UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MOISÉS SOUSA FERREIRA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

REDENÇÃO - CE

2020

MOISÉS SOUSA FERREIRA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO - CE

2020

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Ferreira, Moisés Sousa.

F439t

Teorema Fundamental da Álgebra / Moisés Sousa Ferreira. - Redenção, 2020.
47f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva.

1. Álgebra. 2. Variáveis Complexas. 3. Teorema Fundamental da Álgebra. I. Título

CE/UF/DSIBIUNI CDD 512.5

MOISÉS SOUSA FERREIRA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 10/02/2020

BANCA EXAMINADORA

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Amanda A. F. Nunes.

Prof. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização. Em especial, aos meus pais, pelo amor e carinho

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus por está sempre iluminando meu caminho com sua palavra, e por ter me concedido forças, ânimo e fé para enfrentar e superar os desafios que se levantaram durante o curso. Pois em cada disciplina concluída vi o cuidado, a graça e a misericórdia de Deus sobre minha vida.

Aos meus pais, Esequias Eduardo Ferreira e Antonia de Sousa Ferreira, pois não mediram esforços para me ajudar, muita das vezes renegando a própria felicidade para ver a minha, e também por que muito me incentivaram nos meus estudos, através de conselhos, orações e apoio.

Aos meus irmãos, Samuel Sousa Ferreira e Elenilce de Sousa Ferreira, pelo carinho, compreensão e companheirismo. A meu pequeno sobrinho Bernardo de Sousa Lima, por me alegrar através de seus sorrisos inocentes e sinceros, a meu cunhado Antonio Manuel de Morais Lima pelo apoio e amizade, e aos meus tios e tias que muito me ajudaram.

A minha querida Janaina, pelo amor, carinho, compreensão e orações a Deus em meu favor, e também à sua família pela receptividade nas minhas visitas até sua casa e pelas intercessões que fizeram à Deus por minha vida.

A Igreja na qual congrego, em especial aos amigos e irmãos Marinaldo Braga da Silva pelas orações e por todo o apoio e paciência que teve no decorrer do curso me ajudando nas disciplinas, e Nilderlan dos Santos Oliveira, pela amizade e companheirismo em todos os momentos.

Aos meus colegas de turma, que muito me ajudaram durante esta caminhada, em especial a Marinaldo Braga da Silva, Joyce Silva Sousa, Erika Joyce Silva Lima, Carlos Alexandre Ramos de Souza e Cristina dos Santos Freitas pelos momentos de estudos que tivemos juntos.

Ao Professor Joserlan Perote da Silva pela orientação, e paciência que teve comigo durante toda a construção deste trabalho, e pelas disciplinas que ministrou, que me proporcionaram uma visão mais clara sobre determinados assuntos de matemática.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes e Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho, pelas correções, sugestões e valiosas contribuições para a melhoria do trabalho.

A todos os professores da área de matemática, pelos valiosos ensinamentos durante a graduação, aos professores das pedagógicas, e aos professores da área da física.

Aos professores do Ensino Médio, dentre eles o professor José Bernardo de Araújo Torres, e Gustavo Júnior por ter dado forças para ingressar na UNILAB, e pela ajuda que me deu em livros de estudo.

Também não poderia esquecer de agradecer a meus professores do Ensino Fundamental, dentre os quais cito, a Professora Francisca Erileuda Santiago, Ivanildo Alexandre de Oliveira, e Marcos Cleiton de Oliveira.

Ao professor e amigo, Francisco de Assis Santiago, pela amizade e disponibilidade em me ajudar, e por que sempre me recebeu muito bem em sua residência.

Por fim, agradeço a Universidade da Integração da Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira- UNILAB pelo suporte Financeiro, e ao Programa Residência Pedagógica pelas aprendizagens adquiridas.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“Pois qual de vós, pretendendo construir uma torre, não se assenta primeiro para calcular a despesa e verificar se tem os meios para a concluir? Para não suceder que, tendo lançado os alicerces e não a podendo acabar, todos os que a virem zombem dele, dizendo: este homem começou construir e não pôde acabar.”(Lucas 14.28-30)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo primordial fazer um estudo sobre algumas demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra, dando ênfase a três demonstrações que são embasadas através de variáveis complexas e uma utilizando conceitos básicos de análise na reta. Para isso, procuramos apresentar uma noção suficiente de variáveis complexas, adentrando a algumas definições e resultados importantes, como Funções Holomorfas, a definição de Número de Voltas, Teorema de Liouville, Teorema de Brouwer, Teorema de Cauchy, Teorema de Rouché, que fundamentaram as provas apresentadas neste trabalho.

Palavras-chave: Álgebra. Variáveis Complexas. Teorema Fundamental da Álgebra.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Inicialmente, os processos para achar as raízes de equações dos babilônios, gregos, hindus e outros eram formulados com palavras e às vezes até com versos. Com o avanço da álgebra, os matemáticos começaram a exibir equações de grau n, onde acabou sendo formulado o Teorema Fundamental da Álgebra.

O Teorema Fundamental da Álgebra é um resultado muito importante na literatura matemática, pois garante que toda função polinomial complexa, não constante, possui raiz em $\mathbb{C}$. Este teorema é apresentado principalmente no estudo de funções e equações algébricas, garantindo a existência de suas raízes, sendo usado desde o Ensino Médio ao Ensino Superior.

A primeira tentativa rigorosa de demonstração do teorema foi apresentada em 1746 pelo matemático Jean Le Rond D'Alembert, porém foi encontrado uma falha, que foi corrigido apenas em 1851 por V. Puiseux (1820-1883), após inúmeras frustrações por parte dos matemáticos da época, na tentativa de demonstrá-lo, em 1799 Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em sua tese de doutorado apresenta a primeira demonstração, que veio a ser considerada correta.

Algumas fontes afirmam que a primeira demonstração de Gauss ainda foi encontrado uma falha de natureza topológica, e a primeira demonstração rigorosa foi publicada por Argand em 1806, porém, Gauss publica mais duas demonstrações em 1816 e uma nova versão da primeira demonstração em 1849.

Diante da importância deste resultado, e do esforço que os matemáticos da antiguidade empreenderam na elaboração de uma demonstração rigorosa, buscamos apresentar quatro demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra já existente na literatura, com o intuito de facilitar o entendimento para professores do Educação básica e estudantes dos cursos de licenciatura em matemática, apresentando um estudo mais detalhado com os pré-requisitos para a compreensão das demonstrações.

O trabalho está organizado em quatro capítulos: Introdução, Preliminares, Demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra e a Conclusão.

No capítulo dois, introduzimos algumas definições básicas sobre o plano complexo, apresentando noções topológicas, limite e continuidade de funções complexas. Também abordamos o conceito de diferenciabilidade e funções holomorfas e na sequência apresentamos algumas definições e resultados importantes sobre integração complexa.

No capítulo três, chegamos ao assunto principal do trabalho, nele apresentamos quatro demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra. A primeira demonstração, aborda conceitos básicos de análise na reta, a segunda demonstração foi feita abordando mais fortemente compacidade e continuidade no plano complexo, na terceira demonstração utilizamos o Teorema de Liouville, e a quarta demonstração foi apresentada usando o Teorema de Rouché.

2 PRELIMINARES

No presente capítulo, nos propomos dá uma noção sobre o plano complexo, trazendo algumas definições e abordando rapidamente alguns assuntos, como limites, diferenciabilidade, integral de Cauchy e dentre outros. Apresentamos as notações que serão usadas no decorrer deste trabalho, para que possam subsidiar o estudo do Teorema Fundamental da Álgebra.

2.1 Números Complexos

Considere o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ e os pares ordenados

$$(x, y), (z, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Definimos a adição e a multiplicação da seguinte forma, respectivamente:

(a) $(x, y) \oplus (z, w) = (x + z, y + w)$;

(b) $(x, y) \odot (z, w) = (xz - yw, xw + yz)$.

O conjunto $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \oplus, \odot)$ será chamado de conjunto dos números complexos e denotado por $\mathbb{C}$, onde os pares ordenados (x, y) e (z, w) são números complexos. Usualmente, um elemento $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ é escrito na forma

$$z = x + iy,$$

onde "i" é chamado de unidade imaginária, x representa a parte real denotada por $Re\, z$ e y representa as parte imaginária denotada por $Im\, z$, ou seja,

$$Re\, z = x \qquad \text{e} \qquad Im\, z = y,$$

assim podemos escrever,

$$z = (Re\, z) + (Im\, z)\, i.$$

Apresentamos algumas definições básicas sobre números complexos, que serão importantes ao longo desta seção.

Definição 2.1 Dizemos que dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ são iguais, quando $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Definição 2.2 O conjugado de $z = x+iy \in \mathbb{C}$ é definido como sendo o número complexo, dado por $\overline{z} = x - iy$.

Definição 2.3 Dados $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ a soma e produto de números complexos é definido, respectivamente, por:

(a) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$;

(b) $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$.

Proposição 2.1 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, valem as seguintes propriedades:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

(b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Demonstração: Provaremos o item (a) e deixaremos o item (b) como exercício.

Considere os números complexos $z = x_1 + iy_1$ e $w = x_2 + iy_2$, Assim $z + w = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, daí

$$\begin{aligned}
\overline{z + w} &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\
&= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\
&= \overline{z} + \overline{w}.
\end{aligned}$$

$\square$

A próxima definição nos apresenta a noção de módulo para os números complexos.

Definição 2.4 Dado um número complexo $z = x + iy$, definimos seu módulo por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exercício 2.1 Mostre que as seguintes propriedades se verificam para qualquer $z \in \mathbb{C}$:

(a) $z + \overline{z} = 2Re\, z$;

(b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

(c) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Proposição 2.2 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, valem as seguintes propriedades:

(a) $|\overline{z}| = |z|$;

(b)$|z + w| \leq |z| + |w|$;

(c) $|z + w| \geqslant ||z| - |w||$;

(d) $|z \cdot w| = |z||w|$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Fernandez (2019).

Proposição 2.3 Se w e c são números complexos tais que $|w+c| < |c|$ e t é um número real tal que $0 < t < 1$, então $|tw+c| < |c|$.

Demonstração: Sabemos por hipótese que

$$|w+c| < |c|,$$

daí segue que $|w+c|^2 < |c|^2$, então $(w+c)\overline{(w+c)} < |c|^2$, o que implica que $w\overline{w} + w\overline{c} + \overline{w}c + c\overline{c} < |c|^2$, assim $|w|^2 + w\overline{c} + \overline{w}c + |c|^2 < |c|^2$ assim temos que

$$|w|^2 + w\overline{c} + \overline{w}c < 0,$$

como $0 < t < 1$, então $t(|w|^2 + w\overline{c} + \overline{w}c) < 0$, agora notemos que

$$t^2|w|^2 + tw\overline{c} + t\overline{w}c < t|w|^2 + tw\overline{c} + t\overline{w}c,$$

pois $t^2 < t$. Logo,

$$\begin{aligned} t^2|w|^2 + tw\overline{c} + t\overline{w}c &< 0 \\ &\Rightarrow t^2|w|^2 + tw\overline{c} + t\overline{w}c + |c|^2 < |c|^2 \\ &\Rightarrow |tw+c|^2 < |c|^2 \\ &\Rightarrow |tw+c| < |c|. \end{aligned}$$

□

Apresentamos a definição de simétrico para os números complexos.

Definição 2.5 O simétrico de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ é definido como sendo o número complexo dado por

$$-z = (-x) + i(-y).$$

Considere o número complexo $z = x + iy$, existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que as partes reais e imaginárias de z podem ser representadas respectivamente por $x = |z|cos\theta$ e $y = |z|sen\theta$, assim z pode ser escrito na forma polar

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta),$$

tal θ é chamado de argumento de z.

Concluímos esta seção com a expressão do produto e potência de números complexos na forma polar.

Proposição 2.4 Sejam $z = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ e $w = |w|(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$ representações trigonométricas de dois números complexos e $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, valem as igualdades:

(a) $z \cdot w = |z||w|[\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)]$;

(b) $z^n = |z|^n[\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha)]$.

Demonstração: Vamos provar o item (a) e o item (b) pode ser encontrado em Iezzi (1993).

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z|.(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha).|w|.(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) \\ &= |z|.|w|.(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha).(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) \\ &= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + i(\cos\alpha\mathrm{sen}\,\beta + \cos\beta\mathrm{sen}\,\alpha) - \mathrm{sen}\,\alpha\mathrm{sen}\,\beta) \\ &= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\mathrm{sen}\,\beta + i(\cos\alpha\mathrm{sen}\,\beta + \cos\beta\mathrm{sen}\,\alpha) \\ &= |z||w|[\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)]. \end{aligned}$$

□

2.2 Noções topológicas, Limite e Continuidade de Funções Complexas

Inicialmente, apresentamos algumas definições topológicas, que serão primordiais nesta seção.

Definição 2.6 Sejam $a \in \mathbb{C}$ e o número real $R > 0$, então:

(a) O conjunto $B_R(a) = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < R\}$ é chamado bola aberta ou disco aberto de raio R e centro a.

(b) O conjunto $B_R[a] = \{z \in \mathbb{C}; |z-a| \leqslant R\}$ é chamado bola fechada ou Disco fechado de raio R e centro a.

Definição 2.7 Um subconjunto A de $\mathbb{C}$ é dito um conjunto aberto se, para cada $z \in A$, existe $s > 0$ tal que $B_s(z) \subset A$.

Definição 2.8 Um subconjunto A de $\mathbb{C}$ é dito um conjunto fechado se o seu complementar $\mathbb{C}\backslash A$ é aberto.

Exemplo 2.1 A bola fechada $B_R[a]$ é um conjunto fechado.

De fato, para provarmos que a bola fechada $B_R[a]$ é um conjunto fechado, basta mostrarmos que o seu complementar é aberto, ou seja, deve existir $\epsilon > 0$ tal que

$B_\epsilon(z_0)$ está contido no complementar de $B_R[a]$, isto é,

$$B_\epsilon(z_0) \subset B_R^C[a], \ \ \forall z_0 \in B_R^C[a].$$

Daí, tome $\epsilon = |z_0 - a| - R > 0$. Se $w \in B_\epsilon(z_0)$ então $|w - z_0| \leq \epsilon$, o que é equivalente a $-|w - z_0| \geq -\epsilon$. Logo

$$\begin{aligned} |w-a| &= |w-a+z_0-z_0| = |(w-z_0)+(z_0-a)| \\ &\geqslant |z_0-a| - |w-z_0| \\ &\geq |z_0-a| - \epsilon \\ &= |z_0-a| - (|z_0-a|-R) = R. \end{aligned}$$

Portanto, $B_\epsilon(z_0) \subset B_R^C[a]$, o que significa que $B_R^C[a]$ é aberta e isto implica que $B_R[a]$ é fechado.

Definição 2.9 Dado $A \subset \mathbb{C}$, dizemos que A é limitado se existir, $r > 0$ tal que $A \subset B_r(0)$.

Exemplo 2.2 A bola fechada $B_R[z_0]$ é um conjunto limitado.

De fato, para provarmos que a bola fechada $B_R[z_0]$ é um conjunto limitado, devemos mostrar que existe $r > 0$ tal que $B_R[z_0]$ está contido em $B_r(0)$, ou seja,

$$B_R[z_0] \subset B_r(0), \ \ \forall z_0 \in B_r(0).$$

Daí, tome $r > |z_0| + R$. Se $w \in B_R[z_0]$ então $|w - z_0| \leq R$. Logo

$$\begin{aligned} |w-0| &= |w-0+z_0-z_0| = |(w-z_0)+(z_0-0)| \\ &\leq |w-z_0| + |z_0| \\ &\leq R + |z_0| \\ &= |z_0| + R < r. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $B_R[z_0]$ é um conjunto limitado.

Definição 2.10 Um subconjunto A de $\mathbb{C}$ é dito um conjunto compacto quando A é fechado e limitado.

Observação 2.1 A partir dos exemplos 2.1 e 2.2, concluímos que a bola fechada é um conjunto compacto.

Definição 2.11 Se D é um subconjunto do plano e $a \in \mathbb{C}$, então a é ponto de acumulação de D quando a bola aberta $B_R(a)$ contém pelo menos um ponto de D distinto de a.

Agora, apresentamos alguns conceitos importantes sobre funções de uma variável complexa.

Definição 2.12 Dado $D \subset \mathbb{C}$ um subconjunto não-vazio, dizemos que $f : D \to \mathbb{C}$ é uma função complexa quando cada $z \in D$ se associa a um único número $f(z) \in \mathbb{C}$.

Definição 2.13 Dados uma função $f : A \to \mathbb{C}$ e um subconjunto S de A, dizemos que f é limitada em S se existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leqslant M,$$

para todo $z \in S$.

Definição 2.14 Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função e z_0 um ponto de D. Dizemos que f é contínua em z_0 se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

sempre que $z \in D$ e $0 < |z - z_0| < \delta$, ou seja, $f(D \cap B_\delta(z_0)) \subset B_\varepsilon(f(z_0))$

Exemplo 2.3 A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z + k$, com $k \in \mathbb{C}$, é contínua.

Solução: É preciso mostrar que fixando $z_0 \in \mathbb{C}$, então para todo $\varepsilon > 0$ conseguiremos $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Observe que,

$$|f(z) - f(z_0)| = |z + k - (z_0 + k)| = |z - z_0|.$$

Com efeito, tomamos $\varepsilon = \delta$. Daí

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Proposição 2.5 Dadas as funções $f, g : A \to \mathbb{C}$ contínuas em z_0 então, as funções $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g são contínuas em z_0.

Demonstração: Pode ser encontrada em Fernandez (2019).

Exemplo 2.4 A função polinomial $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ é contínua. De fato, basta combinarmos o exemplo 2.3 e a proposição 2.23.

A partir do conceito de ponto de acumulação e da definição de funções de uma variável complexa, podemos definir o limite de funções complexas.

Definição 2.15 Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função e z_0 um ponto de acumulação de D. Dizemos que o $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Exercício 2.2 Sejam $A \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in A$. Se z_0 é um ponto de acumulação de A então uma função f é contínua em z_0 se e somente se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Solução: Suponhamos f contínua em z_0, daí temos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Logo $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Agora suponhamos, que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ isto implica que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Portanto, f é contínua.

Exemplo 2.5 Mostrar, recorrendo à definição que $\lim\limits_{z\to -i} \dfrac{1}{z} = i$

Solução: É necessário mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |z - (-i)| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{z} - i\right| < \varepsilon.$$

Veja que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z} - i\right| = \left|\frac{1 - z\cdot i}{z}\right| = \left|\frac{-i}{z}\cdot(z+i)\right| = \left|\frac{i}{z}\right|\cdot|z+i| \\ = \left|\frac{i^2}{zi}\right|\cdot|z+i| \\ = \left|\frac{1}{z}\right|\cdot|z+i|.\end{aligned}$$

Como $z \to -i$, supomos que $|z| > \dfrac{1}{2}$. Assim,

$$\left|\frac{1}{z} - i\right| = \left|\frac{1}{z}\right|\cdot|z+i| < 2\cdot|z+i|.$$

Assim, para que $|z| > \dfrac{1}{2}$ é preciso que $|z+i| < \delta = \dfrac{1}{2}$. De fato $|z| = |z+i-i| = |(-i)+(z+i)| \geqslant |-i| - |z+i| = 1 - |z+i| > 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Na sequência, apresentamos três importantes proposições que serão essenciais para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Proposição 2.6 Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função polinomial dada por $p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$, com $n \geqslant 1$ e $a_n \neq 0$. Se $q(z) = p(z + z_0)$, então existe $1 \leqslant k \leqslant n$ tal que

$$q(z) = p(z_0) + z^k[a + r(z)],$$

onde $a \neq 0$ e $r(z)$ é uma função polinomial com $r(0) = 0$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Fernandez (2010).

Proposição 2.7 Se $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ é uma função polinomial em $\mathbb{C}$ de grau $n \geqslant 1$, então $\lim\limits_{z\to+\infty} |p(z)| = +\infty$.

Demonstração: De fato, pela proposição 2.2, temos que:

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0| \\
&\geqslant |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0| \\
&\geqslant |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - ... - |a_1 z| - |a_0| \\
&= |a_n||z^n| - |a_{n-1}||z^{n-1}| + ... + |a_1||z| + |a_0| \\
&= |z^n| \left(|a_n| - \frac{a_{n-1}}{|z|} - ... - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right)
\end{aligned}$$

Como $|z| \in \mathbb{R}$ e $|p(z)| \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{z\to+\infty} |p(z)| \geqslant \lim_{z\to+\infty} |z^n| \left(|a_n| - \frac{a_{n-1}}{|z|} - ... - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right)$$

sabendo que $\lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{1}{|z|^k} = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, então $\lim\limits_{z\to+\infty} |p(z)| = +\infty$. $\square$

Proposição 2.8 Se $K \subset \mathbb{C}$ é compacto então toda função contínua $f : K \to \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em K, ou seja, existem $\alpha, \beta \in K$ tais que $f(\alpha) \leqslant f(z) \leqslant f(\beta)$ para todo $z \in K$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Lima (2006).

2.3 Derivada de Funções Complexas

Nesta seção, admitiremos algumas propriedades do cálculo de derivada de funções reais, e introduziremos algumas definições sobre diferenciabilidade e derivada de funções complexas de uma variável complexa, abordando o conceito de funções holomorfas.

Definição 2.16 Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto e z_0 um ponto de A. Uma função complexa $f : A \to \mathbb{C}$ é dita diferenciável no ponto z_0 quando o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Neste caso, o limite acima é chamado a derivada de f no ponto z_0 e denotado por $f^{'}(z_0)$.

Proposição 2.9 Se uma função $f : A \to \mathbb{C}$ é diferenciável em um ponto z_0, então f é contínua em z_0.

Demonstração: Pelo Exercício 2.2, precisamos mostrar que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Com efeito,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \right] = f(z_0) + 0 \cdot f^{'}(z_0) = f(z_0).$$

□

As regras usuais de derivação da soma, do produto e quociente de funções reais, podem ser estendidas naturalmente para funções complexas.

Proposição 2.10 Se $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : A \to \mathbb{C}$ são diferenciáveis em um ponto z_0, então:

(a) Para todo $c \in \mathbb{C}$, cf é diferenciável em z_0 e

$$(cf)^{'}(z_0) = cf^{'}(z_0);$$

(b) $f + g$ é diferenciável em z_0 e

$$(f + g)^{'}(z_0) = f^{'}(z_0) + g^{'}(z_0);$$

(c) $f \cdot g$ é diferenciável em z_0 e

$$(fg)^{'}(z_0) = f^{'}(z_0)g(z_0) + f(z_0)g^{'}(z_0);$$

(d) Quando $g(z_0) \neq 0$, f/g é diferenciável em z_0 e

$$(f/g)^{'}(z_0) = \frac{f^{'}(z_0)g(z_0) - f(z_0)g^{'}(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

Demonstração: A prova dos itens (a) e (b) decorrem da definição, e provaremos os itens (c) e (d).

(c): Como g é diferenciável em z_0 temos que g é contínua em z_0. Logo $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{'}(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)}{z - z_0} \right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z) + f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] \\
&= f^{'}(z_0)g(z_0) + f(z_0)g^{'}(z_0) \\
&= (f^{'} \cdot g)(z_0) + (f \cdot g^{'})(z_0) \\
&= (f^{'} \cdot g + f \cdot g^{'})(z_0).
\end{aligned}$$

(d): Como g é diferenciável em z_0 temos que g é contínua em z_0. Logo $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
(f/g)^{'}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{\frac{f}{g}(z) - \frac{f}{g}(z_0)}{z - z_0} \right] &= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)}}{z - z_0} \right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{\frac{f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z)}{g(z)g(z_0)}}{z - z_0} \right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \left(\left[\frac{f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z)}{z - z_0} \right] \frac{1}{g(z)g(z_0)} \right) \\
&= \lim_{z \to z_0} \left(\left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z_0) - f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] \frac{1}{g(z)g(z_0)} \right) \\
&= (f^{'}(z_0)g(z_0) - f(z_0)g^{'}(z_0)) \frac{1}{g(z_0)^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Definição 2.17 Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto. Uma função $f : A \to \mathbb{C}$ *é dita holomorfa em um ponto* $z_0 \in A$ *quando* f *for diferenciável e* f' *for contínua no ponto* $z_0 \in A$. *Se* f *for diferenciável e* f' *for contínua em todos os pontos de* A, *diremos que* f *é holomorfa em* A.

Definição 2.18 Uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita função inteira.

2.4 Integral complexa e Número de Voltas

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos sobre integral de funções complexas, destacando alguns resultados que serão importantes no decorrer do trabalho.

Definição 2.19 Um caminho em um subconjunto $A \subset \mathbb{C}$, é uma função contínua $\gamma : [a, b] \to A$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, onde $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são pontos inicial e final do caminho γ respectivamente. Quando $\gamma(a) = \gamma(b)$ dizemos que γ é um caminho fechado.

Observação 2.2 A imagem de um caminho γ é chamada de trajetória de γ e denotaremos por $|\gamma|$.

Definição 2.20 Um caminho $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é dito suave se γ é diferenciável em todos os pontos de $[a, b]$ e a sua derivada γ' é contínua em $[a, b]$.

A partir do entendimento do conceito de caminho, podemos nos indagar como um caminho γ_0 pode se deformar continuamente no caminho γ_1, e assim a definição a seguir nos mostra como isto pode ser feito.

Definição 2.21 Sejam $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to X$ caminhos no conjunto $X \subset \mathbb{C}$. Uma homotopia entre γ_0 e γ_1 é uma aplicação contínua $H : [a, b] \times [0, 1] \to X$, tal que

- $H(s, 0) = \gamma_0(s)$ e $H(s, 1) = \gamma_1(s)$ $\forall s \in [a, b]$;
- $H(a, t) = \gamma_0(a)$ e $H(b, t) = \gamma_0(b)$ $\forall t \in [0, 1]$.

Usaremos a notação γ_s para denotar o caminho $\gamma_s = H(s, t)$. Desta forma, observamos que o caminho γ_s se movimenta da posição do caminho γ_0 até a posição do caminho γ_1, onde para todo $t \in [0, 1]$ associa um caminho γ_s.

Exemplo 2.6 Seja $f : B_R \to \mathbb{C}$ uma função contínua e $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ um caminho dado por $\gamma_r = (rcost, rsent)$, onde $0 \leq r \leq R$. Os caminhos $f(\gamma_0)$ e $f(\gamma_R)$ são homotópicos.

Com efeito, tomamos o caminho γ_r dado no enunciado, daí notamos que são satisfeitas as seguintes condições: $f(\gamma_0(0)) = f(\gamma_0(2\pi))$ e $f(\gamma_R(0)) = f(\gamma_R(2\pi))$. Daí definimos uma função $H : [0, 2\pi] \times [0, r] \to \mathbb{C}$, dada por $H(t, r) = f(\gamma_r(t))$ como sendo uma homotopia entre os caminhos $f(\gamma_0)$ e $f(\gamma_R)$.

Após esse breve comentário sobre homotopia, apresentamos a definição de integral complexa.

Definição 2.22 Dizemos que uma função complexa $f = u + iv : [a, b] \to \mathbb{C}$ é integrável em $[a, b]$ se as funções reais u e v são integráveis em $[a, b]$. Neste caso sua integral é definida por

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

Proposição 2.11 Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ integráveis, $\mu \in \mathbb{C}$ e $c \in]a, b[$. Então:

(a) $f + g$ é integrável em [a,b] e

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt;$$

(b) μf é integrável em [a,b] e

$$\int_a^b [\mu f(t)]dt = \mu\int_a^b f(t)dt;$$

(c) f é integrável em [a,c] e em [a,b] e

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt;$$

(d) f é integrável em [a,b] e

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt;$$

(e) $|f|$ é integrável em [a,b] e

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt.$$

Demonstração: Provaremos o item (a), e os demais podem ser encontrados em Fernandez (2019).

Sejam $f(t) = u_1(t) + iv_1(t)$ $g(t) = u_2(t) + iv_2(t)$ funções integráveis em $[a, b]$, com $(f + g)(t) = (u_1 + u_2)(t) + i(v_1 + v_2)(t)$. Como f e g são integráveis em $[a, b]$ temos que u_1, v_1, u_2, v_2 são funções reais também integráveis em $[a, b]$, e vale

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(t)+g(t)]dt &= \int_a^b (u_1+u_2)(t)dt + i\int_a^b (v_1+v_2)(t)dt \\
&= \int_a^b (u_1(t)+u_2(t))dt + i\int_a^b (v_1(t)+v_2(t))dt \\
&= \int_a^b u_1(t)dt + \int_a^b u_2(t)dt + i\int_a^b v_1(t)dt + i\int_a^b v_2(t)dt \\
&= \int_a^b u_1(t)dt + i\int_a^b v_1(t)dt + \int_a^b u_2(t)dt + i\int_a^b v_2(t)dt \\
&= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.12 Temos que:

(a) Se $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ é integrável então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é contínua. Além disso, se f é contínua em um ponto $c \in [a, b]$, então F é diferenciável em c e

$$F^{'}(c) = f(c);$$

(b) Se $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ é diferenciável e $f^{'}$ é integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f^{'}(t)dt = f(b) - f(a);$$

(c) Se $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ é contínua e se $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ é diferenciável com $g^{'}$ integrável em $[c, d]$ e $g([c, d]) \subset [a, b]$, então,

$$\int_c^d f(g(t))g^{'}(t)dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(s)ds.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em Fernandez (2019).

Definição 2.23 Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é um caminho suave e se f é uma função complexa e contínua em $|\gamma|$, definimos a integral de f sobre γ por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt.$$

Definição 2.24 Um caminho $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é dito suave por partes se existe uma partição $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ do intervalo [a,b] tal que, para cada $1 \leq k \leq n$, a restrição γ_k de γ em $[t_{k-1}, t_k]$ é um caminho suave, neste caso todo caminho suave por partes pode ser escrito como uma soma de caminhos suaves,

$$\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_n.$$

Definição 2.25 Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é um caminho suave por partes e se f é uma função complexa em $|\gamma|$, definimos a integral de f sobre γ por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt.$$

Observação 2.3 *Note que $g(t) = f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)$ está definida exceto em um conjunto finito X de pontos de $[a, b]$ e ela é contínua e limitada em $[a, b] \setminus X$, temos que a integral acima existe. Escrevendo γ como uma soma $\gamma = \gamma_1 + ... + \gamma_n$ de caminhos suaves, temos que*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + ... + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Proposição 2.13 Sejam $A \subset \mathbb{C}$, $f, g : A \to \mathbb{C}$ contínuas, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\beta : [c, d] \to A$ dois caminhos suaves por partes em A, e $\mu \in \mathbb{C}$, Então:

(a) $\displaystyle\int_\gamma [f(z) + g(z)]dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz;$

(b) $\displaystyle\int_\gamma [\mu f(z)]dz = \mu \int_\gamma f(z)dz;$

(c) $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz;$

(d) Se $\gamma + \beta$ está definido,

$$\int_{\gamma+\beta} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\beta f(z)dz.$$

Demonstração: Pode ser encontrada em Fernandez (2019).

Definição 2.26 Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho suave por partes, definimos o comprimento de γ por

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma^{'}(t)|dt.$$

Proposição 2.14 Sejam $\gamma : [a, b] :\to \mathbb{C}$ um caminho suave por partes e f uma função complexa definida e contínua em $|\gamma|$. Então

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz|.$$

Demonstração: Diretamente da proposição 2.11 (d), segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z)dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma^{'}(t)|dt \\ &= \int_\gamma |f(z)||dz|. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.15 Sejam $\gamma : [a, b] :\to \mathbb{C}$ um caminho suave por partes e f uma função complexa definida e contínua em $|\gamma|$. Suponha que

$$|f(z)| \leq M,$$

para todo $z \in |\gamma|$, onde M é uma constante. Então

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq Ml(\gamma).$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z)dz \right| &\leq \int_\gamma |f(z)||dz| \leq \int_\gamma M|dz| \\ &= M \int_\gamma |dz| \\ &= Ml(\gamma). \end{aligned}$$

□

Proposição 2.16 Sejam $A \subset \mathbb{C}$, um domínio e $f : A \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Seja γ um caminho suave por partes que liga a e b com $a, b \in U$. Então

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha f(z)dz,$$

onde α também é um caminho liga a e b.

Demonstração: Pode ser encontrada em Silva (2018).

Proposição 2.17 Sejam $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ contínua. Suponha que F é uma primitiva de f em A. Para todo caminho suave por partes em $\gamma : [a, b] \to A$, temos que

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

em particular, se γ é um caminho fechado então,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Demonstração: : Faremos a prova em dois casos:

Caso 1: Suponhamos γ suave.

Considere a função $H(t) = F(\gamma(t))$ para $t \in [a, b]$. Como as funções F e γ são diferenciáveis em todos os pontos de seus domínios, então H também o é, assim pela regra da cadeia,

$$H^{'}(t) = F^{'}(\gamma(t))\gamma^{'}(t) = f(\gamma(t))\gamma^{'}(t),$$

para todo $t \in [a, b]$, desta forma, como $H^{'}$ depende de funções contínuas concluímos que $H^{'}$ também é contínua. Pela proposição 2.12 (b),

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt = \int_a^b H^{'}(t)dt = H(b) - H(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Caso 2: Suponhamos γ suave por partes.

Como γ é suave por partes, então existe uma partição $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ de $[a, b]$ tal que para cada $1 \leqslant k \leqslant n$, $\gamma_k = \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ é um caminho suave

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + ... + \int_{\gamma_n} f(z)dz \\
&= F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(a)) + F(\gamma(t_2)) - F(\gamma(t_1)) + ... + F(\gamma(b)) - F(\gamma(t_{n-1})) \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 2.1 (Teorema de Cauchy para triângulos) Sejam A um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $w_0 \in A$. Se $f : A \to \mathbb{C}$ é contínua em A e holomorfa em $A \backslash \{w_0\}$, então

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0,$$

para todo triângulo T contido em A.

Demonstração: Pode ser encontrada em Fernandez (2019).

Observação 2.4 Denotamos o triângulo de vértices p, q, w por $T(p, q, w)$, e o caminho triangular suave por partes por $\partial T(p, q, w)$.

Teorema 2.2 (Teorema de Cauchy- versão local) Se $f : B_R(a) \to \mathbb{C}$ é contínua e holomorfa em $B_R(a) \backslash \{w_0\}$, então, existe uma função $g : B_R(a) \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f(z_0) = g^{'}(z_0)$. Além disso, se γ é um caminho fechado suave por partes em $B_R(a)$, então

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Demonstração: : Faremos a prova em dois passos:
Passo 1: Mostraremos que $f(z_0) = g^{'}(z_0)$ fixando $z_0 \in B_R(a)$.

Considere o disco $B_R(a)$ e a função $g(z)$ definida por $g(z) = \int_a^z f(t)dt$. Pelo Teorema 2.1

$$\int_{\partial T(a,z,z_0)} f(t)dt = 0.$$

Assim, pela proposição 2.11 (itens (c) e (d))

$$\begin{aligned}
g^{'}(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{\int_a^z f(t)dt - \int_a^{z_0} f(t)dt}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{\int_a^z f(t)dt + \int_{z_0}^a f(t)dt}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{\int_{z_0}^a f(t)dt + \int_a^z f(t)dt}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{z - z_0} \int_{z_0}^z f(t)dt \right).
\end{aligned}$$

Se mostrarmos que o lado direito da igualdade é igual a $f(z_0)$ conseguiremos chegar em nosso objetivo. Para isto, tomemos $\epsilon > 0$. Como f é contínua em z_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - z_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(z_0)| < \epsilon,$$

daí,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{z-z_0}\int_{z_0}^{z} f(t)dt - f(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{z-z_0}\int_{z_0}^{z}[f(t) - f(z_0)]dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|z-z_0|}\int_{z_0}^{z} |[f(t) - f(z_0)]|\,|dt| \\
&< \frac{1}{|z-z_0|}\int_{z_0}^{z} \epsilon|dt| \\
&\leqslant \frac{\epsilon|z-z_0|}{|z-z_0|} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{1}{z-z_0}\int_{z_0}^{z} f(t)dt\right) = f(z_0)$$

Desta forma, concluímos que $f(z_0) = g^{'}(z_0)$.

Passo 2: Agora, mostraremos que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Como γ é um caminho fechado e suave por partes, e g é uma primitiva de f, então, diretamente da proposição 2.17,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

□

Definição 2.27 Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho fechado e suave por partes, definimos o índice ou número de voltas de f em torno de a por

$$Ind(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Em outras palavras,

$$Ind(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma^{'}(t)}{\gamma(t) - a}dt.$$

Observação 2.5 As voltas realizadas no sentido anti-horário contam como positivas e as realizadas no sentido horário como negativas.

Exemplo 2.7 Considere o caminho $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dado por $\gamma_n = cos(nt) + isen(nt)$. Qual o número de voltas de γ_n em torno da origem?

Com efeito, $\gamma_n(t) = cos(nt) + isen(nt)$, assim

$$\gamma_n^{'}(t) = -nsen(nt) + incos(nt) = in(cos(nt) + isen(nt)),$$

daí,

$$Ind(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{in(cos(nt) + isen(nt))}{cos(nt) + isen(nt)}dt = \frac{in}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dt = \frac{in}{2\pi i} \cdot t \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi in}{2\pi i} = n.$$

Logo, γ_n dá n voltas em torno da origem.

Proposição 2.18 Mostre que o $Ind(\gamma, a)$ é um número inteiro.

Demonstração: Deixaremos como exercício para o leitor.

Proposição 2.19 Sejam $a \in \mathbb{C}$, $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C} - \{a\}$ caminhos fechados e suaves por partes em $\mathbb{C} - \{a\}$. Se existe homotopia em $\mathbb{C} - \{a\}$ entre γ_0 e γ_1, então

$$Ind(\gamma_0, a) = Ind(\gamma_1, a).$$

Demonstração: Pela definição de número de voltas temos que

$$Ind(\gamma_0, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z - a}.$$

Como $\dfrac{1}{z - a}$ é contínua no seu domínio, pela proposição 2.16 temos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z - a} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z - a},$$

portanto,

$$Ind(\gamma_0, a) = Ind(\gamma_1, a).$$

$\square$

Teorema 2.3 (Fórmula integral de Cauchy - versão local) Seja f uma função holomorfa em um disco aberto $B_R(a)$ e seja γ um caminho suave por partes em $B_R(a)$, então

$$Ind(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw,$$

para todo $z \in B_R(a) \setminus |\gamma|$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Fernandez (2019).

Corolário 2.1 (Fórmula integral de Cauchy para derivadas - versão local) Seja f uma função holomorfa em um disco aberto $B_R(a)$ e seja γ um caminho suave por partes em $B_R(a)$ e $k \in \mathbb{N}$, então

$$Ind(\gamma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw,$$

para todo $z \in B_R(a) \setminus |\gamma|$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Fernandez (2019).

Proposição 2.20 (Estimativa de Cauchy) Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $B_R(a) \subset U$. Se $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in B_R(a)$, onde $M > 0$ é uma constante, então

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{Mn!}{R^n},$$

para todo $n \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Fixemos $r \in]0, R[$ e $k \in \mathbb{N}$, seja γ o círculo positivamente orientado de centro a e raio r. Pelo corolário 2.1,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw,$$

assim,

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(a)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{\gamma}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right| \\
&= \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{0}^{2\pi}\frac{f(w)}{(re^{it})^{n+1}}ire^{it}dt\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\frac{i}{r^n}\int_{0}^{2\pi}\frac{f(w)}{(e^{it})^{n}}dt\right| \\
&\leqslant \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{1}{r^n}\int_{0}^{2\pi}\left|\frac{f(w)}{(e^{it})^{n}}\right|dt \\
&\leqslant \frac{n!}{2\pi r^n}\int_{0}^{2\pi}Mdt \\
&= \frac{Mn!}{2\pi r^n}\cdot 2\pi \\
&= \frac{Mn!}{r^n}
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $r \to R$, obtemos que

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{Mn!}{R^n}.$$

$\square$

Teorema 2.4 (Teorema de Liouville) Toda função inteira limitada é constante.

Demonstração: Suponhamos que f seja limitada, ou seja, $|f(z)| \leqslant M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, onde $M > 0$. Pela Estimativa de Cauchy, sabemos que

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{Mn!}{R^n},$$

em particular,

$$|f^{'}(a)| \leqslant \frac{M}{R},$$

fazendo $R \to +\infty$, observamos que $f^{'}(a) = 0$. Portanto, $f^{'}(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, daí concluímos que f é uma função constante. $\square$

Lema 2.1 (Brouwer) Seja $f : B_R(0) \to \mathbb{C}$ uma função contínua e $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, dada por $\gamma_R(t) = f(Rcost, Rsent)$ onde $t \in [0, 2\pi]$. Se P não está no traço de γ_r e $Ind(\gamma_R, P) \neq 0$, então existe um ponto $x \in B_R(0)$ tal que $f(x) = P$.

Demonstração: Vimos no exemplo 2.6, que a função $H(t, r) = f(\gamma_r(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, é uma homotopia entre $f(\gamma_0)$ e $f(\gamma_R)$. Desta forma, suponha que não exista x em $B_R(0)$ que satisfaça a condição $f(x) = p$, pela proposição 2.19,

$$Ind(f(\gamma_R, p)) = Ind(f(\gamma_0, p)),$$

porém, observamos que $f(\gamma_0)$ se reduz a um ponto e assim, $Ind(f(\gamma_0, p)) = 0$, mas a hipótese garante que $Ind(f(\gamma_R, p)) \neq 0$. Logo, chegamos a um absurdo, portanto, existe x em $B_R(0)$ tal que $f(x) = p$. $\square$

Exercício 2.3 Seja $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, uma função polinomial dada por $q(z) = a_{m-1}z^{m-1} + a_{m-2}z^{m-2} + ... + a_1 z + a_0$, com $m \geqslant 1$ e $a_{m-1} \neq 0$ Mostre que, se $|z| > 1$ e $|z| > |a_{m-1}| + |a_{m-2}| + ... + |a_1| + |a_0|$, então $|z^m| > |q(z)|$.

Solução: Note que

$$\begin{aligned}
|q(z)| &= |a_{m-1}z^{m-1} + a_{m-2}z^{m-2} + ... + a_1 z + a_0| \\
&\leqslant |a_{m-1}||z^{m-1}| + |a_{m-2}||z^{m-2}| + ... + |a_1||z| + |a_0| \\
&< |a_{m-1}||z^{m-1}| + |a_{m-2}||z^{m-1}| + ...|a_1||z^{m-1}| + |a_0||z^{m-1}| \\
&= |z|^{m-1}(|a_{m-1}| + |a_{m-2}| + ... + |a_1| + |a_0|) \\
&< |z|^{m-1} \cdot |z| = |z|^m = |z^m|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|z^m| > |q(z)|.$$

2.5 Teorema de Rouché

No presente capítulo, apresentamos alguns resultados da teoria de resíduos que necessitamos no decorrer do trabalho.

Definição 2.28 Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto e $a \in U$. Se $f : U\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ é holomorfa, dizemos que a é uma singularidade isolada de f.

Dizemos que a é uma singularidade removível se existe $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, tal que $g\,\big|_{U\backslash\{a\}} = f$.

Teorema 2.5 Seja $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto, $f : U\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. São equivalentes:

(a) a é singularidade removível de f;

(b) f é limitada numa vizinhança de a;

(c) $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Fernandez (2019).

Definição 2.29 Sejam $U \subseteq \mathbb{C}$ aberto, $a \in U$ e $f : U\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Dizemos que a é um pólo de f se $\lim\limits_{z\to a}|f(z)| = +\infty$.

Dizemos que a é uma singularidade essencial se a não for pólo, nem removível.

Proposição 2.21 *Seja $f : U\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. A singularidade a é polo se, e somente se existe $m \geq 1$ inteiro e $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $g(a) \neq 0$ e*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m},$$

para todo $z \neq a$ onde m é a ordem ou multiplicidade do pólo.

Demonstração: Pode ser encontrada em Fernandez (2019).

Seja f uma função que tem uma singularidade isolada em um ponto z_0 e $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ a expansão em série de Laurent de f em torno de z_0. Definimos, o resíduo de f em z_0, que denotamos por $Res(f, z_0)$, como sendo o coeficiente a_{-1} da expansão em série de Laurent de f em torno de z_0. Se f é holomorfa em $B_R(z_0)$, a fórmula

$$a_n = \int_{|\zeta - z_0|} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

nos mostra que

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z)dz,$$

para qualquer $0 < r < R$.

Proposição 2.22 Seja f uma função holomorfa no domínio $A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Suponhamos que $\gamma \subset A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ é uma curva simples, fechada, suave por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada está contida em A e contém todos os pontos $a_1, a_2, ..., a_m$. Nestas condições,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i[Res(f, a_1) + Res(f, a_2) + ... + Res(f, a_n)].$$

Demonstração: Pode ser encontrada em Silva (2018).

Proposição 2.23 Seja f uma função holomorfa no domínio $A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Suponhamos que $\gamma \subset A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ é uma curva simples, fechada, suave por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada está contida em A e contém todos os pontos $a_1, a_2, ..., a_m$. Suponhamos que esses pontos são polos de f e que f não tenha zeros ao longo de γ. Nestas condições,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P,$$

em que Z é o número de zeros de f na região interior a γ, contados cada um com suas multiplicidades e P é o número de polos de f na região interior a γ, contados cada um com suas ordens.

Demonstração: Pode ser encontrada em Silva (2018).

Corolário 2.2 Nas mesmas condições da Proposição 2.23, se f e η são funções holomorfas em A, então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \eta(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{\mathrm{p}} n(\zeta_k) m_{\zeta_k}(f).$$

Demonstração: Pode ser encontrada em Silva (2018).

Apresentaremos duas versões do Teorema de Rouché:

Teorema 2.6 (Teorema de Rouché - Versão 1). Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um domínio, e $f, g : U \to \mathbb{C}$ funções holomorfas definidas em A. Consideremos $R \subset A$ uma região fechada e limitada, tal que sua fronteira ∂R é uma curva simples, fechada, suave por partes e $R \setminus \partial R$ um domínio. Se para todo $z \in \partial R$

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|,$$

então f e g possui o mesmo número de zeros contando com as multiplicidades no interior de R.

Demonstração: Primeiramente, notamos que a desigualdade $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, nos garante que f e g não possuem zeros ao longo de ∂R, pois do contrário teríamos três possibilidade:

- f possuir z como zero ao longo de ∂R, isto é, $f(z) = 0$. Daí,

  $$|0 - g(z)| < |0| \Rightarrow |g(z)| < |0|,$$

  o que nos dá um absurdo.

- g possuir z como zero ao longo de ∂R, isto é, $g(z) = 0$. Daí,

  $$|f(z) - 0| < |f(z)| \Rightarrow |f(z)| < |f(z)|,$$

  o que nos dá um absurdo.

- f e g possuírem, z como zero ao longo de ∂R, isto é $f(z) = g(z) = 0$. Daí,

  $$|0 - 0| < |0| \Rightarrow |0| < |0|,$$

  o que nos dá um absurdo.

Dividimos a desigualdade $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ por $|f(z)|$ e obtemos

$$\left|1 - \frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{g(z)}{f(z)} - 1\right| < 1.$$

Escrevendo $\varphi(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$ e derivando temos que,

$$\varphi^{'}(z) = \frac{g^{'}(z)f(z) - f^{'}(z)g(z)}{[f(z)]^2} = \frac{g^{'}(z)}{f(z)} - \frac{f^{'}(z)g(z)}{[f(z)]^2}.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por $\varphi(z)$, obtemos

$$\frac{\varphi^{'}(z)}{\varphi(z)} = \frac{g^{'}(z)}{g(z)} - \frac{f^{'}(z)}{f(z)}.$$

Da proposição 2.23, segue que

$$Z_f - Z_g = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{(f(z))}dz - \int_\gamma \frac{g^{'}(z))}{(g(z))}dz\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi^{'}(z)}{(\varphi(z))}dz.$$

Para encerrar a demonstração, basta mostrar que $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{\varphi^{'}(z)}{(\varphi(z))}dz = 0$. Para isso, orientemos o caminho ∂R no sentido anti-horário e suponhamos que ele é descrito por $\gamma(t), 0 \leqslant t \leqslant 1$. Temos

$$|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))|,$$

de onde vem

$$|\varphi(\gamma(t)) - 1| < |1|.$$

Consideremos o caminho $\beta(t) = \varphi(\gamma(t)), 0 \leqslant t \leqslant 1$, fechado e suave por partes. Esse caminho está inteiramente contido no disco $B_1(1)$. Portanto

$$\int_\gamma \frac{\varphi^{'}(z)}{(\varphi(z))}dz = \int_0^1 \frac{\varphi^{'}\gamma(t)}{(\varphi(\gamma(t)))}\gamma^{'}(t)dt = \int_0^1 \frac{\beta^{'}(t)}{\beta(t)}.$$

Porém, a integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\beta^{'}(t)}{\beta(t)}$ nada mais é do que a integral da função $\eta(z) = \dfrac{1}{z}$ ao longo do caminho β :

$$\int_0^1 \frac{\beta^{'}(t)}{\beta(t)} = \int_\beta \frac{1}{z}dz.$$

Como o caminho β está contido no disco $B_1(1)$ e o ramo principal do logaritmo, $logz$, é uma primitiva de $\eta(z) = \dfrac{1}{z}$ em $B_1(1)$, segue que

$$\int_\beta \frac{1}{z}dz = \int_\gamma \frac{\varphi^{'}(z)}{(\varphi(z))}dz = 0,$$

pelo teorema, visto que β é fechado, temos que $Z_f = Z_g$.

Teorema 2.7 (Teorema de Rouché - Versão 2). Seja c_0 um caminho e P um ponto que não está sobre c_0. Se somarmos a cada ponto de c_0 um vetor $v(t)$ tal que

$$|v(t)| < |c_0(t) - P|,$$

obtendo uma nova curva c_1, então

$$Ind(c_0, P) = Ind(c_1, P).$$

Demonstração: Considere o caminho

$$c_s(t) = c_0(t) + sv(t); \quad s \in [0, 1].$$

Observe que o caminho c_s não passa por P, pois $0 \leqslant s \leqslant 1$. Note que

$$\begin{aligned} |c_s(t) - P| &= |c_0(t) + sv(t) - P| = |c_0(t) - P + sv(t)| \\ &\geqslant |c_0(t) - P| - |sv(t)| = |c_0(t) - P| - s|v(t)| \\ &\geqslant |c_0(t) - P| - |v(t)| > 0 \\ &\Rightarrow |c_0(t) - P| > |v(t)|. \end{aligned}$$

Logo, temos que c_s é uma homotopia entre c_0 e c_1 sem passar por P, portanto $Ind(c_0, P) = Ind(c_1, P)$.

3 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

No presente capítulo, apresentamos quatro demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra, tendo como base o que foi visto até aqui. Agora, vamos enunciar o tão esperado Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 3.1 Toda função polinomial $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ e $a_n \neq 0$ de grau maior ou igual a 1, possui uma raiz no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

3.1 Demonstração utilizando conceitos básicos de Análise na reta

Faremos a demonstração em dois casos: quando n for par e quando n for ímpar

Caso 1: Admita n ímpar .

Considere,

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \\ &= z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right). \end{aligned}$$

Então, temos duas possibilidades:

- $a_n > 0$, $p(z) \to +\infty$, quando $z \to +\infty$ e $p(z) \to -\infty$ quando $z \to -\infty$. Logo, existe $z_0 \in \mathbb{R}$; $p(z) = 0$;
- $a_n < 0$, $p(z) \to -\infty$, quando $z \to +\infty$ e $p(z) \to +\infty$ quando $z \to -\infty$. Logo, existe $z_0 \in \mathbb{R}$; $p(z) = 0$.

Caso 2: Agora vamos admitir n par .

Sabemos que qualquer número real não negativo tem alguma raiz quadrada, portanto, podemos afirmar que, se a e b forem números reais, então existem números complexos z_1 e z_2, tais que

$$z^2 + az + b = (z - z_1)(z - z_2).$$

Diante disso vamos demonstrar por indução relativamente ao menor inteiro não negativo k tal que 2^k divide o grau n de $p(z)$, ou seja, $n|2^k$ o que implica que $n = 2^k m$, onde m é ímpar.

Se $k = 0$, então n é ímpar, pois resulta que $n = m$. Daí $p(z)$ possui pelo menos uma raiz.

Suponha que o teorema já se encontra demonstrado no caso em que o grau do polinômio é da forma $n = 2^{k-1}m'$, com m' ímpar.

Seja

$$q_t(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z - z_i - z_j - tz_iz_j).$$

Então os coeficientes de $q_t(z)$ são polinômios simétricos no z_i com coeficientes reais. Logo, podem ser expressos como polinômios simétricos elementares, ou seja, em $-a_1, a_1, ..., (-1)^n a_i$, pelo que $q_t(z)$, tem, de fato, coeficientes reais.

Além disso, o grau de q_t é igual a

$$\frac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1}m(n-1)$$

e $m(n-1)$ é ímpar. Logo, pela hipótese de indução, q_t tem alguma raiz real; em outras palavras $z_i + z_j + tz_jz_j$ é real para dois elementos distintos i e j de $(1, ..., n)$. Como há mais números reais do que pares (i, j) é possível encontrar números reais distintos t e s tais que $z_i + z_j + tz_jz_j$ e $z_i + z_j + sz_jz_j$ sejam reais (para os mesmos i e j). Consequentemente, tanto $z_i + z_j$ como $z_jz_j \in \mathbb{R}$ e, portanto z_i e $z_j \in \mathbb{C}$, pois são raízes do polinômio

$$z^2 + (z_1 + z_2)z + z_1z_2.$$

□

3.2 Demonstração via Noções de continuidade e compacidade no plano complexo

Nesta seção, abordamos uma demonstração usando técnicas mais elementares, mais especificamente, fizemos uso das noções de continuidade e compacidade no plano complexo.

Faremos a demonstração em dois passos:

Passo 1: Admita a existência de um ponto z_0 no plano complexo tal que $|p(z_0)| \leq |p(z)|$.

Seja

$$p(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0,$$

uma função polinomial em $\mathbb{C}$ de grau $n \geqslant 1$.

Nestas condições, se $a_0 = 0$ então $p(0) = 0$. assim, suponhamos que $a_0 = p(0) \neq 0$. Pela Proposição 2.7, $\lim\limits_{z \to +\infty} |p(z)| = +\infty$, ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z| > \delta$ implica que $|p(z)| > \epsilon$. Daí existe $\delta > 0$ tal que $|z| > \delta$ implica que

$|p(z)| > |a_0| = |p(0)|$.

Da Observação 2.1, temos que a bola fechada $B_\delta[0]$, é um conjunto compacto. Assim, pelo teorema de Weierstrass, a função $z \in B_\delta[0] \to |p(z)| \in \mathbb{R}$ assume seu valor mínimo em algum ponto $z_0 \in B_\delta[0]$. Assim

$$|z| \leqslant \delta \Rightarrow |p(z)| \geqslant |p(z_0)|.$$

Como $0 \in B_\delta[0]$ então

$$|p(z_0)| \leq |p(0)|.$$

Portanto,

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Passo 2: Admita que z_0 é uma raiz de $p(z)$, ou seja, $p(z_0) = 0$.

Suponha por absurdo que $p(z_0) \neq 0$, logo, $p(z_0) = c$. Considere $q(z) = p(z+z_0)$. Pela proposição 2.6, temos que existe $1 \leqslant k \leqslant n$, tal que

$$q(z) = c + z^k[a + r(z)], a \neq 0, r(0) = 0.$$

Como provamos no passo 1 que z_0 é um ponto de mínimo global temos que

$$|p(z_0)| \leq |p(z + z_0)| = |q(z)|.$$

Logo,

$$c \leq |q(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Agora, vamos mostrar que existe $z_1 \in \mathbb{C}$, tal que $|q(z_1)| < |c|$. Para isto, consideremos $B = \{w \in \mathbb{C}; |w + c| < |c|\}$ disco aberto de centro $-c$ e raio $|c|$.

Tomemos agora $w \in \mathbb{C}$ tal que $aw^k = -c$, ou seja, w é uma raiz k-ésima do complexo $-c/a$. Note que $aw^k \in B$, pois $|aw^k + c| = | - c + c| = 0 < |c|$, $c \neq 0$. Consideremos a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = zw^k.$$

Note que f é contínua. Em particular, f é contínua em a. Assim, para $\varepsilon = |c|$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)).$$

Note que $B_{\varepsilon}(f(a)) = B$, bastando observar que $f(a) = aw^k = -c$ e

$$B_{|c|}(-c) = \{W \in \mathbb{C}; |w - (-c)| < |c|\}.$$

Por continuidade, de f, vemos que se $u \in B_{\delta}(a)$, então $f(u) = uw^k \in B$. Tomemos agora a função

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ z \longmapsto r_1(z) = a + r(z)$$

r_1 é um polinômio e portanto uma função contínua. Em particular, r_1 é contínua em 0 e $r_1(0) = a$. Daí, existe $\lambda > 0$ tal que $|z - 0| = |z| < \lambda$ implica que $r_1(z) \in B_{\delta}(a)$. Com isso,

$$f(r_1(z)) = r_1(z)w^k = (a + r(z))w^k \in B.$$

Seja $0 < t < 1$ tal que $|tw| < \lambda$, daí, como $r_1(tw) \in B_{\delta}(a)$ então

$$f(r_1(tw)) = w^k(a + r(tw)) \in B.$$

Agora, se $0 < s < 1$ e $z \in B$, então pela Proposição 2.3, $sz \in B$. Portanto, $t^k w^k[a + r(tw)] \in B$, pois $0 < t^k < 1$. Logo, pondo $z_1 = tw$, temos que

$$z_1^k[a + r(z_1)] \in B.$$

Como

$$q(z_1) = c + z_1^k[a + r(z_1)] \Rightarrow q(z_1) - c = z_1^k[a + r(z_1)] \in B,$$

$$\Rightarrow |q(z_1) - c + c| < |c|$$

$$\Rightarrow |q(z_1)| < |c|.$$

Daí,

$$|q(z_1)| = |p(z_1 + z_0)| < |c| = |p(z_0)|,$$

o que é um absurdo já que

$$|p(z_0)| \leqslant |p(z)|, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Portanto, $p(z_0) = 0$. $\square$

3.3 Demonstração via Teorema de Liouville

Considere a função polinomial em $\mathbb{C}$ dada por

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

e suponhamos que $a_0 \neq 0$, pois do contrário $p(0) = 0$. Mostraremos que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

Suponhamos que $p(z_0) \neq 0$, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, então podemos definir a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa dada por $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$, observe que

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|}$$

Note que se $|z| \to +\infty$ então pela proposição 2.7, $|p(z)| \to +\infty$. Logo, $|f(z)| \to 0$. Assim podemos fixar um $R > 0$ tal que $|z| > R$ o que implica que $|f(z)| < 1$. Por outro lado, pela continuidade de f, existe $c > 0$ tal que

$$|f(z)| < c \ \ \forall z \in B_R(0).$$

Portanto, $|f(z)| < M$ onde, $M =$máx $\{1, c\}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Logo, pelo Teorema de Liouville a função f é constante, o que implica que p também o é, mas isto é um absurdo, pois p depende de $z \in \mathbb{C}$. Portanto, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$. □

3.4 Demonstração via Teorema de Rouché

Nesta seção, demonstramos o Teorema Fundamental da Álgebra, usando fortemente o teorema de Rouché. E apresentamos uma demonstração usando o teorema de Rouché Versão 1, e outra usando o teorema de Rouché Versão 2.

Considere a função polinomial em $\mathbb{C}$ dada por

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

e que $a_0 = p(0) \neq 0$. Agora, para cada $r > 0 \in \mathbb{R}$, consideremos o círculo γ_r de raio r e centro em 0, dado por

$$\gamma_r = r(cost + isent), \quad t \in [0, 2\pi],$$

para cada r, a imagem de p pelo círculo γ_r é a curva dada por

$$p(\gamma_r(t)), \ \ t \in [0, 2\pi].$$

Fixando R suficientemente grande e restringindo o polinômio p ao disco $B_R(0)$, isto é, $p : B_R(0) \to \mathbb{C}$, assim, percebemos que estamos nas hipóteses do Lema 2.1, o qual garante que que se $Ind(p(\gamma_r), 0) \neq 0$, então existe $z_0 \in B_R(0)$, tal que $p(z_0) = 0$.

Para concluirmos a demonstração, devemos mostrar que $Ind(p(\gamma_r), 0) \neq 0$. Note que podemos supor sem perda de generalidade que $a_n = 1$, pois é o mesmo que dividir por a_n a equação $p(z) = 0$. Nestas condições, temos que

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

e que pode ser escrito como

$$p(z) = z^n + q(z), \;\; q(z) = a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0.$$

Assim, pelo Exercício 2.3 temos que,

$$|q(z)| < |z^n|.$$

Tomando, R suficientemente grande para que $|z| = R$ implique em

$$|q(z)| < |z^n|,$$

podemos escrever,

$$p(\gamma_R(t)) = \gamma_R(t)^n + q(\gamma_R(t)).$$

Para simplificar a notação, façamos $c_R(t) = p(\gamma_R(t))$, $c_0(t) = \gamma_R(t)^n$, e $v(t) = q(\gamma_R(t))$. Daí temos,

$$c_R(t) = c_0(t) + v(t),$$

novamente pelo Exercício 2.3, concluímos que

$$|v(t)| < |c_0(t) - 0|,$$

desta forma estamos nas hipóteses do Teorema 2.7, o qual garante que

$$Ind(c_R, 0) = Ind(c_0, 0) = n.$$

Portanto, concluímos que $Ind(p(\gamma_r), 0) \neq 0$. como queríamos demonstrar. □.

Apresentaremos outra demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, usando o Teorema 2.6, e tem por base noções semelhantes, porém diferencia-se pelo fato de não recorrer ao número de voltas

Assim, considere a função polinomial em $\mathbb{C}$ dada por

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

agora tomemos uma função definida em $\mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^n$. Daí observe que

$$\begin{aligned} |f(z) - p(z)| &= |z^n - (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_2z^2 + a_1z + a_0)| \\ &= |-(a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_2z^2 + a_1z + a_0)| \\ &= |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_2z^2 + a_1z + a_0|. \end{aligned}$$

Fazendo z suficientemente grande, temos pelo Exercício 2.3 que

$$|a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_2z^2 + a_1z + a_0| < |z^n|,$$

Portanto,

$$|f(z) - p(z)| < |f(z)|.$$

Como as funções $f(z)$ e $p(z)$ são holomorfas em todo $\mathbb{C}$ e vale a desigualdade acima, estamos nas hipóteses do Teorema 2.6, donde podemos concluir que f e p possui o mesmo número de zeros contados com as suas multiplicidades, ou seja, $f(z) = z^n$ possui n zeros iguais a zero, logo p também possui n zeros.

$\square$

4 CONCLUSÃO

O Teorema Fundamental da Álgebra, como ressaltamos inicialmente é muito importante em algumas disciplinas de matemática, sendo essencial, à clareza deste resultado para professores da educação básica e discentes dos cursos de Licenciatura em Matemática, que muita das vezes nunca tiveram a oportunidade de verem uma demonstração do teorema.

Desta forma, exploramos alguns assuntos sobre variáveis complexas para nos assegurar a fundamentação das demonstrações, proporcionando a apresentação de conceitos e resultados importantes nesta disciplina, que favorecessem a apropriação desde os conceitos básicos até as demonstrações.

A partir do que foi visto, conseguimos fazer um estudo com os pré requisitos necessários para apresentarmos quatro provas do resultado principal do trabalho. Podemos afirmar, que os resultados esperados em relação as demonstrações, cumpriram a proposta inicial de apresentar uma maior clareza para os discentes do curso de licenciatura em matemática e professores da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ACKER, F. Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. UFRJ, Rio de Janeiro. 2018.

ÁLGEBRA. In: Wikipédia a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Álgebra> acesso em: 14 de fevereiro de 2020.

DIAS, F. C. O Teorema Fundamental da Álgebra. Dissertação (PROFMAT). UNIFAP, Macapá, 2017.

FERNANDEZ, C.S.; BERNARDES Jr, N.C. Introdução às funções de uma variável complexa, 5ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019. 288p (Coleção de Textos Universitários).

FERNANDESZ, C.S.; SANTOS R.A. O Teorema Fundamental da Álgebra. João Pessoa: UFPB, 2010, V Bienal da SBM.

IEZZI, G.: Fundamentos de Matemática Elementar, 6: Complexos, polinômios, equações. Atual editora.1993.

LINS NETO, A. Funções de uma Variável Complexa. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides).

LIMA, E.L. Curso de Análise- Volume 2, 10ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

PEREIRA, O. E. S. Raízes de Equações do Terceiro Grau. TCC. UNILAB, Acarape. 2017.

SILVA, M. A. Análise Complexa e aplicações. Dissertação (PROFMAT). UNESP, Rio Claro, 2018.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA. In: Wikipédia a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema fundamental da álgebra> acesso em: 19 de janeiro de 2020.