



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ALINE GLIVIA DA SILVA SANTOS

CURVAS GEODÉSICAS EM SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

**REDENÇÃO-CE
2022**

ALINE GLIVIA DA SILVA SANTOS

CURVAS GEODÉSICAS EM SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito para a obtenção do título de Graduada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

REDENÇÃO-CE
2022

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Santos, Aline Glivia da Silva.

S233c

Curvas geodésicas em superfícies de revolução / Aline Glivia da Silva Santos. - Redenção, 2022.
51f: il.

Outro - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Geometria diferencial. 2. Equações diferenciais. 3. superfícies (Matemática). I. Título

CE/UF/BSP

CDD 516.36

ALINE GLIVIA DA SILVA SANTOS

CURVAS GEODÉSICAS EM SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciada em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 09/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB



Documento assinado eletronicamente por **RAFAEL JORGE PONTES DIOGENES, PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 09/02/2022, às 15:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOSERLAN PEROTE DA SILVA, PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 09/02/2022, às 15:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **WESLEY MARINHO LOZORIO, PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 09/02/2022, às 15:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unilab.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0405146** e o código CRC **5D0C5939**.

Dedico à minha mãe, Rita Audileide, e em memória de meu pai, João dos Santos, que com muito carinho, amizade, incentivo me apoiaram, acreditaram e lutaram por mim e pelo meu sonho durante todos esses anos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela força, coragem, proteção e saúde que Ele me deu durante toda a minha graduação. Também por ter me dado sabedoria e paciência para lidar com certas dificuldades e escolhas que foram impostas.

Ao meu pai, João, que até seu último dia de vida cuidou e me incentivou nos estudos.

A minha mãe, Rita, que eu jamais conseguirei agradecer o tanto que lutou por mim durante toda a minha formação.

Aos meus irmãos, Antônia Valéria e Francisco Alefe, que me deram apoio e incentivo nas horas difíceis. E ao meu irmãozinho, José Gael, que nos dias estressantes tinha o poder de me alegrar com seu sorriso e brincadeiras.

Sou grata também aos meus amigos, Jandeson e Luciana, que não me deixaram ser vencida pelo cansaço.

Agradeço aos meus colegas que a Universidade me deu, por compartilharem momentos de apoio, estudos, risadas e desespero comigo.

Agradeço à UNILAB, como instituição de ensino e todos os profissionais da mesma que contribuíram de forma direta e indiretamente para a realização da minha formação.

Agradeço aos meus professores da Universidade pelos ensinamentos, em especial, o Professor Dr. Rafael Diógenes pela oportunidade de me orientar na conclusão deste trabalho e pelas sugestões dadas que foram de grande ajuda na elaboração deste trabalho.

Aos professores participantes da banca: Joserlan Perote da Silva, Rafael Jorge Pontes Diógenes e Wesley Marinho Lozório, pelas preciosas contribuições.

Aos meus sobrinhos, tios e avós, que também contribuíram para que o sonho da faculdade se tornasse realidade.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro na bolsa de Iniciação Científica.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro na bolsa de Iniciação à Docência.

“A vida é como andar de bicicleta: para manter o equilíbrio é preciso se manter em movimento.”

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho destina-se a estudar as curvas geodésicas em superfícies de revolução. Para isso, apresenta os conceitos mais elementares da Geometria Diferencial, tais como curvas regulares, superfícies regulares e plano tangente. Explora a primeira e a segunda formas fundamentais. Além disso, prova importantes resultados como as equações diferenciais das geodésicas e a solução geral para as equações diferenciais em superfícies de revolução. Por fim, são realizadas soluções da obtenção das geodésicas do cilindro, toro e esfera seguindo os métodos de Carmo (2014).

Palavras-chave: Curvas geodésicas. Geometria Diferencial. Superfície de revolução.

ABSTRACT

The present work is intended to study the geodesic curves on surfaces of revolution. For this, it presents the most elementary concepts of Differential Geometry, such as regular curves, regular surfaces and tangent plane. It explores the first and second fundamental forms. Furthermore, it show important results as the differential equations of geodesics and the general solution for differential equation of surfaces of revolution. Finally, are made solutions from obtaining of geodesic on the cylinder, torus and sphere following the methods of Carmo (2014).

Keywords: Differential Geometry. Geodesic curves. Surface of revolution.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Vizinhança coordenada do ponto $p \in S$	17
Figura 2.2 – Cobertura da esfera pelas 06 parametrizações	19
Figura 2.3 – As curvas coordenadas e os vetores Xu e Xv	21
Figura 2.4 – Plano $dNp = 0$	22
Figura 2.5 – Derivada covariante $Dwdt$	28
Figura 3.1 – Geodésicas no cilindro (meridiano)	34
Figura 3.2 – Geodésicas no cilindro (Paralelo)	35
Figura 3.3 – Geodésicas no cilindro (hélice).....	35
Figura 3.4 – Pré-geodésica do cone ($C = 1$ e $K = 0$).....	38
Figura 3.5 – Pré-geodésica do cone ($C > 0$ e $K < 0$).....	38
Figura 3.6 – Superfície de revolução.....	38
Figura 3.7 – Paralelos geodésicos e não geodésicos	41
Figura 3.8 – Geodésicas no toro (meridiano)	45
Figura 3.9 – Geodésicas no toro (paralelos)	45
Figura 3.10 – Geodésicas na esfera (equador).....	49
Figura 3.11 – Geodésicas na esfera (nem meridiano nem paralelo).....	49

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	NOÇÕES PRELIMINARES	14
2.1	CURVAS REGULARES	14
2.2	SUPERFÍCIES REGULARES	16
2.2.1	Plano tangente	20
2.3	PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL	22
2.4	SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL	25
2.5	DERIVADA COVARIANTE	27
3	GEODÉSICAS	31
3.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DAS GEODÉSICAS	32
3.2	GEODÉSICAS EM SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO	38
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	51

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial, área da Matemática iniciada por Carl Friedrich Gauss, é uma teoria que estuda os objetos geométricos através de definições e técnicas estabelecidos pelo Cálculo Diferenciável e Integral. Neste trabalho, fazendo uso de conceitos, definições e resultados da Geometria Diferencial, temos a pretensão de definir e fornecer um estudo introdutório do conceito de curvas geodésicas.

As curvas geodésicas possuem a propriedade, sobre uma superfície, de terem o menor comprimento ligando dois pontos. Esta afirmação não será provada no presente trabalho, pois buscaremos descrever o comportamento das geodésicas em superfícies de revolução seguindo os métodos apresentados em Carmo (2014).

Desse modo, o trabalho é organizado em dois capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos as noções preliminares, no qual definimos curvas regulares, superfícies regulares e plano tangente. Na sequência, definimos a primeira e a segunda formas fundamentais, demonstrando algumas de suas propriedades. Para finalizar, definimos a derivada covariante e expomos alguns resultados que servirão de base para o desenvolvimento de conceitos e métodos abordados no segundo capítulo.

O segundo capítulo é voltado para os estudos das curvas geodésicas em superfícies de revolução. O conceito de geodésica é apresentado e, a seguir, alguns resultados são apresentados para melhor compreensão do comportamento das curvas geodésicas no espaço euclidiano tridimensional. As equações diferenciais das geodésicas de uma superfície são exibidas e demonstradas, nos quais permitirão realizar cálculos para a obtenção das curvas geodésicas do plano, do cilindro e do cone.

Além disso, serviram para mostrar que em superfícies de revolução os meridianos parametrizados pelo comprimento de arco são sempre geodésicas e os paralelos parametrizados pelo comprimento de arco dependem da condição $f'(u) = 0$ para serem geodésicas. Outro importante resultado do estudo das curvas geodésicas em superfícies de revolução é com relação as curvas geodésicas que não são nem um meridiano e nem um paralelo, no qual foi apresentada a solução geral para as equações das geodésicas em superfícies de revolução.

Encerramos o segundo capítulo, expondo soluções das equações diferenciais das geodésicas de algumas superfícies de revolução, tais como o cilindro, a esfera e o toro. Por fim, constatamos que a obtenção das curvas geodésicas em certas superfícies de revolução como o toro e a esfera, não é um processo trivial. Isso porque, a solução geral para as equações das geodésicas em superfícies de revolução não resulta em uma integral de fácil resolução.

Dessa forma, durante os estudos para a elaboração deste trabalho nos deparamos com determinados trabalhos acadêmicos que foram de grande ajuda no entendimento do comportamento das curvas geodésicas do toro e da esfera. Utilizamos como referências bibliográficas as obras de Carmo (2014), Tenenblat (2008), Bruxel (2018), Pacheco (2008), Gutierrez (1981), Delgado (2017) e Matos (2016) para construção deste trabalho. Ademais, informamos que as figuras presentes no trabalho foram elaboradas no *software GeoGebra* e outras retiradas da obra Carmo (2014).

2 NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos as principais definições e resultados necessários para uma melhor compreensão das geodésicas nas superfícies de revolução, que veremos no próximo capítulo. Para isso, faremos um resumo dos conceitos relativos a curvas regulares, superfícies regulares e plano tangente baseado nos textos de Carmo (2014), Tenenblat (2008) e Delgado (2017). Posteriormente estudaremos a primeira e segunda formas fundamentais e derivada covariante, que nos auxiliarão nas demonstrações realizadas no Capítulo 3.

2.1 CURVAS REGULARES

Definição 2.1. *Uma curva diferenciável parametrizada no \mathbb{R}^3 é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida num intervalo aberto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Assim a aplicação α , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ com $t \in I$, é diferenciável se cada função real $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, isto é, possuem derivadas de todas ordens em todos os pontos de I .*

Iremos denominar a variável t como sendo o parâmetro da curva α . O conjunto imagem da curva α , é chamado de traço de α . Perceba que, se cada função real $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ é uma função diferenciável, ou seja, de classe C^∞ , então podemos afirmar que α é uma curva suave.

Definição 2.2. *O vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$ é chamado de vetor tangente (ou vetor velocidade) da curva α em um ponto $t \in I$.*

Definição 2.3. *A velocidade escalar da curva α em $t \in I$ é dada pelo módulo do vetor tangente, ou seja,*

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}.$$

Definição 2.4. *Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada regular se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Chamamos ponto singular de α um ponto $t \in I$ onde $\alpha'(t) = 0$.*

Dessa forma, se α for uma curva regular, então o vetor tangente $\alpha'(t)$ aponta para a direção tangente à curva α no ponto $\alpha(t)$.

Exemplo 2.1. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), t \in \mathbb{R},$$

com $a > 0$ e $b \neq 0$, é uma curva diferenciável parametrizada regular, pois $\alpha'(t) = (-a \operatorname{sen} t, a \operatorname{cos} t, b) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, cujo traço é uma hélice contido no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Exemplo 2.2. A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t, |t|), t \in \mathbb{R},$$

não é uma curva diferenciável parametrizada, pois a função $|t|$ não é diferenciável na origem, isto é, em $t = 0$.

Exemplo 2.3. A curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t^3, t^2), t \in \mathbb{R},$$

é diferenciável, mas não é regular, pois $\alpha'(t) = (3t^2, 2t) = 0$ para $t = 0$, desse modo $t = 0$ é um ponto singular.

Definição 2.5. Se $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva diferenciável parametrizada regular, a função $s : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(r))^2 + (y'(r))^2 + (z'(r))^2} dr,$$

com $t_0 \in I$, é chamada função comprimento de arco da curva a partir de t_0 .

Definição 2.6. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr = t - t_0,$$

para todos $t_0, t \in I$ com $t_0 \leq t$, ou seja, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t é igual a $t - t_0$.

Proposição 2.1. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$.

Demonstração. (\Leftarrow) Perceba que se $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$, temos, pela Definição 2.6, que α está parametrizada pelo comprimento de arco, pois

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr = \int_{t_0}^t 1 = t - t_0$$

para todos $t_0, t \in I$ com $t_0 \leq t$.

(\Rightarrow) Considere $t_0 \in I$ e a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ comprimento de arco a partir de t_0 . Como α está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\lambda)| d\lambda = t - t_0,$$

se $t \geq t_0$. Logo,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\lambda)| d\lambda = - \int_t^{t_0} |\alpha'(\lambda)| d\lambda = -(t_0 - t) = t - t_0,$$

se $t_0 \geq t$. Desse modo, $s(t) = t - t_0$ para todo $t \in I$ de modo que $s'(t) = 1$, isto é, $|\alpha'(t)| = 1$ para qualquer $t \in I$. ■

2.2 SUPERFÍCIES REGULARES

Nesta seção, formularemos a definição de superfície e analisaremos algumas propriedades geométricas das superfícies. Porém, podemos adiantar que uma superfície é um subconjunto de \mathbb{R}^3 que se assemelha a uma parte de \mathbb{R}^2 numa vizinhança de qualquer ponto, para melhor entendimento podemos citar o exemplo da Terra, que apesar de esférica, parece plana a um observador nela colocado.

Definição 2.7. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que

1. X é diferenciável. Isto é, se

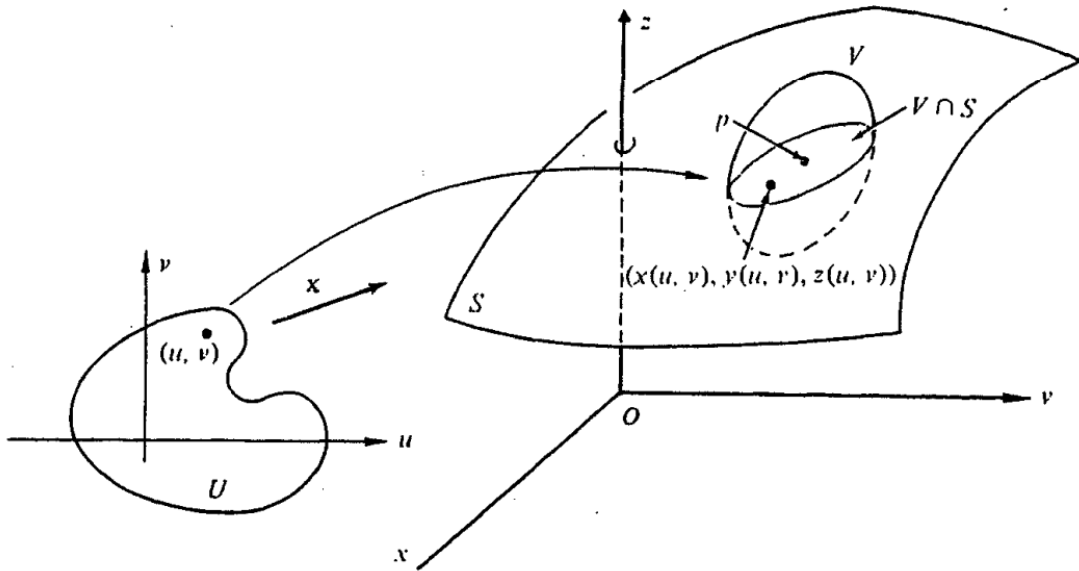
$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

então as funções componentes de X , $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U ;

2. A aplicação X é um homeomorfismo entre U e $V \cap S$. Isso porque, pela condição 1, X é contínua, logo X possui inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que também é contínua;

3. (Condição de regularidade) Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial $dX(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Figura 2.1 – Vizinhança coordenada do ponto $p \in S$



Fonte: Carmo (2014).

A aplicação X é chamada uma *parametrização local* ou um *sistema de coordenadas locais* em uma vizinhança $V \cap S$ de p , chamada de *vizinhança coordenada*. As variáveis u e v são os parâmetros da superfície, já o traço da superfície é o subconjunto S de \mathbb{R}^3 adquirido pela imagem da aplicação X .

Fazendo uma análise da Definição 2.7, temos que pela condição 2 obtemos pela injetividade que a possibilidade de autointerseções na vizinhança de uma superfície regular é descartada. Já na condição 3, temos que pelo menos um dos determinantes

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

é não nulo.

Para percebermos isso, calculamos as derivadas parciais das componentes de X calculadas no ponto $q = (u_0, v_0)$, assim obtemos $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ que correspondem às colunas da matriz da aplicação linear dX_q relativa às bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3

$$dX_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Portanto, na condição 3 podemos afirmar que os vetores coluna da matriz da Equação (2.2) sejam linearmente independentes, isto é, que o produto vetorial $\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v}$ seja diferente do vetor nulo. Ou ainda, confirmando o fato que um dos jacobianos $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}$ e $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$ é diferente de zero.

Contudo, podemos concluir pela condição 3 que a possibilidade de existir bicos em uma superfície regular é excluída, garantindo a existência de um plano tangente em todos os pontos de S , no qual iremos verificar na seção 2.2.1.

Vejamos um exemplo de uma superfície regular para melhor entendimento da Definição 2.7.

Exemplo 2.4. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular.

Primeiramente precisamos mostrar que $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X_1 = \left(u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right), \quad (u, v) \in U,$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$, é uma parametrização de S^2 . Note que a imagem $X_1(U)$ da parametrização X_1 é a parte aberta de S^2 acima do plano xy .

A condição 1 da Definição 2.7 é satisfeita, pois as componentes de X_1 são diferenciáveis, já que $u^2 + v^2 < 1$ então $\sqrt{1 - (u^2 + v^2)} > 0$ para todo $(u, v) \in U$.

Para verificar a condição 2 considere um ponto qualquer $(x, y, z) \in X_1(U) \subset S^2$, com $X_1(U) \subset S^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z > 0\}$, se fizermos $X_1^{-1}(x, y, z) \mapsto (u, v)$ temos u e v bem definidos, logo X_1 é bijetiva. E que X_1^{-1} é a restrição da projeção de $X_1(U) \subseteq S$ em U , que é contínua. Portanto a condição 2 é satisfeita.

Agora para verificar a condição 3, podemos calcular um dos determinantes da Equação (2.1), assim

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

para todo $q \in U$, satisfazendo, portanto, a condição 3.

Por fim, cobriremos a esfera inteira utilizando seis parametrizações similares, como a parametrização $X_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X_2(u, v) = \left(u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \right), \quad (u, v) \in U,$$

podemos observar que $X_1(U) \cup X_2(U)$ cobre a esfera menos o equador

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Para cobrir toda a esfera, juntamente com X_1 e X_2 , precisamos utilizar os planos xz e zy e definir as seguintes parametrizações:

$$X_3(u, v) = (u, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v),$$

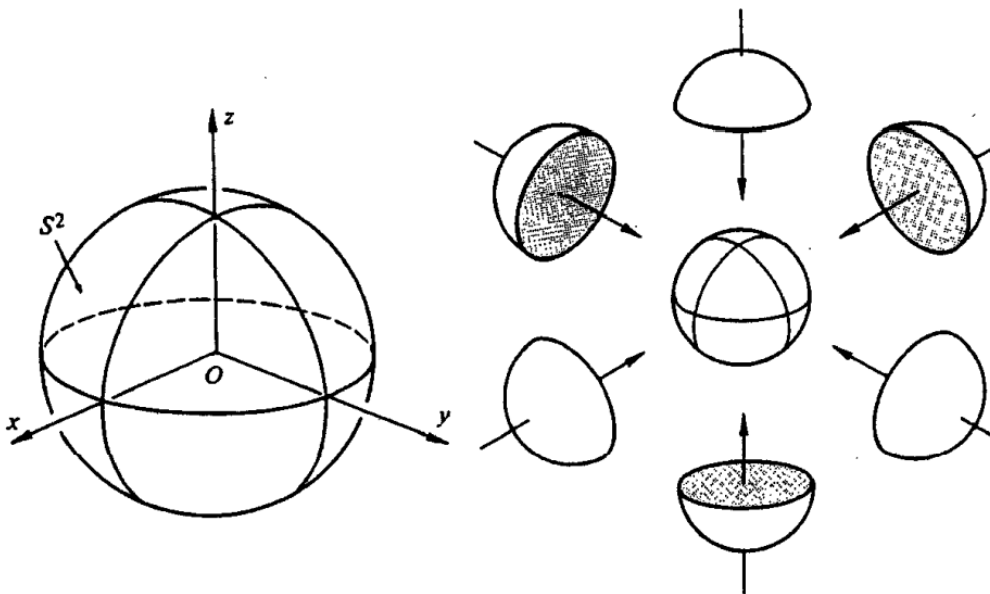
$$X_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v),$$

$$X_5(u, v) = (+\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v),$$

$$X_6(u, v) = (-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v).$$

Dessa forma, mostramos que S^2 é uma superfície regular.

Figura 2.2 – Cobertura da esfera pelas 06 parametrizações



Fonte: Carmo (2014).

Definição 2.8. Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular, então uma função diferenciável parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é uma curva de superfície.

A Definição 2.8 aborda as curvas de superfícies, que no caso, são curvas contidas em uma dada superfície. Logo, se $X(u, v)$ é uma superfície, segue que as curvas de superfícies possuem parametrização dada por $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $t \in \mathbb{R}$.

Definição 2.9. As curvas coordenadas de uma superfície com aplicação $X(u, v)$ são as curvas de superfície que obtemos fazendo um dos parâmetros u ou v constante, isto é,

$$\alpha(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)), \quad v_0 = \text{constante};$$

$$\alpha(v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)), \quad u_0 = \text{constante}.$$

2.2.1 Plano tangente

A condição 3 da Definição 2.7 garante que para cada $p \in S$, o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S , que passam por p , constituem um plano.

Definição 2.10. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular e um ponto $p \in S$. Definimos $w \in \mathbb{R}^3$ como vetor tangente a S no ponto p , se $w = \alpha'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$, com $\alpha(0) = p$.*

Proposição 2.2. *Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2, $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$, coincide com o conjunto de vetores tangentes a S em $X(q)$.*

Demonstração. A prova desse fato pode ser vista em (CARMO, 2014).

Definição 2.11. *O plano $dX_q(\mathbb{R}^2)$ é chamado de plano tangente a S em p , denotado por T_pS .*

A escolha de uma parametrização X determina uma base $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}(p), \frac{\partial X}{\partial v}(p) \right\}$ de T_pS chamada de base associada a X . Tornando a notação mais simples, escreveremos no decorrer do trabalho da seguinte forma $\frac{\partial X}{\partial u}(p) = X_u$ e $\frac{\partial X}{\partial v}(p) = X_v$.

Dessa forma, qualquer vetor de T_pS é uma combinação linear de X_u e X_v e pode ser escrito como

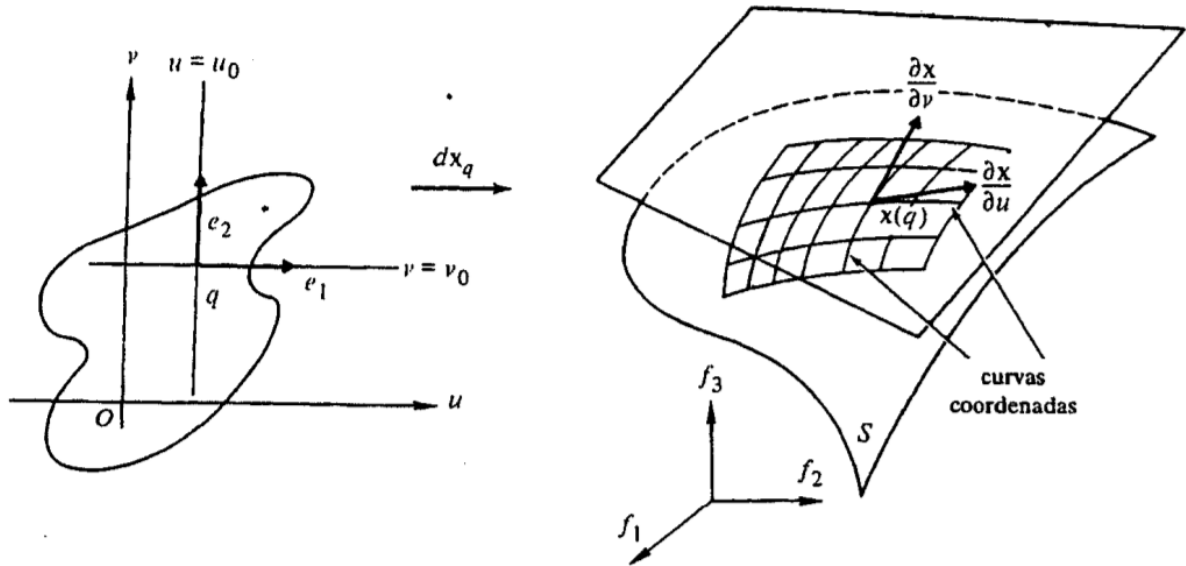
$$w = u'(0)X_u + v'(0)X_v.$$

Isso porque, pela Definição 2.10, temos que $w = \alpha'(0)$ para alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ com $\alpha(0) = p$. Com isso, considerando uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ obtemos ao derivá-la pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned} w &= \alpha'(0) \\ &= \frac{d}{dt} [X(u(t), v(t))] \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= u'(0)X_u + v'(0)X_v. \end{aligned}$$

A Figura 2.3 a seguir ilustra as curvas coordenadas da Definição 2.9 e os vetores X_u e X_v .

Figura 2.3 – As curvas coordenadas e os vetores X_u e X_v



Fonte: Carmo (2014).

Definição 2.12. Considere uma superfície S e um ponto $q \in U \subset \mathbb{R}^2$. Podemos afirmar que um vetor de \mathbb{R}^3 é normal a S em q se ele é ortogonal ao plano tangente em q , isto é, se é ortogonal a todos os vetores tangentes a superfície S no ponto q . Dessa forma, o vetor normal unitário N no ponto q é dado por,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}.$$

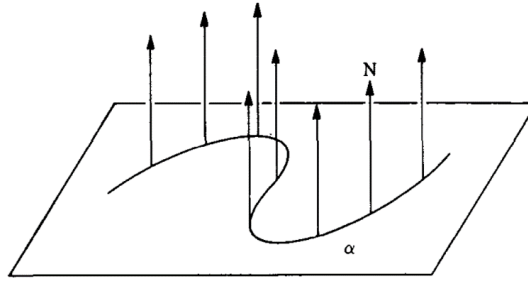
A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável e a aplicação linear $dN_p : T_p S \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$ opera da seguinte maneira: Considere $\alpha(t)$ uma curva parametrizada em S com $\alpha(0) = p$ e N restrito à curva $\alpha(t)$. Assim, o vetor $dN_p(\alpha'(0)) = N'(0)$ é um vetor de $T_p \mathbb{R}^3$, no qual mede a taxa de variação do vetor normal N restrito à curva $\alpha(t)$ em $t = 0$. Portanto, $dN_p(\alpha'(0))$ mede o quanto N se afasta de N_p em uma vizinhança de p na direção de $\alpha'(0)$. Para maiores detalhes veja (CARMO, 2014).

Exemplo 2.5. Considere um plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = d\}$ onde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Dessa forma, temos que o vetor normal unitário N é constante, pois

$$N(x, y, z) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

portanto, $dN \equiv 0$.

Figura 2.4 – Plano $dN_p = 0$



Fonte: Carmo (2014).

2.3 PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL

O produto interno usual do \mathbb{R}^3 induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno, o qual será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. A esse produto interno, associamos a forma quadrática I_p definida por

$$I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0,$$

para cada w em $T_p S$.

Definição 2.13. A forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p$, é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Com isso, a primeira forma fundamental nos possibilita fazer alguns cálculos geométricos sobre a superfície como comprimentos de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões, entre outras coisas, sem fazer menção ao espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , onde a superfície S está contida.

Nesse sentido, um vetor tangente $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada por $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, no qual para $t = 0$, temos $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$ e $w = \alpha'(0)$, logo obtemos aplicando a Definição 2.13 que

$$I_p(w) = I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p,$$

assim, como $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, segue que $\alpha'(0) = w = u'X_u + v'X_v$,

$$\begin{aligned} I_p(w) &= \langle u'X_u + v'X_v, u'X_u + v'X_v \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p u'v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

onde

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle_p,$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle_p,$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle_p,$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de T_pS .

Proposição 2.3. *Os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem as seguintes propriedades:*

a) $E(u, v), G(u, v) > 0$;

b) $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$.

Demonstração. a) X_u e X_v são não nulos, logo

$$E(u, v) = \langle X_u \times X_u \rangle = \|X_u\|^2 > 0$$

e

$$G(u, v) = \langle X_v \times X_v \rangle = \|X_v\|^2 > 0.$$

b) Temos $E(u, v) = \|X_u\|^2$ e $G(u, v) = \|X_v\|^2$, pela identidade vetorial

$$\|m \times n\|^2 = \|m\|^2\|n\|^2 - \langle m, n \rangle^2,$$

segue que

$$E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) = \|X_u\|^2\|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = \|X_u \times X_v\|^2 > 0.$$

■

Exemplo 2.6. Seja o plano $P \subset \mathbb{R}^3$, que passa por um dado ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e que contém os vetores $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$ e $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$ unitários ortogonais, parametrizado por $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Como $X_u = w_1$ e $X_v = w_2$, para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = |w_1|^2 = 1,$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0,$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = |w_2|^2 = 1.$$

Então a primeira forma fundamental fica sendo o vetor w com coordenadas a, b na base $\{X_u, X_v\}$

$$I_p(w) = I_p(aX_u + bX_v) = a^2 + b^2,$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.7. Considere um cilindro reto, parametrizado por $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$.

Para conseguirmos a primeira forma fundamental, é necessário notar que

$$X_u = (-\sin u, \cos u, 0) \quad \text{e} \quad X_v = (0, 0, 1).$$

Assim, temos que os coeficientes são

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = \text{sen}^2 u + \text{cos}^2 u = 1, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = 1. \end{aligned}$$

Dessa forma, a primeira forma fundamental do cilindro coincide com a obtida no plano (Exemplo 2.6) isto é, o vetor w com coordenadas a, b na base $\{X_u, X_v\}$

$$I_p(w) = I_p(aX_u + bX_v) = a^2 + b^2,$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.8. Seja uma esfera parametrizada da forma

$$X(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u),$$

com $0 < u < \pi$ e $0 < v < 2\pi$.

Primeiramente, temos que

$$\begin{aligned} X_u &= (-r \text{sen } u \cos v, -r \text{sen } u \sin v, r \cos u) \\ X_v &= (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0). \end{aligned}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = r^2 \text{sen}^2 u \cos^2 v + r^2 \text{sen}^2 u \sin^2 v + r^2 \cos^2 u \\ &= r^2 \text{sen}^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + r^2 \cos^2 u = r^2 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = r^2 \text{sen } u \cos v \cos u \sin v - r^2 \text{sen } u \sin v \cos u \cos v = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = r^2 \cos^2 u \sin^2 v + r^2 \cos^2 u \cos^2 v \\ &= r^2 \cos^2 u (\sin^2 v + \cos^2 v) = r^2 \cos^2 u. \end{aligned}$$

Portanto, a primeira forma fundamental da esfera é dada pelo o vetor w com coordenadas a, b na base $\{X_u, X_v\}$

$$I_p(w) = I_p(aX_u + bX_v) = a^2 r^2 + b^2 r^2 \cos^2 u,$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.9. Considere o toro parametrizado por

$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u).$$

Segue que

$$\begin{aligned} X_u &= (-r \text{sen } u \cos v, -r \text{sen } u \sin v, r \cos u) \\ X_v &= (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0), \end{aligned}$$

desse modo,

$$\begin{aligned} E = \langle X_u, X_u \rangle &= r^2 \sin^2 u \cos^2 v + r^2 \sin^2 u \sin^2 v + r^2 \cos^2 u \\ &= r^2 \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + r^2 \cos^2 u = r^2 \end{aligned}$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = (a + r \cos u) r \sin u \cos v \sin v - (a + r \cos u) r \sin u \sin v \cos v = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = (a + r \cos u)^2 \sin^2 v + (a + r \cos u)^2 \cos^2 v = (a + r \cos u)^2.$$

Assim, obtemos que a primeira forma fundamental do toro é dada pelo o vetor w com coordenadas a, b na base $\{X_u, X_v\}$

$$I_p(aX_u + bX_v) = a^2 r^2 + (a + r \cos u)^2 b^2,$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

2.4 SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

As propriedades geométricas locais de uma superfície regular dependem de duas formas fundamentais, das quais a primeira já foi definida na seção 2.3. A seguir, definiremos a segunda forma fundamental, que está associada aos estudos das curvaturas de curvas da superfície.

Definição 2.14. *Seja S uma superfície parametrizada regular e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva diferenciável em S , com $\alpha'(t) = w$. A segunda forma fundamental de S em p é a forma quadrática*

$$II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R},$$

onde para cada vetor $w \in T_p S$ associa II_p da seguinte maneira: $II_p(w) = \langle \alpha''(t), N \rangle$, onde $\alpha''(t)$ é o vetor aceleração no ponto p e N é o vetor unitário normal à superfície no ponto p .

$$\text{Se } w \in T_p S \text{ e como } w = \alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t)).$$

Fazendo $\alpha''(t)$, obtemos,

$$\alpha''(t) = u''(t)X_u + (u'(t))^2 X_{uu} + 2u'(t)v'(t)X_{uv} + (v'(t))^2 X_{vv} + v''(t)X_v. \quad (2.3)$$

Desse modo, aplicando a expressão (2.3) na Definição 2.14, é possível constatar que

$$\begin{aligned} II_p(w) &= \langle \alpha''(t), N \rangle \\ &= \langle X_{uu}, N \rangle (u')^2 + 2\langle X_{uv}, N \rangle u'v' + \langle X_{vv}, N \rangle (v')^2 \\ &= e(u')^2 + 2f u'v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle,$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle,$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle,$$

são os coeficientes da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$.

Os vetores X_u, X_v e N são linearmente independentes, assim podemos expressar X_{uu}, X_{uv}, X_{vu} e X_{vv} , como combinação linear de X_u, X_v e N :

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + a_{11} N, \quad (2.4)$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + a_{12} N, \quad (2.5)$$

$$X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + a_{21} N, \quad (2.6)$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + a_{22} N, \quad (2.7)$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ são chamados *Símbolos de Christoffel* da superfície S , nos quais são determinados em função dos coeficientes da primeira forma fundamental. Os a_{ij} são obtidos considerando o produto interno das três primeiras relações acima com o vetor N , assim $a_{11} = e$, $a_{12} = a_{21} = f$ e $a_{22} = g$.

Para determinar os *Símbolos de Christoffel*, consideramos o produto interno das três primeiras relações com X_u e X_v , dessa forma obtemos o sistema

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_v. \end{cases}$$

Perceba que os *Símbolos de Christoffel* só dependem dos coeficientes E, F e G e das suas derivadas. Resolvendo o sistema utilizando a Regra de Cramer temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Exemplo 2.10. Vamos calcular os *Símbolos de Christoffel* de uma esfera parametrizada da forma

$$X(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u),$$

com $0 < u < \pi$ e $0 < v < 2\pi$.

Temos pelo Exemplo 2.8, que os coeficientes da primeira forma fundamental da esfera são $E = r^2$, $F = 0$ e $G = r^2 \cos^2 u$. Daí, obtemos as seguintes derivadas

$$\begin{aligned} E_u &= 0, & E_v &= 0, \\ F_u &= 0, & F_v &= 0, \\ G_u &= -2r^2 \operatorname{sen} u \cos u, & G_v &= 0. \end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos nas expressões em (2.8), temos que os *Símbolos de Christoffel* são

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= -\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \cos u \operatorname{sen} u, & \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

2.5 DERIVADA COVARIANTE

Iremos começar esta seção, dando primeiramente o conceito de campo de vetores em uma superfície regular para depois definirmos derivada covariante de um campo de vetores.

Definição 2.15. *Seja S uma superfície regular. Um campo de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$ é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in U$ um vetor $w(p) \in T_p S$. O campo de vetores w é diferenciável em p se, para alguma parametrização $X : U \rightarrow X(U)$ em p , as funções $a, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por*

$$w(p) = a(u, v)X_u + b(u, v)X_v$$

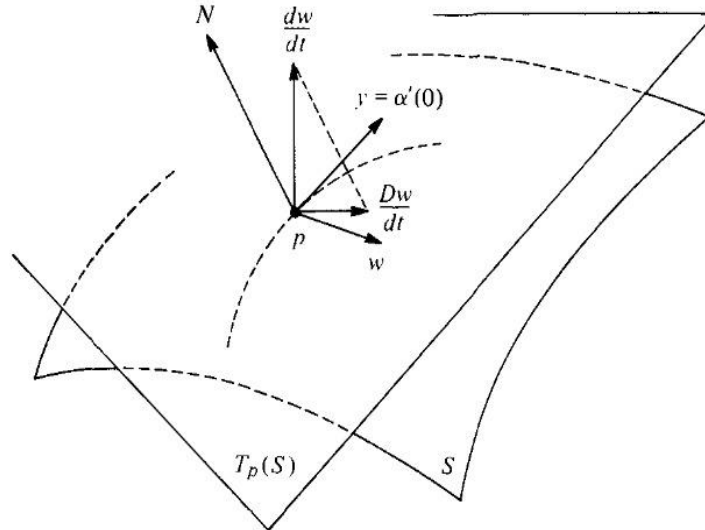
na base $\{X_u, X_v\}$ são diferenciáveis em p .

Observação 2.1. Vale ressaltar que a Definição 2.15 não depende da escolha da parametrização X em p . A explicação desse fato pode ser vista em (DELGADO, 2017).

Definição 2.16. *Dado um campo de vetores diferenciável w sobre um conjunto aberto $U \subset S$ contendo p . Considere uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$, no qual $y \in T_p S$, e um campo de vetores w restrito a curva α , isto é, $w(t)$ com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. O vetor obtido pela projeção de $\frac{dw}{dt}(0)$ sobre o plano $T_p S$ é chamado de derivada covariante em p do campo de vetores w em relação ao vetor y .*

A derivada covariante em p do campo de vetores w em relação a y denotaremos por $\frac{Dw}{dt}(0)$.

Figura 2.5 – Derivada covariante $\frac{Dw}{dt}$



Fonte: Carmo (2014).

A definição da derivada covariante está relacionada ao uso do vetor normal da superfície regular S e de uma curva particular α , tangente a y em p . No entanto, podemos mostrar que a derivada covariante não depende da escolha da curva α e que é um conceito da geometria intrínseca, isto é, depende apenas da primeira forma fundamental.

De fato, considere uma parametrização X de S em p e seja $X(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ a expressão da curva α e

$$\begin{aligned} w(t) &= a(u(t), v(t))X_u + b(u(t), v(t))X_v \\ &= a(t)X_u + b(t)X_v, \end{aligned}$$

a expressão do campo de vetores w na parametrização X . Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= a'(t)X_u + a(t)X'_u + b'(t)X_v + b(t)X'_v \\ &= a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b(X_{vu}u' + X_{vv}v') + a'X_u + b'X_v, \end{aligned}$$

sendo que $'$ denota derivação em relação a t .

Assim, substituindo X_{uu} , X_{uv} , X_{vu} , X_{vv} pelas expressões (2.4), (2.5) (2.6) e (2.7) respectivamente e lembrando que $a_{11} = e$, $a_{12} = a_{21} = f$ e $a_{22} = g$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= a(\Gamma_{11}^1 X_u u' + \Gamma_{11}^2 X_v u' + e N u' + \Gamma_{12}^1 X_u v' + \Gamma_{12}^2 X_v v' + f N v') \\ &\quad + b(\Gamma_{21}^1 X_u u' + \Gamma_{21}^2 X_v u' + f N u' + \Gamma_{22}^1 X_u v' + \Gamma_{22}^2 X_v v' + g N v') + a'X_u + b'X_v \end{aligned}$$

$$= (a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{21}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v')X_u \\ + (b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{21}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v')X_v + (aeu' + afv' + bfu' + bgv')N.$$

Como $\frac{Dw}{dt}(0)$ é a projeção ortogonal do vetor $\frac{dw}{dt}$ sobre o plano tangente $T_p S$, temos que

$$\frac{Dw}{dt}(0) = (a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{21}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v')X_u \\ + (b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{21}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v')X_v. \quad (2.9)$$

Temos que $y = \alpha'(0) = u'(0)X_u + v'(0)X_v$, assim a expressão (2.9) depende apenas do vetor y e não da curva α . Além disso, a expressão (2.9) mostra que a derivada covariante depende dos *Símbolos de Christoffel*, isto é, da primeira forma fundamental, dessa forma é um conceito intrínseco.

Se S é um plano, temos pelo Exemplo 2.6 que os coeficientes da primeira forma fundamental são $E = 1$, $F = 0$ e $G = 1$. Com isso, podemos calcular os *Símbolos de Christoffel*, assim fazendo os devidos cálculos, temos pelas equações (2.8) que $\Gamma_{ij}^k = 0$ para qualquer $i, j, k = 1, 2$. Dessa forma, substituindo os *Símbolos de Christoffel* na Equação (2.9) segue que a derivada covariante é $\frac{Dw}{dt}(0) = a'X_u + b'X_v$. Portanto, a derivada covariante coincide com a derivada usual de vetores no plano.

Seguindo esse raciocínio, se imaginarmos a curva parametrizada diferenciável $\alpha(t)$ em S como a trajetória de um ponto que se move sobre a superfície, temos que $\alpha'(t)$ é o vetor velocidade, $\alpha''(t)$ o vetor aceleração e a derivada covariante $\frac{D\alpha'}{dt}(t)$ do campo $\alpha'(t)$ é a componente tangencial do vetor aceleração.

Definição 2.17. *Um campo de vetores diferenciável w ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ é paralelo se $\frac{Dw}{dt}(t) = 0$ para todo $t \in I$.*

Proposição 2.4. *Seja $\alpha : I \rightarrow S$ uma curva parametrizada e sejam v e w campos de vetores paralelos ao longo da curva α . Assim, o produto escalar $\langle v(t), w(t) \rangle$ é constante. Em especial, $|v(t)|$, $|w(t)|$ e o ângulo entre $v(t)$ e $w(t)$ são constantes.*

Demonstração. Primeiramente, sabemos que v e w são campos paralelos ao longo da curva α , então pela Definição 2.17 obtemos que $\frac{Dv}{dt}(t) = \frac{Dw}{dt}(t) = 0$, para qualquer $t \in I$. E ainda podemos afirmar que $\frac{dv}{dt}(t)$ e $\frac{dw}{dt}(t)$ são vetores normais ao plano que é tangente à superfície em $\alpha(t)$, ou seja

$$\langle v'(t), w(t) \rangle = \langle v(t), w'(t) \rangle = 0,$$

já que $v(t), w(t) \in T_{\alpha(t)}\mathcal{S}$. Dessa forma, temos que

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), w(t) \rangle = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0,$$

assim, $\langle v(t), w(t) \rangle = cte.$ ■

3 GEODÉSICAS

Ao longo desse capítulo, iremos nos utilizar dos conceitos e resultados obtidos no capítulo anterior, nos quais permitirão entender o conceito de curvas geodésicas e proposições necessárias para uma maior compreensão do trabalho. As curvas geodésicas são curvas especiais, pois possuem propriedades interessantes dentre a qual mostraremos as suas equações diferenciais e a obter essas curvas nas superfícies de revolução. Para este capítulo foram utilizadas as referências Carmo (2014), Bruxel (2018), Pacheco (2008), Gutierrez (1981), Delgado (2017) e Matos (2016).

Definição 3.1. *Uma curva parametrizada, não constante, $\alpha : I \rightarrow S$ é chamada geodésica em $t \in I$ se o seu campo de vetores tangentes $\alpha'(t)$ é paralelo ao longo de α em t , isto é,*

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0.$$

Dizemos que α é uma geodésica parametrizada se é geodésica para todo $t \in I$.

Portanto, pela Proposição 2.4 segue que $|\alpha'(t)| = \text{const.} = c \neq 0$ para todo $t \in I$. Desse modo, o parâmetro t de uma geodésica parametrizada α é proporcional ao comprimento de arco $s(t) = c \cdot t$ de α . Assim, uma curva regular $\alpha(t)$ contida em uma superfície S é uma geodésica se o vetor aceleração satisfaz $\alpha''(t) = 0$ ou é perpendicular à superfície no ponto $\alpha(t)$, em outras palavras, $\alpha''(t)$ é paralelo ao vetor N .

Proposição 3.1. *Seja S uma superfície regular. Se $\alpha(t)$ é uma geodésica da superfície S , então $|\alpha'(t)|$ é constante.*

Demonstração. Como $\alpha(t)$ é uma curva geodésica, então $\alpha''(t)$ é perpendicular à superfície no ponto $\alpha(t)$, ou seja, $\alpha''(t)$ é paralelo a N . Logo, segue que $\alpha''(t)$ é ortogonal ao vetor tangente $\alpha'(t)$. Então, obtemos pela derivada de $|\alpha'(t)|^2$ que

$$\frac{d}{dt} |\alpha'(t)|^2 = \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 2 \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0.$$

Portanto $|\alpha'(t)| = \text{const.} = c \neq 0$. ■

Proposição 3.2. *A reparametrização de uma geodésica $\alpha(t)$ pelo comprimento de arco, continua sendo uma geodésica.*

Demonstração. Pela Definição 2.5 temos a função comprimento de arco como

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr.$$

Desde que pela Proposição 3.1, $|\alpha'(t)|$ é uma constante, tem-se $s(t) = ct$. Considerando

$$\alpha(t) = \beta(s(t)), \quad (3.1)$$

no qual β é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco, calculamos a segunda derivada da expressão (3.1), onde obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \beta'(s(t)) \cdot s'(t), \\ \alpha''(t) &= \beta''(s(t))(s'(t))^2 + \beta'(s(t)) \cdot s''(t). \end{aligned}$$

Desde que $s'(t) = c$, tem-se $s''(t) = 0$ e daí

$$\alpha''(t) = \beta''(s)c^2 \Rightarrow \beta''(s) = \frac{1}{c^2} \alpha''(t).$$

Portanto, o vetor $\beta''(s)$ depois da reparametrização da geodésica α é múltiplo escalar de $\alpha''(t)$, como $\alpha''(t)$ é paralelo a N então $\beta''(s)$ também será, o que implica que $\beta(s)$ é uma geodésica. ■

Observação 3.1. É possível concluirmos que se em uma superfície existe uma reta parametrizada pelo comprimento de arco, então esta será geodésica sobre uma superfície, pois $\alpha''(s) = 0$ para todo $s \in I$. Portanto, uma geodésica é o que mais se aproxima de uma “reta” sobre uma superfície.

3.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DAS GEODÉSICAS

Nesta seção, vamos determinar as equações diferenciais das geodésicas. Estas equações irão possibilitar a obtenção de resultados importantes para determinar as curvas geodésicas nas superfícies de revolução.

Teorema 3.1. *Uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $t \in \mathbb{R}$ de uma superfície S é uma geodésica se, e somente se, as funções $u(t)$ e $v(t)$, satisfazem o sistema de equações*

$$\begin{aligned} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 &= 0 \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Demonstração. Perceba que, para conseguirmos as equações diferenciáveis que possibilitem obter as funções $u(t)$ e $v(t)$ das geodésicas $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ de uma superfície regular S , precisamos zerar as componentes dos vetores X_u e X_v do vetor aceleração $\alpha''(t)$. Como o campo de vetores tangentes a S é gerado por X_u e X_v , obtemos que $\alpha'(t) = u'(t)X_u + v'(t)X_v$, assim pela Equação (2.3) temos

$$\alpha''(t) = u''(t)X_u + (u'(t))^2 X_{uu} + 2u'(t)v'(t)X_{uv} + (v'(t))^2 X_{vv} + v''(t)X_v.$$

Substituindo X_{uu} , X_{uv} e X_{vv} pelas expressões (2.4), (2.5) e (2.7) respectivamente, lembrando que $a_{11} = e$, $a_{12} = a_{21} = f$ e $a_{22} = g$, e omitindo o parâmetro t como forma de facilitar as contas, segue que

$$\begin{aligned} \alpha'' &= u''X_u + v''X_v + (u')^2[\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN] \\ &\quad + 2u'v'[\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN] + (v')^2[\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN] \\ &= [u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1]X_u \\ &\quad + [v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2]X_v + [(u')^2e + 2u'v'f + (v')^2g]N. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assim se $\alpha(t)$ é geodésica em S para todo $t \in I$, então $\alpha''(t)$ não tem componente tangencial à superfície, assim teremos as componentes de X_u e X_v nulas, logo de (3.3) concluímos que

$$\begin{aligned} u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 &= 0 \\ v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente se as Equações (3.2) são verdadeiras, então de (3.3) tem-se

$$\alpha''(t) = [(u')^2e + 2u'v'f + (v')^2g]N,$$

isto é, $\alpha''(t)$ é ortogonal a $T_\alpha S$, portanto $\alpha(t)$ é uma geodésica. ■

Exemplo 3.1. As geodésicas do plano $X(u, v) = p + uw_1 + vw_2$ com $u, v \in \mathbb{R}$.

Temos pelo Exemplo 2. os coeficientes da primeira forma fundamental sendo $E = 1$, $F = 0$ e $G = 1$, então os *Símbolos de Christoffel* são, de acordo com a Equação (2.8),

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{12}^2 = 0, \Gamma_{22}^1 = 0 \text{ e } \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Substituindo no sistema de equações diferenciais (3.2) obtemos

$$\begin{aligned} u'' &= 0 \\ v'' &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que $u'(t) = b$ e $v'(t) = d$, logo $u(t) = a + bt$ e $v(t) = c + dt$. Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= X(a + bt, c + dt) = p + (a + bt)w_1 + (c + dt)w_2 \\ &= p + aw_1 + cw_2 + (bw_1 + dw_2)t. \end{aligned}$$

O que nos leva a concluir que $\alpha(t)$ é geodésica do plano se, e só se, $\alpha(t)$ está contida em uma reta.

Exemplo 3.2. Obteremos as geodésicas do cilindro parametrizado por

$$X(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Temos pelo Exemplo 2.7, que os coeficientes da primeira forma fundamental do cilindro são $E = 1$, $F = 0$ e $G = 1$, e portanto os *Símbolos de Christoffel* são, de acordo com a Equação (2.8),

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{12}^2 = 0, \Gamma_{22}^1 = 0 \text{ e } \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Assim, o sistema de equações diferenciais (3.2) é

$$u'' = 0$$

$$v'' = 0.$$

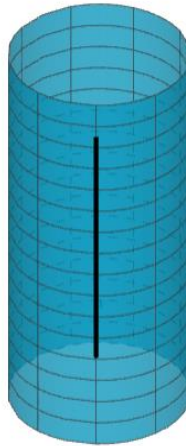
Com isso, podemos tirar algumas conclusões a partir destas equações. Primeiro, temos $u(t) = a + bt$ e $v(t) = c + dt$, dessa forma

$$\alpha(t) = X(a + bt, c + dt) = (\cos(a + bt), \sin(a + bt), c + dt).$$

Logo,

Se $b = 0$ e $d \neq 0$, então $\alpha(t) = (\cos(a), \sin(a), c + dt)$ é um meridiano do cilindro.

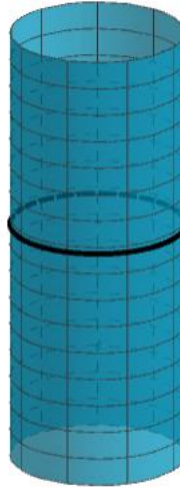
Figura 3.1 – Geodésicas no cilindro (meridiano)



Fonte: Autora (2022).

Se $b \neq 0$ e $d = 0$, então $\alpha(t) = (\cos(a + bt), \sin(a + bt), c)$ é um paralelo do cilindro.

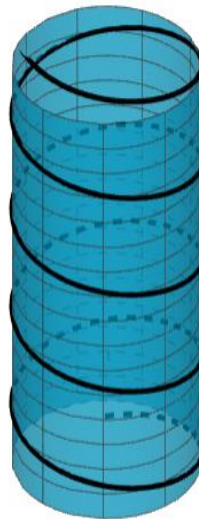
Figura 3.2 – Geodésicas no cilindro (Paralelo)



Fonte: Autora (2022).

Se $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então $\alpha(t) = (\cos(a + bt), \sin(a + bt), c + dt)$ é uma hélice do cilindro.

Figura 3.3 – Geodésicas no cilindro (hélice)



Fonte: Autora (2022).

Portanto, as geodésicas de um cilindro circular reto ficam determinadas.

Exemplo 3.3. As geodésicas do cone parametrizado por $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$.

Primeiramente, calculemos os coeficientes da primeira forma fundamental, para isso,

$$X_u = (\cos v, \sin v, 1)$$

$$X_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

logo,

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2 (\sin^2 v + \cos^2 v) = u^2.$$

Pelas equações (2.8), temos os *Símbolos de Christoffel*

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{u}{2}, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u}, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Dessa forma, o sistema de equações diferenciais (3.2) fica

$$u'' - \frac{u}{2}(v')^2 = 0 \quad (3.4)$$

$$v'' + \frac{2}{u}u'v' = 0. \quad (3.5)$$

Tomando a Equação (3.5) da seguinte maneira

$$v'' = -\frac{2}{u}u'v',$$

podemos reduzi-la para uma equação de primeira ordem. Para isso, dividimos em ambos os lados da igualdade por v' ,

$$\frac{v''}{v'} = -\frac{2}{u}u',$$

integrando a expressão, obtemos

$$\int \frac{v''}{v'} dt = -2 \int \frac{u'}{u} dt$$

$$\ln|v'| = -2 \ln|u| + c, \quad (3.6)$$

aplicando a exponencial em ambos os lados de (3.6), chegamos a

$$v' = \frac{C}{u^2}. \quad (3.7)$$

Como a geodésica procurada está parametrizada pelo comprimento de arco, então podemos assumir $|\alpha'(t)|^2 = E(u')^2 + G(v')^2 = 1$. Assim, substituindo (3.7) em

$$|\alpha'(t)|^2 = E(u')^2 + G(v')^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2(u')^2 + u^2 \left(\frac{C}{u^2}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2(u')^2 + \frac{u^2 C^2}{u^4} = 1$$

$$\Rightarrow 2(u')^2 + \frac{C^2}{u^2} = 1$$

$$\Rightarrow (u')^2 = \left(1 - \frac{C^2}{u^2}\right) \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (u')^2 &= \frac{u^2 - C^2}{2u^2} \\ \Rightarrow u' &= \frac{1}{u} \sqrt{\frac{u^2 - C^2}{2}}.\end{aligned}$$

Dividindo v' por u' chegamos a uma integral que caracteriza as geodésicas do cone,

$$\frac{dv}{du} = \frac{v'}{u'} = \frac{C}{u^2} \cdot \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{u^2 - C^2}} = \frac{C\sqrt{2}}{u\sqrt{u^2 - C^2}} \Rightarrow v' = \frac{C\sqrt{2}}{u\sqrt{u^2 - C^2}} u',$$

integrando

$$v' = \frac{C\sqrt{2}}{u\sqrt{u^2 - C^2}} u',$$

obtemos

$$v = C\sqrt{2} \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - C^2}},$$

donde concluimos

$$v = \sqrt{2} \sec^{-1}\left(\frac{u}{C}\right) + k$$

logo, resolvendo em relação a u , temos

$$u = C \sec\left(\frac{v}{\sqrt{2}} + K\right).$$

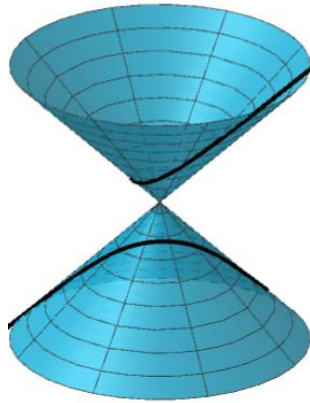
Ao passarmos da variável t para a variável v , não podemos assegurar que $\alpha(v)$ esteja parametrizada pelo comprimento de arco, logo passamos a ter uma pré-geodésica, que são curvas onde reparametrizadas se tornam geodésicas. Portanto, a equação das pré-geodésicas do cone é

$$\alpha(v) = X(u(v)) = \left(C \sec\left(\frac{v}{\sqrt{2}} + K\right) \cos v, C \sec\left(\frac{v}{\sqrt{2}} + K\right) \sen v, C \sec\left(\frac{v}{\sqrt{2}} + K\right) \right).$$

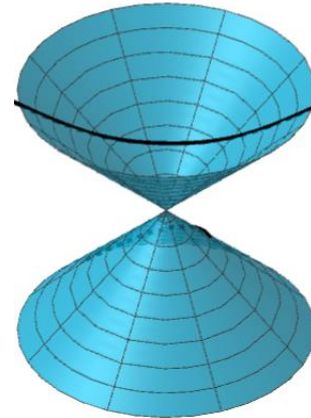
Fazendo $C = 1$ e $K = 0$, obtemos uma pré-geodésica

$$\alpha(v) = \left(\sec\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) \cos v, \sec\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) \sen v, \sec\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) \right).$$

Figura 3.4 – Pré-geodésica do cone ($C = 1$ e $K = 0$) **Figura 3.5** – Pré-geodésica do cone ($C > 0$ e $K < 0$)



Fonte: Autora (2022).



Fonte: Autora (2022).

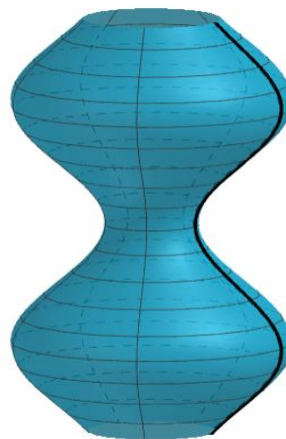
3.2 GEODÉSICAS EM SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Iremos nesta seção aplicarmos o sistema de equações (3.2) para analisarmos localmente as geodésicas no caso em que uma superfície S é uma superfície de revolução. Para isso, seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície de revolução obtida ao girarmos uma curva regular α do plano xz ao redor do eixo z . Com parametrização $x = f(u) \cos v$, $y = f(u) \sin v$ e $z = g(u)$, ou seja,

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

sendo v o ângulo de rotação em torno do eixo z e $f(u) > 0$.

Figura 3.6 – Superfície de revolução



Fonte: Autora (2022).

Dessa forma, calculando os coeficientes da primeira forma fundamental, temos que de $X_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u))$ e $X_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$ obtemos

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = f'(u)^2 \cos^2 v + f'(u)^2 \sin^2 v + g'(u)^2 = f'(u)^2 + g'(u)^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -f'(u) f(u) \sin v \cos v + f'(u) f(u) \cos v \sin v = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = f(u)^2 \operatorname{sen}^2 v + f(u)^2 \operatorname{cos}^2 v = f(u)^2.$$

Com isso, podemos determinar os *Símbolos de Christoffel* a partir das seguintes derivadas dos coeficientes da primeira forma fundamental,

$$E_u = 2(f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)), \quad E_v = 0, \quad F_u = F_v = 0, \quad G_u = 2f(u)f'(u) \quad e \quad G_v = 0.$$

Daí, pelas expressões da Equação (2.8) temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}, & \Gamma_{11}^2 &= 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{ff'}{f^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}, & \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

No qual, $f' = \frac{df}{du}$ e $g' = \frac{dg}{du}$. Temos então, substituindo nas equações de (3.2), as geodésicas de uma superfície de revolução

$$u'' + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} (u')^2 - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} (v')^2 = 0 \quad (3.9)$$

$$v'' + 2\frac{ff'}{f^2} u'v' = 0 \quad (3.10)$$

onde $u' = \frac{du}{dt}$ e $v' = \frac{dv}{dt}$. A partir deste sistema de equações podemos inferir algumas conclusões.

Proposição 3.3. *Os meridianos $u = u(s)$ e $v = \text{const.}$, parametrizados pelo comprimento de arco s são geodésicas.*

Demonstração. Desde que v é constante a Equação (3.10) é satisfeita. A primeira equação fica

$$u'' + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} (u')^2 = 0. \quad (3.11)$$

Como o meridiano $\alpha(s) = X(u(s), v_0) = (f(u(s))\operatorname{cos}v_0, f(u(s))\operatorname{sen}v_0, g(u(s)))$, onde $u = u(s)$, está parametrizado pelo comprimento de arco, temos que $|\alpha'(s)| = 1$, assim

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (f'(u)u'(s)\operatorname{cos}v_0, f'(u)u'(s)\operatorname{sen}v_0, g'(u)u'(s)) \\ |\alpha'(s)| &= \sqrt{f'(u)^2(u'(s))^2 \operatorname{cos}^2 v_0 + f'(u)^2(u'(s))^2 \operatorname{sen}^2 v_0 + g'(u)^2(u'(s))^2} \\ 1 &= \sqrt{f'(u)^2(u'(s))^2 [\operatorname{cos}^2 v_0 + \operatorname{sen}^2 v_0] + g'(u)^2(u'(s))^2} \end{aligned}$$

$$1 = \sqrt{f'(u)^2(u'(s))^2 + g'(u)^2(u'(s))^2}, \quad (3.12)$$

logo, elevando (3.12) ao quadrado em ambos os lados da igualdade, obtemos a equação

$$1 = f'(u)^2(u'(s))^2 + g'(u)^2(u'(s))^2.$$

Daí, concluímos que

$$(u'(s))^2 = \frac{1}{f'(u)^2 + g'(u)^2}, \quad (3.13)$$

derivando esta última igualdade, temos

$$\begin{aligned} 2u'(s)u''(s) &= \frac{-[2f'(u)f''(u)u'(s) + 2g'(u)g''(u)u'(s)]}{[(f'(u))^2 + (g'(u))^2]^2} \\ 2u'(s)u''(s) &= -2 \frac{[f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)]u'(s)}{[(f'(u))^2 + (g'(u))^2]^2} \\ u'(s)u''(s) &= \frac{-[f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)]u'(s)}{[(f'(u))^2 + (g'(u))^2][(f'(u))^2 + (g'(u))^2]} \\ u'(s)u''(s) &= \frac{-[f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)]u'(s)}{[(f'(u))^2 + (g'(u))^2]} \cdot \frac{1}{[(f'(u))^2 + (g'(u))^2]} \end{aligned}$$

como $(u')^2 = \frac{1}{f'(u)^2 + g'(u)^2}$, tem-se

$$u'(s)u''(s) = \frac{-[f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)](u'(s))^3}{[(f'(u))^2 + (g'(u))^2]}$$

e desde que $u'(s) \neq 0$ (Equação (3.13)) temos

$$u''(s) = -\frac{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} (u'(s))^2,$$

que corresponde a Equação (3.11). Isto mostra que, de fato, os meridianos são geodésicas. ■

Proposição 3.4. *Os paralelos $u = \text{const.}$ e $v = v(s)$ parametrizados pelo comprimento de arco s são geodésicas se, e somente se, $f'(u) = 0$.*

Demonstração. De fato, sendo $u = \text{const.}$ e $v = v(s)$, as equações (3.9) e (3.10) ficam sendo

$$\begin{aligned} -\frac{f(u)f'(u)}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} (v'(s))^2 &= 0 \\ v'' &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Temos que,

$$\alpha(s) = X(u, v(s)) = (f(u) \cos(v(s)), f(u) \sen(v(s)), g(u)),$$

está parametrizado pelo comprimento de arco, assim $|\alpha'(s)| = 1$, então

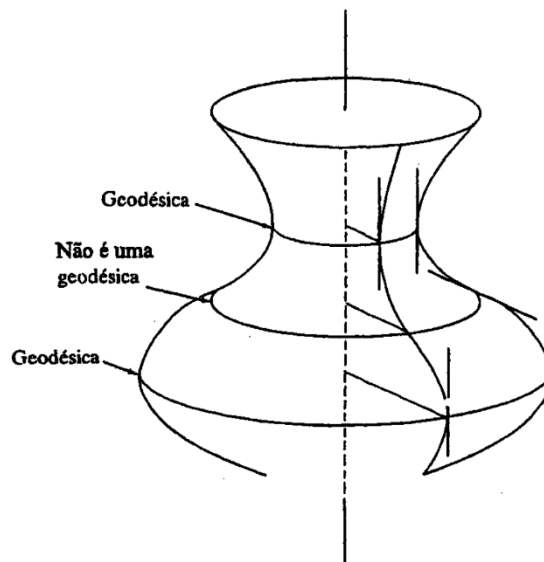
$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= (-f(u) v'(s) \operatorname{sen}(v(s)), f(u) v'(s) \operatorname{cos}(v(s)), 0), \\ |\alpha'(s)| &= \sqrt{f(u)^2 (v'(s))^2 \operatorname{sen}^2(v(s)) + f(u)^2 (v'(s))^2 \operatorname{cos}^2(v(s))} \\ 1 &= \sqrt{f(u)^2 (v'(s))^2 [\operatorname{sen}^2(v(s)) + \operatorname{cos}^2(v(s))]} = f(u) \cdot v'(s).\end{aligned}\quad (3.15)$$

Desse modo, para que o paralelo $v = v(s)$, $u = \text{const.}$ sejam uma geodésica é necessário que $v'(s) \neq 0$. Além disso, $f(u) > 0$ e ainda $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 \neq 0$, então para que a primeira das equações em (3.14) seja satisfeita deve-se ter $f'(u) = 0$.

Agora se $f'(u) = 0$, então a primeira equação em (3.14) é satisfeita. Note que pela Equação (3.15), temos que $v'(s)$ é constante, portanto a segunda derivada é nula, satisfazendo a segunda equação em (3.14), no qual satisfaz as equações da geodésicas. ■

Uma consequência desta proposição é que uma condição necessária para que um paralelo de uma superfície de revolução seja uma geodésica é que tal paralelo seja gerado pela rotação de um ponto da curva geratriz onde a reta tangente é paralela ao eixo de revolução. Assim, se um paralelo é uma geodésica, então a derivada covariante do vetor tangente ao paralelo é nula, ou seja, o vetor aceleração do paralelo é paralelo ao vetor normal à superfície. Portanto, um paralelo parametrizado pelo comprimento de arco em uma superfície de revolução é uma geodésica se $f'(u) = 0$.

Figura 3.7 – Paralelos geodésicos e não geodésicos



Fonte: Carmo (2014).

Para casos em que $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ for uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, porém não sendo nem um meridiano e nem um paralelo da superfície, precisamos analisar a Equação (3.9):

$$v'' + 2 \frac{ff'}{f^2} u'v' = 0,$$

essa equação pode ser escrita como

$$(f(u)^2 v')' = f(u)^2 v'' + 2 f(u) f'(u) u' v' = 0.$$

Logo

$$f(u)^2 v' = \text{const.} = c, \quad (3.16)$$

com $c \neq 0$, pois caso contrário, $v'(s) = 0$, logo $v(s) = \text{const.}$, isto é, a geodésica seria um meridiano. Como $|\alpha'(s)| = 1$, e $u = u(s)$ e $v = v(s)$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \\ \Rightarrow \alpha'(s) &= (f'(u)u' \cos v - f(u)v' \sin v, f'(u)u' \sin v + f(u)v' \cos v, g'(u)u') \\ \sqrt{(f'(u)u' \cos v - f(u)v' \sin v)^2 + (f'(u)u' \sin v + f(u)v' \cos v)^2 + (g'(u)u')^2} &= 1 \\ \sqrt{(f'(u))^2 [\cos^2 v + \sin^2 v] (u')^2 + f^2(u) [\sin^2 v + \cos^2 v] (v')^2 + (g'(u))^2 (u')^2} &= 1 \\ \sqrt{(f'(u))^2 (u')^2 + f(u)^2 (v')^2 + (g'(u))^2 (u')^2} &= 1, \end{aligned}$$

elevando ao quadrado em ambos os lados da última igualdade, temos

$$(u')^2 \left[(f'(u))^2 + (g'(u))^2 \right] + f(u)^2 (v')^2 = 1. \quad (3.17)$$

Utilizando-se do fato que $f(u)^2 v' = c$, temos

$$(v')^2 = \frac{c^2}{f(u)^4}, \quad (3.18)$$

usando (3.16) e (3.18) na Equação (3.17), obtemos

$$(u')^2 \left[(f'(u))^2 + (g'(u))^2 \right] = -\frac{c^2}{f(u)^2} + 1.$$

Derivando com relação a s

$$\begin{aligned} 2u'u'' \left[(f'(u))^2 + (g'(u))^2 \right] + (u')^2 [2f'(u)f''(u) + 2g'(u)g''(u)] u' \\ = \frac{2f(u)f'(u)c^2}{f(u)^4} u'. \end{aligned}$$

Como $c \neq 0$, pois a geodésica não é um meridiano, temos $v'(s) \neq 0$. Podemos então inverter $v = v(s)$, obtendo $s = s(v)$ e $u = u(s(v))$. Multiplicando a Equação (3.17) por $\left(\frac{ds}{dv}\right)^2$ obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dv}\right)^2 &= \left(\frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dv}\right)^2 [(f'(u))^2 + (g'(u))^2] + f(u)^2 \left(\frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dv}\right)^2 \\ \left(\frac{ds}{dv}\right)^2 &= \left(\frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dv}\right)^2 [(f'(u))^2 + (g'(u))^2] + f(u)^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

e por (3.18) temos $\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \frac{f^4(u)}{c^2}$, onde podemos reescrever a Equação (3.19) da forma

$$\frac{f(u)^4}{c^2} = \left(\frac{du}{dv}\right)^2 [(f'(u))^2 + (g'(u))^2] + f(u)^2, \quad (3.20)$$

multiplicando c^2 em ambos os lados da Equação (3.20), temos como resultado

$$\begin{aligned} c^2 \cdot \frac{f(u)^4}{c^2} &= \left(\frac{du}{dv}\right)^2 [(f'(u))^2 + (g'(u))^2] c^2 + f(u)^2 c^2 \\ f(u)^4 &= f(u)^2 c^2 + c^2 [(f'(u))^2 + (g'(u))^2] \left(\frac{du}{dv}\right)^2 \\ \frac{f(u)^4}{f(u)^2} &= \frac{f(u)^2 c^2}{f(u)^2} + \frac{c^2 [(f'(u))^2 + (g'(u))^2]}{f(u)^2} \left(\frac{du}{dv}\right)^2 \\ f(u)^2 &= c^2 + \frac{c^2 [(f'(u))^2 + (g'(u))^2]}{f(u)^2} \left(\frac{du}{dv}\right)^2 \\ f(u)^2 - c^2 &= \frac{c^2}{f(u)^2} [(f'(u))^2 + (g'(u))^2] \left(\frac{du}{dv}\right)^2 \\ \frac{(f(u)^2 - c^2)f(u)^2}{c^2} &= [(f'(u))^2 + (g'(u))^2] \left(\frac{du}{dv}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{(f(u)^2 - c^2)f(u)^2}{c^2 [(f'(u))^2 + (g'(u))^2]}} &= \frac{du}{dv} \\ \frac{f(u)}{c} \sqrt{\frac{f(u)^2 - c^2}{[(f'(u))^2 + (g'(u))^2]}} &= \frac{du}{dv}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{f(u)} \sqrt{\frac{[(f'(u))^2 + (g'(u))^2]}{(f(u))^2 - c^2}}. \quad (3.21)$$

Daí, concluímos por integração que:

$$\int \frac{dv}{du} du = \int \frac{c}{f(u)} \sqrt{\frac{[(f'(u))^2 + (g'(u))^2]}{(f(u))^2 - c^2}} du$$

$$v(u) = c \int \frac{1}{f(u)} \sqrt{\frac{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}{f(u)^2 - c^2}} du + \text{const.} \quad (3.22)$$

que é a equação de um segmento de geodésica de uma superfície de revolução que não é nem um paralelo nem um meridiano.

Exemplo 3.4. As geodésicas do cilindro parametrizado por $X(u, v) = (a \cos v, a \sin v, u)$, com $u, v \in \mathbb{R}$.

As funções são $f(u) = a$ e $g(u) = u$. Pela Proposição 3.4, temos que todos os paralelos do cilindro são geodésicas, já que $f'(u) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 3.3 todos os meridianos são geodésicas. Temos ainda que $g'(u) = 1$, desse modo podemos verificar as demais geodésicas utilizando a Equação (3.21)

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{0^2 + 1}{a^2 - c^2}} = \frac{c}{a\sqrt{a^2 - c^2}}$$

e pela Equação (3.22) temos

$$v(u) = \int \frac{c}{a\sqrt{a^2 - c^2}} du,$$

logo,

$$v(u) = \frac{cu}{a\sqrt{a^2 - c^2}} + k.$$

Assim, fazendo $\frac{c}{a\sqrt{a^2 - c^2}} = \delta$ concluímos que $v(u) = \delta u + k$, portanto,

$$\alpha(u) = (a \cos(\delta u + k), a \sin(\delta u + k), u).$$

Portanto as curvas geodésicas são hélices.

Porém, nem sempre é possível encontrar as geodésicas pela fórmula analítica (3.22), pois iremos nos deparar, com exemplos a seguir, em que o uso da expressão (3.22) geralmente nos leva a uma integral de difícil solução.

Exemplo 3.5. As geodésicas do toro parametrizado por

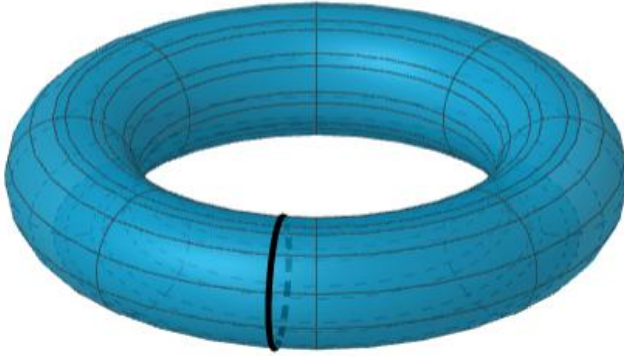
$$X(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u),$$

com $u, v \in \mathbb{R}$.

Pela Proposição 3.3 todos os meridianos são geodésicas. Verificando os paralelos, temos que $f(u) = a + r \cos u$, logo $f'(u) = -r \sin u$. Perceba que os paralelos do toro irão ser geodésicas, isto é, satisfazer $f'(u) = -r \sin u = 0$, quando $u = 0$ e $u = \pi$. Dessa forma, quando $u = 0$, teremos

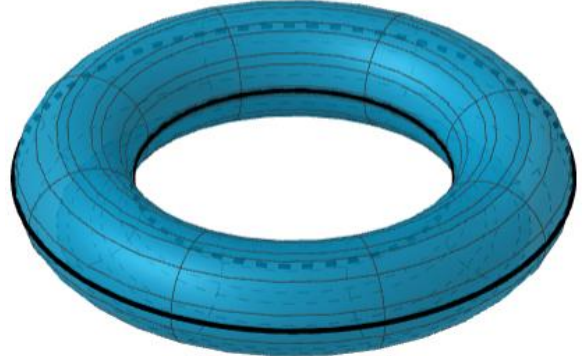
$\alpha = ((a + r \cos 0) \cos v, (a + r \cos 0) \sin v, r \sin 0) = ((a + r) \cos v, (a + r) \sin v, 0)$, assim, α corresponde a circunferência exterior do toro. Quando $u = \pi$, teremos $\alpha = ((a + r \cos \pi) \cos v, (a + r \cos \pi) \sin v, r \sin \pi) = ((a - r) \cos v, (a - r) \sin v, 0)$, que corresponde a circunferência interior do toro. Contudo, podemos concluir que existem dois paralelos que são geodésicas.

Figura 3.8 – Geodésicas no toro (meridiano)



Fonte: Autora (2022).

Figura 3.9 – Geodésicas no toro (paralelos)



Fonte: Autora (2022).

Vejam as geodésicas que não são meridianos nem paralelos, para isso, temos $g(u) = r \sin u$, assim $g'(u) = r \cos u$, pela Equação (3.21) temos

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{a + r \cos u} \sqrt{\frac{r^2(\sin^2 u + \cos^2 u)}{(a + r \cos u)^2 - c^2}}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{a + r \cos u} \sqrt{\frac{r^2}{(a + r \cos u)^2 - c^2}}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{cr}{a + r \cos u \sqrt{(a + r \cos u)^2 - c^2}},$$

pela Equação (3.22), segue

$$v(u) = \int \frac{cr}{a + r \cos u \sqrt{(a + r \cos u)^2 - c^2}} du,$$

como c e r são constantes, obtemos

$$v(u) = cr \int \frac{1}{a + r \cos u \sqrt{(a + r \cos u)^2 - c^2}} du.$$

Perceba que resolver esta integral não é fácil, porém é possível compreender melhor o comportamento desta geodésica no trabalho da Gutierrez (1981), no qual realiza uma análise detalhada de casos possíveis para a curva geodésica do toro.

Exemplo 3.6. As geodésicas da esfera centrada na origem, parametrizada por

$$X(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u),$$

com $r > 0$, $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ e $0 < v < 2\pi$.

Primeiramente, temos as funções $f(u) = r \cos u$ e $g(u) = r \sin u$. Os paralelos que são geodésicas devem satisfazer a condição $f'(u) = -r \sin u = 0$, portanto, isso ocorre quando $u = 0$, assim

$$\alpha = (r \cos(0) \cos v, r \cos(0) \sin v, r \sin(0)) = (r \cos v, r \sin v, 0).$$

Dessa forma, podemos concluir que o único paralelo da esfera que é geodésica é o equador.

Vamos determinar as geodésicas que não são paralelos nem meridianos, sabendo que $g'(u) = r \cos u$:

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{r \cos u} \sqrt{\frac{r^2 \sin^2 u + r^2 \cos^2 u}{r^2 \cos^2 u - c^2}}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{r \cos u} \sqrt{\frac{r^2 (\sin^2 u + \cos^2 u)}{r^2 \cos^2 u - c^2}}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{cr}{r \cos u \sqrt{(r^2 \cos^2 u) - c^2}}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{\cos u \sqrt{(r^2 \cos^2 u) - c^2}}$$

portanto, pela expressão (3.22), temos que

$$v(u) = \int \frac{c}{\cos u \sqrt{(r^2 \cos^2 u) - c^2}} du,$$

como c é constante, segue

$$\begin{aligned} v(u) &= c \int \frac{1}{\cos u \sqrt{(r^2 \cos^2 u) - c^2}} du \\ &= c \int \frac{\sec u}{\sqrt{(r^2 \cos^2 u) - c^2}} du \\ &= c \int \frac{\sec u}{\sqrt{c^2 \left(\frac{r^2}{c^2} \cos^2 u - 1 \right)}} du \\ &= c \int \frac{\sec u}{c \sqrt{\frac{r^2}{c^2} \cos^2 u - 1}} du \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{c} \int \frac{\sec u}{\sqrt{A \cos^2 u - 1}} du,$$

onde $A = \frac{r^2}{c^2}$. Assim,

$$v(u) = \int \frac{\sec u}{\sqrt{A \cos^2 u - 1}} du.$$

Sendo $\theta = \operatorname{tg} u$, temos assim que $d\theta = \sec^2 u du$. Desse modo,

$$du = \frac{d\theta}{\sec^2 u} = \frac{d\theta}{1 + \operatorname{tg}^2 u} = \frac{d\theta}{1 + \theta^2},$$

e ainda,

$$\sec u = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u} = \sqrt{1 + \theta^2}.$$

Analisando o denominador, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{A \cos^2 u - 1} &= \sqrt{A \left(\frac{1}{\sec^2 u} \right) - 1} = \sqrt{A \left(\frac{1}{(\sqrt{1 + \theta^2})^2} \right) - 1} \\ &= \sqrt{A \left(\frac{1}{1 + \theta^2} \right) - 1} = \sqrt{\frac{A - (1 + \theta^2)}{1 + \theta^2}} = \frac{\sqrt{(A - 1) - \theta^2}}{\sqrt{1 + \theta^2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} v(u) &= \int \frac{\frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\sqrt{(A - 1) - \theta^2}} \frac{d\theta}{1 + \theta^2}}{\frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\sqrt{1 + \theta^2}}} = \int \sqrt{1 + \theta^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\sqrt{(A - 1) - \theta^2}} \cdot \frac{d\theta}{1 + \theta^2} \\ &= \int \frac{1 + \theta^2}{\sqrt{(A - 1) - \theta^2}} \frac{d\theta}{1 + \theta^2} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(A - 1) - \theta^2}}. \end{aligned}$$

Tomando $\varphi^2 = A - 1$, concluímos que

$$v(u) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\varphi^2 - \theta^2}} = \operatorname{arcsen} \left(\frac{\theta}{\varphi} \right) = \operatorname{arcsen} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{\varphi} \right).$$

Contudo, uma geodésica na esfera é uma curva da forma

$$\alpha(u) = (r \cos u \cos(v(u)), r \cos u \sin(v(u)), r \sin u),$$

$$\alpha(u) = \left(r \cos u \cos \left[\operatorname{arcsen} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{\varphi} \right) \right], r \cos u \sin \left[\operatorname{arcsen} \left(\frac{\operatorname{tg} u}{\varphi} \right) \right], r \sin u \right)$$

sendo $\varphi = \sqrt{\frac{r^2}{c^2} - 1}$ e usando as seguintes identidades: $\cos(\operatorname{arcsen}(u)) = \sqrt{1 - u^2}$ e

$\sin(\operatorname{arcsen}(u)) = u$, temos:

$$\alpha(u) = \left(r \sqrt{1 - \left[\frac{tg u}{\sqrt{\frac{r^2}{c^2} - 1}} \right]^2} \cos u, r \frac{tg u}{\sqrt{\frac{r^2}{c^2} - 1}} \cos u, r \sen u \right),$$

como

$$\sqrt{1 - \left[\frac{tg u}{\sqrt{\frac{r^2}{c^2} - 1}} \right]^2} = \sqrt{\frac{r^2 - c^2 - c^2 tg^2 u}{r^2 - c^2}}$$

e

$$\frac{tg u}{\sqrt{\frac{r^2}{c^2} - 1}} = \frac{c(tg u)}{\sqrt{r^2 - c^2}} = \frac{c \frac{\sen u}{\cos u}}{\sqrt{r^2 - c^2}},$$

temos

$$\alpha(u) = \left(r \sqrt{\frac{r^2 - c^2(1 + tg^2 u)}{r^2 - c^2}} \cos u, \frac{rc}{\sqrt{r^2 - c^2}} \sen u, r \sen u \right).$$

Considerando

$$x = r \sqrt{\frac{r^2 - c^2(1 + tg^2 u)}{r^2 - c^2}} \cos u$$

$$y = \frac{rc}{\sqrt{r^2 - c^2}} \sen u$$

$$z = r \sen u,$$

sabemos que no espaço um plano é o conjunto dos pontos $\alpha = (x, y, z)$ que satisfazem uma equação do tipo

$$kx + py + qz = w$$

e considerando

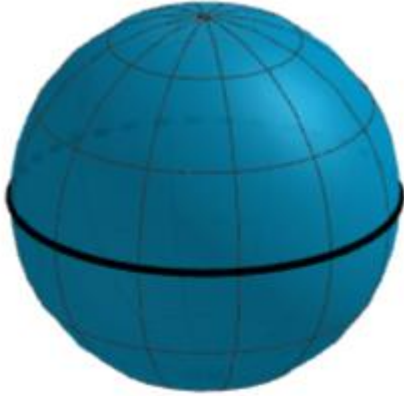
$$k = 0, \quad p = 1, \quad q = -\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \quad \text{e} \quad w = 0,$$

concluimos, com os valores dados, que

$$\frac{rc}{\sqrt{r^2 - c^2}} \sen u - \frac{rc}{\sqrt{r^2 - c^2}} \sen u = 0.$$

Portanto a geodésica procurada é a interseção do plano passando pela origem com a esfera, logo é um círculo máximo da esfera.

Figura 3.10 – Geodésicas na esfera (equador)



Fonte: Autora (2022).

Figura 3.11 – Geodésicas na esfera (nem meridiano nem paralelo)



Fonte: Autora (2022).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho é possível concluir que existe muita coisa ainda para estudar sobre as curvas geodésicas, isto é, encontrar métodos numéricos mais fáceis para se obter as geodésicas nas superfícies de revolução. A nossa proposta foi mostrar algumas geodésicas nas superfícies de revolução se utilizando dos conceitos apresentados em Carmo (2014).

Porém, existem outras maneiras de encontrar as geodésicas, no qual podemos nos utilizar dos conceitos do Cálculo Variacional, que ajuda a encontrar as curvas de comprimento mínimo que unem dois pontos. A curvatura geodésica de uma curva também ajuda a medir o quão longe a curva é de ser uma geodésica, essa curvatura depende apenas da primeira forma fundamental, portanto é um valor intrínseco à superfície.

Além disso, existe o trabalho da Ariana Matos (2016) que apresenta um método diferente de Carmo (2014) para encontrar as curvas geodésicas, assim como o trabalho da María Gutierrez (1981) que apresenta uma solução detalhada do comportamento da curva geodésica do toro. Portanto, os conceitos apresentados neste trabalho baseados nas referências bibliográficas citadas possuem importância para a evolução dos estudos das curvas geodésicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRUXEL, Daniel Argeu. **Um estudo sobre curvas geodésicas**. UFFS, Chapecó, 2018.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

DELGADO, Jorge. FRENSEL, Katia. **Notas de aula: Geometria Diferencial I**. UFF, Rio de Janeiro, 2017.

GUTIERREZ, María Victoria. **Las Geodesicas del toro**. Boletín de Matemáticas, Colômbia, v. 15, n. 3, p. 146-161, 1981.

MATOS, Ariana Cordeiro de Amorim. **Geodésicas: suas equações e algumas aplicações**. Feira de Santana, 2016.

PACHECO, Marcos. **Curvas Especiais em Superfícies Regulares**. UFMG, Belo Horizonte, 2008.

TENENBLAT, Ketí. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2^a ed. São Paulo: Blucher, 2008.