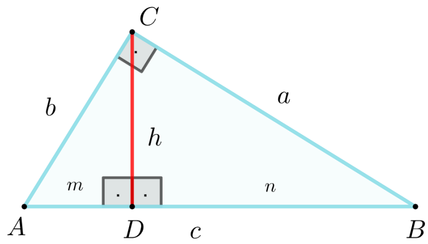
Figura 11: Triângulo ABC



Fonte: Autor, 2020.

Na sequência, trace a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB, conforme a Figura 12.

Figura 12: Altura de ABC relativa a AB



Fonte: Autor, 2020.

Observação 2.3 O ponto D é o ponto de intersecção entre AB e a altura traçada, enquanto h, m e n denotam as medidas de CD, AD e DB, respectivamente.

Observe que os triângulos ABC e CBD são semelhantes (cf. Proposição 2.3), então

$$\frac{a}{c} = \frac{n}{a} \Rightarrow a^2 = c \cdot n \tag{1}$$

e como ABC e ACD são semelhantes (cf. Proposição 2.3), tem-se também

$$\frac{b}{c} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = c \cdot m. \tag{2}$$

Daí somando (1) e (2), obtém-se que

$$a^2 + b^2 = c \cdot n + c \cdot m$$

ou seja,

$$a^2 + b^2 = c \cdot (n + m) = c \cdot c = c^2,$$

portanto

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

conforme queríamos provar. □

Observação 2.4 Algumas das várias aplicações do Teorema de Pitágoras podem ser encontradas na Trigonometria, por exemplo, a Identidade Fundamental da Trigonometria, que será tratada na próxima seção.

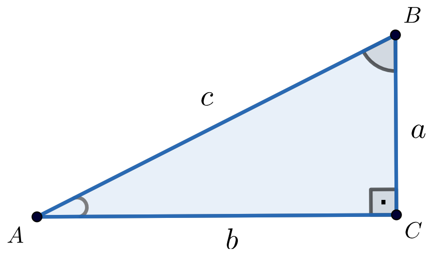
2.3 Razões Trigonométricas

Nessa seção, revisamos brevemente as principais razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo.

Definição 2.8 Dado um triângulo retângulo ABC com ângulo $\widehat{C}$ reto, dizemos que o seno do ângulo $\widehat{A}$ (ou do ângulo $\widehat{B}$) é a razão entre as medidas do cateto oposto a esse ângulo e da hipotenusa. Mais precisamente, tem-se que

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Figura 13: Ilustração do seno de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$



$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{a}{c}$$

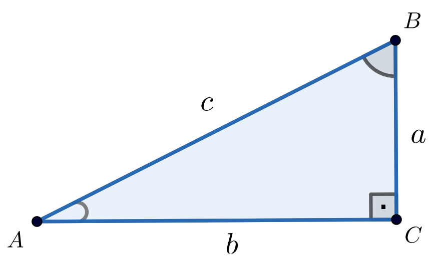
$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{c}$$

Fonte: Autor, 2020.

Definição 2.9 Dado um triângulo retângulo ABC com ângulo $\widehat{C}$ reto, dizemos que o cosseno do ângulo $\widehat{B}$ (ou do ângulo $\widehat{A}$) é a razão entre as medidas do cateto adjacente a esse ângulo e da hipotenusa. Mais precisamente, tem-se que

$$\cos\widehat{A} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \text{e} \quad \cos\widehat{B} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

Figura 14: Ilustração do cosseno de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$



$$\cos\widehat{A} = \frac{b}{c}$$

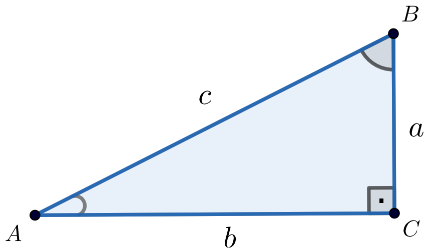
$$\cos\widehat{B} = \frac{a}{c}$$

Fonte: Autor, 2020.

Definição 2.10 Dado um triângulo retângulo ABC com ângulo $\widehat{C}$ reto, dizemos que a tangente do ângulo $\widehat{A}$ (ou do ângulo $\widehat{B}$) é a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a esse ângulo. Mais precisamente, tem-se que

$$\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Figura 15: Ilustração da tangente de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$



$$\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{b}{a}$$

Fonte: Autor, 2020.

Observação 2.5 A Proposição 2.3 nos assegura que seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo independe do triângulo retângulo considerando e portanto, essas razões trigonométricas estão bem definidas.

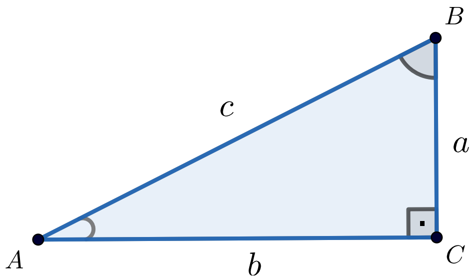
Definição 2.11 Dado um número real $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, dizemos que o seno (respectivamente, cosseno e tangente) de θ é o seno (respectivamente, cosseno e tangente) de um ângulo, cuja medida em radianos é igual a θ.

Proposição 2.4 (Identidade Fundamental) Dado um número $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ arbitrário, vale a seguinte identidade

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Demonstração: Considere um triângulo retângulo ABC com $\widehat{C}$ reto e cuja medida do ângulo $\widehat{A}$ é igual a θ (cf. Figura 16).

Figura 16: Triângulo retângulo ABC



Fonte: Autor, 2020.

Nessas condições, tem-se pelo Teorema de Pitágoras que

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

então divida ambos os lados por c^2, obtendo

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

mas pela Figura 16, tem-se que

$$\frac{a}{c} = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{e} \qquad \frac{b}{c} = \cos\theta,$$

consequentemente,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

. $\square$

3 CONSTRUINDO TERNOS PITAGÓRICOS

Os resultados aqui apresentados culminarão na construção dos triângulos e ternos pitagóricos, a partir das ferramentas do desenho geométrico. Abordaremos dois casos particulares e em seguida, apresentaremos o caso geral que será descrito passo a passo. Devemos ressaltar que os resultados contidos nas Seções 3.2 e 3.3 podem ser encontrados em Bandeira e Silva Filho (2020).

3.1 Definições e Exemplos

Os ternos pitagóricos apareceram em transcritos da Babilônia por volta do século XVIII a.C., posteriormente foram estudados no período grego, registrado na obra *Os Elementos* de Euclides (ca. 300 a.C.), bem como estudos por parte de matemáticos islâmicos. Dizemos que os ternos pitagóricos são ternos de números naturais que satisfazem a identidade quadrática

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

O termo *terno pitagórico* vem do fato da sua inteira relação com o teorema de Pitágoras, tendo em questão que as medidas dos lados de um triângulo retângulo satisfazem a equação acima. Podemos classificar os ternos pitagóricos de duas maneiras, primeiramente como primitivos (naturais relativamente primos) e em um segundo momento como secundários (não primitivos).

A partir disso, Euclides, em sua obra *Os Elementos*, verificou que os ternos primitivos podem ser obtidos a partir das seguintes expressões

$$c = x^2 + y^2, \quad a = x^2 - y^2, \quad \text{e} \quad b = 2xy,$$

onde $x, y \in \mathbb{N}$ são *relativamente primos* (ou mais comumente, chamados *primos entre si*), tais que $x > y$. As expressões acima nos fornecem qualquer terno pitagórico existente, pois se temos um terno pitagórico primitivo formado por (a, b, c) e um número $k \in \mathbb{N}$, então os ternos secundários são dados por (ka, kb, kc).

Dadas as hipóteses para as fórmulas de Euclides na obtenção de ternos pitagóricos, faremos a seguir alguns exemplos sobre ternos pitagóricos primitivos e em seguida ternos pitagóricos secundários.

Exemplo 3.1 Encontre os ternos pitagóricos dados pelas fórmulas de Euclides para os valores $x = 2$ e $y = 1$.

Solução: Utilizando estes valores nas fórmulas de Euclides, tem-se que

$$c = 2^2 + 1^2, \quad a = 2^2 - 1^2, \quad \text{e} \quad b = 2 \cdot 2 \cdot 1,$$

ou ainda,

$$c = 5, \quad a = 3 \quad \text{e} \quad b = 4,$$

que correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo, pois satisfazem

$$5^2 = 3^2 + 4^2.$$

Exemplo 3.2 Encontre os ternos pitagóricos dados pelas fórmulas de Euclides para os valores $x = 5$ e $y = 4$.

Solução: Utilizando inicialmente estes valores nas fórmulas de Euclides, tem-se que

$$c = 5^2 + 4^2, \quad a = 5^2 - 4^2 \quad \text{e} \quad b = 2 \cdot 5 \cdot 4,$$

ou ainda,

$$c = 41, \quad a = 9 \quad \text{e} \quad b = 40$$

que correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo, pois satisfazem

$$41^2 = 9^2 + 40^2.$$

A partir de agora faremos o exemplo para ternos secundários, ou seja, múltiplos de ternos primitivos.

Exemplo 3.3 Encontre os ternos pitagóricos dados pelas fórmulas de Euclides para os valores $x = 4$ e $y = 2$.

Solução: Utilizando inicialmente estes valores nas fórmulas de Euclides, tem-se que

$$c = 4^2 + 2^2, \quad a = 4^2 - 2^2 \quad \text{e} \quad b = 2 \cdot 4 \cdot 2,$$

ou ainda,

$$c = 20, \quad , a = 12 \quad \text{e} \quad b = 16$$

que correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo, pois satisfazem

$$20^2 = 12^2 + 16^2.$$

Exemplo 3.4 Encontre os ternos pitagóricos dados pelas fórmulas de Euclides para os valores $x = 15$ e $y = 12$.

Solução: Utilizando inicialmente estes valores nas fórmulas de Euclides, tem-se que

$$c = 15^2 + 12^2, \quad a = 15^2 - 12^2 \quad \text{e} \quad b = 2 \cdot (15) \cdot (12)$$

ou ainda,

$$c = 369, \quad a = 81 \quad \text{e} \quad b = 360,$$

que correspondem às medidas dos lados de um triângulo retângulo, pois satisfazem

$$369^2 = 81^2 + 360^2.$$

3.2 Resultados Chave

Os resultados apresentados aqui servirão para embasar o método de construção de ternos pitagóricos a serem apresentados na próxima seção.

Teorema 3.1 Dado um triângulo retângulo ABC com $\widehat{C}$ reto, tal que

$$med(\widehat{B}) = 2\theta \quad \text{e} \quad \tan\theta = n/m,$$

onde $m, n \in \mathbb{N}$. Suponha que $\overline{BC} = k(m^2 - n^2)$ para algum natural $k \in \mathbb{N}$, então

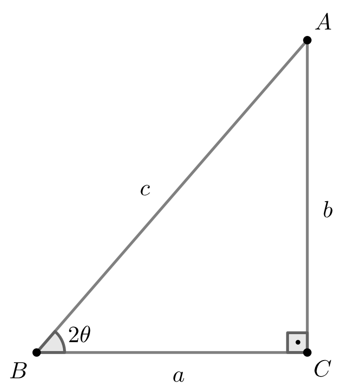
$$\overline{AC} = 2kmn \quad \text{e} \quad \overline{BA} = k(m^2 + n^2),$$

em particular, ABC é um triângulo pitagórico.

Demonstração:

Primeiramente, vamos ilustrar o triângulo ABC, conforme enunciado acima, denotando as medidas de BC, AC e AB por a, b e c, respectivamente (cf. Figura 17).

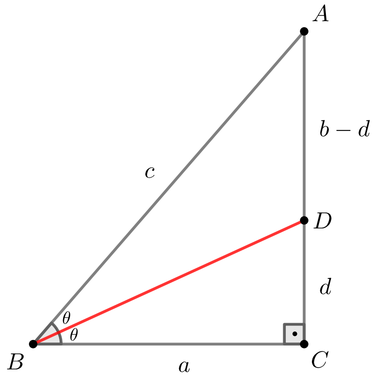
Figura 17: Triângulo retângulo ABC



Fonte: Autor, 2020.

Na sequência, vamos traçar a bissetriz BD do ângulo $\widehat{B}$ e denotar a medida do segmento de reta CD por d (cf. Figura 18).

Figura 18: Bissetriz do ângulo $\widehat{B}$



Fonte: Autor, 2020.

Observe que o Teorema da Bissetriz (cf. Barbosa (2011)) implica que

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{b-d},$$

enquanto a hipótese $\tan\theta = n/m$ nos fornece

$$\frac{d}{a} = \frac{n}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{d} = \frac{m}{n} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{n}{m}a, \tag{3}$$

consequentemente,

$$\frac{c}{b-d} = \frac{m}{n}. \tag{4}$$

Das igualdades (3) e (4), segue que

$$nc = m(b-d) = m\left(b - \frac{n}{m}a\right) = mb - na,$$

ou ainda,

$$mb = n(a+c). \tag{5}$$

Por outro lado, o Teorema de Pitágoras nos garante que

$$c^2 = a^2 + b^2, \tag{6}$$

ou equivalentemente,

$$m^2c^2 = m^2a^2 + m^2b^2.$$

Substituindo (5) na última igualdade, obtém-se que

$$m^2c^2 = m^2a^2 + n^2(a+c)^2,$$

então colocando todos os termos no primeiro membro, vamos ter

$$m^2c^2 - m^2a^2 - n^2(a+c)^2 = 0.$$

Desenvolvendo o termo entre parênteses, segue que

$$m^2c^2 - m^2a^2 - n^2(a^2 + 2ac + c^2) = 0,$$

daí vamos multiplicar n^2 pelos termos entre parênteses, obtendo

$$m^2c^2 - m^2a^2 - n^2a^2 - 2n^2ac - n^2c^2$$

que pode ser reescrito na forma

$$(m^2 - n^2)c^2 - 2n^2ac - (m^2 + n^2)a^2 = 0. \tag{7}$$

Por hitótese, lembre que

$$a = k(m^2 - n^2)$$

e assim

$$(m^2 - n^2)c^2 - 2n^2ck(m^2 - n^2) - (m^2 + n^2)(m^2 - n^2)^2k^2 = 0,$$

daí cancela-se $(m^2 - n^2)$ para obter

$$c^2 - 2kn^2c - (m^4 - n^4)k^2 = 0,$$

onde usamos $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) = m^4 - m^4$.

Multiplicando k^2 pelos termos entre parênteses, chega-se na igualdade

$$c^2 - 2kn^2c - m^4k^2 - n^4k^2 = 0$$

que pode ser reescrita na forma

$$(c - kn^2)^2 = m^4k^2.$$

Desde que $c > 0$, $k > 0$ e $m > n > 0$, pode-se deduzir da última igualdade que

$$c = k(m^2 + n^2),$$

então vamos substituir em (6) junto com a hipótese $a = k(m^2 - n^2)$, resultando em

$$b = 2kmn,$$

portanto conclui-se a prova. $\square$

Decorre como aplicação da Proposição 3.1, o Corolário 3.1 enunciado e demonstrado a seguir:

Corolário 3.1 Um ângulo agudo com medida satisfazendo

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4},$$

possui tangente racional, se e somente se, existe um triângulo pitagórico com um dos ângulos internos medindo 2θ.

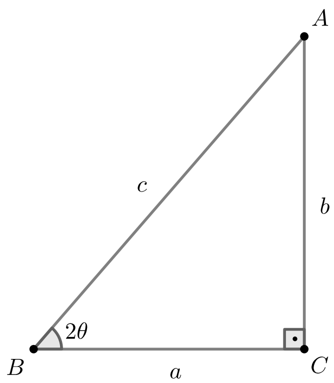
Demonstração: Observe que a primeira parte é consequência direta da Proposição 3.1, então passamos à prova da recíproca. Nessas condições, admita que existe um triângulo pitagórico ABC (cf. Figura 19) com lados medindo

$$\overline{AB} = c, \quad \overline{AC} = b \quad \text{e} \quad \overline{BC} = a,$$

de modo que

$$med(\widehat{B}) = 2\theta.$$

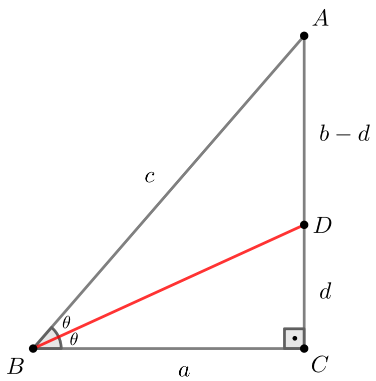
Figura 19: Triângulo pitagórico ABC



Fonte: Autor, 2020.

Na sequência, vamos traçar a bissetriz BD do ângulo $\widehat{B}$ e denotar a medida do segmento de reta CD por d (cf. Figura 20).

Figura 20: Bissetriz BD



Fonte: Autor, 2020.

Observe que o Teorema da Bissetriz (cf. Barbosa (2011)) implica que

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{b-d},$$

que pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{a} = \frac{b}{a+c},$$

Usando a definição de tangente no triângulo BCD, tem-se que

$$\tan\,\theta = \frac{d}{a},$$

que implica em

$$\tan\,\theta = \frac{b}{a+c},$$

então desde que $a, b, c \in \mathbb{N}$, conclui-se que θ possui tangente racional. $\square$

3.3 Método de Construção

Nessa seção, apresentamos um método geométrico para a construção de ternos pitagóricos, cujos passos podem ser executados usando apenas régua (não graduada) e compasso. Descrevemos a seguir dois casos particulares e na sequência, descrevemos o caso geral.

Exemplo 3.5 Construir um terno pitagórico a partir da divisão de um segmento de reta, em dois segmentos congruentes.

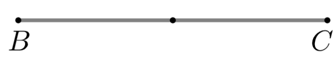
1° Passo: Considere um segmento de reta BC.

Figura 21: Segmento BC

Fonte: Autor, 2020.

2° Passo: Divida o segmento de reta BC em dois segmentos congruentes e adote a unidade de medida $u = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Figura 22: Divisão do segmento BC



Fonte: Autor, 2020.

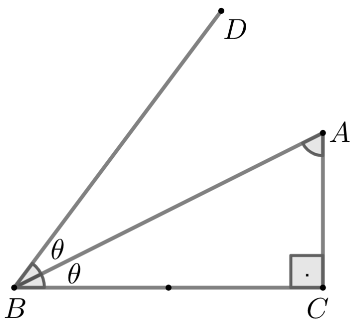
3° Passo: Passando pelo ponto C, construa um segmento CA, perpendicular a BC, medindo $\overline{CA} = 1u$.

Figura 23: Segmento de reta CA

Fonte: Autor, 2020.

4° Passo: Considere o triângulo ABC e a partir do vértice B, construa o ângulo $A\widehat{B}D$, congruente e adjacente a $A\widehat{B}C$ com C e D pertencentes a lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

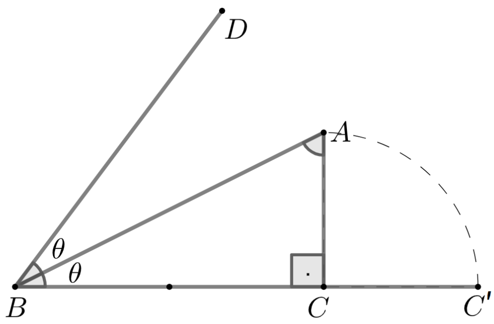
Figura 24: Ângulo $A\widehat{B}D$



Fonte: Autor, 2020

5° Passo: Sobre o semi-reta $\overrightarrow{BC}$, marque um ponto $C' \notin BC$, tal que $\overline{CC'} = \overline{AC}$.

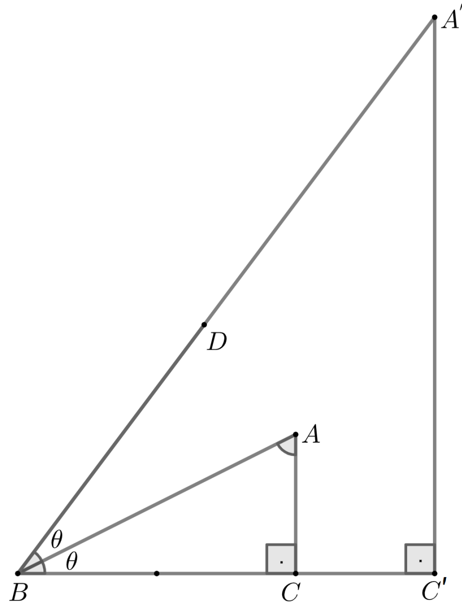
Figura 25: Segmento de reta CC'



Fonte: Autor, 2020.

6° Passo: Passando por C', trace um segmento $C'A'$, perpendicular ao segmento BC', onde A' é o ponto de interseção dessa perpendicular com a semi-reta $\overrightarrow{BD}$.

Figura 26: Triângulo $A'BC'$



Fonte: Autor, 2020.

Conclusão: Os lados do triângulo retângulo $A'BC'$ medem

$$\overline{BC'} = 3u \text{ (por construção)}, \quad \overline{C'A'} = 4u \quad \text{e} \quad \overline{A'B} = 5u \quad \text{(cf. Teorema 3.1)},$$

que correspondem a um terno pitagórico.

Dando continuidade, passamos a mais um caso particular, antes de descrever o caso geral.

Exemplo 3.6 Construir um terno pitagórico a partir da divisão de um segmento de reta, em três segmentos congruentes.

1° Passo: Considere um segmento de reta BC.

Figura 27: Segmento BC

Fonte: Autor, 2020.

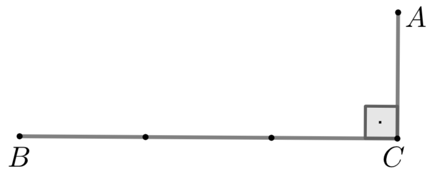
2° Passo: Divida o segmento de reta BC em três segmentos congruentes e adote a unidade de medida $u = \frac{1}{3}\overline{BC}$.

Figura 28: Divisão do segmento BC

Fonte: Autor, 2020.

3° Passo: Passando pelo ponto C, construa um segmento CA, perpendicular a BC, medindo $\overline{CA} = 1u$.

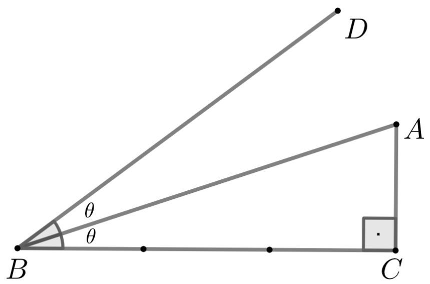
Figura 29: Segmento de reta CA



Fonte: Autor, 2020.

4° Passo: Considere o triângulo ABC e a partir do vértice B, construa o ângulo $A\widehat{B}D$, congruente e adjacente a $A\widehat{B}C$ com C e D pertencentes a lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

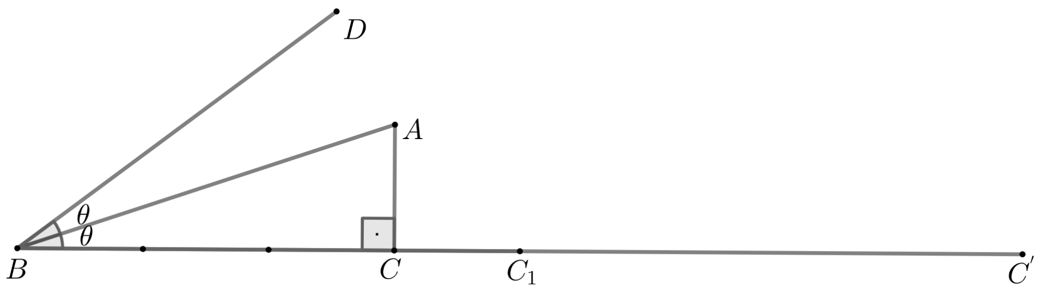
Figura 30: Ângulo $A\widehat{B}D$



Fonte: Autor, 2020.

5° Passo: Sobre o semi-reta $\overrightarrow{BC}$, marque dois pontos distintos $C_1, C' \notin BC$, tais que $\overline{CC_1} = \overline{AC}$ e $\overline{BC_1} = \overline{C_1C'}$.

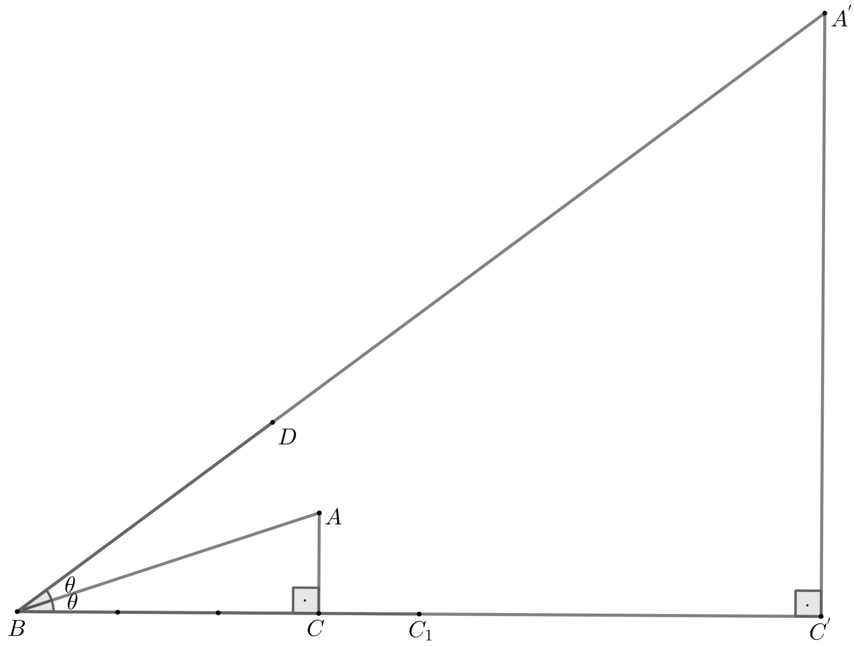
Figura 31: Pontos C_1 e $C^{'}$



Fonte: Autor, 2020.

6° Passo: Passando por C', traçar um segmento $C'A'$, perpendicular ao segmento BC', onde A' é o ponto de interseção dessa perpendicular com a semi-reta $\overrightarrow{BD}$.

Figura 32: Triângulo $A'BC'$



Fonte: Autor

Conclusão: Os lados do triângulo retângulo $A'BC'$ medem

$$\overline{BC'} = 8u \text{ (por construção)}, \quad \overline{C'A'} = 6u \quad \text{e} \quad \overline{A'B} = 10u \quad \text{(cf. Teorema 3.1)},$$

que correspondem a um terno pitagórico.

Finalmente, apresentamos o caso geral que descreve a contrução geométrica de ternos pitagóricos, conforme os passos a seguir:

Caso Geral: Construindo um terno pitagórico a partir de um segmento de reta dividido em $n + k$ partes.

1° Passo: Considerar um segmento de reta BC.

2° Passo: Dividir o segmento de reta BC em $n + k$ segmentos congruentes e adotar a unidade de medida $u = \frac{1}{n+k}\overline{BC}$.

3° Passo: Passando pelo ponto C, construir um segmento CA, perpendicular a BC, medindo

$$\overline{CA} = nu.$$

4° Passo: Considerar o triângulo ABC e a partir do vértice B, construir o ângulo $A\widehat{B}D$, congruente e adjacente a $A\widehat{B}C$ com C e D pertencentes a lados opostos da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

5° Passo: Sobre a semi-reta $\overrightarrow{BC}$, marcar pontos distintos $C_1, C_2, \ \ldots \ , C_{k-1}, C' \notin BC$, tais que

$$\overline{CC_1} = \overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{BC_1} = \overline{C_1C_2} = \cdots = \overline{C_{k-1}C'}.$$

6° Passo: Passando por C', traçar um segmento $C'A'$ perpendicular ao segmento BC', onde A' é o ponto de interseção dessa perpendicular com a semi-reta $\overrightarrow{BD}$.

Conclusão: Os lados do triângulo retângulo $A'BC'$ medem

$$\overline{BC'} = (2n+k)k\,u \text{ (por construção),}$$

$$\overline{C'A'} = 2(n+k)n\,u \quad \text{e} \quad \overline{A'B} = [(n+k)^2 + n^2]\,u \quad \text{(cf. Teorema 3.1),}$$

que correspondem a um terno pitagórico.

4 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, apresentamos um método geométrico de construção de triângulos e ternos pitagóricos, através da utilização de ferramentas básicas de desenho geométrico. Esse método geométrico foi resultado da aplicação dos conhecimentos elementares de Geometria Euclidiana às construções geométricas, combinado com as informações contidas no Teorema 3.1. Primeiramente, foram mostrados casos particulares da construção geométrica de triângulos e ternos pitagóricos sob as hipoteses do Teorema 3.1, passando ao caso geral do referido método geométrico e alcançando assim os objetivos previstos na introdução. Devemos ressaltar que o método geométrico apresentado pode ser compreendido como uma interpretação geométrica das fórmulas de Euclides, mostrando independência de métodos álgebricos para a construção de ternos pitagóricos.

REFERÊNCIAS

BANDEIRA, M. O.; SILVA FILHO, J. F. Construção Geométrica de Ternos Pitagóricos. Redenção, 2020 (Artigo Submetido).

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* 12 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

BLEZ, M. A; SILVA FILHO, J. F. Generalizando os Ternos Pitagóricos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 98, p. 03-05, 2019.

BOYER, C. B. História da Matemática, 3 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

GEOGEBRA Geometry. Versão 4.0. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 10 de janeiro de 2020.

HEFEZ, A. Aritmética, 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MAIA, J. E. S. B. Revisitando os Ternos Pitagóricos. 2019, 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2019.

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* 2 ed. Rio de Janeiro SBM, 2012

PUTNOKI, J. C. Que se Devolvam a Euclides a Régua e o Compasso. *Revista do Professor de Matemática*, v. 13, 1988

WAGNER, E. Construções Geométricas, 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.