UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANDRÉ FONSECA MIGUEL LUTUMBA

FLUXO DE CALOR NUMA BARRA HOMOGÊNEA

REDENÇÃO
2022

ANDRÉ FONSECA MIGUEL LUTUMBA

FLUXO DE CALOR NUMA BARRA HOMOGÊNEA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciada em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes

REDENÇÃO

2022

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Lutumba, André Fonseca Miguel.

L974f

Fluxo de calor numa barra homogênea / André Fonseca Miguel Lutumba. - Redenção, 2022.
70f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2022.

Orientadora: Profª. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes.

1. Equação de Calor. 2. Fourier, Séries de. 3. Variáveis (Matemática). I. Título

CE/UF/BSCA CDD 621.314

ANDRÉ FONSECA MIGUEL LUTUMBA

FLUXO DE CALOR NUMA BARRA HOMOGÊNEA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 18/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Profª. Dra. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dedico este trabalho aos meus pais Mampasi Vicente e Teresa Miguel, aos meus tios por toda ajuda e a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem a sua bênção nada seria possível. Agradeço por me dar saúde, sabedoria e acima de tudo por me proteger de todas as tempestades da vida.

Agradeço a minha Mãe dona Teresa Miguel, ao meu Pai Mampasi Vicente, aos meus tios André Fonseca e Simão Ngungo, a minha segunda Mãe Fineza Miguel, aos meus irmãos, grato meus cassules e de forma geral a toda minha família que sempre estiveram comigo me incentivando, me apoiando quando mais precisei.

A Profa. Dra. Amanda Angelica Feltrin Nunes, pela excelente orientação, muito obrigado pela sua disponibilidade, por toda paciência que a senhora teve comigo durante os nossos encontros, grato por aceitar conduzir este TCC com toda sua sabedoria, que Deus lhe dê mais anos de vida e lhe proteja sempre.

Aos meus amigos nomeadamente Januário Domingos e Hamilton Nhime, grato amigos por disponibilizarem seus computadores sempre que precisei, graças a vocês este TCC foi escrito. Ao Kongo Lubaki por ser um amigo sempre verdadeiro, me apoiando sempre que precisei, ao António Monteiro, Faria Samuel, Mutumbua Manuel, aos meus amigos do Grupo Toques da Banda, obrigado por partilharem comigo todos os momentos que vivemos juntos, aos meus amigos Júnior Inácio Bongua, Yamba Antónia Mfulu, Mabiala Pedro, Jorge Mateus e, não menos importante, agradeço ao meu sobrinho Fred André por todo apoio, obrigado a todos que direta ou indiretamente me deram o suporte que sempre precisei.

Aos professores participantes da banca examinadora Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares e Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório pelo tempo e pelas valiosas colaborações e sugestões que de alguma forma ou de outra ajudaram bastante para melhorar este trabalho.

RESUMO

A equação do calor é uma Equação Diferencial Parcial de segunda ordem que modela o fluxo de calor numa barra metálica homogênea. No presente trabalho estudamos o fluxo de calor numa barra homogênea finita e infinita, utilizando-se separação de variáveis e Séries de Fourier para o caso da barra finita e Transformada de Fourier bem como a sua inversa para o caso da barra infinita. Em ambos os casos consideramos que a densidade da barra em cada ponto é constante. Para o caso da barra finita analisamos o caso da barra com extremidades mantidas a temperatura igual a zero para todo t, barra com extremidades isoladas, condições de contorno não homogêneas, condições de contorno mistas e uma fonte de calor externa, utilizando-se as séries de Fourier para o caso da barra finita e finalizamos nosso estudo do fluxo de calor analisando o caso da barra infinita, isto é, a equação do calor na reta utilizando-se a Transformada de Fourier e a sua inversa.
Palavras-chave: Equação do Calor. Separação de variáveis e Séries de Fourier. Transformada de Fourier.

ABSTRACT

The heat equation is a second-order Partial Differential Equation that models the heat flow in a homogeneous metal bar. In the present work we studied the heat flow in a finite and infinite homogeneous bar, using separation of variables and Fourier series for the case of the finite bar and Fourier Transform as well as its inverse to the case of the infinite bar. In both cases we consider that the density of the bar at each point is constant. For the case of the finite bar, we analyzed the case of the bar with ends maintained at zero temperature for all t, bar with isolated ends, non-homogeneous contour conditions, mixed contour conditions and an external heat source, using the Fourier series for the finite bar case and finalize our heat flow study by analyzing the case of the infinite bar, that is, the equation of heat in the line using the Fourier Transform and its inverse.

Keywords: Heat Equation. Separation of variables and Fourier series. Fourier Transform.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na Física, Engenharia, Biologia e nas diversas áreas do conhecimento usam-se modelos matemáticos para descrever ou traduzir os fenômenos observados. Problemas tais como o Fluxo de Calor numa barra metálica homogênea, propagação de uma onda sonora ou mecânica, movimento dos fluidos, fluxo da corrente elétrica num condutor elétrico, crescimento populacional, movimento do pêndulo simples, são traduzidos ou descritos usando um modelo matemático para explicar o comportamento dos mesmos ou encontrar uma solução que satisfaça cada problema citado acima.

O presente trabalho de conclusão de curso tem como objetivo geral analisar o processo de fluxo de calor numa barra metálica homogênea e de forma específica avaliar os casos possíveis das condições de contorno bem como demonstrar a solução de cada condição de contorno estudado nesse trabalho usando o método de separação de variáveis, séries de Fourier e a Transformada de Fourier bem como a sua inversa.

O mesmo está dividido em cinco capítulos. O capítulo 1 é a introdução, onde trazemos de forma sintetizada informações gerais sobre o tema principal deste trabalho.

Já o capítulo 2 traz informações sobre conceitos preliminares de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Ainda no mesmo capítulo, fizemos uma classificação das EDOs quanto a ordem e a linearidade sendo feita a mesma classificação para as EDPs. Importa ainda referir que no mesmo capítulo foram estudadas apenas Equações Diferenciais de até segunda ordem pelo simples fato de que a Equação do Calor é uma Equação Diferencial Parcial de segunda ordem, daí a necessidade de não se explorar Equações Diferenciais tanto Ordinárias como Parciais de ordem maior que dois. Ainda, neste capítulo, vimos o principal método resolutivo de uma Equação Diferencial Parcial utilizado neste texto, que é o método de separação de variáveis. Importa ainda salientar que existem outros métodos para se resolver uma EDP, no entanto, neste trabalho usamos apenas o de separação de variáveis.

No que concerne ao capítulo 3, o mesmo tem como objetivo principal falar sobre as Séries de Fourier bem como o Teorema de Convergência da Série de Fourier. Justifica-se pelo fato de que a solução da Equação do Calor é dada por uma Série de Fourier de senos ou de cossenos. Dada a complexidade na demonstração do Teorema de Convergência de Fourier, optamos por não fazer sua demonstração e indicamos os livros onde se pode encontrar a referida demonstração. Ainda neste capítulo, discutimos a questão da Transformada de Fourier e sua inversa, trazendo algumas propriedades de resolução. Justifica-se pelo fato de que no capítulo seguinte traremos uma pequena abordagem da equação do calor para o caso em que a barra é infinita, ou seja, o comprimento da barra é infinito e a solução do referido problema é encontrada via transformada de Fourier e da sua inversa. Ressaltamos que as Transformadas de Fourier que trouxemos neste trabalho são apenas noções básicas sem fazer um estudo profundo delas, pois apenas trouxemos para facilitar nossa comparação entre a solução da Equação do Calor obtida para o caso de uma barra finita e da barra infinita.

Quanto ao capítulo 4, discutimos de forma geral sobre o Fluxo de Calor numa barra metálica homogênea. Fizemos a demonstração da Equação do Calor considerando alguns princípios físicos importantes. Para se chegar a solução desejada será usado o método de separação de variáveis. Serão ainda analisados os possíveis casos de condições de contorno e iremos finalizar o mesmo capítulo analisando o fluxo de calor numa barra metálica homogênea infinita, usando a transformada de Fourier e a sua inversa. Tanto a barra finita quanto a barra infinita, iremos considerar que a sua densidade em cada ponto da barra é constante.

Para finalizar, o capítulo 5 traz a conclusão do presente trabalho de conclusão de curso, onde faremos uma síntese geral do trabalho. Ademais, esperamos que seja um trabalho proveitoso para quem futuramente for usar o mesmo para estudar sobre a Equação do Calor ou ainda sobre o Fluxo de Calor numa barra metálica homogênea finita ou infinita.

2 PRELIMINARES

No presente capítulo veremos alguns conceitos preliminares para a compreensão do que será abordado ao longo deste trabalho tendo como suporte os livros tais como (BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B., 2010), (RAMOS, E. E., 2008), (KISELOV, A.; KRASNOV, M.; MAKARENKO, G., 1984.), dentre outros livros. Conforme será visto ao longo deste texto, a equação do calor é dada por uma Equação Diferencial Parcial e para sua resolução é necessário se ter um conhecimento prévio das Equações Diferenciais Ordinárias, daí a necessidade de se trazer os conceitos de equações diferenciais ordinárias e parciais neste capítulo.

Portanto, definimos uma Equação Diferencial como sendo aquela equação que envolve derivadas de uma função em relação a uma ou várias variáveis independentes.

As equações diferenciais classificam-se quanto ao tipo, ordem e linearidade. Quanto ao tipo, as equações diferenciais podem ser Ordinárias ou Parciais. Trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária ou simplesmente E.D.O, se a função incógnita depende apenas de uma variável independente. Se a função incógnita depende de duas ou mais variáveis independentes, a equação diferencial em causa, é uma Equação Diferencial Parcial ou simplesmente E.D.P.

A seguir temos alguns exemplos de equações diferenciais.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \tag{1}$$

$$y' + 3xy = 4 \tag{2}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5}$$

A equação (1), (2) e (3) são exemplos de Equações Diferenciais Ordinárias, sendo a (1) conhecida como a Lei de Resfriamento de Newton enquanto que as equações (4) e (5) representam exemplos de Equações Diferenciais Parciais.

Relativamente à ordem, ela é dada pela maior derivada que aparece na equação diferencial. Desta forma, podemos ter equações diferenciais de 1ª, 2ª, 3ª ordem e assim sucessivamente. Quanto a ordem, as equações (1) e (2) são exemplos de EDOs de primeira ordem e a equação (3) é uma EDO de segunda ordem, enquanto que as equações (4) e (5) são exemplos de EDPs de segunda ordem.

Quanto a linearidade, uma equação diferencial pode ser linear ou não linear.

Diz-se que uma equação diferencial é linear se a função incógnita e suas respectivas derivadas se relacionam de forma linear na respectiva equação, isto é, a função incógnita e suas derivadas aparecem em uma soma na qual cada parcela é um produto de alguma derivada da função incógnita com uma função que não depende da função incógnita.

Os exemplos (1) a (5), representam equações diferenciais lineares, enquanto que as equações a seguir são exemplos de equações diferenciais não lineares.

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = 0 \tag{6}$$

$$uu_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{7}$$

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Uma equação diferencial ordinária, é uma equação escrita na forma

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0,$$

sendo x a variável independente, y a variável dependente, $y', y'', ..., y^n$ representam respectivamente derivadas de primeira, segunda até ordem n da variável dependente e F é uma função que indica a relação existente entre as variáveis x e y bem como as respectivas derivadas de y. Temos a seguir exemplos de equações diferenciais ordinárias.

$$y' + 3y = 5, \tag{8}$$

$$y' senx = ylny, \tag{9}$$

$$y'' + 2y' + 3y = 0, \tag{10}$$

$$y'' + 2y' + 3y = e^x. \tag{11}$$

As equações diferenciais ordinárias podem ser classificadas quanto a ordem e a linearidade. Quanto a ordem, uma E.D.O pode ser de 1ª, 2ª ordem e assim sucessivamente, pois conforme visto, uma E.D.O é escrita na forma

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0,$$

onde n indica a ordem da derivada.

As equações (9) e (11) representam equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª e 2ª ordem, respectivamente.

Observação 2.1 *Ao longo deste trabalho iremos trabalhar apenas com equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª e 2ª ordem, daí a razão de não trazermos nenhum exemplo de uma E.D.O de ordem superior a dois.*

As equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem representam-se da seguinte maneira

$$F(x, y, y') = 0, \tag{12}$$

onde F indica a relação existente entre as variáveis envolvidas. De (12) tem-se $y' = f(x, y)$.

Existem diversas equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, tais como as Equações Diferenciais Ordinárias de Variável Separável, Exatas, Lineares, Homogêneas, Bernoulli, mas que durante este texto iremos trabalhar com as Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem do tipo Variável Separável e Lineares, pois no capítulo sobre a Equação do Calor ao aplicar-se o método de Separação de variáveis, resultará num sistema de duas equações diferenciais ordinárias, onde uma é linear e a outra é de variável separável.

2.1.1 Soluções das Equações Diferenciais Ordinárias

A solução particular de uma equação diferencial ordinária em um intervalo I, é uma função $y(x)$ definida em I, de modo que as derivadas de ordem até n estão definidas em I e satisfazem a mesma equação no intervalo de definição da função. No entanto, a solução geral de uma equação diferencial ordinária em I, é um conjunto de soluções $y(x)$ em I, de modo que qualquer solução particular pode ser obtida dela desde que se cumpra certas condições iniciais.

Exemplo 2.1 *Considere a seguinte equação diferencial $xy' + y = cosx$, mostre que $y = \dfrac{senx}{x}$ é solução da equação dada.*

Solução: $y = \dfrac{senx}{x}$ é solução de $xy' + y = cosx$ se a igualdade for verdadeira. Note que na equação há a derivada primeira da função $y(x)$, daí que torna necessário calcular esta derivada. Como $y' = \dfrac{xcosx - senx}{x^2}$, substituindo esta expressão na equação, tem-se:

$$x\left(\frac{xcosx - senx}{x^2}\right) + \frac{senx}{x} = cosx$$

$$\frac{xcosx - senx}{x} + \frac{senx}{x} = cosx$$

$$\frac{xcosx}{x} - \frac{senx}{x} + \frac{senx}{x} = cosx$$

$$cosx = cosx.$$

De fato, $y = \dfrac{senx}{x}$ é solução da equação dada, pois a igualdade é verdadeira.

■

2.1.2 Equações Diferenciais de Variável Separável

Toda equação diferencial ordinária de 1ª ordem da forma $\dfrac{dy}{dx} = g(x, y)$ e que pode ser expressa na forma $M(x)dx + N(y)dy = 0$, onde M é uma função que depende de x e N é uma função que depende de y, é chamada de equação diferencial ordinária de variável separável, cuja a solução é obtida integrando $M(x)$ e $N(y)$ nas respectivas variáveis.

Exemplo 2.2 *Resolva a seguinte equação* $e^{y'} = x$.

Solução: Para a resolução desta equação, importa antes aplicar logaritmo natural em ambos os membros da E.D.O, isto é, $lne^{y'} = lnx$, por propriedades de logaritmos tem-se $y'lne = lnx$, o que implica que $y' = lnx$. Esta última expressão, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dx} = lnx$$

ou ainda,

$$dy = lnxdx,$$

o que caracteriza uma E.D.O de variável separável, pois como se pode notar o membro esquerdo da igualdade depende apenas de y, enquanto que o membro direito dela depende de x. Integrando em ambos membros da igualdade em relação a y e x, respectivamente, tem-se:

$$\int dy = \int lnxdx$$

$$y = xlnx - x + c$$

ou ainda,

$$y = x(lnx - 1) + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

■

O exemplo apresentado acima, demonstra que a constante c pode assumir qualquer valor real, daí que tem-se um conjunto de funções que satisfazem a respectiva equação. Para se obter uma solução particular a partir da solução geral encontrada ao resolver uma determinada E.D.O, é necessário que se tenha uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, onde x_0 e y_0 são valores dados que permitem determinar um valor específico da constante.

A este tipo de problema, chama-se Problema de Valor Inicial ou simplesmente P.V.I.

Exemplo 2.3 *Encontre a solução particular da seguinte equação diferencial de acordo a condição inicial dada* $ye^{y^2}y' = x - 1$, $y(2) = 0$.

Solução: Para separar as variáveis da equação dada, pode-se reescrever a mesma da seguinte maneira $ye^{y^2}dy = (x-1)dx$, que ao integrar em ambos os membros tem-se:

$$\begin{aligned}
\int ye^{y^2}dy &= \int (x-1)dx \\
\frac{1}{2}\int 2ye^{y^2}dy &= \int (x-1)dx \\
\frac{1}{2}e^{y^2} &= \frac{x^2}{2} - x + k \\
e^{y^2} &= x^2 - 2x + 2k \\
e^{y^2} &= x^2 - 2x + c,
\end{aligned}$$

onde $c = 2k$. Para determinar a constante, faz-se a seguinte substituição $x = 2$ e $y = 0$ em $e^{y^2} = x^2 - 2x + c$, isto é, $e^0 = 4 - 4 + c$, ou seja, $c = 1$. Portanto a solução desejada é

$$e^{y^2} = x^2 - 2x + 1.$$

■

2.1.3 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Toda equação diferencial ordinária de 1ª ordem da forma

$$a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = f(x),$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são funções que dependem somente de x e $a(x) \neq 0$ se chama equação diferencial linear se tivermos:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

sendo $p(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$ e $q(x) = \dfrac{f(x)}{a(x)}$.

Observe que na equação $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, se $q(x) = 0$ resulta numa equação diferencial do tipo $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ que é uma equação diferencial linear homogênea ou de variável separável. Para o caso em que $q(x) \neq 0$, a equação $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ é chamada de Equação Diferencial Linear não homogênea.

Para resolver uma equação diferencial linear de 1ª ordem, é necessário que se calcule uma função que depende de x e é chamada de fator de integração. Esta função calculada é multiplicada nos dois membros da equação diferencial linear a ser resolvida, transformando essa equação numa outra equação onde o primeiro membro da nova equação é a derivada do produto entre a função incógnita e o fator de integração calculado. Para calcular esse fator de integração usa-se a seguinte fórmula: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. A demonstração para se chegar a esta fórmula pode ser encontrada em livros como (RAMOS, Eduardo Espinoza, 2004), (KREYSZIG, Erwin, 1973), dentre outros livros.

Exemplo 2.4 *Resolva a seguinte E.D.O linear homogênea* $\dfrac{dy}{dx} = -y.$

Solução: Note que a E.D.O dada pode ser reescrita da seguinte maneira $\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ o que caracteriza uma equação diferencial lineal homogênea pois $q(x) = 0$.

Como $p(x) = 1$, então o fator de integração é dado por $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$. Multiplicando este fator de integração em ambos membros de $\dfrac{dy}{dx} + y = 0$,
tem-se

$$e^x \frac{dy}{dx} + ye^x = 0 \cdot e^x.$$

Não é difícil perceber que o primeiro membro desta última igualdade é $\dfrac{d}{dx}(y \cdot e^x)$ e que o segundo membro é igual a zero, ou seja, $\dfrac{d}{dx}(y \cdot e^x) = 0$.

Integrando em ambos os membros de $\dfrac{d}{dx}(y \cdot e^x) = 0$, tem-se $y \cdot e^x = c$, ou seja, $y = c \cdot e^{-x}$ é a solução desejada.

■

Exemplo 2.5 *Resolver a seguinte equação diferencial linear não homogênea*

$$y' - e^x y = \frac{1}{x^2} sen\frac{1}{x} - e^x cos\frac{1}{x}.$$

Solução: Dado que a EDO é linear não homogênea, tem-se que $p(x) = -e^x$ e
$q(x) = \dfrac{1}{x^2} sen\dfrac{1}{x} - e^x cos\dfrac{1}{x}$.

O fator de integração é calculado da seguinte maneira $\mu(x) = e^{\int -e^x dx}$, portanto $\mu(x) = e^{-e^x}$. Ao multiplicar este fator de integração em ambos membros de

$$y' - e^x y = \frac{1}{x^2} sen\frac{1}{x} - e^x cos\frac{1}{x},$$

tem-se então

$$e^{-e^x} y' - e^{-e^x} e^x y = e^{-e^x} \frac{1}{x^2} sen\frac{1}{x} - e^{-e^x} e^x cos\frac{1}{x}.$$

O primeiro membro desta última expressão é a derivada da função incógnita y e o fator de integração calculado anteriormente, isto é, $\dfrac{d}{dx}(y \cdot e^{-e^x})$.

Daí que $\frac{d}{dx}(y \cdot e^{-e^x}) = e^{-e^x}\frac{1}{x^2}sen\frac{1}{x} - e^{-e^x}e^x cos\frac{1}{x}$. Integrando em ambos membros em relação a x, tem-se então

$$\int \frac{d}{dx}(y \cdot e^{-e^x})dx = \int \Big(e^{-e^x}\frac{1}{x^2}sen\frac{1}{x} - e^{-e^x}e^x cos\frac{1}{x}\Big)dx$$

$$y \cdot e^{-e^x} = \int e^{-e^x}\frac{1}{x^2}sen\frac{1}{x}dx - \int e^{-e^x}e^x cos\frac{1}{x}dx$$

Note então que não é necessário resolver as duas integrais do membro direito simultaneamente, pois resolvendo uma delas aplicando o método de integração por partes, tem-se uma expressão simétrica a outra integral. Optamos por aplicar o método de integração por partes na primeira integral, de onde teremos que $u = e^{-e^x}$, $du = -e^{-e^x}e^x dx$ e $dv = \frac{1}{x^2}sen\frac{1}{x}dx$. Integrando esta última expressão considerando a seguinte substituição $t = \frac{1}{x}$ e $dt = -\frac{1}{x^2}dx$, tem-se então $v = cos\frac{1}{x}$. Portanto,

$$y \cdot e^{-e^x} = e^{-e^x} \cdot cos\frac{1}{x} + \int e^{-e^x}e^x cos\frac{1}{x}dx + c - \int e^{-e^x}e^x cos\frac{1}{x}dx$$

$$y \cdot e^{-e^x} = e^{-e^x} \cdot cos\frac{1}{x} + c,$$

de onde se tem que

$$y = cos\frac{1}{x} + c \cdot e^{e^x}.$$

■

Exemplo 2.6 *Achar solução particular da Equação Diferencial com a condição inicial dada*

$$y' - e^x y = \frac{1}{x^2}sen\frac{1}{x} - e^x cos\frac{1}{x}, \qquad y \to 2 \ \ se \ \ x \to -\infty \qquad .$$

Solução: Do exemplo anterior, tem-se que a solução geral da equação é $y = cos\frac{1}{x} + c \cdot e^{e^x}$. Quando $x \to -\infty$, tem-se então que $\frac{1}{x} \to 0$ e também $e^x \to 0$, deste modo, teremos $y = cos(0) + c$, lembando que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ e $e^0 = 1$. Daí tem-se então que $y = 1 + c$, como $y \to 2$ quando $x \to -\infty$, então $1 + c = 2$, isto é, $c = 1$. Portanto, a solução particular da equação é

$$y = cos\frac{1}{x} + e^{e^x}.$$

■

As equações diferenciais ordinárias têm diversas aplicações em Física, Engenharia e uma dessas aplicações é a Lei de Resfriamento de Newton que diz que a taxa de variação da temperatura T de um certo corpo em qualquer instante t, é proporcional à diferença de temperatura deste corpo e a temperatura do meio ambiente ou que o rodeia.

Matematicamente, esta lei é expressa da seguinte maneira: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A)$, onde k é a constante de proporcionalidade, T é a temperatura do corpo em qualquer instante t e T_A é a temperatura do meio ambiente e é constante. O sinal negativo em frente da constante de proporcionalidade se explica pelo simples fato de que o fluxo de calor flui da fonte quente para a fonte fria. Deste modo, se $T > T_A$, tem-se então que $\frac{dT}{dt}$ decresce, ou seja, a temperatura do corpo com o passar do tempo vai diminuindo ou ainda que o corpo está se resfriando e se $T < T_A$ tem-se que $\frac{dT}{dt}$ cresce, o que implica que com o passar do tempo, a temperatura do corpo vai aumentando, ou seja, o corpo está se aquecendo.

Deve-se ter em conta que o referido modelo foi considerado por Newton estudando o caso de uma bola metálica aquecida daí a razão de se chamar Lei de Resfriamento de Newton. Não é difícil de perceber que este modelo não se preocupa em determinar a temperatura em um determinado ponto da bola, mas sim, a temperatura do corpo em um certo instante ou determinar o instante em que o corpo atinge por exemplo a temperatura de $10°C$. Assim sendo, se quisermos saber por exemplo a temperatura no interior de uma barra metálica iríamos precisar de duas informações possíveis, isto é, precisaríamos saber a posição x e o instante t. O modelo que permite determinar a temperatura no interior da barra metálica é dado por $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Esta equação é conhecida como Equação do Calor.

A equação $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A)$ pode ser vista como linear em T ou de variável separável. Conhecendo a temperatura do corpo no instante $t = 0$, isto é, $T(0) = T_0$ pode se determinar a função que permite determinar a temperatura do corpo em qualquer instante. Assim sendo, a mesma pode ser escrita da seguinte maneira:
$\frac{dT}{dt} + kT = kT_A$ de onde se tem que $p(t) = k$ e, portanto, $\mu(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$ é o fator de integração. Multiplicando este fator de integração em ambos membros da equação anterior, nota-se que o primeiro membro dela é exatamente a derivada do produto entre a função incógnita T e o fator integrante calculado, isto é:

$$\frac{d}{dt}(T \cdot e^{kt}) = e^{kt} \cdot kT_A.$$

Integrando em ambos os membros em relação a t, tem-se

$$T \cdot e^{kt} = T_A e^{kt} + c$$

ou ainda, $T(t) = T_A + ce^{-kt}$. Substituindo $t = 0$ na equação, tem-se então que

$T(0) = T_A + c$. Como $T(0) = T_0$, então $T_0 - T_A = c$. Portanto,

$$T(t) = T_A + (T_0 - T_A)e^{-kt}$$

é a função que permite determinar a temperatura do corpo em qualquer instante.

Exemplo 2.7 *Um termômetro que lê $70°F$ é colocado em um forno pré-aquecido em temperatura constante. Através de uma janela de vidro localizada na porta do forno, um observador registra que o termômetro marca $110°F$ após $\dfrac{1}{2}$ minuto e $145°F$ após um minuto. Qual é a temperatura do forno?*

Solução: Note que a questão fornece as seguintes informações:

$$T_0 = 70°F$$
$$T\left(\frac{1}{2}min\right) = 110°F$$
$$T(1min) = 145°F.$$

Percebe-se então que o desejado na questão é a determinação da temperatura no interior do forno, ou seja, T_A que é a temperatura do meio ambiente.

Como $T(t) = T_A + (T_0 - T_A)e^{-kt}$ é a equação que permite determinar a temperatura do corpo em qualquer instante, substituindo nela os dados fornecidos na questão, tem-se:

$$T_A + (70 - T_A)e^{-\frac{k}{2}} = 110 \qquad \text{(I)} \qquad \text{e} \qquad T_A + (70 - T_A)e^{-k} = 145 \qquad \text{(II)}.$$

De (I) tem-se

$$T_A = \frac{110 - 70e^{-\frac{k}{2}}}{1 - e^{-\frac{k}{2}}} \qquad (III)$$

e de (II) tem-se

$$T_A = \frac{145 - 70e^{-k}}{1 - e^{-k}} \qquad (IV)$$

Comparando (III) e (IV) tem-se: $\dfrac{110 - 70e^{-\frac{k}{2}}}{1 - e^{-\frac{k}{2}}} = \dfrac{145 - 70e^{-k}}{1 - e^{-k}}$, que ao desenvolver esta expressão, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
(110 - 70e^{-\frac{k}{2}}) \cdot (1 - e^{-k}) &= (145 - 70e^{-k}) \cdot (1 - e^{-\frac{k}{2}}), \\
110 - 110e^{-k} - 70e^{-\frac{k}{2}} + 70e^{-\frac{k}{2}-k} &= 145 - 145e^{-\frac{k}{2}} - 70e^{-k} + 70e^{-\frac{k}{2}-k}, \\
145e^{-\frac{k}{2}} - 70e^{-\frac{k}{2}} - 110e^{-k} + 70e^{-k} &= 145 - 110, \\
75e^{-\frac{k}{2}} - 40e^{-k} &= 35,
\end{aligned}$$

pelo que ao dividir por (-5) em ambos os membros desta última expressão, tem-se então $8e^{-k} - 15e^{-\frac{k}{2}} + 7 = 0$, ou ainda,

$$8e^{-k} - 15\sqrt{e^{-k}} + 7 = 0.$$

A equação resolve-se supondo então que $\sqrt{e^{-k}} = z$, isto é, $e^{-k} = z^2$. Dessa suposição resulta na seguinte equação $8z^2 - 15z + 7 = 0$, cuja as raízes são $z_1 = 1$ e $z_2 = \dfrac{7}{8}$. Para $z_1 = 1$ tem-se então que $e^{-k} = 1$, de onde se tem que $k = 0$. Mas se $k = 0$ as equações (III) e (IV) não são satisfeitas, logo para que ambas tenham solução o k deve ser positivo ou seja, maior que zero. Para o caso em que $z_2 = \dfrac{7}{8}$, tem-se que $e^{-k} = \dfrac{49}{64}$, isto é, $k = -ln\left(\dfrac{49}{64}\right)$. Substituindo $k = -ln\left(\dfrac{49}{64}\right)$ em (IV) tem-se

$$T_A = \frac{145 \cdot 64 - 70 \cdot 49}{64 - 49} = \frac{9280 - 3430}{15} = \frac{5850}{15} = 390°F.$$

Portanto, T_A=390°F é a temperatura ambiente, ou seja, é a temperatura no interior do forno.

∎

2.1.4 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem

Tendo em conta o que foi visto nas sessões anteriores, percebe-se que as Equações Diferenciais Ordinárias estão divididas em duas classes distintas, podendo então serem equações diferenciais ordinárias lineares ou equações diferenciais ordinárias não lineares. Importa referir que nesta sessão será apenas abordada a questão das equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem.

As equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem são equações da forma $\dfrac{d^2y}{dx^2} + p(x)\dfrac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$. Assim como as equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem podem ser homogêneas ou não homogêneas, as equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem também podem ser homogêneas ou não homogêneas. Trata-se de uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea se $r(x) = 0$ e é não-homogênea se $r(x) \neq 0$.

As equações diferenciais a seguir são exemplos de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem homogêneas $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 0$, $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2b\dfrac{dx}{dt} + k^2x = 0$, enquanto que $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} - 5y = 5x$ e $y'' - y' + y = x^3 + 6$ são exemplos de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem não-homogêneas.

As funções p e q que aparecem na equação diferencial, são chamadas de coeficientes da respectiva equação diferencial. A solução ou as soluções de uma equação diferencial linear de segunda ordem, define-se tal igual se definiu na subseção 2.1.3. Se as funções p e q são constantes, tem-se então uma equação diferencial linear com coeficientes constantes e se pelo menos uma delas depende de x, tem-se uma equação diferencial linear com coeficientes variáveis. Assim como se pretende apenas abordar a questão das equações diferenciais lineares, também será apenas abordada a questão das equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Sabe-se que uma EDO Linear Homogênea de segunda ordem é da forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Considere a EDO Linear Homogênea $y'' - y = 0$ tendo como soluções $y = e^x$ e $y = e^{-x}$, para todo x real. A partir de $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$ obtém-se uma função da forma $y = Ay_1 + By_2$, sendo A e B constantes arbitrárias. Chama-se a isto de combinação linear de y_1 e y_2. Diante do exposto, tem-se o seguinte teorema importantíssimo chamado Princípio de Superposição de Soluções para as equações diferenciais lineares homogêneas:

Teorema 2.1 *Para uma EDO Linear Homogênea de segunda ordem, se y_1 e y_2 são soluções de $y'' + py' + qy = 0$, então uma combinação linear qualquer de y_1 e y_2 ,isto é, $y = Ay_1 + By_2$ também é uma solução da EDO Linear Homogênea, onde A e B são constantes arbitrárias.*

Demonstração: Substituindo $y = Ay_1 + By_2$, $y' = Ay_1' + By_2'$ e $y'' = Ay_1'' + By_2''$ em $y'' + py' + qy = 0$, tem-se: $Ay_1'' + By_2'' + p(Ay_1' + By_2') + q(Ay_1 + By_2) = 0$, ou ainda, $A(y_1'' + py_1' + qy_1) + B(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0$, isto é, $A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0$, ou seja, $0 = 0$, igualdade que se verifica por se supor que y_1 e y_2 são soluções da Equação Diferencial Ordinária Linear Homogênea. ∎

É importante observar que o princípio ou teorema enunciado acima, é válido apenas para Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Homogêneas, isto é, não se aplica para EDO's Lineares não homogêneas tampouco para EDO's não-lineares.

Para as equações diferencias ordinárias de primeira ordem, um problema de valor inicial obedece a condição inicial dada por $y(x_0) = y_0$, enquanto que as equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, um Problema de Valor Inicial obedece as condições iniciais dadas por $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_1$. Tais condições permitem determinar as constantes arbitrárias de $y = Ay_1 + By_2$, isto é, A e B, supondo que y_1 e y_2 são soluções da referida equação diferencial. A solução encontrada ao determinar as constantes A e B, é chamada de solução particular da EDO.

Mas então, como determinar y_1 e y_2 que são as soluções da referida EDO? Pra responder a esta pergunta, lembre-se por exemplo que a equação $y' + ky = 0$, sendo k uma constante arbitrária, tem como solução $y = ce^{-kx}$. Isso induz-nos a pensar que a função solução de $y' + ky = 0$ pode-se ser escrita como $y = e^{mx}$. Pelo que, adicionando a função solução e suas respectivas derivadas após multiplicá-las por algumas constantes, tem-se zero para todo x real. Pelo que se pode concluir então que a função solução e suas derivadas, diferem no máximo por um múltiplo constante. A função $y = e^{mx}$ é a única função cujas derivadas são múltiplos constantes da mesma função e^{mx}, onde m é uma constante. Supondo então que a solução da equação $y'' + py' + qy = 0$ é $y = e^{mx}$, tem-se $(e^{mx})'' + p(e^{mx})' + q(e^{mx}) = 0$, ou ainda, $e^{mx}(m^2 + pm + q) = 0$. A igualdade é nula se $e^{mx} = 0$ ou $m^2 + pm + q = 0$. Mas $e^{mx} \neq 0$, então para que a igualdade anterior seja nula, deve-se ter $m^2+pm+q = 0$. A equação $m^2+pm+q = 0$ chama-se Equação Característica ou auxiliar pois por meio dela se determinam os valores de m que permitem encontrar a solução geral da equação diferencial dada.

A equação $m^2+pm+q = 0$ por ser do segundo grau, pode ter duas raízes reais distintas uma da outra, pode ter uma raiz dupla ou possuir raízes complexas. Possuirá duas raízes reais distintas se $\Delta = p^2 - 4q > 0$, terá raiz dupla se $\Delta = p^2 - 4q = 0$ e terá raízes complexas se $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Assim, se m_1 e m_2 são as raízes de $m^2+pm+q = 0$, a solução geral de $y'' + py' + qy = 0$ é escrita da seguinte maneira $y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$, onde A e B são constantes reais que podem ser determinadas mediante condição inicial, fornecendo então uma solução particular de $y''+py'+qy = 0$. Se $m_1 = m_2 = m$, isto é, se a raiz de $m^2+pm+q = 0$ é dupla, então a solução geral de $y''+py'+qy = 0$ é escrita como $y = (A+Bx)e^{mx}$. Para o caso em que as raízes de $m^2+pm+q = 0$ são complexas, isto é, $m_{1,2} = a \pm bi$ a solução geral de $y''+py'+qy = 0$, é escrita como $y = e^{ax}(c_1e^{ibx} + c_2e^{-ibx})$, mas como $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$ e $e^{-i\theta} = cos(\theta) - isen(\theta)$, então a solução geral pode ser reescrita como $y = e^{ax}\Big(Acos(bx) + Bsen(bx)\Big)$ onde $A = c_1 + c_2$ e $B = (c_1 - c_2)i$.

Exemplo 2.8 *Resolva as seguintes equações diferenciais lineares de segunda ordem.*

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

(c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2b\dfrac{dx}{dt} + k^2x = 0, k > b > 0$. *Quando* $t = 0, x = 0$ *e* $\dfrac{dx}{dt} = v_0$.

Solução: a) A equação característica associada a EDO do item *a*) é da forma $m^2 - 3m + 2 = 0$ cujas raízes são $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$, daí que a solução geral da respectiva equação diferencial é $y(x) = A_0e^x + A_1e^{2x}$, onde A_0 e A_1 são constantes arbitrárias.

b) A equação característica associada a EDO do item *b*) é $m^2-4m+4 = 0$, fica a cargo do leitor conferir que $m_1 = m_2 = 2$, daí que a solução geral da equação diferencial é escrita como $y(x) = (B_0 + B_1x)e^{2x}$, sendo B_0 e B_1 constantes quaisquer.

c) A equação característica associada a EDO do item *c*) é $m^2 + 2bm + k^2 = 0$. Completando os quadrados, tem-se $m^2 + 2bm + b^2 + k^2 - b^2 = 0$, ou ainda, $(m + b)^2 + k^2 - b^2 = 0$, de onde se tem então que $m_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}$. Mas como $k > b > 0$, então $m_{1,2} = -b \pm i\sqrt{k^2 - b^2}$. Logo,

$$x(t) = e^{-bt}\Big(C_0cos(\sqrt{k^2 - b^2}t) + C_1sen(\sqrt{k^2 - b^2}t)\Big),$$

onde $C_0 = c_0 + c_1$ e $C_1 = (c_0 - c_1)i$. Substituindo $t = 0$ na referida solução, tem-se $x(0) = C_0$ e como $x(0) = 0$, então $C_0 = 0$. Dado que $C_0 = 0$, então a solução da equação diferencial é dada por

$$x(t) = e^{-bt}\Big(C_1 sen(\sqrt{k^2 - b^2}t)\Big).$$

Derivando esta última expressão, tem-se
$\dfrac{dx}{dt} = -bC_1e^{-bt} \cdot sen(\sqrt{k^2 - b^2}t) + C_1e^{-bt}\sqrt{k^2 - b^2} \cdot cos(\sqrt{k^2 - b^2}t)$. Substituindo $t = 0$ nesta derivada, tem-se $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = C_1\sqrt{k^2 - b^2}$. Mas como $\dfrac{dx}{dt} = v_0$, então $C_1 = \dfrac{v_0}{\sqrt{k^2 - b^2}}$.
Portanto, a solução particular da equação é dada por $x(t) = \dfrac{v_0}{\sqrt{k^2 - b^2}}e^{-bt}sen(\sqrt{k^2 - b^2}t)$.

$\blacksquare$

2.2 AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES

Considere o problema de valores de contorno $y'' + \lambda y = 0$, fixando dois pontos, isto é, $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 0$. A pergunta é, para quais valores de λ tem-se soluções não-nulas que satisfazem o problema proposto? Para responder esta questão, é necessário saber o que acontece quando o λ é negativo, nulo ou positivo.

Comecemos com o caso em que o $\lambda < 0$.

A equação característica a $y'' + \lambda y = 0$ é $m^2 + \lambda = 0$, resolvendo a equação tem-se como soluções $m_1 = \sqrt{-\lambda}$ e $m_2 = -\sqrt{-\lambda}$. Logo, a solução da EDO é da forma $y = c_1e^{x\sqrt{-\lambda}} + c_2e^{-x\sqrt{-\lambda}}$. Para $x = 0$ tem-se $c_1 + c_2 = 0$ e para $x = \pi$ tem-se $c_1e^{\pi\sqrt{-\lambda}} + c_2e^{-\pi\sqrt{-\lambda}} = 0$. Para determinar c_1 e c_2 resolve-se o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1e^{\pi\sqrt{-\lambda}} + c_2e^{-\pi\sqrt{-\lambda}} = 0, \end{cases}$$

na qual resulta $c_2 = -c_1 = 0$, então a solução da EDO é $y(x) = 0$.

Para o caso em que $\lambda = 0$ tem-se a equação característica da forma $m^2 = 0$, cuja solução é $m_1 = m_2 = 0$. Desse modo, a solução da EDO é da forma $y(x) = c_1 + c_2x$. Substituindo as condições dadas, tem-se que para $x = 0$, $c_1 = 0$ e para $x = \pi$ tem-se que $c_2 = 0$. Dado que as constantes são nulas, então a solução da EDO é $y(x) = 0$.

Para finalizar, vamos analisar o que acontece se $\lambda > 0$. Neste caso, a equação característica é da forma $m^2 + \lambda = 0$, cuja solução é $m_1 = i\sqrt{\lambda}$ e $m_2 = -i\sqrt{\lambda}$. A solução da EDO é dada por $y(x) = Acos(x\sqrt{\lambda}) + Bsen(x\sqrt{\lambda})$, onde $A = c_1 + c_2$ e $B = (c_1 - c_2)i$.

Para $x = 0$ tem-se que $A = 0$ e para $x = \pi$ tem-se $Bsen(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$, isto é, $sen(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$, isto é, $\pi\sqrt{\lambda} = n\pi$, $\lambda = n^2$, para $n \in \mathbb{Z}_+$.

Portanto, a solução da EDO é dada por $y(x) = Bsen(x\sqrt{n^2})$, ou seja,
$y(x) = Bsen(nx)$.

Os valores de λ para os quais tem-se soluções não-nulas são os $\lambda = n^2$, isto é, para o caso em que $\lambda > 0$. Os valores de λ para os quais tem-se soluções não-nulas são chamados de autovalores e assim as soluções resultantes são as autofunções.

2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Conforme visto nas seções anteriores, as Equações Diferenciais Ordinárias são aquelas em que a função incógnita depende somente de uma variável independente. Portanto, ao modelar um problema da vida real do ponto de vista matemático na qual duas ou mais variáveis independentes estão envolvidas, leva-nos às Equações Diferenciais Parciais. Deste modo, uma equação diferencial parcial é aquela em que a função incógnita depende de duas ou mais variáveis independentes. As equações (4) e (5), representam equações diferenciais parciais, pois a função incógnita depende de duas variáveis independentes nos dois casos. Portanto, a toda equação diferencial da forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \tag{13}$$

onde F é uma função das variáveis indicadas e pelo menos uma derivada parcial aparece na expressão acima, é chamada de Equação Diferencial Parcial ou simplesmente E.D.P. Tendo em vista que a Equação do Calor é uma EDP de segunda ordem, então, iremos nos limitar a falar apenas de EDPs de segunda ordem ao longo desse texto.

A ordem de uma equação diferencial parcial é dada pela derivada parcial mais alta que aparece na respectiva equação. As equações (4) e (5) são exemplos de equações diferenciais parciais de 2ª ordem.

Uma equação diferencial parcial de 2ª ordem nas variáveis x e y e na variável dependente $u = u(x, y)$, é linear se ela pode ser escrita na forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \tag{14}$$

onde os coeficientes A, B, C, D, E, F e G dependem somente de x e y e $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

Exemplo 2.9 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + senx \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cos(xy) = 0,$ *onde* $1 + sen^2 x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.10 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ *onde* $\alpha^2 + (-1)^2 \neq 0, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$.

A equação (14) é uma equação diferencial parcial linear não-homogênea se $G \neq 0$, sendo homogênea no caso contrário.

2.3.1 Solução de uma Equação Diferencial Parcial

Uma função $u = u(x, y)$ é solução de uma equação diferencial parcial se ela satisfaz a equação dada, do contrário, ela não é solução da equação diferencial parcial.

Exemplo 2.11 *Achar a solução particular da seguinte equação diferencial parcial sujeita a condição inicial .*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = seny, \qquad u(0,y) = 0$$

Solução: Para encontrar a solução da equação acima, é necessário integrar em ambos os membros em relação a x, isto é:

$$\int \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dx = \int senydx,$$

resulta então que $u(x,y) = xseny + g(y)$.

Considerando a condição inicial, tem-se que $u(0,y) = 0 \cdot seny + g(y)$, isto é, $g(y) = 0$. Portanto, a solução desejada é $u(x,y) = x \cdot seny$.

■

Exemplo 2.12 *Achar a solução particular da seguinte equação diferencial parcial sujeita a condição de contorno dada*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = x^2 cosy, \qquad u(x,0) = 0, \qquad\qquad u\Big(x, \frac{\pi}{2}\Big) = 0$$

Solução: Note que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)$, então $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big) = x^2 cosy$. Integrando a última igualdade em relação a y, isto é,

$$\int \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) dy = \int x^2 cosydy$$

tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 seny + h(x)$$

Integrando novamente em relação a y, tem-se

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int (x^2 seny + g(x))dy,$$

$$u(x,y) = -x^2 cosy + yg(x) + h(x)$$

Para $y = 0$, tem-se $u(x,0) = -x^2 cos0 + 0 \cdot g(x) + h(x)$, mas $u(x,0) = 0$, então $h(x) = x^2$. Daí que $u(x,y) = -x^2 cosy + yg(x) + x^2$.

Agora, para $y = \dfrac{\pi}{2}$, tem-se $u(x, \frac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2} g(x) + x^2$ e como $u(x, \frac{\pi}{2}) = 0$, então $g(x) = -\dfrac{2x^2}{\pi}$, logo

$$u(x,y) = -x^2 cosy - \frac{2x^2 y}{\pi} + x^2$$

é a solução da equação dada.

■

2.3.2 Classificação das Equações Diferenciais Parciais Lineares

As equações diferenciais parciais lineares de 2ª ordem podem ser hiperbólicas, parabólicas ou elípticas.

Uma equação diferencial parcial linear da forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

é hiperbólica se $B^2 - 4AC > 0$, parabólica se $B^2 - 4AC = 0$ e elíptica se $B^2 - 4AC < 0$.

As equações diferenciais parciais a seguir são do tipo parabólico, hiperbólico e elíptico, respectivamente, pois no primeiro caso $B^2 - 4AC = 0$, no segundo tem-se $B^2 - 4AC > 0$ e no terceiro tem-se $B^2 - 4AC < 0$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{15}$$

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{17}$$

Observação 2.2 *A equação* $\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ *conhecida como Equação do calor, é uma EDP linear parabólica, pois os coeficientes* $B = C = 0$.

2.4 MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

O método de separação de variáveis é um importante recurso que permite encontrar a solução que satisfaz a equação diferencial parcial com coeficientes constantes, cujo objetivo é escrever esta solução como produto de duas funções, $u(x, y) = f(x)g(y)$, tal que f é uma função que depende de x e g depende de y. É importante frisar que este produto é não nulo, isto é, $f(x)g(y) \neq 0$.

Exemplo 2.13 *Usando o método de separação de variáveis, resolva equação diferencial parcial*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + u.$$

Solução: Seja $u(x, y) = f(x)g(y)$ a solução desejada, com $f(x)g(y) \neq 0$. Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x)g(y)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)g'(y),$$

logo $f'(x)g(y) = f(x)g'(y)$, e portanto

$$\frac{f'(x)g(y)}{f(x)g(y)} = \frac{f(x).g'(y)}{f(x)g(y)} + \frac{f(x)g(y)}{f(x)g(y)} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(y)}{g(y)} + 1.$$

Note que temos uma igualdade em que um dos membros dependente somente de x e o outro depende somente de y. Então, para que a igualdade seja verdadeira, deve-se ter que ambos membros iguais a uma constante real e que chamaremos para este caso de m. Como esta constante é real, então pode ser negativa, nula ou positiva, analisemos os seguintes casos:

1º Caso: se $m < 0$, tem-se que:
$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -m \Rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -m \int dx \Rightarrow ln(f(x)) = -mx + c_1$

$$f(x) = e^{-mx+c_1} \Rightarrow f(x) = k_1 e^{-mx},$$

onde, $k_1 = e^{c_1}$.

E,

$$\frac{g'(y)}{g(y)} + 1 = -m \Rightarrow \int \Big(\frac{g'(y)}{g(y)} + 1\Big)dy = -m \int dy$$

$ln(g(y) + y = -my + c_2$, ou ainda, $ln(g(y)) = -my - y + c_2$, isto é,

$$g(y) = k_2 e^{-y(m+1)},$$

onde $k_2 = e^{c_2}$. Logo, para $m < 0$, tem-se que $u(x, y) = Ae^{-mx} \cdot e^{-y(m+1)}$, onde $A = k_1 \cdot k_2$.

Assim, $u(x, y) = Ae^{-mx-my-y}$ é uma das soluções da E.D.P.

2º Caso: se $m = 0$, tem-se

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 0,$$

que ao integrar ambos os membros resulta então que $f(x) = k_4$, onde $k_4 = e^{k_3}$. Por outro lado, tem-se que

$$\frac{g'(y)}{g(y)} + 1 = 0.$$

Integrando esta expressão em relação a y, tem-se que $g(y) = e^{-y+k_5}$, $g(y) = k_6 e^{-y}$, onde $k_6 = e^{k_5}$. E portanto, a solução desejada para $m = 0$ é $u(x, y) = k_7 e^{-y}$, onde $k_7 = k_4 \cdot k_6$.

3º Caso: Para o caso em que $m > 0$, tem-se então que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = m,$$

que ao integrar em relação a x em ambos os membros, tem-se que $f(x) = k_8 e^{mx}$, onde $k_8 = e^{c_5}$. Mas por outro lado, tem-se que

$$\frac{g'(y)}{g(y)} + 1 = m.$$

Integrando em ambos os membros em relação a y esta última expressão, temos então que $g(y) = k_9 \cdot e^{y(m-1)}$, onde $k_9 = e^{c_6}$. Portanto, a solução da EDP para o caso em que $m > 0$ é $u(x, y) = B \cdot e^{m(x+y)-y}$ onde $B = k_8 \cdot k_9$.

$\blacksquare$

3 SÉRIES DE FOURIER

A solução de muitos problemas importantes da Física que envolvem Equações Diferenciais Parciais pode ser encontrada de uma forma mais simples desde que se possa escrever uma função como uma série infinita de senos e/ou de cossenos. O presente capítulo tem por finalidade falar sobre as Séries de Fourier. Mas antes de se falar sobre tais séries, é importante ter em conta conceitos tais como de uma função periódica e ortogonalidade de duas funções num intervalo dado.

3.1 FUNÇÕES PERIÓDICAS

Definição 3.1 *Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se diz que a função f é periódica se existe algum T positivo, tal que $f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$, onde T recebe o nome de período da função.*

Exemplo 3.1 *A função a seguir é periódica de período $T = 2$*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ 2n \leq x < 2n+1, \ \ n \in \mathbb{N} \\ 2 \ \ se \ \ 2n+1 \leq x < 2n+2, \ \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Proposição 3.1 *Se f e g são funções periódicas com período T, então $h = af + bg$, onde a e b são constantes reais, é também uma função periódica de período T.*

Demonstração: Como por hipótese a função f é periódica de período T então, $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e de modo análogo tem-se que $g(x+T) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pois também por hipótese a g é uma função periódica de período T. Deste modo, tem-se que

$$(af + bg)(x+T) = af(x+T) + bg(x+T) = af(x) + bg(x) = h(x).$$

Portanto, $h(x+T) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, o que prova o desejado. ∎

Desta proposição, segue o seguinte corolário:

Corolário 3.1 *Se f e g são funções periódicas com período T, então $h = af - bg$ é também uma função periódica de período T.*

Demonstração: Basta tomar $b = -c$ na proposição anterior. ∎

Proposição 3.2 *Se f e g são funções periódicas de período T, então $f \cdot g$ é também uma função periódica de período T.*

Demonstração: Tendo em vista que f e g são ambas funções periódicas de período T, então tem-se que $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $g(x+T) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Portanto, $(f \cdot g)(x+T) = f(x+T) \cdot g(x+T) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ∎

De acordo a proposição anterior, segue o seguinte corolário:

Corolário 3.2 *Se f e g são funções periódicas de período T, então $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ é também uma função periódica desde que g seja uma função não nula.*

Demonstração: Como ambas as funções são periódicas de período T, então
$h(x+T) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x+T) = \dfrac{f(x+T)}{g(x+T)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} = h(x), \forall x \in D_h.$

■

3.2 FUNÇÕES ORTOGONAIS

Definição 3.2 *Duas funções reais $f_m(x)$ e $f_n(x)$ são ortogonais no intervalo $a \leq x \leq b$, se a integral do produto $f_m(x) \cdot f_n(x)$ no referido intervalo é zero, isto é,*

$$\int_a^b f_m(x) \cdot f_n(x)dx = 0, \forall m \neq n. \tag{18}$$

Importante ressaltar que se um conjunto de funções reais satisfaz a (18), então este conjunto de funções é ortogonal para um determinado intervalo de definição.

Note que se $m = n$, tem-se então $f_m(x) \cdot f_m(x) = f_m^2(x)$, portanto, ao substituir em (18) tem-se que:

$$\int_a^b f_m^2(x)dx. \tag{19}$$

A identidade (19) é chamada de norma da função $f_m(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$.

Exemplo 3.2 *Mostre que as seguintes funções são ortogonais no intervalo indicado.*

$f_1(x) = e^x$ *e* $f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x}$ *no intervalo* $0 \leq x \leq 2$.

Solução: Duas funções são ortogonais no intervalo dado se e somente se

$$\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x)dx = 0.$$

Deste modo, considerando as funções dadas e o intervalo indicado, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^x \cdot (xe^{-x} - e^{-x})dx &= \int_0^2 e^x \cdot e^{-x} \cdot (x-1)dx = \int_0^2 e^{x-x} \cdot (x-1)dx \\
&= \int_0^2 (x-1)dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^2 \\
&= \left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x}$ são funções ortogonais no intervalo $0 \leq x \leq 2$.

■

Definição 3.3 *Um conjunto de funções é ortogonal em $a \leq x \leq b$, se cada par de funções distintas deste conjunto é ortogonal.*

Exemplo 3.3 *O conjunto*

$$A = \left\{ sen\Big(\frac{\pi x}{T}\Big), cos\Big(\frac{\pi x}{T}\Big), sen\Big(\frac{2n\pi x}{T}\Big), cos\Big(\frac{2n\pi x}{T}\Big), ..., sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big), cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big), ...\right\},$$

onde $n = 1, 2, ...$, é um conjunto de funções ortogonais no intervalo $-T \leq x \leq T$, pois as mesmas satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_{-T}^{T} cos\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big) \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ T, m = n \end{cases} \tag{20}$$

$$\int_{-T}^{T} cos\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big) \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big) dx = 0, \forall\ m, n \neq 0. \tag{21}$$

$$\int_{-T}^{T} sen\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big) \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ T, m = n \end{cases} \tag{22}$$

Para demonstrar as identidades (20), (21) e (22) considere as seguintes identidades trigonométricas:

$$cos(px) \cdot cos(qx) = \frac{1}{2}\Big[cos(x(p+q)) + cos(x(p-q))\Big]$$

$$cos(px) \cdot sen(qx) = \frac{1}{2}\Big[sen(x(p+q)) - sen(x(p-q))\Big]$$

$$sen(px) \cdot sen(qx) = \frac{1}{2}\Big[cos(x(p-q)) - cos(x(p+q))\Big]$$

Para demonstrar a identidade (20), considere os seguintes casos:

1º Caso: Para $m \neq n$, tem-se que

$$\begin{aligned} I &= \int_{-T}^{T} cos\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big) \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big) dx = \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \Big[cos\frac{\pi x(m+n)}{T} + cos\frac{\pi x(m-n)}{T}\Big] dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{T}{\pi(m+n)} sen\frac{\pi x(m+n)}{T} + \frac{T}{\pi(m-n)} sen\frac{\pi x(m-n)}{T}\Big]\Big|_{-T}^{T} = 0 \end{aligned}$$

2º Caso: Considere agora que $m = n$, como $cos^2 ax = \frac{1}{2}(1 + cos 2ax)$, então tem-se a seguinte a integral,

$$I = \int_{-T}^{T} cos^2\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big) dx = \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \Big(1 + cos\frac{2n\pi x}{T}\Big) dx = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{T}{2n\pi} sen\frac{2n\pi x}{T}\Big)\Big|_{-T}^{T}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\Big[\Big(T-(-T)\Big)+\Big(\frac{T}{2n\pi}sen\frac{2n\pi T}{T}-\frac{T}{2n\pi}sen\frac{-2n\pi T}{T}\Big)\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[2T+\frac{T}{2n\pi}sen\frac{2n\pi T}{T}+\frac{T}{2n\pi}sen\frac{2n\pi T}{T}\Big]=\frac{1}{2}\Big[2T+\frac{2T}{2n\pi}sen\frac{2n\pi T}{T}\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[2T+\frac{T}{n\pi}sen(2n\pi)\Big]=\frac{1}{2}(2T+\frac{T}{n\pi}\cdot 0)=\frac{1}{2}\cdot 2T=T.
\end{aligned}
$$

Para demonstrar a identidade (21) procede-se de modo análogo ao item anterior e portanto deixamos a cargo do leitor. Para demonstrar a identidade (22) procede-se do mesmo modo da identidade (20), isto é, dividindo em dois casos:

1º Caso: Para $m \neq n \neq 0$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-T}^{T} sen\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)\cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)dx=\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\Big[cos\frac{\pi x(m-n)}{T}-cos\frac{\pi x(m+n)}{T}\Big]dx\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{T}{\pi(m-n)}sen\frac{\pi x(m-n)}{T}-\frac{T}{\pi(m+n)}sen\frac{\pi x(m+n)}{T}\Big]\Big|_{-T}^{T}=0
\end{aligned}
$$

2º Caso: Considere agora que $m = n$, como $sen^2 ax = \frac{1}{2}(1 - cos2ax)$, logo

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-T}^{T} sen^2\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)dx=\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\Big(1-cos\Big(\frac{2n\pi x}{T}\Big)\Big)dx=\frac{1}{2}\Big(x-\frac{T}{2n\pi}sen\Big(\frac{2n\pi x}{T}\Big)\Big|_{-T}^{T}\\
&= \frac{1}{2}\Big[(T-(-T)-\Big(\frac{T}{2n\pi}sen\Big(\frac{2n\pi T}{T}\Big)-\frac{T}{2n\pi}sen\Big(\frac{-2n\pi T}{T}\Big)\Big)\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[2T-\Big(\frac{T}{2n\pi}sen\Big(\frac{2n\pi T}{T}\Big)+\frac{T}{2n\pi}sen\Big(\frac{2n\pi T}{T}\Big)\Big)\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big(2T-\frac{2T}{2n\pi}sen\Big(\frac{2n\pi T}{T}\Big)\Big)=\frac{1}{2}\Big(2T-\frac{T}{n\pi}sen(2n\pi)\Big)\\
&= \frac{1}{2}(2T-\frac{T}{n\pi}\cdot 0)=\frac{1}{2}\cdot 2T=T.
\end{aligned}
$$

3.3 CÁLCULO DOS COEFICIENTES DA SÉRIE DE FOURIER

Seja f uma função de período T e que pode ser representada por meio de uma série de funções trigonométricas, isto é:

$$
f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)+b_n\cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)\Big), \tag{23}
$$

esta série recebe o nome de Série de Fourier, onde a_0, a_n e b_n são os coeficientes da Série de Fourier.

De acordo com a relação de ortogonalidade do conjunto das funções $\{1, ..., cos\frac{n\pi x}{T}, ..., sen\frac{n\pi x}{T}, ...\}$, pode-se calcular os Coeficientes a_0, a_n e b_n da Série de Fourier, procedendo da seguinte forma:

Integrando a (23) em ambos os membros de $-T$ a T, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} f(x)dx &= \frac{a_0}{2}\cdot\Big(T-(-T)\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cdot\frac{T}{n\pi}\cdot\Big(sen\Big(\frac{n\pi T}{T}\Big)\\
&- sen\Big(\frac{-n\pi T}{T}\Big)-b_n\cdot\frac{T}{n\pi}\cdot\Big(cos\Big(\frac{n\pi T}{T}\Big)-cos\Big(\frac{-n\pi T}{T}\Big)\Big)\Big)\\
&= \frac{a_0}{2}\cdot 2T+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cdot\frac{T}{n\pi}\cdot 2sen\Big(\frac{n\pi T}{T}\Big)-b_n\cdot\frac{T}{n\pi}\cdot\Big(cos\frac{n\pi T}{T}\Big)-cos\Big(\frac{n\pi T}{T}\Big)\Big)\\
&= a_0\cdot T+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cdot\frac{T}{n\pi}\cdot 0-b_n\cdot\frac{T}{n\pi}\cdot 0\Big)=a\cdot T,
\end{aligned}$$

pois $sen(n\pi)=0, \quad \forall n\in\mathbb{Z}$. Portanto,

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx. \tag{24}$$

Agora, multiplicando $cos\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)$ em ambos os membros de (23) e integrando de $-T$ até T, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} f(x)cos\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-T}^{T} cos\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{-T}^{T} a_n\cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)cos\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)dx\\
&+ \int_{-T}^{T} b_n\cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)cos\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)dx\Big)\\
&= \frac{a_0}{2}\cdot\frac{T}{m\pi}\cdot sen\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)\Big|_{-T}^{T}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cdot T+b_n\cdot 0\Big)\\
&= \frac{a_0}{2}\cdot\frac{T}{m\pi}\cdot\Big(sen\Big(\frac{m\pi T}{T}\Big)-sen\Big(\frac{m\pi T}{T}\Big)\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot T\\
&= a_n\cdot T
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)dx. \tag{25}$$

Vale ressaltar que a primeira integral depois do somatório é calculada considerando que $m=n\neq 0$ e a segunda integral é calculada considerando que $m\neq n$.

Para calcular b_n, multiplica-se $sen\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)$ em ambos os membros de (23) e integrando de $-T$ a T, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} f(x)sen\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-T}^{T} sen\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_{-T}^{T} a_n\cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)\cdot sen\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)dx \\
&+ \int_{-T}^{T} b_n\cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)\cdot sen\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)dx\Big) \\
&= -\frac{a_0}{2}\frac{T}{m\pi}cos\Big(\frac{m\pi x}{T}\Big)\Big|_{-T}^{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cdot 0 + b_n\cdot T\Big) \\
&= -\frac{a_0}{2}\frac{T}{m\pi}\Big(cos\Big(\frac{m\pi T}{T}\Big) - cos\Big(\frac{-m\pi T}{T}\Big)\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot T,
\end{aligned}$$

daí que

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)dx. \tag{26}$$

Exemplo 3.4 *Encontre a série de Fourier da seguinte função*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \;\; se \;\; -\pi < x < 0 \\ 1 \;\; se \;\; 0 < x < \pi \\ e \;\; periódica \;\; de \;\; período \;\; 2\pi \end{cases}$$

Solução: Como o período da f é $T = 2\pi$, então pode-se calcular os coeficientes de Fourier usando as identidades (24), (25) e (26). Logo,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1dx = \frac{1}{\pi}x\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\Big(\pi - 0\Big) = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{\pi}\Big)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{\pi}\Big)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} cos(nx)dx = \frac{1}{n\pi}sen(nx)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{n\pi}\Big(sen(n\pi) - sen(n0)\Big) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{\pi}\Big)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{\pi}\Big)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sen(nx)dx = -\frac{1}{n\pi}cos(nx)\Big|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}\Big(cos(n\pi) - cos(n0)\Big) \\
&= -\frac{1}{n\pi}\Big((-1)^n - 1\Big) = \frac{1}{n\pi}\Big(1 - (-1)^n\Big), \;\; de \;\; onde \;\; se \;\; tem \;\; que
\end{aligned}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ n \ \ par \\ \dfrac{2}{n\pi} \ \ se \ \ n \ \ ímpar \end{cases},$$

portanto, $b_{2k-1} = \dfrac{2}{(2k-1)\pi}$. Logo,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2k-1}sen(2k-1)x\Big).$$

■

Exemplo 3.5 *Encontre a série de Fourier da função $f(x) = e^x$ periódica de período 2π.*

Solução: Tendo em vista que $T = 2\pi$, tem-se que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi}e^x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot(e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{2}{\pi}\cdot senh(\pi).$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{\pi}\Big)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{e^x}{n}sen(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot sen(nx)dx\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{e^{\pi}}{n}sen(n\pi) - \frac{e^{-\pi}}{n}sen(-n\pi) - \frac{1}{n}\Big(-\frac{e^x}{n}cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot cos(nx)dx\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{e^{\pi}}{n^2}cos(n\pi) - \frac{e^{-\pi}}{n^2}cos(-n\pi) - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot cos(nx)dx\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{e^{\pi}}{n^2}(-1)^n - \frac{e^{-\pi}}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot cos(nx)dx\Big) \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\cdot(-1)^n\Big(e^{\pi} - e^{-\pi}\Big) - \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\cdot(-1)^n\cdot\frac{2}{2}\Big(e^{\pi} - e^{-\pi}\Big) - \frac{1}{n^2}\cdot a_n \\
&= a_n\Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big) = \frac{2}{n^2\pi}\cdot(-1)^n\cdot senh(\pi), \quad ou \quad ainda \\
a_n &= \frac{2\cdot(-1)^n}{\pi(n^2+1)}senh(\pi).
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{\pi}\Big)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot sen(nx)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{e^x}{n}cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot cos(nx)dx\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{e^\pi}{n}cos(n\pi) + \frac{e^{-\pi}}{n}cos(-n\pi) + \frac{1}{n}\Big(\frac{e^x}{n}sen(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot se(nx)dx\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{e^\pi}{n}cos(n\pi) + \frac{e^{-\pi}}{n}cos(-n\pi) - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot sen(nx)dx\Big) \\
&= -\frac{1}{n\pi}\cdot(-1)^n\Big(e^\pi - e^{-\pi}\Big) - \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot sen(nx)dx, \;\; isto\;\; é, \\
b_n &= -\frac{1}{n\pi}\cdot(-1)^n\cdot\frac{2}{2}\Big(e^\pi - e^{-\pi}\Big) - \frac{1}{n^2}\cdot b_n \\
&= b_n\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big) = -\frac{2}{n\pi}\cdot(-1)^n\cdot senh(\pi), \;\; ou \;\; seja \\
b_n &= -\frac{2\cdot(-1)^n\cdot n}{\pi(n^2+1)}senh(\pi).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2senh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{2\cdot(-1)^n}{\pi(n^2+1)}senh(\pi)cos(nx) - \frac{2\cdot(-1)^n\cdot n}{\pi(n^2+1)}\cdot senh(\pi)sen(nx)\Big) \\
f(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2senh(\pi)}{\pi} + \frac{2\cdot senh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\Big(cos(nx) - n\cdot sen(nx)\Big) \\
f(x) &= \frac{2\cdot senh(\pi)}{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\Big(cos(nx) - n\cdot sen(nx)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

■

3.4 TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DA SÉRIE DE FOURIER

Para enunciar o teorema da convergência de uma série de Fourier é interessante antes entender o que é uma função seccionalmente contínua e função seccionalmente diferenciável.

Definição 3.4 *Uma função f é seccionalmente contínua num intervalo $[a, b]$, se existe um número finito de pontos $a \leq x < x_0 < x_1 ... < x_n \leq b$, chamada partição do intervalo $[a, b]$ tal que a função f é contínua em cada subintervalo (x_{i-1}, x_i), com $i = 1, 2, ..., n$, os limites laterais nos extremos de cada subintervalo (x_{i-1}, x_i) existem e são finitos.*

Definição 3.5 *Uma função f é seccionalmente diferenciável no intervalo $[a, b]$, se f e f' são seccionalmente contínuas no mesmo intervalo.*

O teorema a seguir, sua demonstração pode ser encontrada em livros tais como (CHURCHILL, R. V., 1977), (SANTOS, R. J., 2011),(RAMOS, E. E., 2004), (BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B., 2010) e é um teorema que fornece condições ou hipóteses suficientes para a convergência da Série de Fourier num ponto. De forma específica usaremos o enunciado de (IÓRIO, V., 2005) que diz o seguinte:

Teorema 3.1 *Seja f uma função pertencente ao espaço das funções reais periódicas de período $2l$ e suponha que f é diferenciável, a menos de um número finito de pontos em $(-l, l)$, como f' pertencente ao espaço das funções reais periódicas de período $2l$, então, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, a série de Fourier de f no ponto x converge a $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, isto é:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big) + b_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)\right) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

onde $f(x^+)$ e $f(x^-)$ representam os limites da função f a direita e a esquerda, respectivamente.

3.5 SÉRIES DE FOURIER DE SENOS E COSSENOS

Conforme visto, a expressão

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big) + b_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)\right)$$

define a série de Fourier de uma forma geral. Para uma determinada classe de funções, o trabalho de calcular cada coeficiente da série, é simplificado quando se tem uma função par ou ímpar. Diz-se que uma função é par quando se verifica que $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$, enquanto que uma função é ímpar quando se tem $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$. Graficamente diz-se que uma função é par, quando há simetria em relação ao eixo y, enquanto que se a simetria é em relação a origem, diz-se então que a função é ímpar. Funções como $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = cos(x)$ e $f(x) = |x|$ são exemplos de funções pares, enquanto que as funções $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = x^3$ e $f(x) = tgx$ representam funções ímpares.

Da paridade das funções, seguem as seguintes propriedades:

- a) O produto de duas funções pares é par.
- b) O produto de duas funções ímpares é par.
- c) O produto de uma função par e uma função ímpar é ímpar.
- d) A soma ou diferença de duas funções pares é par.
- e) A soma ou diferença de duas funções ímpares é ímpar.
- f) Se f é par, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
- g) Se f é ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Segue então a demonstração dos itens b), d) e f), ficando a cargo do leitor demonstrar os outros itens.

Demonstração: b) Sejam f e g funções ímpares, de onde se tem que $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in D_f$ e $g(x) = -g(-x)$, $\forall x \in D_g$. Logo o produto é dado por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$,

$\forall x \in D_f \cap D_g$, daí que $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = h(x)$, $\forall x \in D_f \cap D_g$.

d) Seja $h(x) = f(x) \pm g(x)$. Como, por hipótese, a f é par, então temos que $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D_f$ e como a g também é par, tem-se que $g(x) = g(-x)$, $\forall x \in D_g$, Segue então que $h(x) = af(x) \pm bg(x) = af(-x) \pm bg(-x) = h(-x)$, $\forall x \in D_f \cap D_g$.

f) Por propriedade de integral definida, temos que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx, \tag{27}$$

fazendo $x = -t$ na primeira parcela de (27), tem-se que $dx = -dt$. Para $x = -a$ implica que $t = a$ e para $x = 0$ tem-se $t = 0$, daí que

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx, \tag{28}$$

substituindo (28) em (27), tem-se

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

As demonstrações dos outros itens são similares as demonstrações que foram feitas nesse texto. ∎

Seja f uma função par no intervalo $(-T, T)$ os coeficientes da série de Fourier são calculados da seguinte forma:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(x)dx,$$

pois por hipótese a função f é par.

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)dx = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(x)cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)dx,$$

pois o produto de duas funções pares, resulta numa par de acordo a propriedade acima mencionada e $b_n = 0$ por tratar-se do produto de uma função par e uma função ímpar, cujo produto é uma função ímpar e de acordo a propriedade do item g, a integral é nula . Portanto, se a função f é par, a Série de Fourier é da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big). \tag{29}$$

A equação (29) é denominada Série de Fourier de cossenos.

Se a função f é ímpar no intervalo $(-T, T)$, os coeficientes da série de Fourier são calculados da seguinte forma:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx = 0,$$

pois por hipótese a função é ímpar.

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)dx = 0,$$

pois trata-se do produto de uma função ímpar por uma função par. Por fim,

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(x)sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)dx,$$

por tratar-se do produto de duas funções ímpares e resultar numa função par. Logo, a série de Fourier é da forma

$$f(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big). \tag{30}$$

A equação (30) é denominada Série de Fourier de senos.

Exemplo 3.6 *Desenvolver as funções a seguir numa série de cossenos ou de senos*

a) $f(x) = |x|$ *se* $-\pi < x < \pi$*;*

b) $f(x) = x^3$ *se* $-\pi < x < \pi$*.*

Solução: Para o primeiro item, foi visto que $f(x) = |x|$ é uma função par, logo em função das propriedades mencionadas acima, tem-se que $b_n = 0$. Como $b_n = 0$, então tem-se uma série de cossenos.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|cos\Big(\frac{n\pi x}{\pi}\Big)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xcos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{x}{n}sen(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}cos(nx)\Big|_0^{\pi}\Big)$$

$$\mathrm{a}_n = \frac{2}{\pi n^2}\Big((-1)^n - 1\Big) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ n \ \ par \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} \ \ se \ \ n \ \ ímpar \end{cases}$$

Portanto, $a_{2k-1} = -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}$ e tem-se então que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\cdot cos\frac{(2k-1)\pi x}{\pi},$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot cos(2k-1)x.$$

O leitor deve perceber que para a resolução da integral foi usado o método de integração por partes e também foi usado o fato de que $sen(n\pi) = 0$ e $cos(n\pi) = (-1)^n$.

Para o segundo item, nota-se que $f(x) = -f(-x)$ e, no entanto, a f é uma função ímpar no intervalo mencionado e tendo em vista essa propriedade, observa-se que $a_0 = a_n = 0$. Diante do exposto, tem-se uma série de Fourier de senos. Daí que

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 sen\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 sen(nx)dx = \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{x^3}{n}cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2 cos(nx)dx\Big)\\
&= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\pi^3}{n}(-1)^n + \frac{3}{n}\Big(\frac{x^2}{n}sen(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x sen(nx)dx\Big)\Big)\\
&= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\pi^3}{n}(-1)^n + \frac{3}{n}\Big(-\frac{2}{n}\Big(-\frac{x}{n}cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} cos(nx)dx\Big)\Big)\Big)\\
&= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\pi^3}{n}(-1)^n + \frac{3}{n}\Big(-\frac{2}{n}\Big(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n^2}sen(nx)\Big|_0^{\pi}\Big)\Big)\Big)\\
&= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\pi^3}{n}(-1)^n + \frac{6\pi}{n^3}(-1)^n\Big) = (-1)^n\Big(-\frac{2\pi^2}{n} + \frac{12}{n^3}\Big) = (-1)^n\frac{2}{n^3}\Big(-n^2\pi^2 + 6\Big)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\Big(6 - n^2\pi^2\Big)sen(nx)$$

é a série de Fourier desejada. ■

3.5.1 Expansões pares e ímpares

Os exercícios resolvidos até aqui, foram por meio de uma função periódica definida para todo x do intervalo de definição, sendo a série determinada pelas fórmulas dos coeficientes de Fourier, conforme se viu acima. Mas, por vezes, surge a necessidade de determinar a série de Fourier de uma função $f : [0, T] \to \mathbb{R}$, ou seja, uma função definida no intervalo mencionado. Dado que a função f não é periódica, torna inviável a representação da tal função por uma série de Fourier.

Para reverter tal situação, é necessário expandir a função no intervalo $[-T, 0]$ de forma a garantir que a função f seja periódica de período $2T$. Feito isto, pode-se então expandir a função f em toda reta real pela condição de periodicidade $f(x + 2T) = f(x)$.

O objetivo de expandir a f é ter uma função par ou ímpar em toda reta real. A expansão par de período $2T$ de f, é a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & se \;\; 0 < x < T \\ f(-x) & se \;\; -T < x < 0 \end{cases}.$$

Enquanto que a expansão ímpar de período $2T$ de f, é a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} f(x) \ \ se \ \ 0 < x < T \\ -f(-x) \ \ se \ \ -T < x < 0 \end{cases} .$$

Importa ressaltar que conforme já vimos, a série de Fourier de uma expansão par da função f, é uma Série de Fourier de cossenos, enquanto que a série de Fourier de uma expansão ímpar da função f, é uma Série de Fourier de senos.

Exemplo 3.7 *Seja a função $f(x) = x$ para $0 < x < T$, encontre a série de Fourier de cossenos e a série de Fourier de senos.*

Solução: Para encontrar a série de cossenos, deve-se primeiro fazer uma extensão par da função dada, para garantir então que a função é par no intervalo $(-T, T)$. Feito isto, tem-se que $b_n = 0$, por tratar-se do produto de uma função par e uma ímpar. Temos então que,

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T xdx = \frac{2}{T}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^T = T.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T xcos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)dx = \frac{2}{T}\Big(\frac{T}{n\pi}xsen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big) + \frac{T^2}{n^2\pi^2}cos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)\Big)\bigg|_0^T \\ &= \frac{2}{T}\Big(\frac{T^2}{n\pi}sen\Big(\frac{n\pi T}{T}\Big) + \frac{T^2}{n^2\pi^2}\Big(cos\Big(\frac{n\pi T}{T}\Big) - cos(0)\Big)\Big) \\ &= \frac{2}{T}\Big(\frac{T^2}{n\pi}sen(n\pi) + \frac{T^2}{n^2\pi^2}\Big(cos(n\pi) - 1\Big)\Big) = \frac{2T}{n^2\pi^2}\Big((-1)^n - 1\Big). \end{aligned}$$

Logo, $a_n = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ n \ \ par \\ -\dfrac{4T}{n^2\pi^2} \ \ se \ \ se \ \ n \ \ ímpar \end{cases}$, e portanto, $a_{2k-1} = -\dfrac{4T}{(2k-1)^2\pi^2}$

Daí que,

$$f(x) = \frac{T}{2} - \frac{4T}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}cos\frac{(2k-1)\pi x}{T}$$

é a série de Fourier desejada.

Para encontrar a série de Fourier de senos, faz-se primeiro uma extensão ímpar para garantir que a função seja ímpar no intervalo $(-T, T)$. Feito isto, tem-se que $a_0 = a_n = 0$, o primeiro por se tratar de uma função ímpar no intervalo indicado e o segundo por se tratar do produto de uma função par e uma função ímpar, resultando numa função ímpar e pelas propriedades já mencionadas, daí a razão desses coeficientes resultarem em zero. Portanto,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T xsen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)dx = \frac{2}{T}\Big(-\frac{T}{n\pi}xcos\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big) + \frac{T^2}{n^2\pi^2}sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)\Big)\Big|_0^T \\ &= \frac{2}{T}\Big(-\frac{T^2}{n\pi}cos\Big(\frac{n\pi T}{T}\Big) + \frac{T^2}{n^2\pi^2}sen\Big(\frac{n\pi T}{T}\Big)\Big) = \frac{2}{T}\Big(-\frac{T^2}{n\pi}cos(n\pi)\Big) \\ &= \frac{2T}{n\pi}(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$f(x) = \dfrac{2T}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}sen\Big(\frac{n\pi x}{T}\Big)$ é a série de Fourier desejada.

■

3.6 TRANSFORMADA DE FOURIER

Nesta seção usaremos os conceitos de transformada de Fourier trazidos no livro de (SANTOS, R. J., 2011), embora a forma de escrever a Transformada de Fourier nesse trabalho seja um pouco diferente daquela que o livro traz.

Definição 3.6 *Seja f uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $(\mathbb{C})$ a Transformada de Fourier de f é dada por $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx,\ \forall\omega \in \mathbb{R}$. Sua transformada inversa é denotada por $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$.*

A condição suficiente para que a transformada de Fourier de f exista, geralmente é dada por $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < \infty$, ou seja, a integral do valor absoluto de f deve ser finita, isto é, convergente. Desta condição tem-se então que $\hat{f}(\omega)$ é uma função contínua de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Embora seja uma condição suficiente, ela não é necessária.

A integral imprópria de $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$, $\forall\omega \in \mathbb{R}$ pode ser interpretada da seguinte maneira:

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \lim_{a,b\to\infty}\int_{-a}^{b} f(x)e^{-i\omega x}dx$, onde a e b tendem para infinito.

Mas então, quais funções f devem ser consideradas para que a integral do segundo membro de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \lim_{a,b\to\infty}\int_{-a}^{b} f(x)e^{-i\omega x}dx$ exista e para que o limite exista?

Para responder a esta questão, é necessário antes de mais nada exibir uma classe de funções para as quais $\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$, $\forall\omega \in \mathbb{R}$ esteja bem definida, a integral deve ser convergente conforme já foi observado acima. Deste modo, tem-se uma função F definida em $\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está nessa classe se f é seccionalmente contínua em $[-a, b]$ e claro, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < \infty$. Dizer que a f é seccionalmente contínua em $[-a, b]$, implica dizer que a função $f(x)e^{-i\omega x}$ é limitada e integrável em $[-a, b]$.

Teorema 3.2 *Se a transformada de Fourier de $f(x)$ é $\hat{f}(\omega)$ e a transformada de Fourier de $g(x)$ é $\hat{g}(\omega)$, então para quaisquer constantes α e β, tem-se:*

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\omega) = \alpha \mathcal{F}(f)(\omega) + \beta \mathcal{F}(g)(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega), \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) e^{-i\omega x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(x) e^{-i\omega x} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta g(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx = \alpha \mathcal{F}(f)(\omega) + \beta \mathcal{F}(g)(\omega).
\end{aligned}$$

■

O teorema a seguir, diz respeito as derivadas da transformada de Fourier e sua demonstração pode ser encontrada no livro citado no início desta seção.

Teorema 3.3 *Seja $\hat{f}(\omega)$ a transformada de Fourier de $f(x)$:*

a) Se $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)| dx < \infty$, então $\mathcal{F}(x f(x))(\omega) = i \dfrac{d\hat{f}}{d\omega}(\omega)$.

b) Se também $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f(x)| dx < \infty$, então $\mathcal{F}(x^2 f(x))(\omega) = -\dfrac{d^2 \hat{f}}{d\omega^2}(\omega)$.

Assim como o teorema anterior que preferimos não demonstrar, o seguinte resultado também não o demonstraremos, sendo que o mesmo tem a sua demonstração no livro citado.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$.

i) Se $f'(x)$ é seccionalmente contínua e $\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = 0$, então $\mathcal{F}(f'(x))(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$.

ii) Se $f'(x)$ é contínua, $f''(x)$ é seccionalmente contínua e $\lim_{x \to \pm\infty} |f'(x)| = 0$, então $\mathcal{F}(f''(x))(\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega)$.

Importa salientar que a notação da Transformada de Fourier adotada neste trabalho não é a única, ou seja, existem outras formas de escrever a Transformada de Fourier e a sua inversa, para confrontar essa afirmação pode-se consultar os livros (FIGUEIREDO, D. G. de., 1977) e (IÓRIO, V., 2005).

4 EQUAÇÃO DO CALOR

O presente capítulo, tem por finalidade analisar o fluxo de calor numa barra homogênea, isto é, a densidade em cada ponto da barra é constante. Além do mais, serão analisados os casos em que os extremos da barra se mantém a uma temperatura constante igual a zero e também o caso em que os extremos estarão mantidos a uma temperatura constante não nula. Ter os extremos mantidos a uma temperatura constante não nula, implica dizer que as condições de contorno não são homogêneas. Será analisado também o problema do fluxo de calor em que os extremos da barra se mantém isolados (isto é, não ocorre troca de calor nos extremos e o meio ambiente), na sequência, será analisado o problema do fluxo de calor quando existe uma fonte externa e por fim, será analisado o problema de fluxo de calor numa barra infinita, cuja a solução será determinada usando a Transformada de Fourier e a sua inversa. As séries de Fourier e a Transformada de Fourier estudadas no capítulo 3 e o método de separação de variáveis estudado no capítulo 2, são ferramentas importantíssimas para a obtenção da solução da equação do calor que veremos neste capítulo.

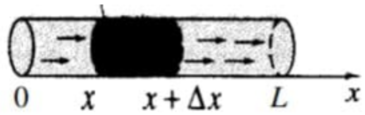
A equação que modela o fluxo de calor em uma barra metálica, é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde α^2 é uma constante conhecida como difusividade térmica do material do qual é feito a barra. Para demonstrar a função $u(x,t)$ que satisfaz a equação mencionada, deve-se considerar os seguintes princípios físicos:

- *No interior da barra, o fluxo de calor ocorre na direção do eixo x;*
- *A superfície lateral da barra é isolada, ou seja, não ocorre troca de calor com o meio externo;*
- *A barra é homogênea, isto é, sua massa por cada unidade de volume, é constante;*
- *O calor específico e a condutividade térmica do material do qual é feita a barra, são constantes.*

Figura 1 – barra homogênea



Fonte: ZILL, Dennis G., 1997.

Considere o fluxo de calor no interior de uma barra cilíndrica de comprimento L da figura acima, cuja a área da seção transversal é A e cuja a superfície lateral está isolada. Examinando a taxa de variação do calor numa fatia da barra entre as posições x e Δx, tem-se: Sendo ρ a densidade da barra, ou seja, sua massa por cada unidade de volume, então a massa dessa fatia é

$$m = \rho A \Delta x; \tag{31}$$

A quantidade de calor nessa fatia é dada por

$$Q(x,t) = cmu(x,t), \tag{32}$$

onde c é o calor específico e $u(x,t)$ é a temperatura;

A taxa de variação do fluxo de calor Q_t através da seção transversal, é proporcional a área A da seção transversal e a derivada parcial da temperatura em relação a x, isto é,

$$Q_t = -kAu_x(x,t). \tag{33}$$

Como o calor flui na direção em que a temperatura decresce, o sinal negativo em (33) utiliza-se para assegurar que Q_t seja positivo para $u_x < 0$ e negativa para $u_x > 0$. Substituindo (31) em (32) tem-se que

$$Q = c\rho A \Delta x u(x,t) \tag{34}$$

Por outro lado, quando o calor flui na direção positiva do eixo x, a partir de (33) observa-se que o calor aumenta na seção transversal a uma velocidade de

$$-kAu_x(x,t) - [-kAu_x(x+\Delta x,t)] = kA[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)]. \tag{35}$$

Derivando (34) em relação a t, tem-se que o fluxo de calor é dado por

$$Q_t = c\rho A \Delta x u_t(x,t). \tag{36}$$

Igualando (35) e (36), obtém-se

$$kA[u_x(x+\Delta x,t) - ux(x,t)] = c\rho A \Delta x u_t(x,t), \tag{37}$$

de onde se tem $\dfrac{kA}{c\rho A}\Big(\dfrac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x}\Big) = u_t(x,t)$, ou ainda

$$\frac{k}{c\rho}\Big(\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x}\Big) = u_t(x,t). \tag{38}$$

Calculando o limite de (38) quando $\Delta x \to 0$, obtém-se

$$\frac{k}{c\rho}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = u_t(x,t),$$

onde se obtém $\dfrac{k}{c\rho}u_{xx}(x,t) = u_t(x,t)$, isto é,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}(x,t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

onde $\dfrac{k}{c\rho} = \alpha^2$ e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = u_{xx}(x,t).$$

Da equação deduzida, temos então que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ representa a taxa de energia armazenada no interior da barra e é medida em [kcal]/[s] ou [w] e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ representa o fluxo líquido do calor, isto é, a quantidade de energia que entra e que sai no interior da barra é medido em $[{}^\circ k]/[m]$. Do estudo de funções de uma variável, vimos que se a derivada segunda de uma determinada função num determinado ponto fosse negativa, então a concavidade da função é voltada para baixo e isso implica então que a função admite um ponto de máximo e se a derivada segunda fosse positiva implica então que a concavidade da função é voltada para cima e com isso a função admite ponto de mínimo naquela ponto. Com isso, temos então que se $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$, então a temperatura no interior da barra num dado ponto é máxima e se $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$, a temperatura no interior da barra no respectivo ponto é mínima.

4.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO HOMOGÊNEAS

Considere uma barra homogênea de comprimento L com temperatura inicial igual a $f(x)$ em toda barra e cujo os extremos se mantém a uma temperatura igual a zero no instante $t > 0$. Se esta barra satisfaz os princípios físicos descritos acima, então sua temperatura $u(x,t)$ é determinada mediante o problema de condições iniciais e de contorno.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), 0 < x < L \end{cases} \tag{39}$$

Usando o método de Separação de Variáveis, pode-se escrever a temperatura $u(x,t)$ como produto de duas funções, onde uma depende da variável x e a outra depende do tempo t, lembrando que esse produto é não nulo, isto é:

$$u(x,t) = h(x) \cdot g(t) \neq 0 \tag{40}$$

Derivando a (40) duas vezes em relação a x e uma vez em relação a t, tem-se

$u_{xx}(x,t) = h''(x) \cdot g(t)$ e $u_t = h(x) \cdot g'(t)$ e substituindo as expressões obtidas na equação do calor, temos:

$$\alpha^2 h''(x) \cdot g(t) = h(x) \cdot g'(t) \tag{41}$$

Dividindo em ambos os membros de (41) a expressão $\alpha^2 h(x) \cdot g(t)$, tem-se:

$$\frac{\alpha^2 h''(x) \cdot g(t)}{\alpha^2 h(x) \cdot g(t)} = \frac{h(x) \cdot g'(t)}{\alpha^2 h(x) \cdot g(t)},$$

ou seja, $\dfrac{h''(x)}{h(x)} = \dfrac{g'(t)}{\alpha^2 g(t)}$. Note que se tem uma igualdade onde se vê que num dos membros tem-se expressão que depende apenas de x e no outro, depende apenas de t. Para que essa igualdade seja verdadeira, deve-se ter ambos os membros iguais a uma mesma constante real que será denotada por λ, onde λ é a constante de separação. Diante do exposto, tem-se então

$$\frac{h''(x)}{h(x)} = \frac{g'(t)}{\alpha^2 g(t)} = -\lambda,$$

de onde se tem $h''(x) + \lambda h(x) = 0$ e $g'(t) + \lambda\alpha^2 g(t) = 0$.

Como $u(x,t) = h(x) \cdot g(t)$, tem-se $u(0,t) = h(0) \cdot g(t) = 0$ e $u(L,t) = h(L) \cdot g(t) = 0$, ou seja $h(0) \cdot g(t) = 0$, $h(0) = 0$ e $h(L) \cdot g(t) = 0$, $h(L) = 0$.

A equação $h''(x) + \lambda h(x) = 0$ é uma EDO homogênea e constitui um problema de condições de contorno. Para encontrar a solução da mesma deve-se ter a equação característica dela e observar o que acontece com a constante de separação quando é negativa, nula e positiva.

Considere então $\lambda < 0$. A equação característica associada é $m^2 + \lambda = 0$, resolvendo a equação tem- se como soluções $m_1 = \sqrt{-\lambda}$ e $m_2 = -\sqrt{-\lambda}$.

Logo, a solução da EDO é da forma $h(x) = c_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}$.

Para $x = 0$ tem-se $c_1 + c_2 = 0$ e para $x = L$ tem-se $c_1 e^{L\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-L\sqrt{-\lambda}} = 0$.

Para determinar c_1 e c_2 resolve-se o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{L\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-L\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases}$$

Fazendo $c_1 = -c_2$ e substituindo na segunda equação, resulta $c_1(e^{L\sqrt{-\lambda}} - e^{-L\sqrt{-\lambda}}) = 0$, isto é, $c_1 = 0$. Como $c_2 = -c_1 = 0$, então a solução da EDO é $h(x) = 0$. Assim, para $\lambda < 0$, tem-se que $u(x,t) = 0$, pois $h(x) = 0$.

Para o caso em que $\lambda = 0$ tem-se a equação característica da forma $m^2 = 0$, cuja solução é $m_1 = m_2 = 0$. Desse modo, a solução da EDO é da forma $h(x) = c_1 + c_2 x$. Substituindo as condições dadas, tem-se que para $x = 0$, resulta então que $c_1 = 0$ e para $x = L$ tem-se que $c_2 = 0$. Dado que as constantes são nulas, então a solução da EDO é

$h(x) = 0$. Assim, para $\lambda = 0$, tem-se que $u(x,t) = 0$, pois $h(x) = 0$.

Para finalizar, vamos analisar o que acontece se $\lambda > 0$. Neste caso, a equação característica é da forma $m^2 + \lambda = 0$, cuja solução é $m_1 = i\sqrt{\lambda}$ e $m_2 = -i\sqrt{\lambda}$. A solução da EDO é dada por $h(x) = Acos(x\sqrt{\lambda}) + Bsen(x\sqrt{\lambda})$, onde $A = c_1 + c_2$ e $B = (c_1 - c_2)i$.

Para $x = 0$ tem-se que $A = 0$ e para $x = L$ tem-se $Bsen(L\sqrt{\lambda}) = 0$. Note que se tem um produto sendo igual a zero e isso ocorre se $B = 0$ ou $sen(L\sqrt{\lambda}) = 0$. Mas se o $B = 0$, tem-se solução nula. Para evitar isto, é necessário que se tenha $sen(L\sqrt{\lambda}) = 0$, isto é, $L\sqrt{\lambda} = n\pi$, ou seja, $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, para $n \in \mathbb{N}^*$.

Portanto, a solução da EDO é dada por $h(x) = Bsen\Big(x\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}}\Big)$, ou seja, $h(x) = Bsen\Big(\dfrac{n\pi x}{L}\Big)$.

Os valores de λ para os quais tem-se soluções não-nulas são os $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, isto é, para o caso em que $\lambda > 0$. Os valores de λ para os quais tem-se soluções não-nulas são chamados de autovalores e assim as soluções resultantes são as autofunções.

Substituindo $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ na equação $g'(t) + \lambda\alpha^2 g(t) = 0$, tem-se:

$$g'(t) + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} g(t) = 0,$$

que é uma EDO de variável separável, isto é, $\dfrac{g'(t)}{g(t)} = -\dfrac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}$, cuja solução é $g(t) = e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t + c_3}$, ou ainda, $g(t) = ke^{-\frac{\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}t}$, onde $k = e^{c_3}$. A solução desejada é escrita como $u_n(x,t) = c_n \cdot sen(\frac{n\pi x}{L}) \cdot e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}$, onde $c_n = B \cdot k$. Tendo em vista que $n \in \mathbb{N}^*$, implica que se tem uma solução distinta para cada n natural. Tais soluções são conhecidas como soluções fundamentais. Logo, pelo Princípio da Superposição de soluções, tem-se então que a solução geral do problema é dado por

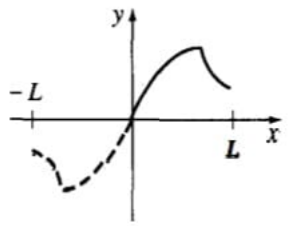
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t}. \tag{42}$$

Fazendo $t = 0$ na identidade acima, tem-se $u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)$. Como $u(x,0) = f(x)$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) = f(x)$. Esta última expressão, representa uma série de Fourier de senos.

Para determinar os c_n é necessário fazer uma extensão ímpar da $f(x)$, lembrando que ela está definida apenas para $0 \leq x \leq L$. Essa expansão permite obter uma função ímpar e periódica de período $T = 2L$ e, portanto, $c_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)dx$.

Conclui-se então que o problema de condições iniciais e de contorno descrito inicialmente tem como solução a série infinita da forma

Figura 2 – função impar



Fonte: ZILL, Dennis G., 1997.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) dx \Big) \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Exemplo 4.1 *Encontre a solução da equação do calor sujeita as condições dadas, considerando que a barra é de comprimento L*

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = x(L-x) \end{cases}.$$

Solução: Para determinar solução desejada é necessário encontrar os coeficientes c_n, isto é, $c_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L x(L-x) \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)dx$. Integrando por partes, considerando $z = x(L-x)$, $dz = (L-2x)dx$ e $dv = sen\Big(\dfrac{n\pi x}{L}\Big)dx$, $v = -\dfrac{L}{n\pi}cos\Big(\dfrac{n\pi x}{L}\Big)$, logo:

$$c_n = \frac{2}{L}\Big[-\frac{L}{n\pi}x(L-x)cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big|_0^L + \frac{L}{n\pi}\int_0^L (L-2x) \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big]dx,$$

de onde se tem então que $c_n = \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^L (L-2x) \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)dx$, pois $x(L-x) = 0$ para $x = L$ e $x = 0$. Integrando novamente por partes a integral resultante, sendo $z = L - 2x$, $dz = -2dx$ e $dv = cos\Big(\dfrac{n\pi x}{L}\Big)dx$, $v = \dfrac{L}{n\pi}sen\Big(\dfrac{n\pi x}{L}\Big)$,

$$c_n = \frac{2}{n\pi}\Big[\frac{L}{n\pi}(L-2x)sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big|_0^L + \frac{2L}{n\pi}\int_0^L sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)dx\Big],$$

de onde se tem que $c_n = \dfrac{4L}{n^2\pi^2}\displaystyle\int_0^L sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)dx$, pois $sen(n\pi) = sen(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Resolvendo esta última integral, obtém-se então que

$$c_n = -\frac{4L^2}{n^3\pi^3}cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big|_0^L = -\frac{4L^2}{n^3\pi^3}\Big(cos(n\pi) - cos(0)\Big) = -\frac{4L^2}{n^3\pi^3}\Big((-1)^n - 1\Big),$$

isto é,

$$c_n = \frac{4L^2}{n^3\pi^3}\Big(1-(-1)^n\Big) = \begin{cases} 0 \quad se \quad n \quad é \quad par \\ \dfrac{8L^2}{n^3\pi^3} \quad se \quad n \quad é \quad ímpar \end{cases},$$

ou seja, $c_{2k} = 0$ e $c_{2k-1} = \dfrac{8L^2}{(2k-1)^3\pi^3}$ e, portanto, a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{8L^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3} sen\frac{(2k-1)\pi x}{L} \cdot e^{-\frac{\alpha^2(2k-1)^2\pi^2}{L^2}t}.$$

■

4.2 BARRA COM EXTREMIDADES ISOLADAS

Considere uma barra homogênea de comprimento L com temperatura inicial igual a $f(x)$ em toda barra e cujo os extremos estão isolados, isto é, não ocorre troca de calor com o meio externo, portanto, o fluxo de calor através de uma seção reta da barra, é proporcional à taxa de variação da temperatura na direção x. Se esta barra satisfaz os princípios físicos descritos, então sua temperatura $u(x,t)$ é determinada mediante o problema de condições iniciais e de contorno.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}.$$

Usando o método de Separação de Variáveis, pode-se escrever a temperatura $u(x,t)$ como produto de duas funções, onde uma depende da variável x e a outra depende do tempo t, lembrando que esse produto é não nulo, isto é, $u(x,t) = h(x)\cdot g(t) \neq 0$.

Segue o mesmo procedimento anterior, de onde se tem $h''(x) + \lambda h(x) = 0$ e $g'(t) + \lambda\alpha^2 g(t) = 0$. Como $u_x(x,t) = h'(x)\cdot g(t)$, tem-se $u_x(0,t) = h'(0)\cdot g(t) = 0$ e $u_x(L,t) = h'(L)\cdot g(t) = 0$, ou seja $h'(0)\cdot g(t) = 0$, $h'(0) = 0$ e $h'(L)\cdot g(t) = 0$, $h'(L) = 0$.

A equação $h''(x) + \lambda h(x) = 0$ é uma EDO homogênea e constitui um problema de condições de contorno, isto é, $h'(0) = 0$ e $h'(L) = 0$. Para encontrar a solução da mesma deve-se ter a equação característica dela e observar o que acontece com a constante de separação quando é negativa, nula e positiva.

Considere o caso em que $\lambda < 0$. A equação característica associada é $m^2 + \lambda = 0$, resolvendo a equação tem-se como soluções $m_1 = \sqrt{-\lambda}$ e $m_2 = -\sqrt{-\lambda}$. A referida EDO tem como solução geral $h(x) = c_1e^{x\sqrt{-\lambda}} + c_2e^{-x\sqrt{-\lambda}}$, cuja derivada primeira é

$$h'(x) = \sqrt{-\lambda}\cdot c_1e^{x\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda}\cdot c_2e^{-x\sqrt{-\lambda}}.$$

Substituindo $x = 0$ e $x = L$ na derivada, tem-se:

$h'(0) = \sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2)$, ou seja, $\sqrt{-\lambda}(c_1 - c_2) = 0$, pois $h'(0) = 0$. Então $c_1 - c_2 = 0$. Por outro lado,

$$h'(L) = \sqrt{-\lambda}\Big(c_1 e^{L\sqrt{-\lambda}} - c_2 e^{-L\sqrt{-\lambda}}\Big) = 0,$$

pois $h'(L) = 0$. Logo temos o seguinte sistema de equações $\begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ c_1 e^{L\sqrt{-\lambda}} - c_2 e^{-L\sqrt{-\lambda}} = 0. \end{cases}$ Resolvendo o sistema de equações formado tem-se então que $c_1 = c_2 = 0$, o que implica que para $\lambda < 0$ a solução geral da EDO é $h(x) = 0$.

Considerando agora o caso em que $\lambda = 0$, tem-se que sua equação característica é da forma $m^2 = 0$, e então $m_1 = m_2 = 0$ e, portanto, a solução geral da EDO é dada por $h(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x}$, ou seja, $h(x) = c_1 + c_2 x$. Derivando esta expressão, tem-se que $h'(x) = c_2$. Tendo em vista as condições de contorno, tem-se que $h'(0) = h'(L) = c_2 = 0$, ou seja, $c_2 = 0$. Dado que $c_2 = 0$, então a solução geral da EDO é dada por $h(x) = c_1$. Tais condições de contorno não permitem determinar de forma específica o valor de c_1, o que implica que é um valor arbitrário. Portanto, $\lambda = 0$ constitui um autovalor tendo como autofunção correspondente $h(x) = c_1$. Substituindo $\lambda = 0$ em $g'(t) + \lambda\alpha^2 g(t) = 0$, tem-se que $g'(t) = 0$, cuja solução é $g(t) = c_3$, sendo c_3 uma constante.

Portanto, para $\lambda = 0$, a solução da equação do calor é da forma $u_0(x,t) = c_1 \cdot c_3 = \dfrac{c_0}{2}$. Mas porque escrever esta solução como $u_0(x,t) = \dfrac{c_0}{2}$? Ao final desta seção será respondida esta questão.

Agora, para o caso em que $\lambda > 0$, tem-se que a equação característica associada é da forma $m^2 + \lambda = 0$, cuja solução é $m_1 = i\sqrt{\lambda}$ e $m_2 = -i\sqrt{\lambda}$. A solução geral da EDO é dada por $h(x) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}$ ou $h(x) = Acos(x\sqrt{\lambda}) + Bsen(x\sqrt{\lambda})$, onde $A = c_1 + c_2$ e $B = (c_1 - c_2)i$. Derivando $h(x) = Acos(x\sqrt{\lambda}) + Bsen(x\sqrt{\lambda})$, tem-se $h'(x) = -\sqrt{\lambda}Asen(x\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}Bcos(x\sqrt{\lambda})$.

Para $x = 0$, tem-se então $h'(0) = \sqrt{\lambda}B = 0$, isto é, $\sqrt{\lambda}B = 0$ de onde se conclui que $B = 0$. Para $x = L$, tem-se $h'(L) = -\sqrt{\lambda}Asen(L\sqrt{\lambda}) = 0$, ou seja, $-\sqrt{\lambda}Asen(L\sqrt{\lambda}) = 0$. Para que este produto seja nulo, deve-se ter $\sqrt{\lambda} = 0$, ou $A = 0$, ou $sen(L\sqrt{\lambda}) = 0$. Mas $\lambda \neq 0$, pois $\lambda > 0$. Se o $A = 0$, então $h(x) = 0$, o que implica que a solução da equação do calor é nula, ou seja, $u(x,t) = h(x) \cdot g(t) = 0$. Como o objetivo é determinar soluções não nulas, então, A deve ser diferente de zero. Portanto, $-\sqrt{\lambda}Asen(L\sqrt{\lambda}) = 0$ se $sen(L\sqrt{\lambda}) = 0$, de onde se tem então que $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Então, a solução da referida EDO, é dada por $h(x) = Acos\Big(\dfrac{n\pi x}{L}\Big)$. Substituindo $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ em $g'(t) + \lambda\alpha^2 g(t) = 0$, obtém-se $g'(t) + \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}\alpha^2 g(t) = 0$, que é uma EDO de variável separável cuja solução é dada por $g(t) = ke^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}$, onde $k = e^{c_3}$.

Logo, a solução desejada é escrita como

$$u_n(x,t) = u_0(x,t) + c_n \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t},$$

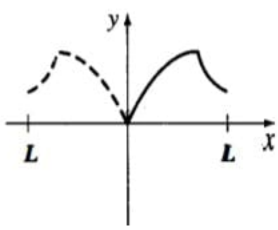
onde $c_n = A \cdot k$. Tendo em vista que $n \in \mathbb{N}^*$, implica que se tem uma solução distinta para cada n natural. Tais soluções são conhecidas como soluções fundamentais. Logo, pelo Princípio da Superposição de soluções, tem-se então que a solução geral do problema é dado por

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t}. \tag{43}$$

Fazendo $t = 0$ na identidade acima, tem-se $u(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)$. Mas, como $u(x,0) = f(x)$, então $\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) = f(x)$. Esta última expressão, representa uma série de Fourier de cossenos. Com isso fica evidente que é necessário escrever $u_0(x,t)$ como $\frac{c_0}{2}$ em vez de ser escrita como $k \cdot B$, o que poderia dificultar enxergar a expressão que representa a série de Fourier de cossenos.

Para determinar c_0 e c_n é necessário fazer uma extensão par da $f(x)$, lembrando que ela está definida apenas para $0 \leq x \leq L$. Essa expansão permite obter uma função par e periódica de período $T = 2L$ e, portanto, $c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) dx$ e $c_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) dx$.

Figura 3 – função par



Fonte: ZILL, Dennis G., 1997.

Conclui-se então que o problema de condições iniciais e de contorno descrito inicialmente tem como solução a série da forma

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} t}. \tag{44}$$

Exemplo 4.2 *Determine uma solução formal do problema com condições de contorno e* *iniciais dado por* $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^x, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ *sendo* $\alpha^2 = 1$.

Solução: As condições de contorno dadas indicam que se trata de um problema de fluxo de calor em uma barra de extremidades isoladas, logo a solução é dada por

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t},$$

onde $c_0 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)dx$ e $c_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)dx$. Como $f(x) = e^x$ e $L = \pi$, tem-se

$$c_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x dx = \frac{2}{\pi}\Big(e^{\pi} - 1\Big),$$

e

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \cdot cos(nx)dx.$$

Integrando por partes, tem-se $z = e^x$, $dz = e^x dx$ e $dv = cos(nx)$, ou seja, $v = \frac{1}{n}sen(nx)$ e, portanto,

$$c_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^x}{n}sen(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^x sen(nx)dx\right],$$

onde se tem que $c_n = -\dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} e^x sen(nx)dx$, pois $sen(n\pi) = sen(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Integrando novamente por partes, sendo $z = e^x$, $dz = e^x dx$ e $dv = sen(nx)dx$, ou seja, $v = -\frac{1}{n}cos(nx)$. Deste modo,

$$c_n = -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{e^x}{n}cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^x cos(nx)dx\right],$$

ou seja, $c_n = \dfrac{2}{n^2\pi}\Big(e^{\pi}(-1)^n - 1\Big) - \dfrac{2}{n^2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} e^x cos(nx)dx$, lembrando que $cos(n\pi) = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Note que $c_n = \dfrac{2}{n^2\pi}\Big(e^{\pi}(-1)^n - 1\Big) - \dfrac{1}{n^2} \cdot c_n$, ou seja, $c_n = \dfrac{2}{\pi(1+n^2)}\Big(e^{\pi}(-1)^n - 1\Big)$.

Portanto, a solução do problema é escrita da seguinte forma

$$u(x,t) = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1 + n^2} \cdot cos(nx) \cdot e^{-n^2 t}.$$

■

4.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO HOMOGÊNEAS

Até então, viu-se apenas o problema do fluxo de calor em que os extremos da barra se mantém a temperatura constante igual a zero para todo $t > 0$. As condições de contorno vistas, foram sempre homogêneas tanto para o caso em que os extremos da barra se mantinham a temperatura igual a zero, bem como para o caso em que os extremos se mantinham isolados, ou seja, não havendo troca de calor entre os extremos e o meio ambiente. Nesta seção, será abordado o caso das condições de contorno não homogêneas.

Considere uma barra homogênea de comprimento L, onde uma das extremidades da barra é mantida a temperatura constante T_1 e a outra a temperatura T_2. Logo, as condições de contorno e iniciais são $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = T_1 \quad e \quad u(L,t) = T_2, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$

Para resolver o problema proposto, torna-se necessário reduzir o mesmo a um problema com condições de contorno homogêneas admitindo que quando $t \to \infty$ é alcançada uma temperatura estacionária $v(x)$, que independe do tempo t. Dado que $v(x)$ deve satisfazer a equação do calor, tem-se que $\alpha^2 v''(x) = 0$, ou seja, $v''(x) = 0$, $0 < x < L$. Como $v(x)$ só depende de x, sua derivada em relação a t é nula, daí a razão de se ter $\alpha^2 v''(x) = 0$. Integrando a expressão $v''(x) = 0$ duas vezes, tem-se $v(x) = Ax + B$. Como $v(x)$ deve satisfazer a equação do calor, então $v(0) = T_1$ e $v(L) = T_2$.

Substituindo $x = 0$ e $x = L$ em $v(x) = Ax + B$ tem-se $v(0) = A.0 + B = B$, como $v(0) = T_1$ então $B = T_1$. Para $x = L$, tem-se $v(L) = A.L + B$, mas $B = T_1$ e $v(L) = T_2$, então $A.L + T_1 = T_2$, ou seja, $A = \dfrac{T_2 - T_1}{L}$.

A solução da equação do estado estacionário é dada por

$$v(x) = \Big(\frac{T_2 - T_1}{L}\Big)x + T_1.$$

Pelo que pode-se expressar $u(x,t)$ como a soma da temperatura do estado estacionário com a temperatura transiente $w(x,t)$, isto é, $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$. O problema admite solução quando se determina a temperatura transiente, isto é, $w(x,t)$. As derivadas parciais de $u(x,t)$ em relação a x e a t, são $u_{xx}(x,t) = w_{xx}(x,t)$ e $u_t(x,t) = w_t(x,t)$. Note que $v''(x) = v'(t) = 0$. Substituindo as derivadas parciais obtidas na equação do calor, tem-se $\alpha^2 w_{xx}(x,t) = w_t(x,t)$.

Da equação $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, tem-se $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$. Fazendo $x = 0$ tem-se $w(0,t) = u(0,t) - v(0)$, mas $u(0,t) = T_1$ e $v(0) = T_1$, logo $w(0,t) = 0$. Fazendo $x = L$, tem-se $w(L,t) = u(L,t) - v(L)$, como $u(L,t) = T_2$ e $v(L) = T_2$, resulta então $w(L,t) = 0$. Agora, para $t = 0$ tem-se $w(x,0) = u(x,0) - v(x)$, mas $u(x,0) = f(x)$, logo $w(x,0) = f(x) - v(x)$. Assim a solução da temperatura transiente ou transitória é encontrada resolvendo o problema $\begin{cases} \alpha^2 w_{xx}(x,t) = w_t(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ w(0,t) = 0 \quad e \quad w(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ w(x,0) = f(x) - v(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$

que é exatamente o problema do calor em uma barra homogênea cuja solução é dada por

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t},$$

onde $c_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L \Big(f(x) - v(x)\Big) \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)dx$, conforme vimos para o caso homogêneo.

Então, a solução do problema original é dada por

$$u(x,t) = \Big(\frac{T_2 - T_1}{L}\Big)x + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}.$$

Exemplo 4.3 *Determine uma solução formal do problema com condições de contorno e iniciais dado por* $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \;\; e \;\; u(\pi,t) = 3\pi, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ *onde* $\alpha^2 = 1$.

Solução: Diante do exposto, tem-se $T_1 = 0$, $T_2 = 3\pi$, $L = \pi$ e $f(x) = 0$. Como $v(x) = \Big(\dfrac{T_2 - T_1}{L}\Big)x + T_1$, então $v(x) = 3x$. Dado que $w(x,0) = f(x) - v(x)$, então $w(x,0) = -3x$. Logo $c_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} -3x \cdot sen(\frac{n\pi x}{\pi})dx$, isto é, $c_n = -\dfrac{6}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} xsen(nx)dx$. Resolvendo a integral resultante pelo método de integração por partes, sendo $z = x$, $dz = dx$ e $dy = sen(nx)dx$, $y = -\dfrac{1}{n}cos(nx)$,

$$c_n = -\frac{6}{\pi}\Big[-\frac{x}{n}cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^x cos(nx)dx\Big],$$

ou seja,

$$c_n = -\frac{6}{\pi}\Big[-\frac{\pi}{n}cos(\pi x) + \frac{1}{n^2}sen(nx)\Big|_0^{\pi}\Big],$$

de onde se tem então que $c_n = \dfrac{6}{n}(-1)^n$ pois $sen(n\pi) = sen(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Logo, a solução do problema proposto é dada por

$$u(x,t) = 3x + 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \cdot sen(nx) \cdot e^{-n^2t}.$$

■

4.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO MISTAS

Uma pergunta natural a se fazer é a seguinte: Se tivermos uma barra em que um dos extremos dela se mantém a temperatura constante igual a T e o outro se mantém isolado em todo $t > 0$, como se encontra a solução do referido problema? Tendo em vista que um dos extremos se mantém a temperatura constante e o outro isolado, tem-se então um problema misto do fluxo de calor na referida barra. Portanto, para responder a pergunta, vejamos o seguinte:

Considere uma barra homogênea de comprimento L onde um dos extremos dela é mantida a temperatura T fixa e a outra é isolada, neste caso as condições de contorno são da forma $u(0,t) = T$ e $u_x(L,t) = 0$, $\forall t > 0$. Seja $f(x)$ a temperatura inicial em toda barra, o fluxo de calor através de uma seção reta da barra, é proporcional à taxa de variação da temperatura na direção x. Se esta barra satisfaz os princípios físicos descritos, então sua temperatura $u(x,t)$ é determinada mediante o problema de condições iniciais e de contorno, supondo que $T = 0$, tem-se então
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \quad e \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}.$$

Usando o método de Separação de Variáveis, pode-se escrever a temperatura $u(x,t)$ como produto de duas funções, onde uma depende da variável x e a outra depende do tempo t, lembrando que esse produto é não nulo, isto é, $u(x,t) = h(x) \cdot g(t) \neq 0$, cuja derivada primeira em relação a x é dada por $u_x(x,t) = h'(x) \cdot g(t)$.

Derivando a expressão $u(x,t) = h(x) \cdot g(t)$ duas vezes em relação a x e uma vez em relação a t, tem-se
$$u_{xx}(x,t) = h''(x) \cdot g(t),$$
e
$$u_t = h(x) \cdot g'(t).$$
Substituindo as expressões obtidas na equação do calor, temos,
$$\alpha^2 h''(x) \cdot g(t) = h(x) \cdot g'(t).$$
Dividindo a igualdade acima pela expressão $\alpha^2 h(x) \cdot g(t)$, tem-se
$$\frac{h''(x)}{h(x)} = \frac{g'(t)}{\alpha^2 g(t)} = -\lambda,$$
de onde se obtém duas equações diferenciais ordinárias com condições de contorno da forma
$$\begin{cases} h''(x) + \lambda h(x) = 0, \quad h(0) = 0, \quad h'(L) = 0 \\ g'(t) + \lambda \alpha^2 g(t) = 0 \end{cases}.$$

As condições de contorno $h(0) = 0$ e $h'(L) = 0$ são obtidas a partir de $u(0,t) = h(0) \cdot g(t) = 0$ e $u_x(L,t) = h'(L) \cdot g(t) = 0$.

Da equação $h''(x) + \lambda h(x) = 0$ obtém-se as seguintes soluções considerando os casos em que a constante de separação é negativa, nula e positiva, conforme foi demonstrado mais acima, ou seja, para o caso homogêneo e também para o caso da barra com extremidades isoladas.

Se $\lambda < 0$: $h(x) = c_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}$. Aplicando as condições de contorno, tem-se, para $x = 0$, então $c_1 + c_2 = 0$. Derivando a expressão $h(x) = c_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}$, tem-se $h'(x) = \sqrt{-\lambda} \cdot c_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda} \cdot c_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}$. Para $x = L$ tem-se $h'(L) = \sqrt{-\lambda} \cdot c_1 e^{L\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda} \cdot c_2 e^{-L\sqrt{-\lambda}}$, como $h'(L) = 0$ então, $\sqrt{-\lambda}\Big(c_1 e^{L\sqrt{-\lambda}} - c_2 e^{-L\sqrt{-\lambda}}\Big) = 0$. Fica a cargo do leitor conferir que o sistema de equações formado por $c_1 + c_2 = 0$ e $\sqrt{-\lambda}\Big(c_1 e^{L\sqrt{-\lambda}} - c_2 e^{-L\sqrt{-\lambda}}\Big) = 0$ tem como solução $c_1 = c_2 = 0$ e que a solução geral da EDO é dada por $h(x) = 0$.

Se $\lambda = 0$, a equação característica associada é dada por $m^2 = 0$, cuja solução é $m_1 = m_2 = 0$, pelo que a solução da EDO é da forma $h(x) = c_1 + c_2 x$. Aplicando as condições de contorno tem-se então que para $x = 0$, $h(0) = c_1 + c_2.0 = c_1$, como $h(0) = 0$, então $c_1 = 0$. Como $c_1 = 0$, então $h(x) = c_2 x$. Derivando esta expressão, tem-se $h'(x) = c_2$. Para $x = L$, tem-se $h'(L) = c_2$. Mas $h'(L) = 0$, ou seja, $c_2 = 0$, logo para $\lambda = 0$, tem-se $h(x) = 0$.

Se $\lambda > 0$, a equação característica associada é $m^2 + \lambda = 0$, tendo como soluções $m_1 = e^{i\sqrt{\lambda}x}$ e $m_2 = e^{-i\sqrt{\lambda}x}$ e portanto, a solução da EDO é dada por

$$h(x) = Acos\Big(x\sqrt{\lambda}\Big) + Bsen\Big(x\sqrt{\lambda}\Big).$$

Para $x = 0$, $h(0) = A$. Como $h(0) = 0$, então $A = 0$. Dado que $A = 0$, então

$$h(x) = Bsen\Big(x\sqrt{\lambda}\Big).$$

Derivando esta expressão, tem-se

$$h'(x) = \sqrt{\lambda}Bcos\Big(x\sqrt{\lambda}\Big),$$

substituindo $x = L$, resulta que $h'(L) = \sqrt{\lambda}Bcos(L\sqrt{\lambda})$. Mas, $h'(L) = 0$, então

$$\sqrt{\lambda}Bcos\Big(L\sqrt{\lambda}\Big) = 0,$$

de onde se tem então que $cos(L\sqrt{\lambda}) = 0$, ou seja, $L\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, isto é,

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4L^2}(2n+1)^2,$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$.

Portanto, a solução da EDO é dada por $h(x) = Bsen\Big(\sqrt{\frac{\pi^2}{4L^2}(2n+1)^2}x\Big)$, ou ainda, $h(x) = Bsen\Big(\dfrac{\pi(2n+1)}{2L}x\Big)$.

Substituindo $\lambda = \dfrac{\pi^2}{4L^2}(2n+1)^2$ na EDO $g'(t) + \lambda\alpha^2 g(t) = 0$, tem-se $g'(t) + \dfrac{\pi^2}{4L^2}(2n+1)^2\alpha^2 g(t) = 0$, que é uma EDO de variável separável cuja solução é dada por $g(t) = ke^{-\dfrac{\pi^2(2n+1)^2\alpha^2}{4L^2}t}$, onde $k = e^{c_3}$.

Portanto, a solução desejada é escrita como

$$u_{2n+1}(x,t) = c_{2n+1} \cdot sen\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\Big) \cdot e^{-\frac{\pi^2(2n+1)^2\alpha^2}{4L^2}t},$$

onde $c_{2n+1} = k \cdot B$ e pelo princípio da superposição de soluções, tem-se então

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cdot sen\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\Big) \cdot e^{-\frac{\pi^2(2n+1)^2\alpha^2}{4L^2}t}.$$

Substituindo $t = 0$ em $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cdot sen\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\Big) \cdot e^{-\frac{\pi^2(2n+1)^2\alpha^2}{4L^2}t}$, tem-se $u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \cdot sen\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\Big)$, como $u(x,0) = f(x)$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} \cdot sen\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\Big) = f(x)$ que é uma série de Fourier de senos de índices ímpares da $f(x)$. Para determinar os c_{2n+1} é necessário fazer uma extensão da $f(x)$ até $2L$ para que seja simétrica em relação a reta $x = L$, lembrando que ela está definida apenas para $0 \leq x \leq L$. Deste modo,

$$c_{2n+1} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot sen\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\Big)dx.$$

Exemplo 4.4 *Determine uma solução formal do problema de condições de contorno e iniciais dado por* $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 \quad e \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 3, \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.

Solução: As condições de contorno dadas, indicam que se trata de um problema de fluxo de calor em uma barra de extremidades isoladas, logo a solução é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cdot sen\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\Big) \cdot e^{-\frac{\pi^2(2n+1)^2\alpha^2}{4L^2}t}.$$

Dado que $c_{2n+1} = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) \cdot sen\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2L}x\Big)dx$, $L = \pi$ e $f(x) = 3$, então

$c_{2n+1} = \dfrac{6}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} sen\Big(\frac{\pi(2n+1)}{2\pi}x\Big)dx$, ou seja, $c_{2n+1} = \dfrac{6}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} sen\Big(\frac{2n+1}{2}x\Big)dx$, resolvendo-se a integral resultante, tem-se então que

$$c_{2n+1} = -\frac{12}{\pi(2n+1)}\, cos\Big(\frac{2n+1}{2}x\Big)\Big|_0^{\pi},$$

de onde se tem então que $c_{2n+1} = \dfrac{12}{\pi(2n+1)}$.

Assim, a solução do problema é escrita da seguinte forma

$$u(x,t) = \frac{12}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot sen\Big(\frac{2n+1}{2}x\Big)\cdot e^{-(2n+1)^2 t}.$$

∎

Mas então, se $T_1 \neq 0$ como seria a solução do problema cujas condições de contorno são mistas? Considerando uma barra homogênea de comprimento L onde um dos extremos dela é mantida a temperatura T não nula fixa e a outra é isolada, neste caso as condições de contorno são da forma $u(0,t) = T_1$ e $u_x(L,t) = 0$, $\forall t > 0$. Seja $f(x)$ a temperatura inicial em toda barra, o fluxo de calor através de uma seção reta da barra, é proporcional à taxa de variação da temperatura na direção x. Se esta barra satisfaz os princípios físicos descritos, então sua temperatura $u(x,t)$ é determinada mediante o problema de condições iniciais e de contorno $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = T_1 \quad e \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$.

Como o problema é não homogêneo, torna-se necessário reduzir o mesmo para um problema homogêneo já visto anteriormente, admitindo que quando $t \to \infty$ é alcançada uma temperatura estacionária $v(x)$, que independe do tempo t. Dado que $v(x)$ deve satisfazer a equação do calor, tem-se que $\alpha^2 v''(x) = 0$, $v''(x) = 0$, $0 < x < L$. Integrando esta última expressão duas vezes, tem-se $v(x) = Ax + B$. Desde que a $v(x)$ satisfaz a equação do calor, então $v(0) = T_1$ e $v'(L) = A$. De onde se tem que $A = 0$ e $B = T_1$, o que implica que $v(x) = T_1$, que é a temperatura do estado estacionário.

Escrevendo $u(x,t)$ como a soma de temperatura estacionária com a temperatura transitória $w(x,t)$, tem-se então que $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$. As derivadas parciais da igualdade acima são $u_{xx}(x,t) = v''(x) + w_{xx}(x,t)$ e $u_t(x,t) = w_t(x,t)$. Substituindo essas derivadas parciais na equação do calor, tem-se então que $\alpha^2(v''(x) + w_{xx}(x,t)) = w_t(x,t)$, o que implica que $\alpha^2 w_{xx}(x,t) = w_t(x,t)$, pois $v''(x) = 0$. De $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, tem-se que $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$. Fazendo $x = 0$, tem-se que $w(0,t) = u(0,t) - v(0)$, mas $u(0,t) = T_1$ e $v(0) = T_1$, logo $w(0,t) = T_1 - T_1 = 0$. Derivando $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$

em relação a x, tem-se então que $w_x(x,t) = u_x(x,t) - v'(x)$. Fazendo $x = L$, tem-se $w_x(L,t) = u_x(L,t) - v'(L)$, mas $u_x(L,t) = 0$ e $v'(L) = A = 0$, logo $w_x(L,t) = 0 - 0 = 0$. Fazendo agora $t = 0$, tem-se então que que $w(x,0) = u(x,0) - v(x)$, mas $u(x,0) = f(x)$ e $v(x) = T_1$, o que implica que $w(x,0) = f(x) - T_1$. Portanto, a solução da temperatura transitória é dada resolvendo o problema $\begin{cases} \alpha^2 w_{xx}(x,t) = w_t(x,t), & \forall t > 0 \quad e \quad 0 < x < L \\ w(0,t) = w_x(L,t) = 0, & \forall t > 0 \\ w(x,0) = f(x) - T_1, 0 \leq x \leq L \end{cases}$
que é exatamente o problema resolvido anteriormente cuja solução é dada por

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} \cdot sen\Big(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\Big) \cdot e^{-\frac{\pi^2(2n-1)^2\alpha^2}{4L^2}t},$$

onde se tem que

$$c_{2n-1} = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x) - T_1) sen\Big(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\Big)dx.$$

Segue então que a solução desejada é dada por

$$u(x,t) = T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n-1} \cdot sen\Big(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\Big) \cdot e^{-\frac{\pi^2(2n-1)^2\alpha^2}{4L^2}t}.$$

Exemplo 4.5 *Considere uma barra uniforme de comprimento $L = 30$ com distribuição inicial de temperatura dada por $f(x) = 30 - x$. Suponha que a temperatura na extremidade $x = 0$ é mantida a $40°C$, enquanto a extremidade $x = L$ está isolada, de modo que não há fluxo de calor através dela. Encontre a temperatura $u(x,t)$, onde $\alpha^2 = 1$*

$$\begin{cases} u(0,t) = 40, & \forall t > 0 \\ u_x(L,t) = 0, & \forall t > 0 \\ f(x) = 30 - x, & 0 < x < 30 \end{cases}.$$

Solução: Note então que $L = 30$ e $T_1 = 40$, deste modo

$$c_{2n-1} = -\frac{1}{15}\int_0^{30} (10 + x) sen\Big(\frac{\pi(2n-1)}{60}x\Big)dx,$$

aplicando o método de integração por partes, tem-se então que

$$c_{2n-1} = -\frac{1}{15}\Big[-\frac{60(10+x)}{\pi(2n-1)}cos\Big(\frac{\pi(2n-1)}{60}x\Big) + \frac{3600}{\pi^2(2n-1)^2}sen\Big(\frac{\pi(2n-1)}{60}x\Big)\Big]\Big|_0^{30},$$

e que ao substituir os limites de integração tem-se

$$c_{2n-1} = \frac{40}{\pi^2(2n-1)^2}\Big(6(-1)^n - \pi(2n-1)\Big)$$

e que a solução geral é dada por

$$u(x,t) = 40 + \frac{40}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\Big(6(-1)^n - \pi(2n-1)\Big)\cdot sen\Big(\frac{\pi(2n-1)}{60}x\Big)\cdot e^{-\frac{\pi^2(2n-1)^2}{3600}t}.$$

■

4.5 UMA FONTE DE CALOR EXTERNA

Considere o problema do fluxo de calor em uma barra metálica de comprimento L e que esteja em contato com uma fonte ou um sumidouro externo de calor. Nessas condições, a equação do calor é dada por $u_t = \alpha^2 u_{xx} + s(x)$, onde o termo $s(x)$ funciona como agente externo sendo positivo para uma fonte e negativo no caso de ser um sumidouro. Supondo então que as condições de contorno são $u(0,t) = T_1$ e $u(L,t) = T_2$, cuja condição inicial dada por $u(x,0) = f(x)$, a solução do problema é dada da seguinte forma: $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, onde $v(x)$ é a temperatura do estado estacionário sendo então a solução do problema de contorno $\begin{cases} \alpha^2 v''(x) = -s(x) \\ v(0) = T_1, v(L) = T_2 \end{cases}$
e $w(x,t)$ é a temperatura transitória.

De $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ tem-se $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$. Para $x = 0$ tem-se $w(0,t) = u(0,t) - v(0)$, como $u(0,t) = T_1$ e $v(0) = T_1$, daí segue então que $w(0,t) = 0$. Para $x = L$ tem-se $w(L,t) = u(L,t) - v(L)$, como $u(L,t) = T_2$ e $v(L) = T_2$, logo $w(L,t) = 0$. Por outro lado, para $t = 0$ tem-se $w(x,0) = u(x,0) - v(x)$, como $u(x,0) = f(x)$ então $w(x,0) = f(x) - v(x)$.

As derivadas parciais de $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ são $u_t(x,t) = w_t(x,t)$ e $u_{xx}(x,t) = v''(x) + w_{xx}(x,t)$. Mas $v''(x) = -\frac{1}{\alpha^2}s(x)$, logo $u_{xx}(x,t) = -\frac{1}{\alpha^2}s(x) + w_{xx}(x,t)$. Substituindo estas derivadas parciais em $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) + s(x)$, tem-se $w_t(x,t) = \alpha^2\Big(-\frac{1}{\alpha^2}s(x) + w_{xx}(x,t)\Big) + s(x)$, isto é, $w_t(x,t) = -s(x) + \alpha^2 w_{xx}(x,t) + s(x)$, de onde se tem então que

$$w_t(x,t) = \alpha^2 w_{xx}(x,t).$$

Portanto, a solução da temperatura transitória (transiente) é encontrada ao resolver o problema

$$\begin{cases} w_t(x,t) = \alpha^2 w_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad \forall t > 0 \\ w(x,0) = f(x) - v(x), 0 \le x \le L \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t},$$

sendo

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \Big(f(x) - v(x)\Big) \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)dx.$$

Segue então que a solução do problema inicial é dada por

$$u(x,t) = v(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t}.$$

Exemplo 4.6 *Suponha que* $\alpha^2 = 1$ *e* $s(x) = k$ *uma constante, encontre* $v(x)$*. Suponha que* $T_1 = T_2 = 0$*,* $L = 20$*,* $k = \frac{1}{5}$ *e* $f(x) = 0$*,* $0 < x < L$*, determine* $u(x,t)$*.*

Solução: Dado que $\alpha^2 v''(x) = -s(x)$, tem-se que $v''(x) = -k$. Integrando esta expressão duas vezes em relação a x, tem-se $v(x) = -k\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$. Como $v(0) = T_1 = 0$ tem-se $c_2 = 0$. Mas $v(L) = v(20) = T_2 = 0$, logo $-\frac{1}{5} \cdot \frac{20^2}{2} + 20c_1 = 0$, isto é, $-\frac{400}{10} + 20c_1 = 0$, daí que $c_1 = 2$. Segue então que, $v(x) = -\frac{x^2}{10} + 2x$.

Para determinar $u(x,t)$, é necessário encontrar a temperatura transitória, cuja solução é dada por

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big) \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}t},$$

sendo

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \Big(f(x) - v(x)\Big) \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)dx.$$

Como $f(x) = 0$ e $L = 20$, então

$$c_n = \frac{1}{10}\int_0^{20} \Big(\frac{x^2}{10} - 2x\Big) \cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)dx.$$

Integrando por partes, considerando $z = \frac{x^2}{10} - 2x$, então $dz = (\frac{x}{5} - 2)dx$ e $dy = sen\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)dx$, isto é, $y = -\frac{20}{n\pi}cos\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)$, segue então que,

$$c_n = \frac{1}{10}\Big[-\frac{20}{n\pi}\Big(\frac{x^2}{10} - 2x\Big) \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)\Big|_0^{20} + \frac{20}{n\pi}\int_0^{20}\Big(\frac{x}{5} - 2\Big) \cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)dx\Big],$$

que ao substituir os limites de integração, se anula a primeira expressão, resulta então que $c_n = \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^{20}\Big(\frac{x}{5}-2\Big)\cdot cos\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)dx$, integrando novamente por partes a integral resultante, sendo $z = \frac{x}{5} - 2$, isto é, $dz = \frac{1}{5}dx$ e $dy = cos\Big(\dfrac{n\pi x}{20}\Big)dx$, então, $y = \dfrac{20}{n\pi}sen\Big(\dfrac{n\pi x}{20}\Big)$. Logo, sendo

$$c_n = \frac{2}{n\pi}\Big[\frac{20}{n\pi}\Big(\frac{x}{5}-2\Big)\cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)\Big]\Big|_0^{20} - \frac{20}{n\pi}\cdot\frac{1}{5}\int_0^{20} sen\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)dx,$$

de onde se pode notar que ao substituir os limites de integração, a primeira expressão se anula, logo $c_n = -\dfrac{8}{n^2\pi^2}\displaystyle\int_0^{20} sen\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)dx$, integrando a expressão anterior, tem-se então que

$$c_n = \frac{160}{n^3\pi^3}\,cos\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)\Big|_0^{20} = \frac{160}{n^3\pi^3}\Big(cos(n\pi) - cos(0)\Big) = \frac{160}{n^3\pi^3}\Big((-1)^n - 1\Big).$$

Como $c_n = \begin{cases} 0, & se \quad n \quad é \quad par \\ -\dfrac{320}{n^3\pi^3} & se \quad n \quad é \quad ímpar \end{cases}$

Logo $c_{2k-1} = -\dfrac{320}{(2k-1)^3\pi^3}$, daí que a solução da temperatura transitória é dada por

$$w(x,t) = -\frac{320}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\cdot sen\Big(\frac{n\pi x}{20}\Big)\cdot e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{400}t}$$

e portanto, a solução do problema é dada por

$$u(x,t) = -\frac{x^2}{10} + 2x - \frac{320}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\cdot sen\Big(\frac{(2k-1)\pi x}{20}\Big)\cdot e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{400}t}.$$

■

4.6 EQUAÇÃO DO CALOR NA RETA

Nas seções anteriores deste capítulo vimos a solução da equação do calor via séries de Fourier. Tal procedimento foi aplicado considerando que a distribuição inicial da temperatura é uma $f(x)$ definida em um certo intervalo e periódica de um certo período T. Esta seção tem por finalidade explorar um pouco o problema de calor numa barra infinita. A distribuição inicial da temperatura no instante $t = 0$ continua sendo $f(x)$. Para encontrar a solução da equação do calor, será aplicada a Transformada de Fourier e a sua inversa. Como a função temperatura $u(x,t)$ é uma função de duas variáveis sendo x a posição ao longo da barra e t o tempo, se fixarmos a variável t teremos então que $u(x,t)$ passa a ser uma função de uma variável x. Deste modo, ao aplicarmos a Transformada de Fourier de $u(x,t)$ com relação a x, teremos então

$$\mathcal{F}(u(x,t))(\omega) = \hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx.$$

Pelas propriedades das Transformadas de Fourier vistas no capítulo 3, teremos então

$$\mathcal{F}(u_x(x,t)) = \mathcal{F}\Big(\frac{d}{dx}(u(x,t))\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}u(x,t)e^{-i\omega x}dx = i\omega\hat{u}(\omega,t).$$

$$\mathcal{F}(u_{xx}(x,t)) = \mathcal{F}\Big(\frac{d^2}{dx^2}(u(x,t))\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2}u(x,t)e^{-i\omega x}dx = -\omega^2\hat{u}(\omega,t).$$

$$\mathcal{F}(u_t(x,t)) = \mathcal{F}\Big(\frac{\partial}{\partial t}(u(x,t))\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)e^{-i\omega x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t).$$

Considere então o seguinte problema:

$$\begin{cases} u \in C^2\Big(\mathbb{R}\times(0,\infty)\Big) \cap C\Big(\mathbb{R}\times(0,\infty)\Big) \\ \alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{45}$$

Aplicando a Transformada de Fourier em ambos os membros de (45), tem-se: $\mathcal{F}(\alpha^2 u_{xx}(x,t)) = \mathcal{F}(u_t(x,t))$ e de acordo as propriedades mencionadas acima, segue então que

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t) = -\alpha^2\omega^2\hat{u}(\omega,t).$$

Aplicando a Transformada de Fourier em $u(x,0) = f(x)$, tem-se então que $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$. Diante do exposto, temos o seguinte problema a resolver

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\omega,t) + \alpha^2\omega^2\hat{u}(\omega,t) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R} \end{cases} . \tag{46}$$

Note então que a identidade (46) representa uma EDO linear em t pois o ω é uma constante. Tem-se ainda que se trata de um problema de valor inicial. A solução da EDO resultante é $\hat{u}(\omega,t) = c(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}$. Substituindo $t = 0$ na solução da EDO, obtém-se então que $c(\omega) = \hat{f}(\omega)$. Portanto, a solução particular da EDO é dada por

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}. \tag{47}$$

Aplicando a Transformada Inversa de Fourier em ambos membros de (47), isto é, $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\omega,t)) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t})$, segue que

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{-\alpha^2\omega^2 t}e^{i\omega x}d\omega. \tag{48}$$

A identidade (48) é a solução da Equação do Calor numa barra infinita e note que há uma grande diferença entre a solução encontrada para o caso de uma barra finita em relação ao caso da barra infinita. No primeiro caso, a solução da Equação do Calor era dada em função de uma Série de Fourier de senos ou de cossenos, enquanto que para o caso da barra infinita a solução é dada em função de uma integral imprópria.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo geral analisar o processo de fluxo de calor numa barra metálica homogênea e de forma específica avaliar os casos possíveis das condições de contorno bem como demonstrar a solução de cada condição de contorno estudado nesse trabalho usando o método de separação de variáveis, as séries de Fourier e as transformadas de Fourier.

É notário perceber-se ao longo deste trabalho que a função temperatura é uma função de duas variáveis, ou seja, para determinarmos a temperatura ao longo da barra seja finita ou infinita, precisamos da posição e do instante em que se pretende determinar a temperatura. Vimos diferentes condições de contorno e que dependendo do caso, a solução de cada problema foi encontrada usando o método de separação de variáveis e as séries de Fourier para o caso da barra finita e a transformada de Fourier para o caso da barra infinita. O método de separação de variáveis permitiu-nos reduzir uma Equação Diferencial Parcial para duas Equações Diferenciais Ordinárias, em que uma dependia somente de x e a outra dependia de t. Para a resolução das respectivas equações, foi necessário ter um conhecimento prévio sobre as Equações Diferenciais Ordinárias de variável separável e as Equações Diferenciais Ordinárias Lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes.

A Equação do Calor tem uma importância histórica muito grande, pois a partir dela o matemático e físico francês Jean-Baptiste Joseph Fourier desenvolveu as Séries de Fourier. A Transformada de Fourier que trouxemos neste trabalho são apenas noções básicas sem fazer um estudo profundo delas, pois o intuito era facilitar nossa comparação entre a solução da Equação do Calor obtida para o caso de uma barra finita e da barra infinita. É um tema vasto que se fôssemos explorar poderia ser um outro TCC, portanto, para quem quiser aprofundar seu estudo sobre as Transformadas de Fourier indicamos livros como (FIGUEIREDO, D. G. de., 1977) (IÓRIO, V., 2005), (RAMOS, E. E., 2008) ou (SANTOS, R. J., 2011), dentre outros.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos; JR.,Wilson Castro Ferreira. *Equações Diferenciais Com Aplicações.* São Paulo: Harbra, 1988.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. *Ecuaciones Diferenciales.* 3ª ed. México: McGraw-hill Interamericana.

BUDAK, B. M.; SAMARSKI, A. A.; TIJONOV, A. N. *Problemas de La Física Matemática , Tomo I.* URSS: Editorial Mir Moscú, 1984.

CHURCHILL, Ruel V. *Series de Fourier y Problemas de Contorno.* 2ª ed. México: McGraw-Hill Interamericana, 1977.

ÇENGEL, Yunus A.; PALM III, William J. *Ecuaciones Diferenciales Para Ingeniería y Ciencias.* México: McGraw-Hill Interamericana, 2014.

EDWARDS, C. Henry; PENNEY, David E. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores En la Frontera.* 4ª ed. México: Person, 2009.

ESPINOSA, José Ventura Becerril; MARTINEZ, David Elizarraraz. *Ecuaciones Diferenciales: Técnicas de Solución y Aplicaciones.* 1ª ed. México: Universidad Autonoma Metrópolitana Azcapotzalco, 2004.

FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq 1977.

IÓRIO, V. EDP: *Um Curso de Graduação.* 3ª ed. Brasília: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005.

INCROPERA, Frank P. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa.* 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

KREYSZIG, Erwin. *Matemática Superior Para Engenharia, vol. 1* 9ª ed. Rio de

Janeiro: LTC, 1973.

KISELOV, A.; KRASNOV, M.; MAKARENKO, G. *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* 4ª ed. URSS: Editorial Mir Moscú, 1984.

MOYA, Luz Marina; ROJAS, Edixon. *Ecuaciones Diferenciales: Técnicas de Resolución.* 1ª ed. Bogotá: Coordinación de Publicaciones de Facultad de Ciencias, 2020.

MITACC, Máximo; TORO, Luis. *Tópicos de Cálculo, vol. 2.* 3ª ed. Lima- Perú: FreeLibros, 2009.

NAGLE, R. Kent; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas Con Valores En La Frontera.* 4ª ed. México: Pearson, 2005.

RAMOS, Eduardo Espinoza. *Ecuaciones Diferenciales y Sus Aplicaciones Para Estudiantes de Ciencias y Ingeniería.* 6ª ed. Lima-Perú: FreeLibros, 2004.

RAMOS, Eduardo Espinoza. *Análisis Matemático IV Para Estudiantes de Ciencias Y Ingeniería.* 2ª ed. Lima- Perú: FreeLibros, 2008.

SANTOS, Reginaldo J. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução.* Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011.

SIMMONS, George F. *Cálculo Com Geometria Analítica, volume 2.* São Paulo: Pearson Makron Books, 1988.

SPIEGEL, Murray R. *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas.* 3ª ed. México: Prentice Hall, 1983.

ZILL, Dennis G. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, vol. 1: Ecuaciones Diferenciales.* 3ª ed. México: McGraw-Hill Interamericana, 2006.

ZILL, Dennis G. *Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones de Modelado.* 6ª ed. México: McGraw-Hill Interamericana, 1997.