**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA**

**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA**

**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ANTÓNIO MONTEIRO

# MATEMÁTICA FINANCEIRA NO INÍCIO DO INVESTIMENTO

REDENÇÃO-CE

2022

ANTÓNIO MONTEIRO

# MATEMÁTICA FINANCEIRA NO INÍCIO DO INVESTIMENTO

Trabalho de conclusão do curso apresentado à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira, como requisito para o recebimento de graduação em Licenciatura Plena em Matemática.

Orietador: Prof. Dr. Marcelo D. Dos Santos Amaral

REDENÇÃO-CE

2022

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Monteiro, António.

M774m

Matemática financeira no início do investimento / António Monteiro. - Redenção, 2022.
74f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Dário Dos Santos Amaral.

1. Matemática financeira. 2. Economia. 3. Investimentos - Análise. I. Título

CE/UF/BSP CDD 658.152

ANTÓNIO MONTEIRO

**A MATEMÁTICA FINANCEIRA NO INÍCIO DO INVESTIMENTO**

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 27/07/2022

**BANCA EXAMINADORA**

Marcelo Dário dos S. Amaral

**Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral (Orientador)**
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Joserlene Lima Pinheiro

**Prof. Dr. Joserlene Lima Pinheiro**
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Weslley Marinho Lozório

**Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório**
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos aqueles que desejam entrar no mundo de investimento, especialmente ao meu amor, a pessoa maravilhosa que esteve comigo este tempo todo, me apoiando e ao meu irmão Kiasisua pois, luto por ele.

# AGRADECIMENTOS

Os meus agradecimentos vão especialmente a Deus pelo seus cuidados a mim, pelo fôlego da vida, algo que geralmente como ser humano pecador, não sou merecedor. Porém, nem sempre é fácil sair da sua zona de conforto perto dos seus pais, familiares, amigos, namorada etc., ir em uma terra distante e começar tudo de novo, criando novas amizades, aprendendo novas regras de convivência que às vezes contrário aos seus padrões religiosas, morais e cívicos, pra mim isso significou uma dependência em Deus pois, ele tudo provê independentemente do local onde estiver os seus, quando confiamos nele presente estará para nos dar o melhor suporte.

Ao meu querido professor orientador Drº. Marcelo Dário Dos Santos Amaral que apesar das suas ocupações não pensou duas vezes ao aceitar a minha proposta de trabalho, por isso teve amabilidade de conduzir-me nesta pesquisa, que Deus conceda mais conhecimento de poder instruir muitos outros que assim, solicitar o seu auxílio no que concerne às pesquisas científicas.

A minha amada, meu amor, minha namorada a pessoa mais importante pra mim pois, a sua existência na minha vida especificamente estudantis isto é, desde o início do processo seletivo da UNILAB até ao término da minha graduação, me apoiou tanto em todos os sentidos e, continua ser essa pessoa maravilhosa na minha vida, ajudadora, compreensível, etc., acredito que levaria páginas detalhar cada suporte que tive do meu amor, que Deus continua nos cuidando que eu possa retribuir muito mais do que ela fez e faz por mim. Amor amo muito você.

Aos meus familiares especialmente os meus tios que me ajudaram na aquisição da passagem do meu país até ao Brasil, espero que continue fazendo isso a todos que precisam pois, não sabemos o amanhã de cada um então, cada pequenos gestos que a gente faz, pode ter uma enorme ressignificação futura.

Ao meus amigos, a minha nova família que o destino me deu, não foi por acaso mas, Deus permitiu que eu estivesse com tantas pessoas extraordinárias como Natanael Cassoma, Tomás Adão, Kongo Lubaki, André Fonseca, Zikas Nacacante, Ziana Nacacante, Paz Paulo, , Januário Domingos, Farias Cusseta, Kelvin Manuel, Gaspar Domingos, Cláudio Katyavala, Belchior Camela, Maiuca Seco, Cadidja, Áurea Ramos, Silvia De Carvalho, Sebastiana Manuel, Sebastião, etc.

Portanto, meus votos de agradecimento a todos quando fiz menção como também aqueles que por motivo de esquecimento não foram mencionados mas, continua ser importante na minha vida, que Deus vos cuide.

## RESUMO

A compreensão do atual sistema econômico é uma questão associada ao conhecimento da matemática financeira e comercial. Com a globalização no setor econômico mundial das sociedades modernas, torna-se complexa e necessária acompanhamento das variações econômicas propriamente no âmbito financeiro, como regimes de capitalização, amortização, empréstimo e descontos. O presente estudo delimita-se em apresentar aspectos teóricos e práticos fundamentais na compreensão das operações financeiras ocorridos no processo de investimento, com métodos financeiros que permitem avaliar e acompanhar a tomada de decisões, tal como o desencadear dessas operações. Com uma abordagem qualitativa, de caráter descritivo e explicativa embasada em materiais bibliográficos que abordam sobre a temática. Nesse aspecto metodológico analisou se que, a compreensão desses conceitos da matemática financeira apresentada permite monitorar e avaliar um determinado investimento, isto é, excluindo as possibilidades de fraudes bancárias, subsidiando no processo de escolha das propostas compatíveis com o perfil do investidor. Consequentemente, qualquer decisão financeira tomada no presente tem uma repercussão futura. Diante do exposto, o trabalho desempenha um papel nessa abordagem, baseado em apresentar ao público aspectos teóricos e práticos para avaliação do desempenho financeiro, mediante as complexidade e diversidades do setor financeiro, tal que promova uma educação financeira justa e sólida para o desenvolvimento econômico nacional.



**Palavras-Chave:** Matemática financeira. Economia. Investimento. Análise de Investimento. Métodos de análise de investimento.

## ABSTRACT

Understanding the current economic system is related with the knowledge of financial and commercial mathematics. With the globalization in the economic sector of modern societies, it becomes complex and necessary to monitor the economic variations, specifically in the financial sphere, such as the capitalization, amortization, loan and discounts regimes. This study presents the fundamental theoretical and practical aspects in the comprehension of financial transactions that occur in the investment process, with financial methods that allow evaluating and monitoring the decision-making, as well as the starting of these operations. This is a research with a qualitative approach, with a descriptive and explanatory format, based on the bibliographic materials that address the theme. In this methodological aspect, it was analyzed that the comprehension of the financial mathematics concepts that are presented allows monitoring and evaluating a certain investment, it means, excluding the possibilities of bank fraud and supporting the process of choosing proposals that are compatible with the investor's profile. Consequently, any financial decision taken in the present has a future repercussion. In this order, this research works in this approach, focused on presenting to the public theoretical and practical aspects for the evaluation of financial performance, considering the complexity and diversity of the financial sector, so that it promotes a fair and solid financial education for national economic development.



**Keywords:** Financial mathematics. Economy. Investment. Investment Analysis. Investment analysis methods.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

| | |
|---|---|
| UNILAB | Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira |
| ICEN | Instituto de Ciências Exatas e da Natureza |
| SAC | Sistema de Amortização Constante |
| SFA | Sistema Francês de Amortização |
| SP | Sistema Price |
| VPL | Valor Presente Líquido |
| TIR | Taxa Interna de Retorno |
| IL | Índice de Lucratividade |
| TR | Taxa de Rentabilidade |
| STN | Secretaria do Tesouro Nacional |
| BC | Banco Central |
| TMA | Taxa Mínima de Atratividade |
| TP | Títulos Públicos |
| LCI | Letras de Crédito Bancário |
| TD | Tesouro Direto |
| LC | Letras de Crédito |
| TS | Taxa Selic |
| CDI | Certificado de Depósito Interbancário |

## SUMÁRIO

## 2. JUSTIFICATIVA

As políticas econômicas das sociedades modernas e a globalização da economia mundial tanto quanto, após a revolução industrial promoveu mudanças no processo financeiro mundial. Com crescente número populacional concentrado em grandes metrópoles, onde se verifica constante movimentação das massas em virtude de suprir suas necessidades em termos de recursos.

São comumente inevitáveis as impossibilidades por parte dos países em atender as demandas públicas, muito mais em aspectos produtivos, ou seja, de bens primários. As demandas são condicionais ao aumento populacional de recursos produtivos, nesta vertente a maioria parte dos países adotam o sistema socioeconômico baseado em atender e dar credibilidade às instituições privadas que visam lucrar. O capitalismo está intrinsecamente ligado ao consumismo, onde, há maior produção e maior índice de consumo. Esta forma econômica nos remete a estrutura social mundial atual.

O acompanhamento passo a passo das crescente populacionais e de responder taxativamente suas demandas é uma responsabilidade governamental que se fosse uma realidade suprida não haveriam razão de tratar certas questões como matemática financeira no início do investimento, mercado financeiro, valor da moeda, aumento econômico, administração financeira etc. O não acompanhamento das mudanças sociais e econômicas no setor financeiro muito mais no processo de investimento por parte das instituições governamentais, é a maior necessidade desta pesquisa, objetivando proporcionar fundamentos básicos da matemática financeira no início de investimento tais que, possa garantir aos que pretendem se inserir no mercado financeiro (estudantes e investidores), uma noção de como se deve proceder mediante a essa gama complexidade do mercado financeiro.

Como analisar as propostas econômicas do estado e das instituições emissoras credenciadas e confiadas pelo estado nas vendas de títulos públicos, uma vez que o mercado financeiro mundial apresenta uma estrutura complexa e variável na qual o investidor é simplesmente um dos participantes no mercado, como os emissores e intermediários.

Existem instituições reguladoras que visam regulamentar e fiscalizar as atividades permeadas pelo mercado financeiro, no caso dos bancos centrais, entre outros. Entretanto, o interesse a este estudo surgiu mediante a minha participação na disciplina de matemática financeira vinculado ao curso de licenciatura plena em matemática na UNILAB, com o meu professor orientador Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral que sempre deixou esta questão em aberto, de ter domínio absoluto das questões financeiras pois fazem parte das nossas vivências.

O setor financeiro é um dos setores em que o seu desenvolvimento está condicionado por constantes variações econômicas, por isso torna-se importante saber acompanhar passo a passo as transformações ocorridas no mundo financeiro, como por exemplo: O estado do capital investido. É evidente que hoje em dia há alterações no mercado econômico. O professor Marcelo durante as suas explanações nas aulas procurou nos fazer entender que as questões econômicas são de caráter relevante na vida quotidiana.

Com muito prazer me interessei em trabalhar no tema em causa, com intuito de apresentar esta temática a todos quanto querem dar início a uma vida financeira. Porém, mediante a essa gama de questões a pesquisa em causa na perspectiva de apresentar aos investidores e estudantes noções que sejam estratégicas, uma vez que ouvimos constantemente nos programas da TV e pelos jornais, rádios, etc., as constantes alterações do setor econômico dependendo das emissoras reguladoras as vezes condicionadas pelas normas internacionais.

Essas alterações nos remetem às repentinas avaliações das ações econômicas em prol do bom desempenho financeiro. Por isso a temática apresentada neste estudo a sua absorção traz consigo conhecimento fundamental para dar início a uma vida financeira estável partindo de uma ação consciente.

Portanto, é preciso desconstruir ideias prematuras de que, as questões financeiras são difíceis de serem compreendidas uma vez que, a matemática financeira proporciona bases teóricas e práticas na qual nos possibilitam analisar e avaliar o mercado financeiro, independentemente das políticas econômicas mundiais.

De acordo com Vargas (2008) o público precisa tomar decisões que nortearão a distribuição dos ativos produtivos. Portanto, cada escolha significa o custo de algo em termos da oportunidade não selecionada. Diante do exposto, o trabalho toma uma posição específica nesta abordagem, no qual está fundamentada na apresentação à sociedade os aspectos teóricos e práticos úteis nas operações financeiras para a erradicação de riscos no processo de investimento.

# 1. INTRODUÇÃO

Desde antiguidade a matemática por meio das suas ramificações solucionou e continua resolver vários problemas atrelados a economia e vida financeira dos cidadãos. Nessa perspectiva, há questões políticas e sociais relacionadas à aprendizagem da matemática. Portanto, de acordo com essa visão, o ensino da matemática financeira deve partir da realidade dos alunos, levando-lhes a resolver e perceber problemas financeiros que surgem no cotidiano, das áreas da vida política, econômica e social (BARTHO, 2020).

Os fundamentos da matemática financeira transcendem vários ramos do quotidiano humano, uma vez que uma boa parte das ciências aplicadas aplicam os seus fundamentos como cálculo de juros, capitalização, de um dado investimento financeiro, etc. Essa transcendência influência na tomada de decisões individuais e sociais, especialmente quando se trata das questões financeiras, como lidar com dívidas, parcelamento, descontos, escolher aplicações financeiras adequadas ao perfil do investidor e muito mais (GALLAS, 2013).

A compreensão do atual sistema econômico está atrelada ao conhecimento da matemática financeira pois, a globalização no setor econômico mundial, é o fator principal das desigualdades sociais, internacionais tanto como regionais e nacionais nas diversas nações, de acordo o Junior (2012) tais, variações econômicas a sua compreensão é diretamente proporcional ao conhecimento da matemática comercial e financeira fundamental da vida dos cidadãos, principalmente aos estudantes, uma vez que, o estudo da matemática financeira fornece conhecimentos que na qual promove e constrói pensamento crítico centrada numa educação financeira (GALLAS, 2013).

Após a revolução industrial datada entre 1760 e mais tardar entre 1820 a 1840, houve algumas mudanças significativas no que concerne a globalização da economia mundial, tanto quanto no processo de investimentos, tais que as nações de modo automático deixaram de defender os interesses das suas populações e passa defender os diretos das suas instituições. No século XX, quando o poder dos sindicatos, monopólios e oligarquias se tornou mais proeminente, juntamente com outros fatores como o desenvolvimento dos mercados de capitais e do comércio internacional, a economia tornou-se mais complexa. Sendo assim, os mercados por si só não podia garantir que a economia sempre será capaz de usar seus recursos ao máximo, sugerindo que o setor público precisa tomar uma direção mais agressiva das atividades econômica ou seja, a participação da população nas atividades financeira seria um fator para manter a estabilidade econômica das suas respectivas nações (VASCONCELLOS, 2011).

Desde então, as atividades financeiras passam a ser realizadas por empresas, instituições bancárias, etc., com o intuito de produzir instrumentos financeiros (dinheiro). Embora a maior parte dessas transações seja feita entre empresas e instituições bancárias, o envolvimento da população é relevante pois, nas sociedades onde existem uma percentagem elevada dos investidores apresentam maior grau de estabilidade econômica (RIBEIRO, 2013).

As sociedades capitalistas atuais apresentam maior grau de complexidade em termos de consumo. Por esta razão torna-se prioridade aos governos sofisticarem as ações em termos de uma boa educação financeira.

Conforme Junior (2012, p. 14):

> Muitas situações estão presentes no cotidiano das pessoas e têm ligação imediata com o dinheiro, seja o fato de ter um pouco de dinheiro, nada de dinheiro ou muito dinheiro. Em todas as situações ter educação financeira torna-se fator determinante da ascensão profissional e saúde financeira pessoal e empresarial (JUNIOR, 2012, p. 14).

Também, Vasconcellos (2011) reafirma que o investimento não depende da renda do país. Depende de outros fatores como taxas de juros, benefícios esperados, benefícios passados, disponibilidade de crédito, etc.. Porém, para Sulivân e Sheffrin, (1998, p.150) “os investimentos são tradeoffs que ocorrem ao longo do tempo [...]”. Dependendo do tipo de investimento, ocorre em duas categorias onde pode haver taxa fixa (investimento de renda fixa) e taxa flutuante (investimento em renda variável) no caso de: Fundos Rápidos; Certificados de Depósito Bancário (CDBs); Depósito a Prazo Fixo; Títulos e Letras do Tesouro Nacional ou Estadual; Dívidas de Negociação; Aplicações de ouro; Depósito em contas de poupança, etc. (RIBEIRO, 2013).

Portanto, qualquer investimento parte das decisões, e estas decisões fazem parte de uma análise tal que, o investidor ou administrador consiga prever por meio de métodos apropriados o desenrolar das operações, como também o rendimento esperado. Ao retratar estas questões, devemos lembrar que, todo e qualquer investimento está suscetível a perda (risco), lucro (renda), como Costa (2016) afirma que:

> o risco pode ser entendido como uma incerteza, que o investidor optará, acreditado que conseguirá obter um retorno satisfatório. Sempre o investidor se deparará entre duas situações com riscos distintos [...] é o investidor que vai decidir onde realizará o investimento, se ele for arrojado, escolherá a primeira e se for cauteloso escolherá a segunda (COSTA, 2016, p. 5).

No entanto, muitos investidores independentemente da modalidade do investimento a se fazer, ficam sem perceber como certas ações são executadas, aumento de juros, descontos e taxas desnecessárias aplicadas nos seus capitais. Por vezes, fazem empréstimos e aplicações bancárias sem ter feito uma avaliação do mercado financeiro. Ao consultarem as suas instituições de modo a terem possíveis explicações dessas ações, se deparam com certos termos e cálculos financeiros que nos remetem ao estudo de fundamentos básicos da matemática financeira.

Portanto, para se aderir ao investimento é necessário ter noção do que se pretende fazer, nesta perspectiva o conhecimento dos tópicos abordados no presente trabalho no quadro da matemática financeira auxiliar taxativamente na avaliação e acompanhamento das operações financeiras, cálculos de juros, capitalização e amortizações e na escolha de títulos adequados para se investir. Pois, análise financeira é diretamente proporcional ao conhecimento da matemática comercial e financeira fundamental da vida dos cidadãos, principalmente aos estudantes, uma vez que, muitos pretendem se engajar no setor financeiro na qual a matemática financeira concede os devidos conhecimentos que na qual promove e constrói pensamento crítico centrada numa educação financeira (GALLAS, 2013).

## 3. OBJECTIVOS

### 3.1. GERAIS

Este trabalho tem como o seu objetivo geral apresentar os conceitos fundamentais da matemática financeira para análises de cálculos centrada nos processos ocorridos no início de um investimento.

Para tal, os tópicos destacados no presente trabalho tende a propiciar habilidades peculiar na compreensão das questões a seguir:

### 3.2. ESPECÍFICOS

a) Revelar as modalidades nos quais se preestabelece o investimento;
b) Descrever as principais características do investimento;
c) Evidenciar os métodos mais utilizados na análise de investimento.
d) Aplicar fundamentos da matemática financeira durante o processo de investimento.

# 4. METODOLOGIA

A elaboração deste trabalho baseou-se em uma abordagem qualitativa, de caráter descritiva e explicativa embasada em uma pesquisa básica estratégica com procedimentos bibliográficos que abordam sobre a temática. Nesta vertente metodológica especificamente quanto aos objetivos gerais e específicos em torno de apresentar temáticas fundamentais da matemática financeira para análises de processos ocorridos nas operações financeiras em particular no início de um investimento. Adotamos a modalidade bibliográfica que segundo Marconi e Lakatos (2003) essas fontes documentais ou bibliográficas, são cruciais para não repetição de ideias expressas nos demais trabalhos em diversos lugares, com intuito de analisar e relacionar as informações obtidas para possíveis interpretações.

A fonte bibliográfica é pertinente pois, nela coletamos dados e conceitos que através da qual nos permite explicar e resolver determinados problemas, não apenas conhecidas, como também, podemos explorar e desenvolver esses dados para solucionar futuros problemas que temporariamente poderão surgir ao longo dos tempos.

Portanto, para que a pesquisa não seja apenas uma repetição de o que já foi dito ou escrito sobre o assunto, interpretamos e contextualizamos a nossa abordagem conceitual da temática de modo que permita o estudo do assunto em foco ou uma nova forma de fazer as coisas, chegando a novas conclusões (MARCONI e LAKATOS, 2003). Porém, o estudo enquadra-se quanto a forma de abordagem no método hipotético-dedutivo, com uma finalidade básica estratégica, de fornecer os fundamentos da matemática financeira para o acompanhamento e análises das operações financeiras ligado ao investimento, como no caso de regimes de capitalização, amortização, empréstimos e modalidades em que se pode preestabelecer o investimento.

# 5. A MATEMÁTICA FINANCEIRA

A matemática possui vários ramos que trata das questões econômicas, dentre elas a matemática financeira, que na sua especificidade se dedica ao estudo das questões financeiras sejam elas simples ou complexas, de modo mais proeminente ao decorrer do tempo. Desde os séculos atrelam se o desenvolvimento de um país com o seu sistema econômico, porém, a matemática financeira apresenta diversas aplicações no sistema econômico atual. Neste caso, a compreensão da matemática financeira torna-se necessário no melhoramento do mecanismo das operações financeiras entre outras questões atreladas à economia (JUNIOR, 2012).

Historicamente existe uma relação da matemática com o dinheiro nas diversas fases da humanidade, evidenciada por trocas de mercadorias mais conhecidas por escambo. Possivelmente quando se fala da palavra finanças nos remete à essa relação histórica que a matemática possui com o dinheiro no decorrer de tempo (PUCCINI, 2011).

O processo comercial nas civilizações mais antigas era evidentemente baseado em trocas de produtos, ou seja, um processo cuja realização é baseada em trocas de bens obtidos e deixados (ORTIGOZA, 2010). Nesse processo de trocas de mercadorias, obviamente alguns produtos passam a ter mais destaque em relação aos demais, na sua maioria os de primeira necessidade, tais, produtos passam assumindo a função da moeda-mercadoria, que na concepção de Neto (2013) não havia moeda (dinheiro) como a gente tem, as suas primeiras atividades comerciais são chamadas escambo, uma simples troca de mercadoria sem uso da moeda. Porém, tais práticas comerciais, originaram as atividades comerciais que conhecemos hoje.

Portanto, afirma Junior (2012) muitas situações existem no dia a dia das pessoas e têm ligação imediata com o dinheiro. A necessidade do homem em adequar a sua realidade econômica deu a origem a diferentes moedas, ou seja, ao instrumento monetário, pois, a troca ocorre apenas porque há necessidade ou desejo de produto, levando assim à busca da satisfação real quando a troca é encerrada (ORTOGOZA, 2010). Bem assim, como uso de cheques, pelo qual se determina o pagamento de certa quantia ao seu portador ou a pessoa nele citada, é uma necessidade atual.

# 6. JUROS E MONTANTE

O processo comercial baseada em trocas de bens das sociedades antigas, evidenciou a necessidade do ser humano em termos de serviços e bens, sendo que havia uma limitação em adequar a oferta, segundo Mathias e Gomes (2002) depois de algum tempo foi solucionado esse processo de trocas de um bem por outro através do uso da moeda, passando assim, a ter destaque o valor dos produtos através desse fator intermediário e decisivo nas operações financeiras.

Entretanto, a acumulação de valor tornou-se uma necessidade intrinsecamente ligada à preservação de bens, ou seja, para um consumo mais futuro. Pois, se o bem fosse consumido, desapareceria e, se houvesse estoque, o estoque poderia ser usado para produzir novos bens e/ou riquezas por meio do processo produtivo (MATHIAS e GOMES, 2002). Porém, a concepção de juros inclui esta particularidade em que as pessoas preferem consumir do que acumular seus bens, pressupondo uma relação entre o dinheiro e o tempo.

É nesta perspetiva, diz Junior (2012) em que o conceito de juros surgiu, desde o momento em que se percebeu a existência de uma relação entre dinheiro e tempo. Partindo desta concepção, a acumulação de capital, desvalorização da moeda, com a preferência temporal no consumo, pré-estabelece o conceito de juros, que é entendido por Mathias e Gomes (2002), como custo de crédito ou reembolso de capital aplicado no investimento, sendo que as trocas eram realizadas basicamente devido ao valor temporal do dinheiro.

## 6.1. Juros Simples

Quando faz-se empréstimo de um valor (Capital), a uma pessoa física ou jurídica, para pagar em um determinado período de tempo, com um acréscimo combinado. Essa quantia acrescentado no valor emprestado é o que chamamos de percentual relativo ao valor aplicado ou emprestado (Juros).

Por exemplo, Pedro emprestou 100R$ ao João, para pagar 300R$ depois de um ano. Portanto, os 200R$ acrescentado ao valor inicial do empréstimo é o juro do valor emprestado durante o período de tempo estabelecido.

Estás operações são recorrentes na nossa vida quotidiano, isto é, quando fazemos compra com o cartão crédito, vê-se que o valor pago a vista é totalmente diferente e menor ao valor pago ao longo prazo (valor pago por parcelas), que na verdade é o valor do produto mais acréscimo relativo ao tempo de pagamento. Segundo Crespo (2009) por definição o juro simples é diretamente proporcional ao valor inicial de investimento inicial e ao período de tempo de aplicação, sendo a taxa de juros de cada período um fator de mensuração. No caso das operações relacionadas a vida quotidiana e pessoas é denominado Juros simples.

Para calcular os juros simples usamos a seguinte expressão matemática:

$$J = C \times i \times t \tag{1}$$

Onde:

- $\mathrm{J} \Longrightarrow$ juros simples
- $\mathrm{C} \Longrightarrow$ capital inicial ou seja principal
- $\mathrm{i} \Longrightarrow$ taxa unitária
- $\mathrm{t} \Longrightarrow$ tempo de aplicação

A taxa unitária é obtida através da razão centesimal definido por:

$$i = \frac{p}{100} \tag{2}$$

Sendo $\mathrm{p}$ a percentagem. Da fórmula (1), podemos obter as seguintes expressões nomeadamente capital, taxa e tempo de aplicação:

$$C = \frac{J}{i \times t} \qquad i = \frac{J}{C \times t} \qquad t = \frac{J}{C \times i}$$

**Exemplo 1.** Calcula a taxa unitária dos seguintes itens abaixo.

a) 15%
b) 20 %
c) 10%
d) 25%
e) 5%

Solução

a) Temos que $\mathrm{p} = 15\%$ pois, de acordo a equação (2) $i = \frac{p}{100}$ então, substituindo o valor de $\mathrm{p}$ na fórmula temos: $i = \frac{15}{100} = 0{,}15$

b) Aqui temos que $\mathrm{p} = 20\%$ porém, a taxa unitária será $i = \frac{20}{100} = 0{,}2$

*c)* Sendo $\mathrm{p} = 10\%$ isto é, $i = \frac{10}{100} = 0{,}1$

d) Temos $\mathrm{p} = 25\%$ portanto, $i = \frac{25}{100} = 0{,}25$

e) Tem-se que $\mathrm{p} = 5\%$ e a taxa será

$$i = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

**Exemplo 2.** Calcule o juro resultante de uma aplicação de 32.500,00 R$, à taxa de 18% ao ano, durante 2 anos.

Solução

Vamos organizar os dados que temos no exercício da seguinte maneira:

$$\begin{cases} C = 32.500{,}00\ R\$ \\ i = \dfrac{18\%}{100} = 0.18 \\ t = 2\ anos \end{cases}$$

Portanto, temos a fórmula de juros simples dada por:

$$J = C \times i \times t$$

Então,

$$J = (32.500{,}00) \times (0{,}18) \times (2) = 11.700{,}00\ R\$$$

**Exemplo 3.** A que taxa mensal foi aplicado um capital de 6.000,00 R$, que, durante 6 meses e 20 dias, rendeu 1.320,00 R$ de juro?

Solução

Retirando os dados do exercício, obtemos:

$$\begin{cases} C = 6.000{,}00\ R\$ \\ J = 1.320{,}00\ R\$ \\ t = 6\ m\ e\ 20\ d \\ i = ? \end{cases}$$

Portanto, da fórmula (1), obtemos a expressão da taxa unitária:

$$i = \frac{J}{C \times t},$$

porém, antes de substituir os nossos dados na fórmula precisamos primeiro obter um período de tempo exato, temos:

$$1\ \text{mês} = 30\ dias$$

Portanto, $t = 6 + \frac{20}{30} = \frac{20}{3}$ logo:

$$i = \frac{1.320{,}00\ R\$}{6.000{,}00\ R\$ \times (\frac{20}{3})} = 0{,}033$$

Daí,

$$i = 0{,}033 \times 100 = 3{,}3\%$$

**Exemplo 4.** Uma aplicação de R$ 15.000,00 é efetuada pelo prazo de 3 meses à taxa de juros simples de 26% ao ano. Que outra quantia deve ser aplicada por 2 meses à taxa linear de 12% ao ano para se obter o mesmo rendimento financeiro?

Solução

Nos é pedido achar o capital aplicado por 2 meses à taxa linear de 12% ao ano, para se obter o mesmo resultado de uma aplicação de R$ 15.000,00 efetuado por 3 meses à taxa de 26% ao ano.

Retirando os dados tem-se:

$$\begin{cases} C_1 = 15.000{,}00\ R\$ \\ t_1 = 3\ meses \\ i_1 = 26\% = 0{,}26\% \\ t_2 = 2\ meses \\ i_2 = 12\% = 0{,}12 \end{cases}$$

Pela expressão (1), temos:

$$J_1 = C_1 \times i_1 \times t_1 \qquad \text{e} \qquad J_2 = C_2 \times i_2 \times t_2$$

Porém, fazendo $J_1 = J_2$ temos: $$C_2 = \frac{C_1 \times i_1 \times t_1}{i_2 \times t_2}$$

Sendo que, as taxas são dadas em relação ao ano, porém, um ano contém 12 meses, isto é, $t_1 = \frac{3}{12}$ e $t_1 = \frac{2}{12}$, substituindo os dados na fórmula obtemos:

$$C_2 = \frac{(15.000{,}00) \times (0{,}26) \times \left(\frac{3}{12}\right)}{(0{,}12) \times (\frac{2}{12})} = \frac{975}{0{,}02} = 48.750\ R\$$$

### 6.2. Juros Compostos

Os juros compostos baseiam-se no mesmo conceito apresentado na seção anterior mas, diferencia na sua forma de obtenção segundo Neto (2013), em uma operação de amortização, juros simples é cobrado sobre o valor emprestado (capital inicial), enquanto os juros compostos são calculados a partir do capital inicial somado aos juros acumulados de cada período, conceito extremamente importante e recorrente nas operações, denominado como juros sobre juros.

Juros compostos é entendido como aquele em que, em cada período financeiro, a partir do segundo, é obtido sobre o valor relativo do período anterior (CRESPO, 2009). Que é calculada pela seguinte expressão matemática:

$$J = C \times [(1+i)^t - 1] \tag{3}$$

Onde $C$ permanece capital aplicado no determinado período de tempo $t$, a uma taxa $i$. Da expressão (3) obtemos as fórmulas:

$$C = \frac{J}{[(1+i)^t - 1]} \qquad (1+i)^t = \frac{J}{C} + 1$$

**Exemplo 5.** Qual o total de juros acumulado, de uma aplicação de R$ 10.000,00, à taxa de juros de 10% a.a. (ao ano), por um período de 5 anos, nos regimes de juros compostos.

Solução

Temos o capital aplicado $C = 10.000{,}00\ R\$$ à uma taxa $i = 10\%\ a.a = \frac{10}{100}$ e $t = 5\ ano$. Onde, da equação (3), obtemos:

$$J = 10.000{,}00 \times \left[\left(1 + \frac{1}{10}\right)^5 - 1\right] = 6.105{,}10\ R\$$$

**Exemplo 6.** Um capital de R$ 2500 foi investido a juros compostos durante 36 meses, com a taxa de juros de 12% a.a. Os juros gerados por esse capital foram de?

Solução

Tem-se o capital investido é $C = 2500\ R\$$ à taxa de $i = 12\%\ a.a = \frac{12}{100}$ ao longo de $t = 36\ meses$ pois, temos $1\ ano = 12\ meses$, implica que $t = 36\ meses = 3\ anos$ substituindo na equação (3), obtém-se:

$$J = 2500 \times \left[\left(1 + \frac{12}{100}\right)^3 - 1\right] = 1.012{,}32\ R\$$$

## 6.3. Montante

Quando aplicamos uma quantia a uma determinada taxa periódica de juros, produz um valor que chamamos de montante, que é definido como resultado de uma quantia aplicado à uma determinada taxa de juros $i$ ao longo de $t$ períodos, ou seja, é o capital total da operação realizado, que é a soma de capital inicial e juro obtido (MATHIAS e GOMES, 2002).

Entretanto, o montante é dado pela expressão matemática:

$$M = C + J \tag{4}$$

Sendo, que:

- $C \Longrightarrow$ capital aplicado ou investido
- $J \Longrightarrow$ juro

Porém, tomando a equação (1), e substituindo na equação (4), obtemos a fórmula do montante no regime de juros de simples:

$$M = C \times (1 + i \times t) \tag{5}$$

De modo análogo, da equação (3), substituindo na equação (4), temos a expressão do montante no regime de juros compostos:

$$M = C \times (1 + i)^t \tag{6}$$

**Exemplo 7.** Emprestando hoje R$1.000,00 e tendo que pagar com juros compostos de 3% a.m. (ao mês), após 1 ano, qual o valor a pagar com juros no vencimento?

Solução

Retirando os dados da questão obtemos:

$$\begin{cases} C = 1.000{,}00\ R\$ \\ i = 3\%\ a.m = \dfrac{3}{100} = 0{,}03 \\ t = 1\ a = 12\ m \end{cases}$$

Substituindo os dados na equação (3), temos:

$$J = 1.000{,}00 \times [(1 + 0{,}03)^{12} - 1] = 425{,}76\ R\$$$

pela equação (6) tem-se que:

$$M = C + J$$

Substituindo os dados temos:

$$M = 1.000{,}00\ R\$ + 425{,}76\ R\$ = 1.425{,}76\ R\$$$

Pode-se obter este resultado aplicado diretamente a equação (6).

**Exemplo 8.** Uma quantia foi aplicada a juros simples de 6% ao mês, durante 5 meses e, em seguida, o montante foi aplicado durante mais 5 meses, a juros simples de 4% ao mês. No final dos 10 meses, o novo montante foi de R$ 234,00. Qual o valor da quantia aplicada inicialmente?

Solução

Vamos retirar os dados da questão temos:

$$\begin{cases} M_1 = C_1 \\ i_1 = 6\%\ a.m = \dfrac{6}{100} = 0{,}06 \\ t_1 = 5\ m \\ i_2 = 4\% = \dfrac{4}{100} = 0{,}04 \\ t_2 = 5\ m \\ M_2 = 234{,}00\ R\$ \end{cases}$$

Como pela equação (5),

$$M = C \times (1 + i \times t)$$

Então,

$$M_1 = C_1 \times (1 + i_1 \times t_1) = 1{,}3C_1 \text{ e } M_2 = C_2 \times (1 + i_2 \times t_2) = 1{,}2C_2$$

pois, como $M_1 = C_2$, logo o capital inicial será dado pela equação:

$$C_1 = \frac{M_2}{1{,}56}$$

Onde, temos

$$C_1 = \frac{234{,}00}{1{,}56} = 150\ R\$$$

**Exemplo 9.** Um banco emprestou a importância de R$ 35.000,00 por 2 anos. Sabendo que o banco cobra a taxa de 36% ao ano, com capitalização trimestral, qual o montante a ser devolvido ao final dos 2 anos?

Solução

Temos:

$$\begin{cases} C = 35.000{,}00\ R\$ \\ t = 2\ anos \\ i = 36\%\ a.a = \dfrac{36}{100} = 0{,}36 \end{cases}$$

Sabemos que:

$$1\ ano = 4\ t\ (trimestres)$$

Logo:

$$\begin{cases} C = 35.000{,}00\ R\$ \\ t = 2\ anos = 2 \times 4t = 8t \\ i = 36\%\ a.a = \dfrac{36}{100} = \dfrac{0{,}36}{4} = 0{,}09 \end{cases}$$

Daí pela equação (6):

$$M = C \times (1+i)^t$$

Onde substituindo os dados obtidos temos:

$$M = 35.000{,}00\ R\$ \times (1+0{,}09)^8 = 409.618{,}26\ R\$$$

**Exemplo 10.** Calcule o montante de uma aplicação de R$ 12.000,00, à taxa de juro de 22% ao ano, capitalizado semestralmente, durante 21 meses.

Solução

Retirando os dados tem-se:

$$\begin{cases} C = 12.000{,}00\ R\$ \\ t = 21\ meses \\ i = 22\%\ a.a = \dfrac{22}{100} = 0{,}22 \end{cases}$$

Lembrando que:

$$\begin{cases} 1\ ano = 12\ meses \\ 1\ ano = 2\ semestres \\ 1\ Semestre = 6\ meses \\ 3meses = \dfrac{1}{2} semestre \end{cases}$$

Isto implica que,

$$\begin{cases} C = 12.000{,}00\ R\$ \\ t = 21\ m = \dfrac{7}{2}\ s \\ i = 22\%\ a.a = \dfrac{22}{100} = 0{,}22 = \dfrac{0{,}22}{12} = 0{,}01 \end{cases}$$

Portanto, pela equação (6), temos:

$$M = C \times (1+i)^t$$

$$M = 12.000{,}00\ R\$ \times (1+0{,}01)^{\frac{7}{2}} = 12.425{,}27\ R\$$$

## 7. DESCONTOS

O conceito de desconto é muito recorrente na economia especificamente nas operações financeiras, evidenciado quando contraímos uma dívida na qual quitamos o seu valor, antes do tempo do seu vencimento ou seja, antes do tempo determinado no título da operação. O ato de liquidar um título antes da data prevista geralmente envolve o que chamamos de recompensa, ou seja, um desconto pelo pagamento antecipado (NETO, 2012). Sempre que uma operação financeira é feita, é emitido título da operação que é documento comprobatório da operação, contendo todas as informações e características da operação, como a data da operação, tipo de operação e quantia a ser paga, seja, à vista ou a prazo.

Define-se o desconto como a quantia abatida sobre um título de crédito, quando pago antes da data prevista do seu vencimento (NETO, 2013), na qual é determinado pela seguinte expressão matemática:

$$D = N - A \tag{7}$$

Onde:

- $D$ desconto
- $N$ valor nominal da aplicação (ou título), que se pretende pagar no dia do vencimento
- $A$ valor atual da aplicação quitada ou recebida antes da data prevista pelo título (ou seja, antes do vencimento), chamado de valor descontado.

As operações financeiras do desconto pode ser realizados em dois regimes de capitalizações, ou seja, de juros simples e composto:

### 7.1. Descontos Simples

No regime de juros simples o abatimento pode ser realizado “por dentro” denominado como desconto racional e “por fora” chamado de desconto comercial ou bancário, pois, os títulos de créditos mais presentes nas operações financeiras são a nota promissória, a duplicata e a letra de câmbio.

#### 7.1.1. Desconto Racional (ou por dentro)

Esta modalidade do desconto incorpora os conceitos de juros simples abordados anteriormente, onde pela equação (1), temos:

$$J = C \times i \times t$$

Porém,

$$D_d = J \text{ e } A = C$$

Isto é,

$$D_d = A \times i \times t \tag{8}$$

Substituindo a equação (8) em (7), temos o valor atual racional:

$$A = \frac{N}{1 + i \times t} \tag{9}$$

Consequentemente, substituindo a equação obtido (Eq. 9) na equação (8), obtemos o desconto racional:

$$D_d = \frac{N \times i \times t}{1 + i \times t} \tag{10}$$

### 7.1.2. Desconto Comercial ou Bancário (ou por fora)

Este tipo de desconto é caracterizado por incidir sobre o valor nominal do título, sendo considerado o valor nominal, ou seja, assumindo a função do capital de aplicação de juros simples. Porém, esta modalidade de desconto é destacada no mercado financeiro, principalmente em operações de dívida bancária e comercial de curto prazo (NETO, 2012).

Portanto, a sua expressão matemática é definida a partir da equação (7), baseando nas seguintes considerações:

$$D_F = J \text{ e } N = C$$

Onde, substituindo na equação (1), obtemos:

$$D_F = N \times i \times t \tag{11}$$

Como na equação (7), temos:

$$D_F = N - A$$

Logo, ao colocar a equação (11), na equação (7), obtemos a expressão do valor descontado, ou seja, valor atual:

$$A = N \times (1 - i \times t) \tag{12}$$

Portanto, é importante ressaltar que na maioria dos bancos comerciais ao realizar o desconto nas operações bancárias de acordo com Neto (2012) geralmente são cobradas as taxas adicionais com base em suprir determinados custos administrativos e operacionais incorridos pela instituição financeira. Sendo que estas taxas são pré-fixadas de modo a incidir sobre o valor nominal, isto é:

Partindo da expressão do desconto (11), na qual incide sobre o valor nominal do título, adicionamos $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{N}$.

Onde,

- $n$ é taxa administrativa
- $N$ valor nominal do título

Daí,

$$D_F = (N \times i \times t) + (n \times N)$$

Obtendo,

$$D_F = N \times (i \times t + n) \tag{13}$$

Portanto, pela equação (7), temos:

$$A = N - D$$

Por fim:

$$A = N \times [1 - (i \times t + n)\,] \tag{14}$$

**Exemplo 11.** Calcular a taxa mensal de desconto racional de um título com valor nominal de 5.400,00 R$ negociado 90 dias antes de seu vencimento. O valor atual desse título é de 4.956,90 R$.

Solução

Temos

$$\begin{cases} N = 5.400{,}00\ R\$ \\ t = 90\ d = 3\ m \\ A = 4.956{,}90\ R\$ \\ i = ? \end{cases}$$

Da equação (8), obtemos

$$i = \frac{N - A}{A \times t}$$

Logo,

$$i = \frac{5.400{,}00 - 4.956{,}90}{4.956{,}90 \times 3} = 2{,}98\%$$

**Exemplo 12.** Determinar o tempo que falta para o vencimento de uma duplicata de valor nominal de R$ 370.000,00 que produziu um desconto bancário de R$ 33.720,00 à taxa de desconto "por fora" de 38% ao ano.

Solução

Tem-se

$$\begin{cases} N = 370.000{,}00\ R\$ \\ D_F = 33.720{,}00\ R\$ \\ i = 38\% = \dfrac{0{,}38}{12} \\ t = ? \end{cases}$$

Onde, apartir da equação (11), obtém:

$$t = \frac{D_F}{N \times i}$$

Substituindo na fórmula,

$$t = \frac{33.720{,}00}{370.000{,}00 \times \frac{0{,}38}{12}}$$

Logo,

$$t = 2{,}88 \cong 3\ m$$

**Exemplo 13.** Qual o valor máximo que uma pessoa deve pagar por um título de valor nominal de R$ 82.000,00 com vencimento para 110 dias, se deseja ganhar 5% ao mês. (Usar desconto racional.)

Solução

Tem-se:

$$\begin{cases} N = 82.000{,}00\ R\$ \\ i = 5\% = 0{,}05 \\ i = \dfrac{0{,}05}{30} \\ A_r = ? \end{cases}$$

Porém, pela equação do valor atual racional que é dado por:

$$A = \frac{N}{1 + i \times t}$$

Onde, substituindo os dados obtendo:

$$A = \frac{82.000{,}00}{1 + \frac{0{,}05}{30} \times 110} = 69.295{,}77 R\$$$

### 7.2. Desconto Composto

O conceito de desconto simples abordado anteriormente é o mesmo que o de desconto composto, na qual emprega-se mutuamente nas operações financeiras de longo prazo e complexas, em que se pretende efetuar o pagamento antes do vencimento estabelecido no título. Portanto, estudo de desconto composto pode ser abordado em duas formas, por dentro (desconto racional) e por fora (desconto comercial), que segundo Neto (2013), o desconto composto por fora não é amplamente utilizado no Brasil, em relação ao desconto composto por dentro que é mais comumente nas operações financeiras nacional.

### 7.2.1. Desconto composto por fora (ou seja, comercial)

Este tipo de desconto possui uma incidência no valor nominal do título, naqual as suas expressões matemáticas deduzidas em cada período é dada por:

$$A = N \times [(1 - i)^t\ ] \tag{15}$$

Onde,

$$D_F = N \times [1 - (1 - i)^t\ ] \tag{16}$$

### 7.2.2. Desconto composto por dentro (ou racional)

As operações do desconto racional é preestabelecido pelas seguintes considerações:

$$M = N \text{ e } C = A$$

Então, a equação (6) fica,

$$N = A \times (1 + i)^t \tag{17}$$

Onde, pode se obter:

$$A = \frac{N}{(1 + i)^t}$$

Consequentemente, ao substituirmos a expressão acima na equação (7), temos:

$$D_r = N \times \left[1 - \frac{1}{(1 + i)^t}\right] \tag{18}$$

**Exemplo 14.** O desconto racional composto de um título de crédito no valor nominal de R$ 1.200,00 foi de R$ 200,00. Sabendo que a taxa de desconto foi de 1,5% a.m., qual foi o prazo de antecipação do pagamento?

Solução

Temos

$$\begin{cases} N = 1.200{,}00\ R\$ \\ D_r = 200{,}00\ R\$ \\ i = 1{,}5\%\ a.m = \dfrac{1{,}5}{100} = 0{,}015 \\ t = ? \end{cases}$$

Daí, utilizando a equação (18), temos:

$$-(1 + i)^t = \frac{N}{D_r - N}$$

Onde,

$$-(1+0{,}015)^t = \frac{1.200{,}00}{200{,}00 - 1.200{,}00}$$

$$-(1{,}015)^t = -1{,}2$$

Aplicando, $ln$ tem-se:

$$t = \frac{\ln(1{,}2)}{ln(1{,}015)} = 12{,}24\,meses$$

**Exemplo 15.** Um título de crédito de R$ 1.800,00 com vencimento para 1 ano será substituído por outro, para 2 anos. Calcular o valor nominal do novo título, empregando a taxa de 2% a.a. com capitalizações semestrais.

Solução

Temos

$$\begin{cases} N_1 = 1.800{,}00\ R\$ \\ t_1 = 1\ ano \\ t_2 = 2\ anos \\ i = 2\%\ a = \dfrac{2}{100} = 0{,}02 \\ N_2 = ? \end{cases}$$

Calculando o valor atual do título pela equação (17), tem-se:

$$A = \frac{1.800{,}00}{(1+0{,}02)^1} = 1.764{,}70\ R\$$$

Portanto, ao substituir na mesma equação (17),

$$N = A \times (1+i)^t$$

com tempo $t_2$ temos:

$$N = 1.764{,}70 \times (1+0{,}02)^2 = 1.835{,}99\ R\$$$

**Exemplo 16.** Uma loja de tecidos resolveu quitar um título de R$ 2.000,00 com a antecipação de 2 anos. A firma credora do título propôs um pagamento de R$ 1.650,00 pela mesma. Qual a taxa de desconto composto?

Solução

Tem-se:

$$\begin{cases} N = 2.000{,}00\ R\$ \\ A = 1.650{,}00\ R\$ \\ t = 2\ a \\ i = ? \end{cases}$$

Usando, a equação (17), temos:

$$(1+i)^t = \frac{N}{A}$$

Tem-se,

$$(1+i)^2 = \frac{2.000{,}00}{1.650{,}00} = 1{,}212$$

Fazando,

$$i = \sqrt{1{,}212} - 1 = 0{,}109 \times 100 = 10{,}1\ a.a$$

# 8. CAPITALIZAÇÃO E AMORTIZAÇÃO COMPOSTA

Capitalização e amortização são processos muito comumente nas operações financeiras, ou seja, no investimento, onde um evidenciado quando queremos extinguir, diminuir, pagar uma determinada dívida, por parcelas (pagamento periódicos), como também pode-se pagar por uma única vez (sendo que passando o dia do vencimento, o valor vai incidir em juros), este processo é denominado amortização, enquanto a capitalização consiste no processo de acumulação de capital, incidindo sobre ele uma taxa de juros para o seu crescimento, vulgarmente entendido como patrimônio total de uma empresa.

Pode-se constituir um capital ou liquidar uma dívida fazendo depósitos sucessivos de valores em períodos distintos, por intermédio destas operações, nomeadamente capitalização e amortização (CRESPO, 2009).

Neste capítulo o nosso estudo vai se restringir ao regime de capitalização e amortização composta sendo a modalidade das operações mais comumente no processo de investimento nacional, destacando rendas e os diversos tipos de capitalizações e sistemas de amortizações.

## 8.1. Rendas

Chama-se rendas ou anuidades um dos processos existentes na capitalização e amortização, no qual evidenciado no ato de pagar ou liquidar uma dívida periodicamente, ou seja, por prestações tal que se pretenda construir um determinado capital ou amortizar uma dívida.

Existem dois tipos de rendas que são:

- Rendas Certas ou determinísticas;
- Rendas aleatórias ou probabilísticas.

Rendas aleatórias ou probabilísticas é mais destacada na matemática atuarial, portanto, não será o nosso foco abordar essa temática ( MATHIAS E GOMES, 2002). No entanto, vamos desenvolver o conceito de rendas certas no processo de capitalização e amortização composta. Deduzindo as fórmulas de montantes como ressaltado no início deste capítulo, que a nossa abordagem vai desencadear no regime de juros composto por ser a mais explícita, mais usada nas operações financeiras.

Por exemplo, imaginemos que:

- João para comprar um imóvel, resolveu fazer uma poupança em 5 prestações mensais de modo a erguer um fundo suficiente para aquisição de imóvel.
- Maria custeou a compra do seu irmão, com intuito de receber o capital financiado em 5 prestações.

Este exemplo nos faz compreender que tanto o João e o irmão da Maria terão que fazer um conjunto finito de prestações periódicas pois, o João que terá que construir o seu capital poupando o seu valor por uma séries de depósitos periódicos e o Irmão da Maria amortizando a sua dívida por uma série finita de prestações periódicas, enquanto Maria de recebimento.

Entretanto, as rendas ou anuidades podem ser recebidas ou liquidadas de modo imediatas (postecipadas), antecipadas ou diferidas, porém, de modo especifico vamos destacar as rendas imediatas e antecipadas.

### 8.1.1. Renda Imediata

Ao capitalizamos uma determinada quantia fixa a uma taxa de juros composto, no final de tudo a gente tem o prazer de obter, o devido montante com acréscimo dos juros da operação. Vamos pensar, no caso de João que pretende adquirir um imóvel, na qual optou em capitalizar durante 5 meses uma quantia de 100.000,00 R$ a uma taxa de 2% ao mês,  Capitalizados mensalmente.

Temos

$$\begin{cases} C = 100.000,00\ R\$ \\ i = 2\%\ a.m = \dfrac{2}{100} = 0,02 \\ t = 5\ m \end{cases}$$

Calculando o montante em cada parcela, usando a equação (6) temos:

$$\begin{cases} M_1 = 100.000,00 \times (1,02) = 102.000,00 \\ M_2 = 100.000,00 \times (1,02)^2 = 104.040,00 \\ M_3 = 100.000,00 \times (1,02)^3 = 106.120,80 \\ M_4 = 100.000,00 \times (1,02)^4 = 108.243,22 \\ M_5 = 100.000,00 \end{cases}$$

Percebe-se que no último mês não houve capitalização, ou seja, não há acréscimo de juros, isto é, porque foi aplicado exatamente no mês em que se obtém o montante do investimento, que é uma característica de renda imediata, onde a primeira prestação ocorrem no final do primeiro período, a contar da data zero.

Portanto, o somatório dos resultados desses montantes é o montante de renda imediata. Isto é:

$$S = 100.000 + 102.000 + 104.040 + 106.120,80 + 108.243,22 = 520.404,02\ R\$$$

Observa-se que se tivermos um caso que leva um período de tempo muito longo, as contas ficará muito extenso, entretanto, para se obter o valor presente e o valor futuro de renda imediata utiliza-se as seguintes formas:

$$VP = T \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t}\right] \tag{19}$$

Que é a fórmula para se obter o valor atual ou presente de renda imediata, onde:

- O fator de amortização é dado por:

$$F_A = \frac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t}$$

- $VP$ valor atual ou presente de uma renda imediata
- $T$ valor de depósito periódico (pagamentos ou prestações)
- $i$ taxa de juros
- $t$ tempo ou número de períodos

Daí,

$$VF = T \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right] \tag{20}$$

Onde:

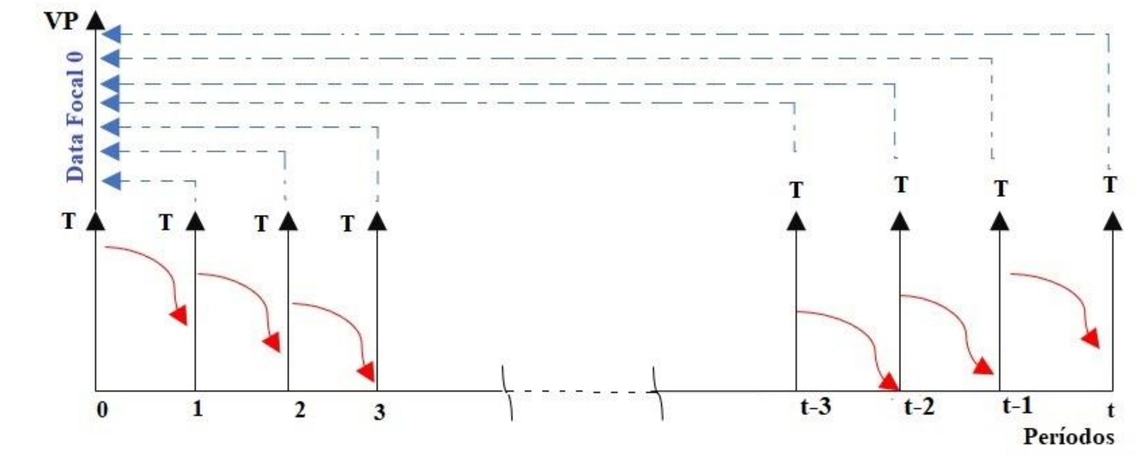
- O fator de capitalização é dado por:

$$F_C = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

- $VF \Longrightarrow$ é o valor futuro ou montante de uma renda imediata.

A fórmula (19), surge por uma dedução, levando em conta que os pagamentos são uniformes, ou seja, $T$ são unitários, como mostra a figura abaixo.

**Figura 1:** Capitais uniformes em t períodos, renda imediata (valor presente)




Fonte: Próprio Autor (2022).

Considerando todos os pagamentos unitários, da equação (6), tem-se:

$$VP = \frac{T}{(1+i)^t}$$

Porém, como os pagamentos são periódicos temos:

$$VP = T \times \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^t}\right] \tag{21}$$

Logo, a sequência,

$$\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^t}$$

é uma progressão geométrica, onde, o n-ésimo termo é dada por:

$$a_t = \frac{1}{(1+i)^t} = (1+i)^{-t} \tag{22}$$

Se que, $q$ é a razão, dada por:

$$q = \frac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1} \tag{23}$$

Consequentemente,

$$a_1 = \frac{1}{(1+i)^1} = (1+i)^{-1} \tag{24}$$

Portanto, como a soma de n-ésimo termo de uma progressão geométrica é dada por:

$$A_t = \frac{a_1 - a_t q}{1-q} \tag{25}$$

Logo, substituindo a equação (22), (23) e (24) na equação (25), temos:

$$A_t = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-t}(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}$$

Multiplicando toda expressão acima por,

$$\frac{(1+i)}{(1+i)}$$

Obtemos:

$$A_t = \frac{(1+i)(1+i)^{-1} - (1+i)(1+i)^{-t}(1+i)^{-1}}{(1+i)-(1+i)(1+i)^{-1}}$$

Então,

$$A_t = \frac{1-(1+i)^{-t}}{(1+i)-1} = \frac{1-(1+i)^{-t}}{i}$$

O fator capitalizador é dado por:

$$A_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t} \tag{26}$$

Por fim, substituímos a expressão obtida na equação (21), temos:

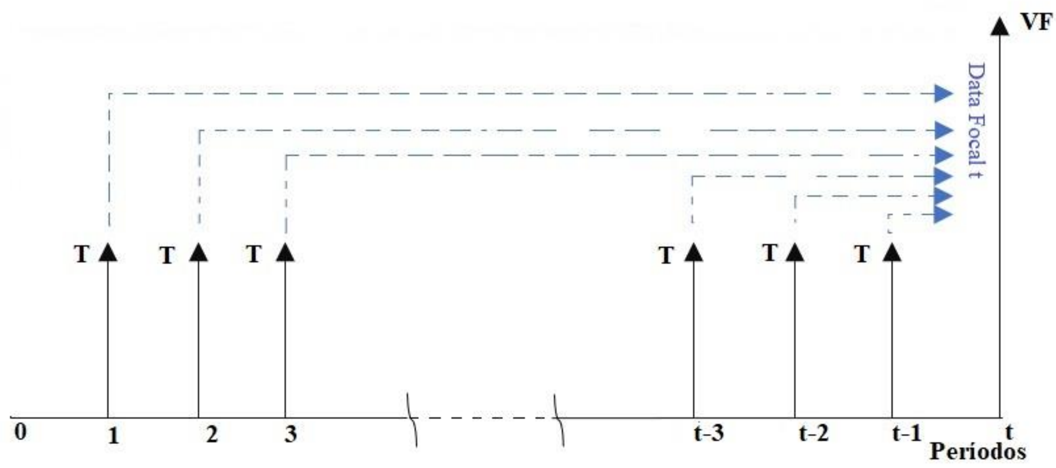
$$VP = T \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t}\right]$$

Ou seja,

$$VP = T \times A_t \tag{27}$$

Consequentemente, a equação (20), é obtida da seguinte maneira, de acordo com a figura abaixo.

**Figura 2:** Capitais uniformes em t períodos, renda imediata (valor futuro)




Fonte: Próprio Autor (2022).

Ao deduzir a fórmula (20), admitimos que, estamos a somar uma sequência, começando a partir do seu enésimo termo, isto é, pela figura (2), temos:

$$VF = T \times (1+i) + T \times (1+i)^2 + T \times (1+i)^3 + \cdots + T \times (1+i)^{t-1}$$

Evidenciando $T$, tem-se:

$$VF = T \times [(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (1+i)^{t-1}] \tag{28}$$

Portanto, a equação (25), é a soma do enésimo termo de uma progressão geométrica. Pois, a sequência,

$$(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (1+i)^{t-1}$$

Onde, o seu termo geral é dado por: $a_t = (1+i)^{t-1}$ consequentemente, $a_1 = 1$ pois, a sua razão é $q = (1+i)$, substituindo estes dados na equação (25), temos:

$$A_t = \frac{1-(1+i) \times (1+i)^{t-1}}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^t}{-i}$$

Então,

$$A_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Por fim, ao substituímos a expressão acima na equação (28), obtemos:

$$VF = T \times A_t \qquad (29)$$

Ou seja,

$$VF = T \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$$

Que é a expressão do valor futuro ou montante de uma renda imediata.

### 8.1.2. Renda Antecipada

Diferente da renda imediata em que os pagamentos ocorrem nos finais de cada período, na renda antecipada o processo de liquidação das prestações ou recebimento ocorre no princípio de cada período.

Portanto, a dedução da fórmula é de modo similar ao anterior, como mostra a representação gráfica da figura (3), seja T prestações unitárias, antecipados periodicamente a uma taxa de juros. Pela equação (6), temos:

$$M = C \times (1+i)^t$$

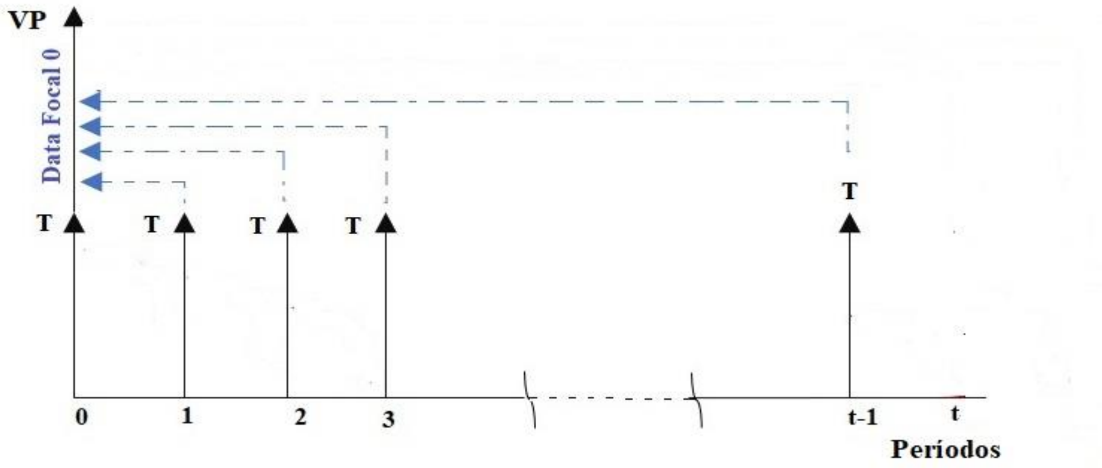
Daí, tem-se, $C = VP$ e $M = T$, isto é:

$$VP = \frac{T}{(1+i)^t}$$

Pois, pela figura (3), temos $T$ pagamentos uniformes então, temos o seguinte somatório evidenciando o $T$ temos:

$$VP = T \times \left[1 + \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{t-1}}\right]$$

**Figura 3:** Prestações uniformes em diferentes períodos, renda antecipada (valor presente)




Fonte: Próprio (2022).

Onde, multiplicando toda expressão por:

$$\frac{(1+i)}{(1+i)}$$

Obtemos,

$$VP = T \times (1+i) \times \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^t}\right]$$

Sendo que, a sequência,

$$\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^t}$$

Foi demonstrada na seção anterior que:

$$A_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t}$$

Portanto,

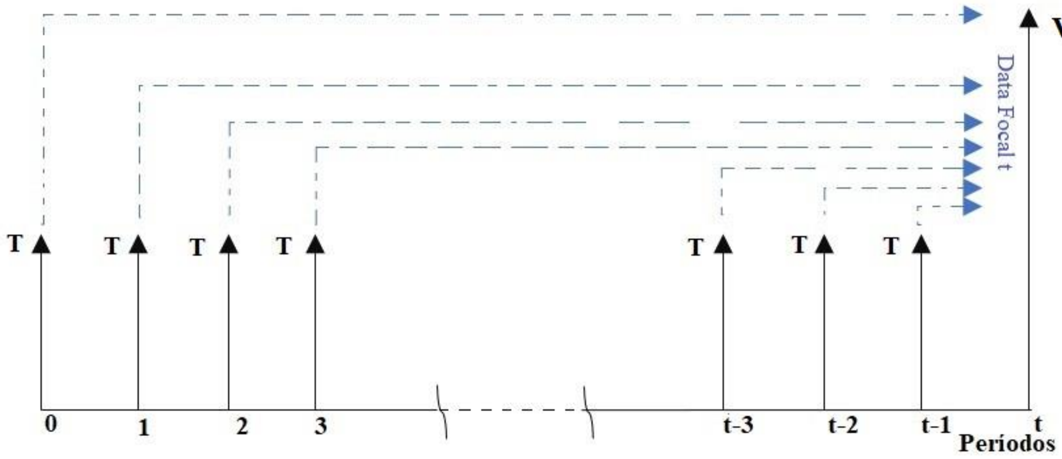
$$VP = T \times (1+i) \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t}\right] \qquad (30)$$

Que é, o valor presente de uma renda antecipada, com o fator de amortização:

$$F_A = \frac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t}$$

Porém, a dedução segue a representação gráfica da figura (4), seja $T$ prestações unitárias, antecipados periodicamente a um taxa de juros:

**Figura 4:** Prestações uniformes em diferentes períodos, renda antecipada (valor futuro)




Fonte: Próprio Autor (2022).

Daí o somatório da equação (6), em t períodos é dado por:

$$VF = T \times (1+i)^1 + T \times (1+i)^2 + T \times (1+i)^3 + \cdots + T \times (1+i)^t$$

Fatorando o $T$, temos:

$$VF = T \times [(1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (1+i)^t]$$

Porém, ao dividir a expressão acima por,

$$\frac{(1+i)}{(1+i)}$$

Teremos:

$$VF = T \times (1+i) \times [1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{t-1}]$$

Isto é, vimos que a sequência,

$$[1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{t-1}]$$

É dada por:

$$A_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Implica que,

$$VF = T \times (1+i) \times A_t \tag{31}$$

Que é o valor futuro ou montante de uma renda antecipada, com o fator de capitalização

$$F_C = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

**Exemplo 17.** Uma pessoa deposita em uma financeira, no fim de cada mês, durante 5 meses, a quantia de R$ 100,00. Calcule o montante da renda, sabendo que essa financeira paga juros compostos de 2% ao mês, capitalizados mensalmente.

Solução

Tem-se:

$$\begin{cases} T = 100{,}00\ R\$ \\ i = 2\%\ a.m = \dfrac{2}{100} = 0{,}02 \\ t = 5\ m \end{cases}$$

Pela equação (20), temos:

$$VF = T \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$$

Substituindo os dados tem-se,

$$VF = 100 \times \left[\frac{(1+0{,}02)^5 - 1}{0{,}02}\right] = 520{,}00 R\$$$

**Exemplo 18.** Um automóvel que custa à vista R$ 17.800,00 pode ser financiado em 36 pagamentos iguais; com o primeiro pagamento no ato da compra, sabendo-se que a taxa de financiamento é de 1,99% ao mês, calcule o valor da prestação mensal desse financiamento.

Solução

$$\begin{cases} VP = 17.800{,}00\ R\$ \\ i = 1{,}99\%\ a.m = \dfrac{1{,}99}{100} = 0{,}0199 \\ t = 36\ m \end{cases}$$

Então, pela equação (30), temos:

$$T = \frac{VP}{(1+i) \times \left[\dfrac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t}\right]}$$

Isto é,

$$T = \frac{17.800{,}00\ R\$}{(1+0{,}0199) \times \left[\dfrac{(1+0{,}0199)^{36} - 1}{0{,}0199 \times (1+0{,}0199)^{36}}\right]} = 683{,}63\ R\$$$

**Exemplo 19.** Desejamos fazer aplicações mensais imediatas de R$ 12.000,00, de modo que na data do décimo depósito constituam o montante de R$ 125.547,00. A que taxa devemos aplicar aquelas importâncias?

Solução

Temos

$$\begin{cases} VF = 125.547{,}00\ R\$ \\ T = 12.000{,}00\ R\$ \\ i = ? \\ t = 10 \end{cases}$$

Da equação (20), tem-se:

$$VF = T \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right]$$

Onde, por tentativas vamos supor que $i = 1\%\ a.m\ (ao\ mês)$, então $i = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Isto é,

$$VF = 12.000{,}00 \times \left[\frac{(1+0{,}01)^{10} - 1}{0{,}01}\right]$$

Daí,

$$VF = 125.547{,}00$$

Portanto, podemos afirmar que $i$ é a taxa, sendo $i = 1\%\ a.m$

**Exemplo 20.** Uma mercadoria é comercializada em 4 (quatro) pagamentos iguais de R$ 185,00; sabendo-se que a taxa de financiamento é de 5% ao mês, e um dos pagamentos foi considerado como entrada, determine o preço à vista desse mercadoria.

Solução

Temos

$$\begin{cases} t = 4 \\ T = 185{,}00\ R\$ \\ i = 5\%\ a.m = 0{,}05 \\ VP = ? \end{cases}$$

Então, pela equação (30),

$$VP = T \times (1+i) \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t}\right]$$

Onde,

$$VP = 185{,}00 \times (1 + 0{,}05) \times \left[\frac{(1 + 0{,}05)^4 - 1}{0{,}05 \times (1 + 0{,}05)^4}\right]$$

Então,

$$VP = 688{,}80\ R\$$$

**Exemplo 21.** Uma dona de casa compra um aparelho eletrodoméstico em 24 prestações mensais de R$ 350,00, sendo que a primeira prestação é dada como entrada. Sabendo-se que a taxa de mercado é de 3% a.m., qual seria o valor do aparelho à vista?

Solução

Temos

$$\begin{cases} t = 24 \\ T = 350{,}00\ R\$ \\ i = 3\ \%\ a.m = 0{,}03 \\ VP = ? \end{cases}$$

A fórmula do valor presente de uma renda antecipada é dada pela equação (30), onde:

$$VP = T \times (1 + i) \times \left[\frac{(1 + i)^t - 1}{i \times (1 + i)^t}\right]$$

Daí,

$$VP = 350 \times (1 + 0{,}03) \times \left[\frac{(1 + 0{,}03)^{24} - 1}{0{,}03 \times (1 + 0{,}03)^{24}}\right]$$

Logo,

$$VP = 6.105{,}26\ R\$$$

**Exemplo 22.** Um terreno é vendido por $ 10.000,00 de entrada e 36 prestações mensais de $ 500,00. Sabendo-se que a taxa de juros corrente no mercado é de 2,5 % a.m., até que preço vale a pena comprar o terreno a vista?

Solução

Temos,

$$\begin{cases} E = 10.000{,}00\ \$ \\ t = 36 \\ T = 500{,}00\ \$ \\ i = 2{,}5\ \%\ a.m = 0{,}025 \\ VP = ? \end{cases}$$

Então, o valor obtido pela equação (19) somado com o valor de entrado será o nosso valor presente, isto é,

$$VP = E + T \times \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t}\right]$$

Dái,

$$VP = 10.000 + 500 \times \left[\frac{(1+0{,}025)^{36} - 1}{0{,}025 \times (1+0{,}025)^{36}}\right]$$

Logo,

$$VP = 21{,}778{,}13\ \$$$

Entretanto, o preço do terreno obviamente deve ser menor que o valor obtido, que é indiferente comprar à vista ou a prazo com a taxa de juros dada.

## 9. EMPRÉSTIMOS

Acredito que você deve ter visto nos aplicativos bancários, uma opção "empréstimo". Porém, o termo não foge do seu sentido literal e vulgar em termo lexical, de acordo Crespo (2013), o empréstimo pode ser realizado a curto, médio ou longo prazo, dependendo assim do período de tempo que é acordado na operação.

Portanto, apesar do processo não ter muita diferença do sentido da palavra, é relevante ressaltar alguns termos financeiramente usados para caracterizar, tanto a pessoa que pede empréstimo e o que concede empréstimo:

- Credor (Mutuante): É denominado a pessoa que dá empréstimo
- Devedor (Mutuário): A pessoa que recebe empréstimo
- IOF: Imposto de operação financeira.

O processo de empréstimo consiste em adquirir uma determinada quantia, com intuito de restituir dentro de um período de tempo acordado, evidenciado no título da operação (documento na qual comprova o processo realizado ou ocorrido), na qual a restituição de valor incide a uma determinada taxa de juros.

Portanto, dentre os sistemas existente na qual se pode fazer o resgate do empréstimo, a nossa abordagem vai se limitar simplesmente (no regime de juros composto), no estudo do Sistema de Amortização Constante (SAC) e Sistema Frencês de Amortização (SFA), sendo as principais utilizados no investimento.

Neste, caso as relações desencadeia-se da seguinte fórmula:

$$T = A + J \tag{32}$$

Onde:

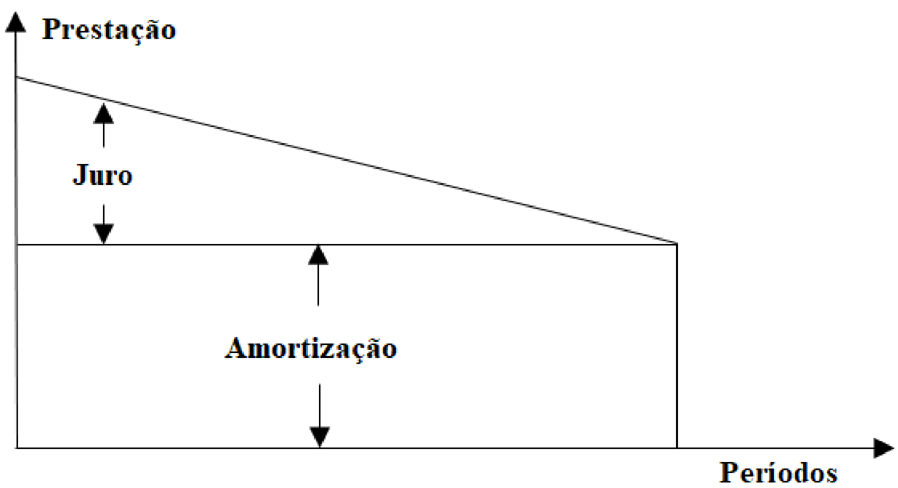
- $T$ valor de prestações ou pagamentos
- $J$ juros (no regime de capitalização composta) dada pela equação (3)
- $A$ Amortização

## 9.1. Sistema de Amortização Constante (SAC)

O sistema de amortização constante é caracterizado por possuir amortização constante nos seus períodos, como Mathias e Gomes (2002), afirma que é exigido ao devedor amortizar a dívida por $n$ parcelas iguais**,** na qual incide os juros sobre o capital amortizado. Sendo o juro e as prestações decrescentes no tempo.

Representado graficamente por:

**Figura 5:** Representação gráfica de SAC




Fonte: Próprio Autor (2022).

Portanto, a construção da planilha neste sistema de amortização é sútil usando as seguintes fórmulas:

a. Amortização

$$A = \frac{S_0}{t} \tag{33}$$

b. Juros de cada período

$$J_k = i \times S_{k-1} \quad (34)$$

c. Valor de prestações de cada período

$$T_k = A + J_k \quad (35)$$

d. Saldo do devedor de cada período

$$S_k = S_{k-1} - A \quad (36)$$

Como também pode-se, obter diretamente o saldo do devedor usando:

$$S_k = S_0 - k \times A \quad (37)$$

Onde,

- $S_0$ é o valor de empréstimo ou seja, a dívida
- $K$ é o período pois, $1 \leq K \leq t$

**Exemplo 23.** Um empréstimo de R$ 200.000,00 será saldado em 8 prestações semestrais pelo Sistema de Amortização Constante, tendo sido contratada a taxa de juro de 10% ao semestre. Confeccionar a planilha de amortização.

Solução

Temos

$$\begin{cases} S_0 = 200.000{,}00\ R\$ \\ t = 8 \\ i = 10\ \% \ = 0{,}1\% \end{cases}$$

Pela equação 33 tem-se:

$$A = \frac{200.000{,}00}{8} = 25.000{,}00R\$$$

Usando a fórmula (36), tem-se,

$$S_k = S_{k-1} - A$$

Implica que,

$$S_1 = S_0 - A = 200.000{,}00 - 25.000{,}00 = 175.000{,}00$$

Daí,

$$J_1 = i \times S_0 = 0{,}1 \times 200.000{,}00 = 20.000{,}00$$

Então, aplicando a equação 35, obtemos o valor da primeira prestação,

$$T_1 = A + J_1 = 25.000{,}00 + 20.000{,}00 = 45.000{,}00$$

Continuando este processo até o último período, obtemos todos os dados da planilha abaixo (verificação das demais contas a cargo do leitor).

**Quadro 1:** SAC sem prazo de carência

| Período | Prestação | Juro | Amortização | Saldo do devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 200.000,00 |
| 1 | 45.000,00 | 20,000,00 | 25.000,00 | 175.000,00 |
| 2 | 42.500,00 | 17.500,00 | 25.000,00 | 150.000,00 |
| 3 | 40.000,00 | 15.000,00 | 25.000,00 | 125.000,00 |
| 4 | 37.500,00 | 12.500,00 | 25.000,00 | 100.000,00 |
| 5 | 35.000,00 | 10.000,00 | 25.000,00 | 75.000,00 |
| 6 | 32.500,00 | 7.500,00 | 25.000,00 | 50.000,00 |
| 7 | 30.000,00 | 5.000,00 | 25.000,00 | 25.000,00 |
| 8 | 27.500,00 | 2.500,00 | 25.000,00 | - |
| TOTAL | 290.000,00 | 90.000,00 | 200.000,00 | - |

Ao fazermos um empréstimo nem sempre recebemos a quantia da parte do credor por uma única transação, pode ser por várias transações (na qual o intervalo de tempo das transações ou parcelas que o credor vai fazendo ao devedor até chegar a quantia requerido é chamado **prazo de utilidade**), quando recebemos a quantia emprestado por uma única parcela, é dito à **prazo unitário**.

No ato de empréstimo o credor pode conceder ao devedor um determinado período de tempo denominado **prazo de carência** na qual o cliente vai amortizar somente os juros do financiamento, como também pode ser incorporado no valor atual e pago juntamente com a prestação ao final do prazo de carência, ou seja, dependendo do contrato esses juros podem ser adicionados as devidas prestações após esse período. Portanto, vamos tratar destas questões separadamente para melhor compreensão.

### 9.1.1. SAC, com prazo de carência e prazo de utilização unitário

**Exemplo 24.** Um empréstimo de R$ 200.000,00 será saldado em 8 prestações semestrais pelo Sistema de Amortização Constante, tendo sido contratada e pago no ato, a taxa de juro de 10% ao semestre e com 4 semestres de carência. Confeccionar a planilha de amortização.

A questão é parecida com a (23), porém, foi dado um período de carência. Vamos construir a planilha usando as mesmas fórmulas como usamos na planilha anterior, lembrando que durante o prazo de carência não há amortização da dívida, excepto os juros, então, fazendo as contas do mesmo jeito que apresentamos anteriormente montamos a planilha.

**Quadro 2:** SAC com prazo de carência e de utilização unitário.

| Período | Prestação | Juro | Amortização | Saldo do devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 200.000,00 |
| 1 | 20,000,00 | 20.000,00 | - | 200.000,00 |
| 2 | 20,000,00 | 20.000,00 | - | 200.000,00 |
| 3 | 20,000,00 | 20.000,00 | - | 200.000,00 |
| 4 | 45.000,00 | 20.000,00 | 25.000,00 | 175.000,00 |
| 5 | 42.500,00 | 17.500,00 | 25.000,00 | 150.000,00 |
| 6 | 40.000,00 | 15.000,00 | 25.000,00 | 125.000,00 |
| 7 | 37.500,00 | 12.500,00 | 25.000,00 | 100.000,00 |
| 8 | 35.000,00 | 10.000,00 | 25.000,00 | 75.000,00 |
| 9 | 32.500,00 | 7.500,00 | 25.000,00 | 50.000,00 |
| 10 | 30.000,00 | 5.000,00 | 25.000,00 | 25.000,00 |
| 11 | 27.500,00 | 2.500,00 | 25.000,00 | - |
| TOTAL | 350.000,00 | 150.000,00 | 200.000,00 | - |

Portanto, isto é, do período zero até ao final do quarto período é o final do prazo de carência e começa a primeira amortização.

### 9.1.2. SAC, com prazo de carência e utilização unitário, com juros capitalizados

Aqui temos dois casos a destacar, quando:

a) As amortizações são calculadas em relação ao valor inicial emprestado, enquanto os juros capitalizados são liquidados no primeiro período de amortização;

Consideramos o exemplo 24, neste caso como trata-se da capitalização, o procedimento fica razoável, usando a equação 6, na qual calculamos o saldo do devedor de cada período durante o prazo de carência, temos:

$$S_k = S_0 \times (1 + i)^k$$

Onde,

No 1º período:

$$S_1 = 200.000{,}00 \times (1 + 0{,}1)^1 = 220.000{,}00$$

No 2º período,

$$S_2 = 200.000{,}00 \times (1 + 0{,}1)^2 = 242.000{,}00$$

No 3º período tem-se,

$$S_3 = 200.000{,}00 \times (1 + 0{,}1)^3 = 266.200{,}00$$

Portanto, como ao final do último período de carência começa amortização, então, o juro é obtido fazendo:

$$J_4 = S_0 \times (1 + i)^k - S_0$$

$$J_4 = 200.000{,}00 \times (1 + 0{,}1)^4 - 200.000{,}00 = 92.820{,}00$$

Pois, como amortização é constante vimos anteriormente usando a equação 35, tem-se,

$$T_4 = A + J_4 = 25.000{,}00 + 92.820{,}00 = 117.820{,}00$$

Consequentemente, temos o saldo do devedor do quarto período após a primeira amortização, pode ser obtido por:

$$S_K = S_0 \times (1 + i)^k - T_4$$

Isto é,

$$S_4 = 200.000{,}00 \times (1 + 0{,}1)^4 - 117.820{,}00 = 175.000{,}00$$

O resto de contas é feita normalmente, usando as fórmulas apresentados nesse capítulo, isto é, pela equação 34, 35 e 36, temos:

$$J_5 = i \times S_4 = 0{,}1 \times 175.000{,}00 = 17.500{,}00$$

$$T_5 = A + J_5 = 25.000{,}00 + 17.500{,}00 = 42.500{,}00$$

$$S_5 = S_4 - A = 175.000{,}00 - 25.000{,}00 = 150.000{,}00$$

Vai fazendo este procedimento, até amortizar toda dívida, portanto, fazendo isso colocamos os dados na planilha abaixo. Averiguação de contas a cargo do leitor.

**Quadro 3:** SAC com prazo de carência e de utilização unitário, juros capitalizado caso a)

| Período | Prestação | Juro | Amortização | Saldo do devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 200.000,00 |
| 1 | - | - | - | 220.000,00 |
| 2 | - | - | - | 242.000,00 |
| 3 | - | - | - | 266.200,00 |
| 4 | 117.820,00 | 92.820,00 | 25.000,00 | 175.000,00 |
| 5 | 42.500,00 | 17.500,00 | 25.000,00 | 150.000,00 |
| 6 | 40.000,00 | 15.000,00 | 25.000,00 | 125.000,00 |
| 7 | 37.500,00 | 12.500,00 | 25.000,00 | 100.000,00 |
| 8 | 35.000,00 | 10.000,00 | 25.000,00 | 75.000,00 |
| 9 | 32.500,00 | 7.500,00 | 25.000,00 | 50.000,00 |
| 10 | 30.000,00 | 5.000,00 | 25.000,00 | 25.000,00 |
| 11 | 27.500,00 | 2.500,00 | 25.000,00 | - |
| TOTAL | 362.820,00 | 162.820,00 | 200.000,00 | - |

Isso mostra que os juros durante o prazo de carência foram acrescentados no saldo do devedor posteriormente pagas na primeira prestação.

b) As amortizações são calculadas em relação ao valor inicial emprestados e os juros capitalizados durante o prazo de carência;

Considera o mesmo exemplo 24, como os juros são capitalizados durante o prazo de carência, então pela equação 6, calculamos os devidos saldos do devedor até ao penúltimo período de carência, isto é:

- 1º período

$$S_1 = 200.000,00 \times (1 + 0,1)^1 = 220.000,00$$

- 2º período

$$S_2 = 200.000,00 \times (1 + 0,1)^2 = 242.000,00$$

- 3º período

$$S_3 = 200.000,00 \times (1 + 0,1)^3 = 266.200,00$$

Como o quarto período é o final do prazo de carência pois, segue o pagamento da primeira prestação logo é razoável fazer:

$$S = 200.000{,}00 \times (1 + 0{,}1)^4 = 292.820{,}00$$

Daí o saldo do devedor do fim do prazo é obtido fazendo:

$$S_4 = S - A$$

Nesta modalidade o valor constante da amortização após o prazo de carência não é obtido de modo habitual como mostra a equação 33, mas, é obtido ao dividir o saldo devedor do fim do prazo de carência  por período da operação ou seja:

$$A = \frac{S}{t} = \frac{292.820{,}00}{8} = 36.602{,}50$$

Sendo constante para todos períodos após o prazo de carência, isto é, os juros obtidos durante o período de carência são adicionados ao saldo do devedor e dissolvidos em amortização para os demais períodos a seguir. Consequentemente, obtemos o saldo do devedor do quarto período, isto é, após o pagamento da primeira prestação.

$$S_4 = 292.820{,}00 - 36.602{,}50 = 256.217{,}50$$

O resto das contas, ou seja, dos dados da planilha são obtidos de forma habitual.

**Quadro 4:** SAC com prazo de carência, de utilização unitário e juros capitalizados caso b)

| Período | Prestação | Juro | Amortização | Saldo do devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 200.000,00 |
| 1 | - | - | - | 220.000,00 |
| 2 | - | - | - | 242.000,00 |
| 3 | - | - | - | 266.200,00 |
| 4 | 36.602,50 | - | 36.602,50 | 256.217,5 |
| 5 | 62.224,25 | 25.621,75 | 36.602,50 | 219.615,00 |
| 6 | 58.564,00 | 21.961,50 | 36.602,50 | 183.012,50 |
| 7 | 54.903,75 | 18.301,25 | 36.602,50 | 146.410,00 |
| 8 | 51.243,5 | 14.641,00 | 36.602,50 | 109.807,50 |
| 9 | 47.583,2 | 10.980,70 | 36.602,50 | 73.205,00 |
| 10 | 43.923,00 | 7.320,50 | 36.602,50 | 36.602,50 |
| 11 | 40.262,75 | 3.660,25 | 36.602,50 | - |
| TOTAL | 395.306,95 | 102.486,95 | 292.820,00 | - |

$Q$

### 9.1.3. SAC, com prazo de carência e prazo de utilização não-unitário

Nesta modalidade é importante lembrar que, estamos a tratar da vertente de investimento em que a quantia emprestada da parte do credor é enviada por n-parcelas ou transações. Considere o exemplo (24), admitindo que o valor do empréstimo, isto é, R$ 200.000,00 seja enviado por 4 prestações.

Neste caso, montando a nossa planilha, temos:

**Quadro 5:** SAC com prazo de carência e prazo de utilidade não-unitário

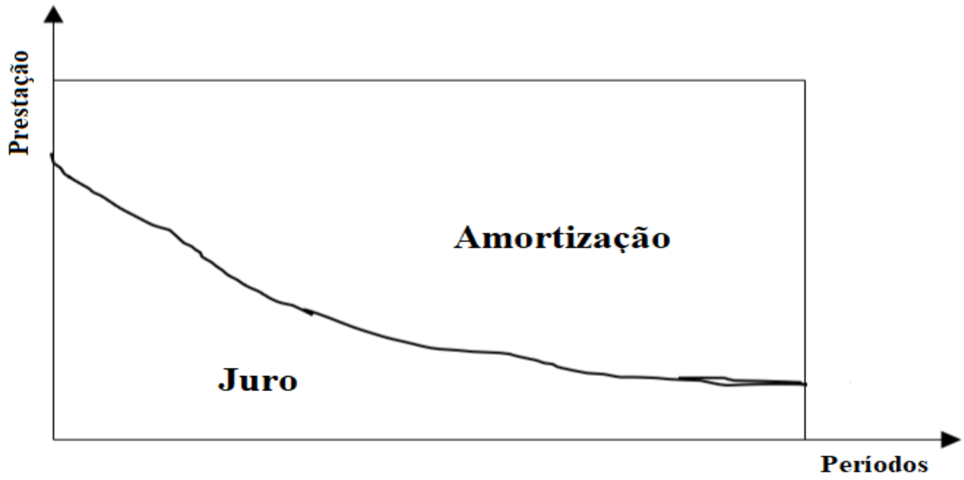
| Período | Prestação | Juro | Amortização | Saldo do devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 50.000,00 |
| 1 | 5.000,00 | 5.000,00 | - | 100.000,00 |
| 2 | 10.000,00 | 10.000,00 | - | 150.000,00 |
| 3 | 15.000,00 | 15.000,00 | - | 200.000,00 |
| 4 | 45.000,00 | 20.000,00 | 25.000,00 | 175.000,00 |
| 5 | 42.500,00 | 17.500,00 | 25.000,00 | 150.000,00 |
| 6 | 40.000,00 | 15.000,00 | 25.000,00 | 125.000,00 |
| 7 | 37.500,00 | 12.500,00 | 25.000,00 | 100.000,00 |
| 8 | 35.000,00 | 10.000,00 | 25.000,00 | 75.000,00 |
| 9 | 32.500,00 | 7.500,00 | 25.000,00 | 50.000,00 |
| 10 | 30.000,00 | 5.000,00 | 25.000,00 | 25.000,00 |
| 11 | 27.500,00 | 2.500,00 | 25.000,00 | - |
| TOTAL | 320.000,00 | 120.000,00 | 200.000,00 | - |

Portanto, é razoável notar que, o modo de obtenção dos dados da tabela é similar ao quadro 2, exceto a noção introduzida do empréstimo sendo dado por parcelas ao mutuário, o resto é similar.

## 9.2. Sistema de Amortização Francês (SFA)

Este sistema é um dos mais utilizados nas operações comerciais e financeiras, por possuir as seguintes características: prestações constantes, amortizações crescentes e juros na qual incide o valor decrescente. Tendo a seguinte representação gráfica:

**Figura 6:** Representação gráfica do SFA




Fonte: Próprio Autor (2022).

Portanto, como mostra a figura (6), é constante o valor de pagamentos, à medida que eles vão sendo amortizados, os juros vão decrescendo, tornando-se cada vez menores e amortização vai crescendo progressivamente, ou seja, corresponde ao valor atual da renda imediata, evidenciado na equação (19). Os cálculos são feitas utilizando as seguintes fórmulas, da equação (19), tem-se:

$$T = \frac{VP = S_0}{\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i \times (1+i)^t}\right]} \tag{38}$$

Sendo, $VP = S_0$ saldo do devedor, como $T$ é constante então da equação (35), temos:

$$A_k = T - J_k \tag{39}$$

Portanto, as equações 34 e 36 não sofrem nenhuma alteração e podemos determinar saldo do devedor diretamente usando a expressão:

$$S_k = T \times A_{t-k|i} \tag{40}$$

Então,

$$A_{t-k|i} = \left[\frac{(1+i)^{t-k} - 1}{i \times (1+i)^{t-k}}\right]$$

Onde, $t$ é o tempo e $k$ representando o período da prestação a taxa $i$.

### 9.2.1. SFA, com prazo de utilização unitário e sem prazo de carência

Vamos analisar a questão a seguir considerando que, o valor emprestado foi entregue no ato (prazo de utilização unitário).

**Exemplo 25.** Um banco empresta a uma empresa R$ 180.000,00 pelo prazo de 5 anos, à taxa de 8% ao ano. Sabendo que será adotado o Sistema Francês de Amortização, construa a planilha de amortização.

Solução

temos:

$$\begin{cases} S_0 = 180.000{,}00\ R\$ \\ t = 5 \\ i = 8\ \% \ = 0{,}08\% \end{cases}$$

Daí,

$$T = \frac{180.000{,}00}{\left[\frac{(1+0{,}08)^5 - 1}{0{,}08 \times (1+0{,}08)^5}\right]} = 45.082{,}16$$

Da equação (34), (39) e (36) temos:

- 1º período

$$J_1 = i \times S_0 = 0{,}08 \times 180.000{,}00 = 14.400{,}00$$
$$A_1 = T - J_1 = 45.082{,}16 - 14.400{,}00 = 30.682{,}16$$
$$S_1 = S_0 - A_1 = 180.000{,}00 - 30.682{,}16 = 149.317{,}84$$

- 2º período

$$J_2 = i \times S_1 = 0{,}08 \times 149.317{,}84 = 11.945{,}43$$
$$A_2 = T - J_2 = 45.082{,}16 - 11.945{,}43 = 33.136{,}73$$
$$S_2 = S_1 - A_2 = 149.317{,}84 - 33.136{,}73 = 116.181{,}11$$

- 3º período

$$J_3 = i \times S_2 = 0{,}08 \times 116.181{,}11 = 9.294{,}49$$
$$A_3 = T - J_3 = 45.082{,}16 - 9.294{,}49 = 35.787{,}67$$
$$S_3 = S_2 - A_3 = 116.181{,}11 - 35.787{,}67 = 80.393{,}44$$

- 4º período

$$J_4 = i \times S_3 = 0{,}08 \times 80.393{,}44 = 6.431{,}48$$
$$A_4 = T - J_4 = 45.082{,}16 - 6.431{,}48 = 38.650{,}68$$
$$S_4 = S_3 - A_4 = 80.393{,}44 - 38.650{,}68 = 41.742{,}76$$

- 5º período

$$J_5 = i \times S_4 = 0{,}08 \times 41.742{,}76 = 3.339{,}42$$
$$A_5 = T - J_5 = 45.082{,}16 - 3.339{,}42 = 41.742{,}74$$
$$S_5 = S_4 - A_5 = 41.742{,}76 - 41.742{,}74 = 0{,}2$$

Porém, vamos construir a nossa planilha, onde temos:

**Quadro 6:** SFA com prazo de utilização unitário e sem prazo de carência.

| Período | Prestação | Juro | Amortização | Saldo do devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 180.000,00 |
| 1 | 45.082,16 | 14.400,00 | 30.682,16 | 149.317,84 |
| 2 | 45.082,16 | 11.945,43 | 33.136,73 | 116.181,11 |
| 3 | 45.082,16 | 9.294,49 | 35.787,67 | 80.393,44 |
| 4 | 45.082,16 | 6.431,48 | 38.650,68 | 41.742,76 |
| 5 | 45.082,16 | 3.339,42 | 41.742,74 | 0,02 |
| TOTAL | 225.410,80 | 45.410,82 | 179.999,98 | - |

Compreende que é razoável em ambos sistemas de amortização tratadas, fazer as contas quando não temos prazo de carência ou nem juros capitalizados, portanto, vamos analisar o caso a seguir e as suas particularidades.

### 9.2.2. SFA, com prazo de utilização unitário e com prazo de carência

No SFA, com prazo de utilização unitário e com prazo de carência, pode ocorrer as seguintes possibilidades durante a carência nos quais:

a) Os juros são pagos (sem serem capitalizados);

Vamos admitir que no exemplo (25), foram dados 3 anos de carência porém, o procedimento é semelhante ao que apresentamos no sistema de amortização constante, tendo em conta os dados da planilha nos quais são obtidos usando as equações introduzidas na secção 8.2.

**Quadro 7:** SFA com prazo de carência e de utilidade com juros pagos durante a carência

| Período | Prestação | Juro | Amortização | Saldo do devedor |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 180.000,00 |
| 1 | 14.400,00 | 14.400,00 | - | 180.000,00 |
| 2 | 14.400,00 | 14.400,00 | - | 180.000,00 |
| 3 | 45.082,16 | 14.400,00 | 30.682,16 | 149.317,84 |
| 4 | 45.082,16 | 11.945,43 | 33.136,73 | 116.181,11 |
| 5 | 45.082,16 | 9.294,49 | 35.787,67 | 80.393,44 |
| 6 | 45.082,16 | 6.431,68 | 38.650,48 | 41.742,96 |
| 7 | 45.082,16 | 3.339,44 | 41.742,72 | 0,24 |
| TOTAL | 254.210,80 | 74.211,04 | 179.999,76 | - |

b) Os juros são capitalizados e dissolvidos no saldo do devedor ( e amortizados nas parcelas).

O procedimento é o mesmo do sistema de amortização constante, tendo em conta que, capitalizamos o saldo do devedor até o penúltimo período do prazo de carência, pois, a prestação incluindo o empréstimo começa a ser pago ao final do último período de carência. Neste caso, usa-se a fórmula do montante de juro composto apresentado na equação (6), onde:

$$M_k = C \times (1+i)^k$$

Sendo, $k \geq 1$ e $M_k = S_k$.

Considere o exemplo 25, onde admitimos a particularidade do item (a) da secção 8.2.2, em que foi dado prazo de carência de 3 anos, então, se os juros são capitalizados durante a carência, temos:

$$\begin{cases} S_0 = 180.000,00\ R\$ \\ t = 5 \\ k = 3\ anos\ de\ ca. \\ i = 8\ \% \ = 0,08\% \end{cases}$$

Isto é,

$$S_1 = 180.000,00 \times (1+0,08)^1 = 194.400,00$$

$$S_2 = 180.000,00 \times (1+0,08)^2 = 209.952,00$$

Daí,

$$T = \frac{209.952,00}{\left[\frac{(1+0,08)^5 - 1}{0,08 \times (1+0,08)^5}\right]} = 52.583,83$$

**Quadro 8:** SFA com prazo de carência e de utilização unitário, juros capitalizados

| Período | Prestação | Juro | Amortização | Saldo do devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 180.000,00 |
| 1 | - | - | - | 194.400,00 |
| 2 | - | - | - | 209.952,00 |
| 3 | 52.582,83 | 16.796,16 | 35.786,67 | 174.165,33 |
| 4 | 52.582,83 | 13.933,23 | 38.649,60 | 135.515,73 |
| 5 | 52.582,83 | 10.841,26 | 41.741,57 | 93.774,16 |
| 6 | 52.582,83 | 7.501,93 | 45.080,90 | 48.693,26 |
| 7 | 52.582,83 | 3.895,46 | 48.687,37 | 5,89 |
| TOTAL | 262.914,15 | 52.968,04 | 209.946,11 | - |

### 9.2.3. Sistema Price (SP)

O sistema Price é uma particularidade do Sistema de Amortização Francês, assim caracterizado por prestações mensais, uso de taxa proporcional sendo que a taxa de juros preestabelecida na operação é dada em termos nominais ou seja, o juro é concedido em termos anuais.

O sistema evidencia a situação em que não combine ou se ajusta o período da taxa de juros e da amortização, como também no caso, da planilha calculada com a taxa efetiva (que consiste somente em construir a planilha usando a taxa de juro efetiva na operação ao invés da taxa normal), porém, analisemos a construlha da planilha do sistema prece sendo o mais destacado.

Portanto, assim como ressaltamos que o sistema price é um caso particular do SFA, isto implica que, o modo de obtenção dos dados da planilha, ou seja, o modo de resolver não é diferente do que foi apresentado, excepto as particularidades mencionadas.

**Exemplo 26.** Uma financeira emprestou R$ 80.000,00, sem prazo de carência. Sendo a taxa de juro cobrada igual a 12% ao ano (Tabela Price) e devendo a liquidação ser feita em 8 meses, construa a planilha.

Solução

Temos

$$\begin{cases} S_0 = 80.000{,}00\ R\$ \\ i = 12\% = \dfrac{12\%}{12} = 1\% = 0{,}01 \\ t = 8\, m \end{cases}$$

Então,

$$T = \frac{80.000{,}00}{\left[\dfrac{(1+0{,}01)^8 - 1}{0{,}01 \times (1+0{,}01)^8}\right]} = 10.455{,}22$$

**Quadro 9:** Sistema Price (Caso particular do SFA).

| Período | Prestação | Juro | Amortização | Saldo do devedor |
|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | 80.000,00 |
| 1 | 10.455,22 | 800,00 | 9.655,22 | 70.344,78 |
| 2 | 10.455,22 | 703,45 | 9.751,77 | 60,593,01 |
| 3 | 10.455,22 | 605,93 | 9.849,29 | 50.743,72 |
| 4 | 10.455,22 | 507,44 | 9.947,78 | 40.795,94 |
| 5 | 10.455,22 | 407,96 | 10.047,26 | 30.748,68 |
| 6 | 10.455,22 | 307,49 | 10.147,73 | 20.600,95 |
| 7 | 10.455,22 | 206,01 | 10.249,21 | 10.351,74 |
| 8 | 10.455,22 | 103,52 | 10.351,70 | 0,04 |

## 10. INVESTIMENTO

Provavelmente em alguns momentos já ouvimos falar de investimento independentemente dos diversos significados que ele vem adquirindo de acordo os interesses de cada um ao longo dos tempos, principalmente no dia a dia. Entretanto, a nossa abordagem da palavra não difere do seu conceito vulgar, incorpora todos aspectos de modo geral no mercado financeiro, indubitavelmente de acordo o

Decreto-lei nº 6.404, de 15 de Dezembro de 1976, na qual o investimento é classificado como conta representativa de interesses e direitos perpétuos de qualquer natureza em outras sociedades e não pode ser classificado como ativo circulante, essa concepção não extrapola a delimitação da pesquisa pois, a nossa abordagem é de caráter didático, desencadeando entorno do início de investimento.

O investimento é toda ação na qual envolve uma aplicação de capital destinada à compra de ações financeiros, mobiliários, etc., com finalidade de obter recursos produtivos tanto quanto em ativos que irão ser vinculados a um processo produtivo de curto ou longo prazo, ou seja, existe uma renúncia de recursos no momento, dada a possível disponibilidade futura de recursos (KIRCHNER, 2014).

Portanto, os retornos futuros podem ser incertos e qualquer investimento carrega um certo nível de risco ou recompensa, embora que, conhecer o seu perfil como investidor antes de investir faz toda diferença segundo o site da Caixa Econômica Federal 2022, o investidor precisa saber como funcionam as modalidades de investimento existente de modo avaliar seus riscos e vantagens, como também projetar qual seja a modalidade adequado ao seu perfil. No entanto, o investimento pode ser dividido em dois tipos: O de renda fixa e o de renda variável como também pode haver um investimento de caráter fixo e variável ao mesmo tempo.

### 10.1. Renda Fixa

Considera-se o investimento de uma renda fixa aquele que através da qual se tem uma previsão da remuneração ou retorno sobre o capital investido no momento da aplicação, ou seja, ao investir nessa modalidade o investidor consegue ter uma noção do seu benefício, em relação ao tempo de aplicação. Isto implica que na renda fixa, não que não haja risco nessa modalidade de investimento tendo em conta que, não existe nenhum investimento sequer que não tenham risco embora, que o de renda fixa é de caráter isenta da negatividade pois, o vencimento é efetuado ao longo do prazo estabelecido na operação (KIRCHNER, 2014).

Dentre vários exemplos que podemos evidenciar de um investimento de renda fixa temos: Títulos Públicos; Letras de Crédito Imobiliários; Certificado de Depósito Bancário, etc. Portanto, quanto a sua classificação o investimento de renda fixa é considerado como **pré-fixada** quando existe uma percentagem fixa no determinado tempo de aplicação (isto é, no caso de Tesouro direto, Letras de Crédito, etc.), enquanto se a rentabilidade é obtida por meio de índice de mercado é **pós-fixada** (no caso da Taxa Selic, CDI, etc.) e por fim é **híbrido** quando apresentam as duas caraterísticas mencionados acima.

### 10.2. Renda Variável

Esta modalidade de investimento é definida como o tipo de investimento em que não se pode determinar o retorno na data em que o investimento é feito (KIRCHNER, 2014). Isto é, no ato de investir o investidor não consegue projetar ou ter noção do resultado da produção, da rentabilidade que terá suas ações. Este tipo de investimento é o mais volátil pela sua caraterística ou impossibilidade de prever o retorno das ações, sendo assim a renda não é pré-fixada. Por exemplo temos: Ações de empresas, Câmbio, Fundos, etc.

## 11. ANÁLISE DE INVESTIMENTO

A escolha do melhor investimento é essencial uma vez que, variam em seu grau de risco, rentabilidade e liquidez, cabendo assim, ao investidor analisar qual seja o investimento que se adequa ao seu perfil. Os analistas do ambiente de planejamento e gestão enfatizam a importância de planejar investimento, pressupondo um monitoramento estratégico das ações, através da qual consegue-se projetar diretrizes consistentes presente e posterior de modo a garantir os benefícios de tais investimentos (FERREIRA, 2017).

Entende-se que o conhecimento das principais características do mercado financeiro está relacionado à tomada de decisão de investimento e obtenção de financiamento, destacando assim, o princípio financeiro básico da ação de investimento isto é, uma determinada quantidade de recurso será menos valiosa amanhã do que hoje porque quando aplicado começa a ganhar juros imediatamente (FONSECA, 2010).

Entender o risco e, portanto, o retorno (rentabilidade) de cada financiamento que se pretende adentrar é relevante pois, o conhecimento do risco domina a decisão de fazer melhores investimentos sem desconsiderar que no caso de uma aplicação financeira além, de analisar o tipo de investimento a se fazer, prestasse mais atenção na taxa de juros da operação caso seja compatível aos interesses do investidor, prevalecendo a ideia de que, não existe nenhum investimento sequer isenta de risco.

De acordo com Kirchner (2014), uma decisão de investimento não pode ser baseada apenas na demanda pelo produto vendido, interesses, etc., mas, sim independentemente dos interesses do investidor a decisão parte da eficiência do investimento a ser feito.

Portanto, o processo de análise de investimentos requer uma série de dados financeiros, tendo em conta que, a diversidade do próprio mercado e da economia torna mais complexa o processo de análise de investimento. De acordo Assaf Neto (1992) os métodos que serão abordados nos tópicos a seguires são utilizados para análise de investimento, seu conhecimento é de caráter essencial no início de qualquer investimento, ou seja, na administração financeira, cabe ao investidor ou administrador analisar de forma lógica o melhor investimento da organização (KIRCHNER, 2014). Entretanto, Ferreira (2017) realça que, no início de qualquer investimento é importante o investidor analisar por meio dos métodos apropriados nos quais as mais destacadas no que concerne à tomada de decisão ou de análise de investimento, são: Valor presente líquido; Taxa interna de retorno; Índice de lucrativo e Taxa de rentabilidade.

### 11.1. Valor Presente Líquido (VPL)

Essa abordagem sugere, segundo Rolão (2017) que os investidores tenham um conhecimento básico consolidado da matemática financeira pois, toma-se o valor presente do investimento (fluxo de caixa) a uma dada taxa de aplicação ao decorrer de um certo período, reduzido ao fluxo de caixa inicial do investimento, ou seja, do período zero (CARREIRA, 2017). Tomada em português (VPL) e inglês NPV (Net Present Value), na qual é evidenciado pela seguinte expressão matemática:

$$VPL = \sum_{j=1}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j} - FC_0 \qquad (41)$$

Em que,

$$VP = \sum_{j=1}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j} \qquad (42)$$

É o valor presente do investimento, pois:

- $VPL$ é o valor presente líquido;

- $FC_j$ é o fluxo de caixa no período de aplicação $j$;
- $FC_0$ é o fluxo de caixa no início de investimento, ou seja, do período de aplicação zero (valor inicial de investimento);
- $i$ a taxa de juros.

### 11.2. Taxa Interna De Retorno (TIR OU IRR)

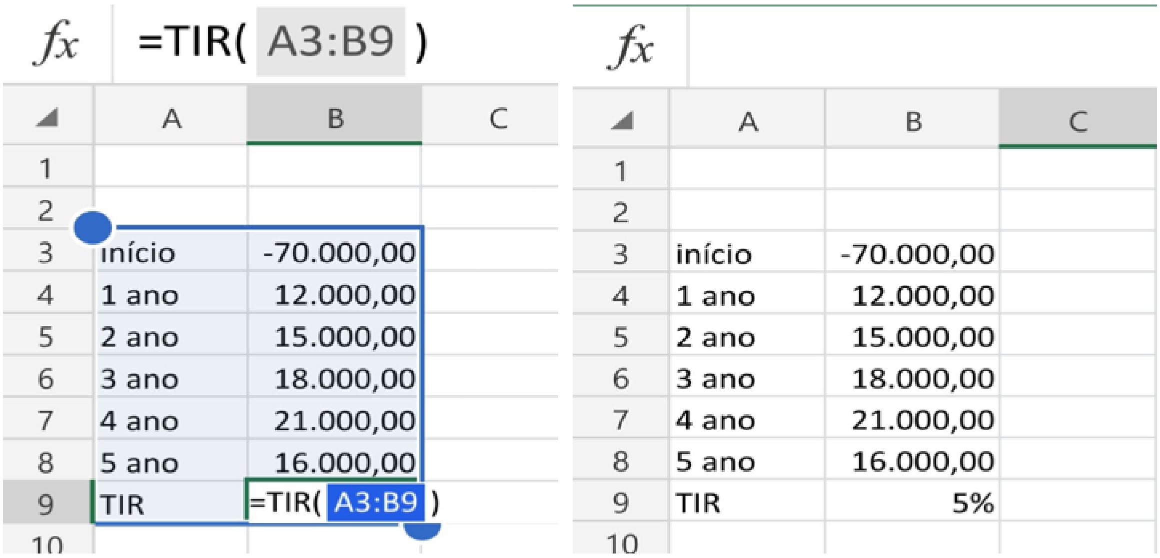
Este método possui as características similar ao método VPL porém, seu resultado é expresso em porcentagens, que segundo Carreira (2017) a sua determinação envolve tentativas e erros, sendo diferente do processo habitual de obtenção de resultados da técnica anterior pois, aqui a incógnita passa a ser a taxa de juros (TIR) da operação que anula o valor presente líquido (ROLÃO, 2017). Isto é:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{FC_j}{(1+TIR)^j} - FC_0 = 0 \qquad (43)$$

Para que se possa aceitar um investimento compara-se a taxa interna de retorno com a taxa de desconto na tomada de decisões financeiras (ou seja, no início de investimento) pois, é necessário que a taxa interna de retorno seja maior que o custo exigido (FONSECA, 2010).

Entretanto, podemos calcular a TIR usando o Excel (ou seja, pode-se usar também a máquina calculadora HP 12c), no caso trabalhamos com Excel adiciona-se todos os fluxos de caixa da operação na planilha (fluxo inicial com sinal negativo), porém, ao final coloca-se “=TIR(selecionando o intervalo completo do fluxo)” apertando a tecla enter assim como mostra a figura 7.

**Figura 7:** Obtenção de TIR usando Excel.




Fonte: Próprio Autor (2022).

## 11.3. Indice De Lucrativida (IL) E Taxa De Rendabilidade (TR)

De acordo Fonseca (2010), o indice de lucratividade ou é também denominado taxa de rentabilidade (TR), partindo de uma relação custo-benefício. São ferramentas de análise do investimento que através da qual temos a possibilidade de analisar o retorno do investimento em porcentagem, permitindo assim, ao administrar ou investidor verificar os resultados obtidos com a operação (FONSECA, 2010). Porém, apresentam a mesma expressão matemática para fins de cálculos, na qual o investimento é obtido como viável se resultado for maior que um (ASSAF NETO, 1992).

$$IL = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{FC_j}{(1+i)^j}}{FC_0} \tag{44}$$

Ou seja,

$$IL \; ou \; TR = \frac{VP}{FC_0} \tag{45}$$

**Exercício 27.** Um projeto apresenta um investimento inicial de R$22.000,00. Nos próximos 3 anos espera-se um fluxo de caixa positivo de R$12 mil, R$5 mil e R$8 mil, respectivamente. Considerando uma TMA de 7% ao ano, calcule o VPL do projeto. Calcule também a TIR deste projeto.

Solução

Temos

$$\begin{cases} FC_0 = 22.000,00\ R\$ \\ i = 7\% = \dfrac{7}{100} = 0,07 \\ j = 3\ a \end{cases}$$

Daí a equação (41), temos:

$$VPL = (VP_1 + VP_2 + VP_3) - FC_0$$

Em que,

$$VP_1 = \frac{12.000,00}{(1+0,07)^1} = 11.214,95\ R\$$$

Analogamente,

$$VP_2 = \frac{5.000,00}{(1+0,07)^2} = 4.367,19\ R\$$$

e

$$VP_3 = \frac{8.000,00}{(1+0,07)^3} = 6.530,38\ R\$$$

Portanto,

$$VPL = (11.214,95 + 4.367,19 + 6.530,38\ )R\$ - 22.000,00\ R\$ = 112,52\ R\$$$

Neste caso usamos o Excel para obter a taxa interna de retorno (TIR) como mostra a figura 8:

**Quadro 10:** Taxa interna de retorno

| **Ano** | **Fluxos de Caixa** |
|---|---|
| 0 | -22000 |
| 1 | 12000 |
| 2 | 5000 |
| 3 | 8000 |
| **TIR** | 7% |

**Exercício 28.** O Senhor José da Silva está estudando o seguinte projeto de investimento:

| *Mês* | *Fluxo (em milhares de reais)* |
|---|---|
| *0* | *-500* |
| *1* | *100* |
| *2* | *0* |
| *3* | *300* |
| *4* | *0* |
| *5* | *200* |

| | |
|---|---|
| *6* | *800* |

Sabendo que o custo de oportunidade do Senhor Silva é de 2% ao mês, determine o VPL e também a TIR.

Solução

Temos, a taxa $i = 2\% = 0{,}02$ onde, pela equação (41),

$$VPL = (VP_1 + VP_2 + VP_3 + VP_4 + VP_5 + VP_6) - FC_0$$

Calculando o VPL de cada período e substituindo na equação acima temos,

$$VPL = (98{,}03 + 0 + 282{,}70 + 0 + 181{,}15 + 710{,}38) - 500 = 772{,}26\ R\$$$

Portanto, usando o Excel obtemos a taxa interna de retorno como mostra a figura (9).

**Quadro 11:** Taxa interna de retorno

| *Mês* | *Fluxo (em milhares de reais)* |
|---|---|
| *0* | *-500* |
| *1* | *100* |
| *2* | *0* |
| *3* | *300* |
| *4* | *0* |
| *5* | *200* |
| *6* | *800* |
| **TIR** | 26% |

**Exercício 29.** De acordo com as informações abaixo, determine o VPL do projeto B e informe se o mesmo é viável ou não e diga o porquê.

| Projeto B | | |
|---|---|---|
| Período | Fluxos | I (taxa de juros) |
| 0 | -170.000 | - |
| 1 | 60.000,00 | 10% |
| 2 | 60.000,00 | 13% |
| 3 | 60.000,00 | 15% |
| 4 | 60.000,00 | 12% |
| 5 | 60.000,00 | 10% |

Solução

Em que:

$$VPL = (VP_1 + VP_2 + VP_3 + VP_4 + VP_5) - FC_0$$

Logo, calculando VP pela equação (42), e substituímos os valor obtidos na equação temos:

$$VPL = (54.545,45 + 46.988,80 + 39.450,97 + 38.131,08 + 37.255,28) - 170.000,00$$

$$VPL = 46.371,58\,\$$$

Portanto, sendo o valor presente líquido é positivo então, o projeto é viável.

## 12. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho no âmbito do seu objetivo buscou demonstrar e propor aspectos teóricos e práticos de fundamentos da matemática financeira, de caráter essencial antes de alavancar quaisquer projetos de investimento, isto é, em uma perspectiva macro ou microeconômica. Uma vez que, a absorção dos fundamentos básicos da matemática financeira abordado neste presente trabalho, nos ajudam acompanhar e avaliar por meio de métodos abordados no processo de análise de investimento, como também, a identificar a modalidade do investimento a se fazer, caso seja viável ou não a sua aceitação dependendo do perfil do investidor.

A globalização do processo econômico mundial pressupõe um acompanhamento do desenvolvimento do processo econômico das sociedades pois, os cidadãos são cotidianamente sujeitos a envolver-se nas atividades financeiras para gerar lucro ou para manter seus ativos para um consumo futuro, isto é, investindo seus capitais, adquirindo empréstimos para alavancar os seus projetos de investimentos, ações estas preponderante no desenvolvimento da economia de uma nação. Esse crescente envolvimento da população nas ações financeiras nos impulsiona a ter uma mínima compreensão dos conceitos da matemática financeira, que é adquirida por meio de uma educação financeira embasada na construção da cidadania para uma sociedade mais consciente, especificamente no que concerne o envolvimento dos cidadãos no setor financeiro.

O governo estabelece por meio das instituições responsáveis por regular os processos econômicos nacionais (Banco Central, Secretaria do Tesouro Nacional, etc.), procedimentos tangíveis do investimento dependendo do perfil de quem pretende investir, porém, este fator não o torna responsável ou avaliador das propostas financeiras que os cidadãos individualmente optam em fazer, tanto nas instituições credenciadas pelo próprio governo para venda de títulos, no caso de bancos comerciais, corretoras, etc. Cabe ao investidor ter a maturidade financeira suficiente para analisar tais propostas, saber avaliar juros da operação, modalidade do investimento a seguir, etc.

A presente pesquisa tem como objetivo atender a demanda dos cidadãos quanto ao fornecimento de fundamento matemático para o acompanhamento das mudanças sociais no setor financeiro e comercial, isto é, no início do investimento. Os tópicos da matemática abordados nesta pesquisa, nos permitirá saber optar em cada proposta do investimento, uma vez que, os países que possui crescente número populacional envolvido no processo financeiro (no caso de país com maior índice de investidores), apresentam uma economia estável, menor índice de desemprego, enquanto que o governo deixa de ser único órgão responsável pelo oferecimento de proposta de trabalho à população, fator essencial para o crescimento da economia nacional ou para uma vida financeira ativa.

As sociedades modernas são caracterizadas pela vasta complexidade apresentada no setor econômico, como no caso das constantes variações nos preços de bens (Inflação) e a queda da própria moeda, fatores principais que levam muitos a optarem cegamente às instituições bancárias como meio seguro de salvaguardar os seus patrimônios, capitalizando seus valores por meio de poupanças.

Entretanto, na maioria das vezes as pessoas fazem aplicação bancárias, especificamente na conta poupança com intuito de “guardar seu dinheiro” assim vulgarmente dito, não com o intuito de acumular de fazer crescer seus fundos ao decorrer de um certo período de tempo à uma dada taxa de juro (capitalização), ao contrário fazem porque querem guardar simplesmente seus patrimônios, ou seja, sem interesse de acumular seus ativos. Essa concepção torna evidente a falta de uma educação financeira embasada nos fundamentos da matemática financeira que leva muitos a colocar seus valores na poupança sem avaliar os juros da aplicação, se é de acordo aos seus interesses ou não.

Nesta abordagem atrelamos os aspectos teóricos e práticos da matemática financeira que sirva como embasamento para quem pretende entrar no mercado financeiro, estudantes, investidores, etc., conceitos estás fundamental para procedência mediante a essa gama complexidade do mercado financeiro, em prol de uma sociedade justa e do desenvolvimento da economia nacional.

Aos métodos de análise financeira destacados durante o trabalho, no caso da análise de investimento, recomenda-se o uso de dois métodos para proporcionar a máxima confiabilidade na tomada de decisão. Ressaltamos também que, a tomada de decisão no início de um investimento pode envolver questões mais complexas do que foram destacadas durante o estudo, pois são muitos os fatores envolvidos na tomada de decisão, além dos aqui citados, que podem ser objeto de estudos futuros.

## 13. REFERÊNCIAS


ASSAF NETO, Alexandre. Os métodos quantitativos de análise de investimentos. **Caderno de Estudos**, n. 6, p. 01-16, 1992.

BARTHO, Viviane Dinês de Oliveira Ribeiro; DA MOTA, Nádija Araújo. Aspectos da Concepção de Educação Matemática Crítica em Material Didático de Matemática Financeira. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 13, n. 31, p. 1-18, 2020.

BRASIL. **Decreto-lei nº 6.404, De 15 de Dezembro de 1976**. Dispõe sobre as sociedades por ações. Câmara dos Deputados, Brasília, 1976. Seção II.

CARREIRA, Marcio Luis; DOS SANTOS, Renata Cristina Ramos. Decisões de Investimento com o Auxílio dos Métodos Determinísticos. **Revista de Ciências Gerenciais**, v. 21, n. 34, p. 142-144, 2017.

COSTA. Helder Tonini. **Tipos De Investimento:** Os Investimentos Mais Realizados. Brasil, v.1, n. 5, p. 1-13, 2016. Disponível em: <https://www.bing.com/search?q=TIPOS+DE+INVESTIMENTO%3A+OS+INVESTIMENTOS+MAIS+REALIZADOS&cvid=77ce520591de479abe8aae84e7632244&aqs=edge..69i57.833j0j1&FORM=ANNTA1&PC=U531 >. Acesso em 21 de set. 2021.

FERREIRA, Rafael Maximiano et al. Análise de Projetos e Investimentos: Principais Técnicas Utilizadas pelas Cooperativas Agroindustriais. **Revista de Contabilidade do Mestrado em Ciências Contábeis da UERJ**, v. 22, n. 1, p. 66-83, 2017.

FONSECA, Yonara Daltro da; BRUNI, Adriano Leal. **Técnicas de avaliação de investimentos**: uma breve revisão da literatura. 2010.

GALLAS, Rafael Guilherme. **A importância da matemática financeira no ensino médio e sua contribuição para a construção da educação financeira no cidadão.** 2013, 56 f. Disssertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Faculdade de Matemática, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2013.

JUNIOR, Roberto José Madeiros. **Matemática Financeira**. 1ª edição. Curitiba-PB, e-Tec/MEC, 2012.

KIRCHNER, Juliana Leite. **Análise de Investimentos**. Valinhos, p.1-166, 2014. Disponível em: www.anhanguera.com. Acesso em: 22 Mar. 2022.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de Metodologia Científca**. 5ª edição. Atlas S.A. Editorial. São Paulo. 2003.

ORTIGOZA, SAG. **Paisagens do consumo**: São Paulo, Lisboa, Dubai e Seul [online]. São Paulo: Editora UNESP; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2010. 232 p. ISBN 978-85-7983-128-7. Available from SciELO Books.

RIBEIRO, Osni Moura. **Contabilidade Geral Fácil**. 9ª edição. Saraiva editorial. São Paulo. 2013.

ROLÃO, Keila Prates; SILVA, RODRIGO RUAS DE JESUS. Análise de investimento econômico e financeiro de um sistema de captação de água da chuva: estudo de caso de uma rizicultura. **Revista Interatividade**, v. 5, n. 2, p. 203-222, 2017.

SULIVÂN. Arthur; SHEFFRIN. Steven. **Iintrodução à Economia:** Princípios e Ferramentas. 4º edição. Traduzida por: ROSA, Maria Lúcia Leite (2004). Pearson education editorial. 1998.

VARGAS, Fundação Getúlio**.** **Economia e Finanças**. BB. Produzida pela Universidade Corporativa do Banco do Brasil. Brasilia, fevereiro de 2008.

VASCONCELLOS, Marco Antonio Sandoval de. **Economia Micro e Macro**. 4ª edição. São Paulo, 2011.