UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BADILÉ MIRANDA INSALI

CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE LEIBNIZ NILPOTENTES DE DIMENSÃO 4 SOBRE O CORPO DE CARACTERÍSTICA 2

REDENÇÃO
2023

BADILÉ MIRANDA INSALI

CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE LEIBNIZ NILPOTENTES DE DIMENSÃO 4 SOBRE O CORPO DE CARACTERÍSTICA 2

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Skoraia

REDENÇÃO - CE

2023

Badilé Miranda Insali

CLASSIFICAÇÃO DE ÁLGEBRAS DE LEIBNIZ NILPOTENTES DE DIMENSÃO 4 SOBRE O CORPO DE CARACTERPISTICA 2.

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 17/01/2023

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Tatiana Skoraia (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Корнев

Prof. Dr. Alexandr Kornev
Universidade Federal de ABC (UFABC)

"Dedico este trabalho aos meus amigos, colegas e professores que contribuíram para esse feito, especialmente a minha orientadora e minha família".

AGRADECIMENTOS

Agradeço a UNILAB e a todos os seus servidores, em especial a todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática que contribuíram de maneira na minha formação acadêmica e sem esquecer dos professores dos outros cursos na qual estudei com eles ou trabalhamos juntos durante este período da minha graduação.

Agradeço de coração a minha excelente orientadora Profa. Dra. Tatiana Skoraia por ter aceitado este desafio de ser minha orientadora, que sempre se mostrou disponível para me auxiliar sempre que era preciso e nunca deixou de me encorajar a seguir em frente nos estudos.

Agradeço aos professores que comporam essa linda banca examinadora, na pessoa da Profa. Dra. Tatiana Skoraia, Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva que contribuiu para o desenvolvimento da minha formação durante este período e o Prof. Dr. Alexandr Kornev por ter aceite o nosso convite para compor a banca.

Agradeço a todos os meus familiares e especial aos meus pais (Sandra da Silva Insali e José Carlos Miranda) que sempre se dedicaram, não medindo esforços para que eu juntamente com meus irmãos tivéssemos uma boa educação e também agradeço a minha irmã Balim Miranda Insali.

Agradeço aos meus amigos e colegas que contribuíram nesta jornada, em particular aos que sempre acreditaram em mim e me inspiraram a seguir em frente, firme e forte em busca dos meus objetivos.

Agradeço a Grupo de Ensino, Pesquisa e Popularização da Astronomia e Astrofísica (GEPPAA) e em especial na pessoa de Professor Dr. Michel Lopes Granjeiro pela oportunidade que me deram de fazer parte do grupo e momentos vivenciados e a todos os membros do grupo e também agradeço Grupo de Estudos, Pesquisas e Extensão em Educação, Diversidade e Formação de Educadores Brasil/África (GEDIFE) pela oportunidade que me deram de fazer parte deste grupo e em especial a Professora Dra. Mara Rita Duarte De Oliveira.

Agradeço à Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e a Residência Pedagógica (UNILAB).

Agradeço Amadú Sané, Franklin Cá, Rugana Imbaná, Samuel Critch, Mira da Silva Insali, Boiné Armando Monteiro Cá, João Nhaga, Agostinho Cá.

E obrigado a Deus, pelo dom da vida e sua misericórdia infinita.

"É no problema da educação que assenta o grande segredo do aperfeiçoamento da humanidade".

Immanuel Kant

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a classificação das álgebras de Leibniz nilpotentes de dimensão 4 sobre um corpo de característica 2. Para isso inicialmente é feito estudo das bases da teoria das álgebras não lineares e as álgebras de Leibniz em particular. Em seguida são considerados alguns resultados sobre as álgebras de Leibniz nilpotentes. Seguindo a classificação desenvolvida em (Camacho et al. 2010), demonstramos com a precisão de isomorfismo que existam 15 álgebras de Leibniz nilpotentes de dimensão 4 sobre corpo de característica 2.

Palavras-chave: Álgebras de Leibniz. Álgebras de Dimensão Finita. Corpo de Característica Finita.

ABSTRACT

The present work aims at presenting the classification of nilpotent Leibniz algebras of dimension 4 over a characteristic 2. nilpotent Leibniz algebras of dimension 4 over a body of characteristic 2. cially the basics of the theory of nonlinear algebras and Leibniz algebras in particular are studied. Leibniz algebras in particular. Then some results on nilpotent Leibniz algebras are considered. algebras. Following the classification dev(Camacho et al. 2010), we show with the isomorphism precision exist 15 nilpotent Leibniz algebras of dimension 4 over body of characteristic 2.
Keywords: Leibniz Algebras. Finite Dimensional Algebras. Finite Characteristic Field.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho estuda álgebras de Leibniz, uma generalização de álgebras de Lie que são estudadas há várias décadas e têm inúmeras aplicações em várias ciências puras e aplicadas. As pesquisas sobre álgebras de Leibniz começaram mais tarde do que sobre ás álgebras de Lie. Porém nas últimas duas décadas foram obtidos vários resultados, por exemplo, (Ayupov e Omirov 2001), (Camacho et al. 2009) ou (Camacho et al. 2010), que foram juntados em livro (Ayupov at. al. 2019).

E este trabalho tem como objetivo apresentar a classificação das álgebras de Leibniz nilpotentes de dimensão 4 sobre um corpo de característica 2.

Para isso inicialmente é feito estudo das bases da teoria das álgebras não lineares e as álgebras de Leibniz em particular. Em seguida são considerados alguns resultados sobre as álgebras de Leibniz nilpotentes. Seguindo a classificação desenvolvida em (Camacho et al. 2010), demonstramos com a precisão de isomorfismo existam 15 álgebras de Leibniz nilpotentes de dimensão 4 sobre corpo de característica 2.

1.1 Breve história da álgebra de Leibniz

A palavra álgebra tem origem árabe, al-jabr (as vezes transliterada al-jebr), usada no título de um livro ((Baharuddin e Abdullah 2014)), escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi.

A álgebra de Leibniz é uma generalização das álgebras de Lie e essas álgebras preservam uma propriedade única das álgebras de Lie que os operadores de multiplicação corretos são derivações. Elas foram chamadas pela primeira vez de D-álgebras no artigo (Blokh 1965) publicado na década de 1960 para indicar suas estreitas relações com as derivações. A teoria das D-álgebras não recebeu grande atenção imediatamente após sua introdução. Mais tarde, as mesmas álgebras foram introduzidas por J.-L. Loday em 1993 (Loday e Pirashvili 1993) que as chamou de álgebras de Leibniz devido à identidade que elas satisfazem. A principal motivação para a introdução das álgebras de Leibniz foi para estudar a periodicidade de fenômenos na K-Teoria algébrica.

2 CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DE ÁLGEBRA

2.1 Ás álgebras não lineares, dimensão finita e isomorfismo das álgebras

Uma álgebra A é um espaço vetorial V sobre um corpo F equipado por uma operação binária: $\lambda : V \times V$. O espaço vetorial V é chamado o espaço vetorial subjacente. No livro (Ayupov at. al. 2019) V é assumido como sendo de dimensão finita sobre o corpo de números complexos, embora muitos das declarações podem ser provadas sobre os corpos de característica diferente de dois.

Exemplo 2.1.1 *(Retirado do livro (Ayupov at. al. 2019))*

1. Qualquer corpo é uma álgebra sobre si mesmo e sobre seu subcorpo. Particularmente, os corpos numéricos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são exemplos de álgebras.
2. O conjunto de polinômios $\mathbb{F}[x_1, x_2, ..., x_n]$ nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ com coeficientes de um corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$.
3. A álgebra livre $\Re = \mathbb{F} < x_1, x_2, ..., x_n >$ sem mudanças de variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ com coeficientes de um corpo $\mathbb{F}$. Uma base de esta álgebra consiste em $x_1, x_2, ..., x_n$ multiplicação nesta base é simplesmente uma concatenação de palavras.
4. O conjunto de $n \times n$ matrizes com entradas em um corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$.
5. O conjunto de endomorfismos $End_{\mathbb{F}}(V)$ de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$.
6. Vamos considerar

$$O(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{v} \\ \mathbf{u} & \beta \end{pmatrix} \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad e \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^3 \right\}$$

Defina a operação binária λ em $O(\mathbb{F})$ como segue:

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{v} \\ \mathbf{u} & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma & \mathbf{z} \\ \mathbf{w} & \delta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + (u, w) & \alpha z + \delta u - v \times w \\ u\gamma + \beta w - u \times z & \beta\delta + (v, z), \end{pmatrix}$$

onde (x_1, x_2) e $x_1 \times x_2$ são os produtos interno e vetorial dos vetores $x_1, x_2 \in \mathbb{F}$, respectivamente. Então $(O(\mathbb{F}), +, \lambda)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$ chamada de álgebra matricial de Cayley-Dickson.

Se $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é uma base do espaço vetorial V então os coeficientes γ_{ij}^k, onde $k = 1, 2, ..., n$ das combinações lineares

$$\lambda(x,Y)=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}e_k \quad para \quad i,j=1,2,...,n$$

são chamados de constantes estruturais da álgebra $\Re$ com base $\{e_1,e_2,...,e_n\}$. Portanto, se fixarmos uma base do espaço vetorial subjacente V sobre um corpo F então todas as estruturas algébricas possíveis sobre V podem ser identificados por pontos $\{\gamma_{ij}^{k}\}$ de n^3-dimensional um espaço $\mathbb{F}^{n^3}$. Observe que as constantes estruturais determinam completamente o produto de quaisquer dois elementos $x = \alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n$ e $y=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n$ do seguinte modo:

$$\lambda(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\lambda(e_i,e_j)=\sum_{i.j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\gamma_{ij}^{k}e_k.$$

Assim, a estrutura de uma álgebra pode ser completamente determinada fornecendo suas constantes estruturais. Tal definição é chamada de determinação pelas constantes estruturais . O produto $\lambda(x,y)$ dos elementos x e y de uma álgebra é denotado por $x\cdot y, x*y, x\star y, [x,y]$ ou apenas xy etc., em cada um dos casos acima, fica claro a partir do conteúdo da discussão o que meios de notação específicos.
Seja $(\Re_1,\lambda_1)$ e $(\Re_2,\lambda_2)$ ser duas álgebras com operações binárias λ_1 e λ_2, respectivamente. A função $f:\Re\to\Re$ é um homomorfismo se

$$f(\lambda_1(x,y))=\lambda_2(f(x),f(y)) \quad \text{para todo} \quad x,y\in\Re_1.$$

Um homomorfismo bijetivo é chamado isomorfismo, esta relação é denotada de " $\cong$ ". Um automorfismo de uma álgebra $\Re$ é um isomorfismo em si mesmo. O conjunto de todos os automorfismos de uma álgebra $\Re$ forma um grupo com relação à composição, o grupo é denotado por $Aut\Re$:
Uma transformação linear $\imath:\Re\to\Re$ é chamado de involução se

$$\imath(\imath(x))=x \quad \text{e} \quad \imath(xy)=\imath(x)\imath(y) \quad \text{para todo} \quad x,y\in\Re.$$

Exemplo 2.1.2 *(Retirado do livro (Ayupov at. al. 2019)) A álgebra* $(O(\mathbb{F}),\lambda)$ *dada no Exemplo anterior tem uma involução assim definido:*

$$\imath\overline{\begin{pmatrix}\alpha & \mathbf{v}\\ \mathbf{u} & \beta\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\alpha & -\mathbf{v}\\ -\mathbf{u} & \beta\end{pmatrix}$$

Definição 2.1.1 *Um subespaço S de uma álgebra $(\Re, \lambda)$ é dito ser uma subálgebra, se*

$$\lambda(S, S) \subset S, \quad \text{ou seja,} \quad \lambda(x, y) \in S \quad \text{para qualquer} \quad x, y \in S.$$

Exemplo 2.1.3 *(Retirado do livro (Ayupov at. al. 2019)) Seja $f : \Re_1 \to \Re_2$ um homomorfismo de álgebras. Então a imagem*

$$Imf = \{y \in \Re_2 | \exists x \in \Re_1 : y = f(x)\}$$

é uma subálgebra de $\Re_2$.

3 ÁLGEBRA DE LEIBNIZ

3.1 Introdução à Teoria de álgebras de Leibniz

O conceito de álgebra de Leibniz foi introduzido por Loday no estudo da (co)homologia de Leibniz como um análogo não comutativo de (co)homologias das álgebras de Lie, ou seja, as álgebras de Leibniz são as generalizações das álgebras de Lie (Ayupov at. al. 2019).

Definição 3.1.1 *Uma álgebra linear é chamada de álgebra de Leibniz se sua multiplicação satisfaz a identidade de Leibniz:*

$$(xy)z = (xz)y + x(yz)$$

3.2 Exemplos das álgebras de Leibniz

Estes exemplos foram construídos durante o trabalho.

Exemplo 3.2.1 *Seja $\mathbb{A}$ uma $\mathbb{R}$ - álgebra. Definimos o endomorfismo δ_z em $\mathbb{A}$ como a multiplicação por elemento z à direita pela regra:*

$$\delta_z(xy) = \delta_z(x)y + x\delta_z(y)$$

Essa forma da aplicação é semelhante à regra de derivação do produto.

$$(xy)' = x'y + xy'$$

Portanto o endomorfismo δ_z é chamado de diferenciação de A. Substituindo a anotação de δ_z pela multplicação por z à direita, temos a identidade de Leibniz:

$$x(yz) = (xy)z - (xz)y$$

Logo, $(\mathbb{A}, +, \delta_z)$ é uma álgebra de Leibniz.

Definição 3.2.1 *Um espaço vetorial sobre um anel $\mathbb{K}$ é chamado de $\mathbb{K}$-módulo.*
Exemplo 3.2.2 *Seja g uma álgebra de Lie e M um g - módulo. O espaço vetorial $Q = g \oplus M$ com a multiplicação*

$$< x+m, y+n >\equiv [x,y] + my$$

onde, $x, y \in g$ e $m, n \in M$ é uma álgebra de Leibniz. Verificaremos a identidade de Leibniz,

$$<< m+m, < y+n, z+k >_M >_M \equiv << x+m, y+n >_M, z+k >_M - << x+m, z+k >_M, y+n >_M$$

$$< x+m, [y,z] + nz >_M \equiv < [x,y] + my, z+k >_M - < [x,z] + mz, y+n >_M$$

$$[x,[y,z]] + m[y,z] \equiv [[x,y],z] + (my)z - [[x,z],y] - (mz)y$$

$$m(yz) - m(zy) = (my)z - (mz)y$$

Exemplo 3.2.3 *Seja g uma álgebra de Lie . O espaço vetorial $L = g \oplus g$ com a multiplicação*

$$< x \oplus y, a \oplus b >\equiv [x,[a,b]] \oplus y + x \oplus [y,[a,b]]$$

L é uma álgebra de Leibniz.

3.3 Álgebra de Leibniz Nilpotente de baixa dimensão

Essa seção contém alguns resultados que estão ligados com a álgebra de Leibniz Nilpotente e suas subclasses. Existem resultados sobre a classificação de P-filiforma, álgebra de leibniz quase filiforma. Elas podem ser encontradas, por exemplo, nos artigos (Camacho et al. 2009) e (Camacho et al. 2010).

Definição 3.3.1 *Seja $(L[,])$ uma álgebra de Leibniz. Definimos sua série central inferior por:*

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L], \quad k \geq 2$$

Definição 3.3.2 *A álgebra de Leibniz L com a série central inferior convergente para zero é chamada de* ***nilpotente****, em outras palavras, L é nilpotente se existir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $L^n = 0$. O número mínimo* ***n*** *com tal propriedade é considerado* ***o índice de nilpotência****.*
Definição 3.3.3 *Uma álgebra de Leibniz L é considerado um K-filiforma, se*

$$dimL^2 = n-k-1 \quad e \quad dimL^i = n-k-(i-1), \quad onde \quad 3 \leq i \leq n$$

n *é o índice de nilpotência.*

No artigo (Ayupov e Omirov 2001) foi demonstrado que álgebras de Leibniz 0-filiformas cada dimensão fixa são isomorfas, ou seja, existe única álgebra de Leibniz

0-filiforma em qualquer dimensão fixa. Esse fato é inerente apenas às álgebras de Leibniz, ou seja, não há um 0-filiforma na álgebra de Lie. (Ayupov at. al. 2019)

A classe de um-filiforma (citado no livro (Ayupov at. al. 2019) como "filiforma", como na álgebra no artigo (Vergne 1966)), denotado por Lb_n, é a parte mais desenvolvida de LN_n, que é o foco do livro (Ayupov at. al. 2019).

Existem resultados de classificação em álgebras de Leibniz de K-filiforma também, mas a técnica aplicada no artigo (Vergne 1966) é ligeiramente diferente do que vai ser considerada aqui.

Começamos com a montagem de algumas observações simples sobre as álgebras associativas e de Leibniz.

Seja L uma álgebra associativa não-unital e também seja A uma álgebra associativa, obtida de L pela unidade externa adjacente $A = \mathbb{C}1 \oplus L$. Daí segue:

Proposição 3.1 *Seja L uma álgebra associativa nilpotente com a dimensão finita, então a álgebra $A = \mathbb{C}1 \oplus L$ não contém um idempotente não-trivial.*

Seja A uma álgebra, o elemento a $\in A$ é o **idempotente em A**, se

$$a = a^2 = \cdots = a^n = \cdots.$$

Esta prova foi feita durante o desenvolvimento do trabalho.

Prova: Seja $1 + a$ um elemento idempotente de $A = \mathbb{C}1 \oplus L$, onde a é um elemento de L com índice de nilpotência m ($a^m = 0$)

$$1 + a = (1 + a)^n, \text{para} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ tal que} \quad a \geqslant 2 \tag{1}$$

por outro lado, utilizando o binômio de Newton, teremos

$$(1 + a)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k \tag{2}$$

substituindo a equação (2) em (1) teremos,

$$\cancel{1} + a = \cancel{1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k$$

$$a = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k = n \cdot a + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k$$

$$0 = (n-1)a + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k$$

multiplicando ambos os lados da igualdade acima por a^{m-2}, teremos

$$0 = (n-1)a^{m-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{m+k-2}$$

note que,

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^{m+k-2} = 0$$

daí, segue que

$$0 = (n-1)a^{m-1}$$

sabemos que $n-1 \neq 0$, portanto

$$a^{m-1} = 0$$

Observe que aqui o índice de nilpotencia de **a** é $m-1$ o que mostra a contradição. Portanto A não tem idempotente não trivial, ou seja, $1+a$ não pode ser um idenpotente.

Observação: O único idempotente é 1.

Proposição 3.2 *Se a álgebra de Leibniz tem $L^3 = 0$, ela é* ***associativa****.*
Demonstração: Sabemos que uma álgebra de Leibniz é definida pela identidade

$$a(bc) \equiv (ab)c - (ac)b$$

e por hipótese temos que

$$L^3 = 0 \Rightarrow L^3 = [[L,L],L] = 0$$

ou seja,

$$[a,[b,c]] \equiv [[a,b],c] - [[a,c],b]$$

L será associativa se, e somente se,

$$[[a,b],c] = [a,[b,c]]$$

Sabemos que,

$$[[a,b],c] \in [[L,L],L] \Rightarrow [[a,b],c] = 0$$

e por outro lado pela identidade de Leibniz temos que

$$[a, [b, c] = 0$$

Portanto L é associativa.

Seja L uma álgebra de Leibniz de dimensão finita com $L^3 = 0$. Então a álgebra $A = \mathbb{C}1 \oplus L$ não tem idempotente não trivial.

Para as referências adicionais, declaramos o seguinte fato simples.

Proposição 3.3 *Sejam L_1 e L_2 álgebras associativos de dimensão finita sem unidade. Então,*

$$\mathbb{C} \oplus L_1 \cong \mathbb{C} + L_2, \quad \textit{se e somente se,} \quad L_1 \cong L_2$$

Demonstração: (Retirado do livro (Ayupov at. al. 2019) mas desenvolvemos mais os cálculos) Vamos dividir a demonstração dessa proposição em duas partes:

Primeira parte: a) Sejam

$$\mathbb{C} \oplus L_1 \cong \mathbb{C} \oplus L_2$$

Então, existe isomorfismo $\quad f : \mathbb{C} \oplus L_1 \to \mathbb{C} \oplus L_2 \quad$ tal que

$$f(1 + a_1) = 1 + a_2, \quad \text{onde} \quad a_1 \in L_1 \quad \text{e} \quad a_2 \in L_2$$

$$1 + a_1 \longmapsto 1 + a_2$$

daí temos,

$$f(1 + a_1) = f(1) + f(a_1) \longmapsto 1 + a_2, \text{ portanto, } f(a_1) = a_2.$$

b) Agora mostraremos que a f preserva as operações entre os elementos da álgebra. Como a f é isomorfismo, isso implica que:

$$f((1 + a_1) + (1 + b_1)) = (1 + a_2) + (1 + b_2)$$

daí segue que

$$f(a_1 + b_1) = a_2 + b_2$$

então,

$$f((1 + a_1) + (1 + b_1)) = [f(1) + f(a_1)] + [f(1) + f(b_1)] = 1 + a_2 + 1 + b_2$$

multiplicando essas unidades acima por zero ($0 \in \mathbb{C}$) teremos

$$f(a_1 + b_1) = f(a_1) + f(b_1) = a_2 + b_2$$

portanto, podemos concluir que a soma é preservada. Agora veremos se a multiplicação é preservada.

$$f((1 + a_1) \cdot (1 + b_1)) = f(1 + a_1 b_1) = f(1) + f(a_1 b_1) = 1 + a_2 b_2$$

multiplicando essa unidade por "0", teremos

$$f(a_1 b_1) = a_2 b_2$$

daí vimos que a multiplicação é preservada, portanto por a) e b) podemos concluir que f é um isomorfismo de $L_1 \text{e} L_2$.

Segunda parte: $L_1 \cong L_2$, então existe isomorfismo $f : L_1 \longmapsto L_2$ tal que para $\forall a_1 \in L_1$, teremos $f(a_1) = a_2$ (biunívoca).
Definimos a f da seguinte forma:

$$f(1 + a_1) = 1 + f(a_1)$$

Agora mostraremos que a f é um isomorfismo entre $\mathbb{C}1 \oplus L_1$ e $\mathbb{C}1 \oplus L_2$. Ou seja, agora veremos se a f preserva a operação, então observe que

$$\begin{aligned} f((a_1 + a_1) + (1 + b_1)) &= f(1 + (a_1 + b_1)) = 1 + f(a_1 + b_1) = 1 + a_2 + b_2 \\ &= 1 + f(a_1) + f(b_1) = (1 + f(a_1)) + (1 \cdot 0 + f(b_1)) \end{aligned}$$

o que mostra que a f preserva a operação de soma e de forma análoga temos

$$f(1 + a_1) \cdot f(1 + b_1) = (1 + f(a_1))(1 + f(b_1)) = 1 + f(a_1)f(b_1)$$

então podemos concluir que a f também preserva a multiplicação e consequentemente f é isomorfo e $\mathbb{C}1 \oplus L_1 \cong \mathbb{C}1 \oplus L_2$.

Para dada álgebra n-dimensional de Leibniz L definimos o seguinte invariante de isomorfismo:

$$\chi(L) = (dimL^1, dimL^2, \ldots, dimL^{n-1}; dimL^n)$$

Evidentemente

$$dimL^1 > dimL^2 > \cdots > dimL^n$$

Proposição 3.4 *Se for para uma álgebra de Leibniz nilpotente L de dimensão n os primeiros dois componentes do invariante $\chi(L)$ são iguais a n e $n-1$, respetivamente, então L é uma álgebra de Leibniz nulo-filiforma.*

Demonstração: Dado $\quad dimL = n, \quad L^m = 0$ e por hipótese temos que

$$\chi(L) = (n.n-1, ...)$$

onde,

$$dimL^1 = n \Rightarrow \{e_1, e_2, ..., e_n\} \text{ é a base de L}$$

e também temos que

$$dimL^2 = dim[L, L] = n-1$$

daí podemos supor que

$$\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\} \quad \text{é a base de} \quad L^2.$$

E por outro lado, seja $x \in L/L^2$, então x gera L.

Agora procuremos a base de L, e como já sabemos que a $dimL = n$ então a base de L será

$$\{x, [x,x], [[x,x],x], ..., \underbrace{[[[[x,x],x],...,x]]\}}_{\text{n vezes}}.$$

Então em L^2 temos os seguintes elementos de grau 3

$$[[x,x],x] \quad \text{e} \quad [x,[x,x]] = [[x,x],x] - [[x,x],x] = 0.$$

Portanto, a base de L^2 será

$$\{[x,x], [[x,x],x], ..., \underbrace{[[[x,x],x],...,x]}_{\text{n vezes}}\}$$

o que implica que a $dimL^2 = n-1$.

Agora é preciso demonstrar que

$$dimL^i = n - (i-1).$$

Temos que a $dimL^2 = n-1$, utilizando o principio da indução finita, daí se suponhamos que a

$$dimL^i = n - (i-1)$$

demonstraremos que $dimL^{i+1} = n - ((i+1)-1)$. Sabendo que a base de L^i será

$$\{\underbrace{[x,x],...,x]}_{\text{i vezes}},...,\underbrace{[[x,x],...,x]}_{\text{n vezes}}\}$$

então, a base L^{i+1} onde, L^{i+1} é dado por

$$L^{i+1} = [L^i, L]$$

e $[L^i, L]$ contém todos os elementos $[y,z]$, onde $y \in L^i$ e $z \in L$ portanto,

$$[\underbrace{[[x,x],...,x]}_{\text{i vezes}},x] \text{ é o elemento mínimo}$$

e o elemento máximo será

$$\underbrace{[[x,x],...,x]}_{\text{n}}$$

portanto,

$$dimL^{i+1} = n - ((i+1)-1).$$

Então L é 0-filiforme.

Teorema 3.1 *A menos um isomorfismo, há apenas uma n-dimensional álgebra de Leibniz nulo-filiforme. Ou seja, em cada álgebra de Leibniz n-dimensional nulo-filiforme L existe uma base $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ em relação ao qual L tem a seguinte tabela de multiplicação.*

$$[x_i, x_1] = x_{x+1}, \quad [x_i, x_j] = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad j \geqslant 2 \tag{3}$$

Prova: (Retirado do livro (Ayupov at. al. 2019) mas desenvolvemos mais os cálculos) Seja L uma álgebra de Leibniz nulo-filiforme de dimensão n e seja $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ uma base de L tal que $e_i \in L^i/L^{i+1}$ com $1 \leqslant i \leqslant n$ (tal base pode ser escolhida sempre). Já que $e_2 \in L^2$, para alguns elementos a_{2p}, b_{2p} de L temos

$$e_2 = \sum \alpha_p [a_{2p}, b_{2p}], \quad \text{onde} \quad a_{2p}, b_{2p} \in L$$

e

$$a_{2p}, b_{2p} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

daí por (3) temos

$$\begin{aligned}
e_2 &= \sum \alpha_{ij}^2[e_i, e_j] = \alpha_{11}^2[e_1, e_1] + \cancel{\alpha_{12}^2[e_1, e_2]} + \cdots + \alpha_{21}^2[e_2, e_1] + \cancel{\alpha_{22}^2[e_2, e_2]} + \cdots \\
&= \alpha_{11}^2[e_1, e_1] + \alpha_{21}^2[e_2, e_1] + \alpha_{31}^2[e_3, e_1] + \cdots \\
&= \alpha_{11}^2 e_2 + \underbrace{\alpha_{21}^2 e_3 + \alpha_{31}^2 e_4 + \cdots}_{*}
\end{aligned}$$

onde $(*) \in L^3$, ou seja, $e_2 = \alpha_{11}^2[e_1, e_1] + \alpha_{21}^2 e_3 + \alpha_{31}^2 e_4 + \cdots$. Note que

$$e_2 = \alpha_{11}^2[e_1, e_1] \neq 0 \quad \text{(o que implica que)} \quad e_2 \notin L^3.$$

De forma análoga, teremos

$$e_3 = \alpha_{ijk}^3[[e_i, e_j], e_k] = \alpha_{111}^3[[e_1, e_1], e_1] + (**)$$

onde $(**) \in L^4$. Note também que

$$e_3 = \alpha_{111}^3[[e_1, e_1], e_1] \neq 0 \quad \text{(por outro lado} \quad e_3 \notin L^4).$$

Continuando da mesma forma, encontraremos o conjunto de elementos diferentes de zero de L.

$$x_1 \equiv e_1, x_2 \equiv [e_1, e_1], x_3 \equiv [[e_1, e_1], e_1], ..., x_n \equiv [[[e_1, e_1], e_1], ..., e_1]$$

Agora vamos demonstrar que $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são linearmente independentes(L.I). Pela definição temos que

$$x_1 := e_1, x_2 := [e_1, e_1], x_3 := [[e_1, e_1], e_1], ..., x_n := [[[e_1, e_1], e_1], ..., e_1]$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$.

Seja, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base de L tal que $e_i \in L^i/L^{i+1} \Rightarrow e_1 \in L^1/L^2$, veja que

$$[e_1, e_1] \in L^2$$

e pode ser escrita da seguinte forma

$$[e_1, e_1] = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Por outro lado temos

$$\beta_1 e_1 + \beta_2[e_1, e_1] = \beta_1 e_1 + \beta_2\alpha_2 e_2 + \beta_2\alpha_3 e_3 + \cdots = 0 \tag{4}$$

e por construção temos que $\beta_1 e_1+\beta_2\alpha_2 e_2+\beta_2\alpha_3 e_3+\cdots$ é L.I, o que implica que $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Agora tomando $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$, vamos mostrar que se

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

segue que, $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0.$

Vamos demonstrar isso usando a indução. A base da indução segue do raciocínio anterior. Suponhamos que $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ são L.I e $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ são L.D. Então existam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ não todos nulos tais que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n =$$

$$= \lambda_1 e_1 + \lambda_2[e_1, e_1] + \lambda_3[[e_1, e_1], e_1] + \cdots + \lambda_{n-1}[[e_1, e_1], ..., e_1] + \lambda_n[[[e_1, e_1], e_1], ..., e_1] = 0.$$

Se $\lambda_n = 0$, obtemos a contradição com a suposição. Então $\lambda_n \neq 0$ e podemos definir $\lambda_i^* = -\lambda_i/\lambda_n$ para $i = 1, \ldots, n-1$ e teremos:

$$\lambda_n = \lambda_1^* x_1 + \lambda_2^* x_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^* x_{n-1},$$

onde nem todos os λ_i^* são nulos. Lembrando que

$$x_1, x_2, ..., x_{n-1} \notin L^n \quad \text{e} \quad x_n \in L^n$$

obtemos então uma nova contradição que mostra que $x_1, x_2, \ldots, _n$ são L.I., isto é, todos os λ_i são nulos $(i = 1, \ldots, n)$.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2[e_1, e_1] + \lambda_3[[e_1, e_1], e_1] + \cdots + \lambda_{n-1}[[e_1, e_1], ..., e_1] + \lambda_n[[[e_1, e_1], e_1], ..., e_1] = 0$$

e por construção, isso é equivalente a

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n = 0$$

então podemos concluir que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n$ é L.I, o que quer dizer que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Agora continuando a nossa prova, podemos perceber que consequentemente eles formam uma base de L . Por isso, $[x_i; x_1] = x_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-1$; além disso, $[x_i; x_j] = 0$ para $j \geq 2$. De fato, se $j = 2$ então

$$[x_i, x_2] = [x_i, [x_1, x_1]] = [[x_i, x_1], x_1] - [[x_i, x_1], x_1] = 0.$$

Assuma que é verdadeiro para $j > 2$. A validade para $j+1$ decorre da hipótese indutiva e a igualdade

$$[x_i, x_{j+1}] = [x_i, [x_j, x_1]] = [[x_i, x_j], x_1] - [[x_i, x_1], x_j] = 0.$$

Agora vamos verificar que $[x_i, x_1] = x_{i+1}$ para $1 \leqslant i \leqslant n-1$ e $[x_i, x_j] = 0$ para $j \geqslant 2$. De fato,

1.
$$[x_, x_1] = [\underbrace{[[e_1, e_1], ..., e_1], e_1}_{\text{i vezes}}] \overbrace{=}^{\text{pela definição}} x_i + 1$$

2. Agora provaremos pelo princípio da indução que para $[x_i, x_j] = 0$ com $j \leqslant 2$.

2.1 Para $j = 2$
$$[x_i, x_2] = [\underbrace{[[e_1, e_1], ..., e_1}_{\text{i vezes}}], [e_1, e_1]]$$

Pela identidade de Leibniz (I.L), teremos

$$[x_1, x_2] = [\underbrace{[e_1, e_1], ..., e_1}_{\text{(i+2) vezes}}] - [\underbrace{[e_1, e_1], ..., e_1}_{\text{(i+2) vezes}}] = 0$$

2.2 Suponhamos que seja verdade para $j > 2$ e $[x_i, x_j] = 0$. Mostraremos que $[x_i, x_{j+1}] = 0$.

$$[x_i, x_{j+1}] = [x_i, [x_j, x_1]] \overbrace{=}^{\text{pela I.L}} [\underbrace{[x_i, x_j]}_{0}, x_1] - [\underbrace{[x_i, x_1]}_{x_{i+1}}, x_j] = [0, x_1] - [x_{i+1}, x_j] = 0 - 0 = 0$$

De agora em diante denotaremos a álgebra com multiplicação 3 por NF_n.

4 ÁLGEBRA DE LEIBNIZ NILPOTENTE QUADRIDIMENSIONAL

Neste capittulo iremos expor a lista de todas as álgebras de Leibniz nilpotentes quadridimensional sobre o corpo de característica 2. Essa classificação está baseada no Teorema 4.3 que foi dado no capítulo 4 do livro (Ayupov at. al. 2019) , onde há descrição de álgebras filiformes não anti-comutativas. Para encontrar outras álgebras isomorfas, usa-se a classificação de álgebras associativas unitais de dimensão cinco (Mazzola 1979). Da lista no artigo (Mazzola 1979), de acordo com algumas restrições, pegamos as álgebras de Leibniz.

Primeiro, fornecemos o seguinte resultado auxiliar.

Proposição 4.1 *:(Retirado do livro (Ayupov at. al. 2019)) Qualquer álgebra de Leibniz complexa nilpotente quadridimensional L pertence a um dos seguintes tipos de álgebras.*

1. Álgebra de Leibniz nulo-filiforme, isto é $\chi(L) = (4, 3, 2, 1)$;
2. Álgebra de Leibniz filiforme, isto é $\chi(L) = (4, 2, 1, 0)$;
3. Álgebra associativas, com $\chi(L) = (4, 2, 0, 0) \quad ou \quad \chi(L) = (4, 1, 0, 0)$;
4. Abeliano, isto é $\chi(L) = (4, 0, 0, 0)$.

Prova:

1. $\chi(L) = (4, 3, 2, 1)$. Pode se observar que

$$\begin{aligned} dimL^2 &= 4 - 0 - 1 = 3 \\ dimL^3 &= 4 - 0 - (3 - 1) = 2 \\ dimL^4 &= 4 - 0 - (4 - 1) = 1 \end{aligned}$$

   Portanto, as álgebras de Leibniz complexa nilpotente quadridimensional L do tipo $\chi(L) = (4, 3, 2, 1)$ são nulo-filiforme pela Definição.

2. $\chi(L) = (4, 2, 1, 0)$. L será filiforme se, a $dimL^2 = 2$, $dimL^3 = 1$ e $dimL^4 = 0$. Então veja que pela Definição temos

$$\begin{aligned} dimL^2 &= 4 - 1 - (2 - 1) = 2 \\ dimL^3 &= 4 - 1 - (3 - 1) = 1 \\ dimL^4 &= 4 - 1 - (4 - 1) = 1 \end{aligned}$$

   Portanto, as álgebras de Leibniz complexa nilpotente quadridimensional L do tipo

$\chi(L) = (4,2,1,0)$ são filiforme pela definição.

3. $\chi(L) = (4,2,0,0) \quad ou \quad \chi(L) = (4,1,0,0)$.
   por $\chi(L) = (4,2,0,0)$ pode se ver que

$$\begin{aligned} dimL &= 4 \\ dimL^2 &= 2 \\ dimL^3 &= dimL^4 = 0 \end{aligned}$$

   $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é uma base de L e $\{e_1, e_2\}$ é uma base de L^2 e também pode se notar que $[[x,y],z] = [x,[y,z]] = 0$. E por outro lado $\chi(L) = (4,1,0,0)$, pode se ver que $\{e_1\}$ é a base de L^2 e também $[[x,y],z] = [x,[y,z] = 0$. Portanto, as álgebras de Leibniz complexa nilpotente quadrimensional L do tipo $\chi(L) = (4,2,0,0) \quad ou \quad \chi(L) = (4,1,0,0)$ são álgebras associativas pela Definição.

4. $\chi(L) = (4,0,0,0)$.
   Pode-se ver que a $dimL = 4, \quad dimL^2 = 0, \quad dimL^3 = 0 \quad e \quad dimL^4 = 0$ o que nos da que dado $x, y \in L$ teremos que

$$[x,y] = 0$$

   o que quer dizer que é abeliano (produto é nulo). Portanto, as álgebras de Leibniz complexa nilpotente quadrimensional do tipo $\chi(L) = (4,0,0,0)$ são abeliano por definição.

O resultado principal do presente trabalho se originou na classificação das álgebras de Leibniz complexas nilpotentes quadridimensionais, apresentada e demonstrada em (Camacho et al. 2010) e repetida em (Ayupov at. al. 2019). Apresentamos em seguida o próprio teorema e a parte da demonstração necessária para a prova do nosso resultado.

Teorema 4.1 *A menos um isomorfismo, todas as estruturas algébricas de Leibniz nilpotentes no espaço vetorial quadrimensional são fornecidas pelos seguintes representantes.*

R_1: $[e_1, e_1] = e_2, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4$

R_2: $[e_1, e_1] = e_3, \quad [e_1, e_2] = e_4, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4$

R_3: $[e_1, e_1] = e_3, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4$

$R_4(\alpha)$: $[e_1, e_1] = e_3, \quad [e_1, e_2] = \alpha e_3, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_2, e_2] = e_4, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad \alpha \in \{0, 1\}$

R_5: $[e_1, e_1] = e_3, \quad [e_1, e_2] = e_4, \quad [e_3, e_1] = e_4$

R_6: $[e_1, e_1] = e_3, \quad [e_2, e_2] = e_4, \quad [e_3, e_1] = e_4$

R_7: $[e_1, e_1] = e_4, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = -e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_4$

R_8: $[e_1, e_1] = e_4, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = -e_3 + e_4, \quad [e_1, e_3] = -e_4$

R_9: $[e_1, e_1] = e_4, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_2, e_2] = e_4, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = -e_3 + 2e_4, \quad [e_1, e_3] = -e_4$

R_{10}: $[e_1, e_1] = e_4, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_2, e_2] = e_4, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = -e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_4$

R_{11}: $[e_1, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_1] = -e_3, \quad [e_2, e_2] = -2e_3 + e_4$

R_{12}: $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_1] = e_4, \quad [e_2, e_2] = -e_3$

$R_{13}(\alpha)$: $[e_1, e_1] = e_3, \quad [e_1, e_2] = e_4, \quad [e_2, e_1] = -\alpha e_3, \quad [e_2, e_2] = -e_4, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$R_{14}(\alpha)$: $[e_1, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = \alpha e_4, \quad [e_2, e_1] = -\alpha e_4, \quad [e_2, e_2] = e_4, \quad [e_3, e_3] = e_4, \quad \alpha \in \mathbb{C}$

R_{15}: $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_2, e_1] = -e_4, \quad [e_2, e_2] = e_4, \quad [e_3, e_1] = e_4$

R_{16}: $[e_1, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = e_4, \quad [e_2, e_1] = -e_4, \quad [e_3, e_3] = e_4$

R_{17}: $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_1] = e_4$

R_{18}: $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_1] = -e_3, \quad [e_2, e_2] = e_4$

R_{19}: $[e_2, e_1] = e_4, \quad [e_2, e_2] = e_3$

$R_{20}(\alpha)$: $[e_1, e_1] = e_4, \quad [e_2, e_1] = (1 + \alpha)/(1 - \alpha) e_4, \quad [e_2, e_2] = e_3, \quad \alpha \in \mathbb{C}/\{1\}$

R_{21}: $[e_1, e_2] = e_4, \quad [e_2, e_1] = -e_4, \quad [e_3, e_3] = e_4$

R_{22}: $[e_1, e_1] = e_2$

R_{23}: $[e_1, e_1] = e_2, \quad [e_3, e_3] = e_4$

R_{24}: $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_1] = -e_3$

R_{25}: $[e_1, e_1] = e_3, \quad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_2] = \beta e_3$

R_{26}: $[e_1, e_1] = e_3, \quad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_1] = e_3$

R_{27}: $[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_1] = -e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_3, e_1] = -e_4$

R_{28}: $[e_1, e_1] = e_2, \quad [e_2, e_1] = e_3.$

Em seguida apresentamos a parte da demonstração desse teorema que usaremos para o nosso resultado. Ressaltamos que a ideia e métodos da demonstração são mesmos à do livro (Camacho et al. 2010) com cálculos e explicações adicionais (que facilitam entendimento) feitos durante o trabalho.

Prova: De acordo com a proposição 4.1 qualquer álgebra de Leibniz nilpotente quadrimensional é nulo-filiforme ou filiforme ou associativa. Deixa-nos considerar cada uma dessas classes separadamente.

Seja L nulo-filiforme. Então por Teorema 3.1, há apenas uma álgebra de Leibniz nulo-filiforme e pode ser dada pela tabela de multiplicação:

$$[e_1, e_1] = e_2, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4$$

Este é R_1 na lista.

Seja L agora uma álgebra filiforme de Leibniz e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ seja uma base de tal modo que $e_1, e_2 \in \dfrac{L}{L^2}$, $\quad e_3 \in \dfrac{L^2}{L^3}$ e $e_4 \in L^3$. Nós escolhemos a base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de modo que $[e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad [e_4, e_1] = 0$.

Seja

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4, [e_2, e_2] = \beta_1 e_3 + \beta_2 e_4 \\ [e_1, e_2] = \gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4, [e_3, e_2] = \delta_1 e_4 \\ [e_1, e_3] = \delta_2 e_4, [e_2, e_3] = \delta_3 e_4 \end{cases}$$

Aplicando a identidade de Leibniz, obtemos

$$0 = [e_1, [e_1, e_1] = [e_1, \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4] = \alpha_1 [e_1, e_3] + \alpha_2 \cancel{[e_1, e_4]} = \alpha_1 \delta_2 e_4$$

$$0 = [e_2, [e_1, e_1] = [e_2, \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4] = \alpha_1 [e_2, e_3] + \alpha_2 \cancel{[e_2, e_4]} = \alpha_1 \delta_3 e_4$$

daí deriva que $\alpha_1 \delta_2 = \alpha_1 \delta_3 = 0$

Caso 01: Seja $\alpha_1 \neq 0$. Então $\delta_2 = \delta_3 = 0$

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4, [e_2, e_2] = \beta_1 e_3 + \beta_2 e_4 \\ [e_1, e_2] = \gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4, [e_3, e_2] = \delta_1 e_4 \end{cases}$$

e tomando as bases da transformação de seguinte modo

$$e_1' = \alpha_1^1 e_1, \quad e_2' = \alpha_1^2 e_2, \quad e_3' = \alpha_1^3 e_3 \quad e \quad e_4' = \alpha_1^4 e_4,$$

pode-se supor que $\alpha_1 = 1$.

$$[e_1', e_1'] = [\alpha_1' e_1, \alpha_1' e_1] = (\alpha_1')^2 [e_1, e_1] = (\alpha_1')^2 (\alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4) = {\alpha_1}^3 e_3 + \alpha_2 e_4$$

mas veja que,

$$(\alpha_1')^2 \alpha_1 = {\alpha_1}^3 \Rightarrow \alpha_1' = \sqrt{{\alpha_1}^2} = \alpha_1$$

Logo,

$$[e_1', e_1'] = e_3 + \alpha_2 e_4$$

$$[e_1', e_2'] = [\alpha_1^1 e_1, {\alpha_1}^2 e_2] = {\alpha_1}^3 [e_1, e_2] = {\alpha_1}^3 (\gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4) = \gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4$$

$$[e_2', e_2'] = [{\alpha_1}^2 e_2, {\alpha_1}^2 e_2] = {\alpha_1}^4 [e_2, e_2] = {\alpha_1}^4 (\beta_1 e_3 +_2 e_4) = \beta_1 e_3 + \beta_2 e_4$$

$$[e_3', e_2'] = [{\alpha_1}^3 e_3, {\alpha_1}^2 e_2] = {\alpha_1}^5 [e_3, e_2] = {\alpha_1}^5 (\delta_1 e_4) = \delta_1 e_4$$

daí teremos,

$$\begin{cases} [e_1', e_1'] = e_3 + \alpha_2 e_4, [e_2', e_2'] = \beta_1 e_3 + \beta_2 e_4 \\ [e_1', e_2'] = \gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4, [e_3', e_2'] = \delta_1 e_4 \end{cases}$$

Colocando $e_1'' = e_1' - \alpha_2 e_3', e_2'' = e_2', e_3'' = e_3', e_4'' = e_4'$, derivamos $\alpha_2 = 0$
Das igualdades

$0 = [e_1'', [e_2'', e_1'']] = [[e_1'', e_2''], e_1''] - [[e_1'', e_1''], e_2''] = [[e_1' - \alpha_2 e_3', e_2'], e_1' - \alpha_2 e_3'] - [[e_1' - \alpha_2 e_3', e_1' - \alpha_2 e_3'], e_2'] = [[e_1', e_2'], e_1'] - [[e_1', e_1'], e_2'] = [[\gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4], e_1] - [[e_3 + \alpha_2 e_4, e_2] = \gamma_1 [e_3, e_1] - [e_3, e_2] = \gamma_1 e_4 - \delta_1 e_4$,

$0 = [e_2'', [e_2'', e_1'']] = [e_2'', e_2''], e_1''] - [[e_2'', e_1''], e_2''] = [[\beta_1 e_3' + \beta_2 e_4'], e_1' - \alpha_2 e_3'] - [[e_2', e_1' - \alpha_2 e_3'], e_2'] = \beta_1 [e_3', e_1'] - [[e_2', e_1'], e_2'] = \beta_1 [e_3', e_1'] - [e_3', e_2'] = \beta_1 e_4 - \delta_1 e_4$,

teremos: $\beta_1 = \gamma_1 = \delta_1$. Portanto fazendo as seguintes multiplicações teremos,

$$[e_1'', e_1''] = [e_1' - \alpha_2 e_3', e_1' - \alpha_2 e_3'] = [e_1', e_1'] = e_3' + \cancel{\alpha_2 e_4'} = e_3'$$

$$[e_2'', e_1''] = [e_2', e_1' - \alpha_2 e_3'] = [e_2', e_1'] - \cancel{\alpha_2 [e_2', e_3']} = e_3'$$

$$[e_1'', e_2''] = [e_1' - \alpha_2 e_3', e_2'] = [e_1', e_2'] - \cancel{\alpha_2 [e_3', e_2']} = \gamma_1 e_3' + \gamma_2 e_4' = \beta_1 e_3' + \gamma_2 e_4'$$

$$[e_2'', e_2''] = [e_2', e_2'] = \beta_1 e_3' + \beta_2 e_4'$$

$$[e_3'', e_1''] = [e_3', e_1' - \alpha_2 e_3'] = [e_3', e_1'] - \cancel{\alpha_2 [e_3', e_3']} = [{\alpha_1}^3 e_3, {\alpha_1}^1 e_1] = {\alpha_1}^4 [e_3', e_1'] = e_4'$$

$$[e_3'', e_2''] = [e_3', e_2'] = \delta_1 e_4' = \beta_1 e_4'$$

Portanto, a tabela de multiplicação de "L" tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} [e_1'', e_1''] = e_3', & [e_2'', e_2''] = \beta_1 e_3' + \beta_2 e_4' \\ [e_2'', e_1''] = e_3', & [e_3'', e_1''] = e_4' \\ [e_1'', e_2''] = \beta_1 e_3' + \gamma_2 e_4', & [e_3'', e_2''] = \beta_1 e_4' \end{cases}$$

Tomando $e_1''' = e_1'', e_2''' = e_2'' - \beta_1 e_1'', e_3''' = e_3'', e_4''' = e_4''$,então teremos:

$$[e_2''', e_1'''] = [e_2'' - \beta_1 e_1'', e_1''] = [e_2'', e_1''] - \beta_1 [e_1'', e_1''] = e_3' - \beta_1 e_3' = (1 - \beta_1) e_3'$$

$$[e_1''', e_1'''] = [e_1'', e_1''] = e_3'$$

$$[e_1''', e_2'''] = [e_1'', e_2'' - \beta_1 e_1''] = [e_1'', e_2''] - \beta_1 [e_1'', e_1''] = \cancel{\beta_1 e_3'} + \gamma_2 e_4' - \cancel{\beta_1 e_3'} = \gamma_2 e_4'$$

$$[e_3''', e_1'''] = [e_3'', e_1''] = e_4'$$

$$[e_2'', e_2''] = [e_2'' - \beta_1 e_1'', e_2'' - \beta_1 e_1''] = (\beta_2 - \beta_1 \gamma_2) e_4'' = \beta_2' e_4''$$

$$[e_3''', e_2'''] = [e_3'', e_2'' - \beta_1 e_1''] = \beta_1 e_4'' - \beta_1 e_4'' = 0$$

então a tabela de multiplicação será da seguinte forma:

$$\begin{cases} [e_2''', e_1'''] = (1 - \beta_1) e_3' & [e_3''', e_1'''] = e_4' \\ [e_1''', e_1'''] = e_3' & [e_2, e_2] = \beta_2' e_4' \\ [e_1''', e_2'''] = \gamma_2 e_4' & \end{cases}$$

Se $\beta_1 \neq 1$, então tomando as seguintes bases da transformação

$$e_1^{iv} = (1 - \beta_1) e_1''', \quad e_2^{iv} = e_2''', \quad e_3^{iv} = (1 - \beta_1)^2 e_3''', \quad e_4^{iv} = (1 - \beta_1)^3 e_4'''$$

daí tem-se

$$[e_1^{iv}, e_1^{iv}] = [(1 - \beta_1) e_1''', (1 - \beta_1) e_1'''] = (1 - \beta_1)^2 [e_1''', e_1'''] = (1 - \beta_1)^2 e_3''' = e_3^{iv}$$

$$[e_1^{iv}, e_2^{iv}] = [(1 - \beta_1) e_1''', e_2'''] = (1 - \beta_1) [e_1''', e_2'''] = (1 - \beta_1) \gamma_2 e_4''' = \alpha e_4^{iv}$$

onde, $\alpha = \dfrac{\gamma_2}{(1-\beta_1)^2}$

$$[e_2^{iv}, e_1^{iv}] = [e_2''', (1-\beta_1)e_1'''] = (1-\beta_1)[e_2''', e_1'''] = (1-\beta_1)(1-\beta_1)e_3''' = (1-\beta_1)^2 e_3''' = e_3^{iv}$$

$$[e_2^{iv}, e_2^{iv}] = [e_2''', e_2'''] = \beta_2' e_4'$$

$$[e_3^{iv}, e_1^{iv}] = [(1-\beta_1)^2 e_3''', (1-\beta_1)e_1'''] = (1-\beta_1)^3[e_3''', e_1'''] = (1-\beta_1)^3 e_4''' = e_4^{iv}.$$

Vamos obter a família das álgebras

$$F_1(\alpha,\beta) : [e_1^{iv}, e_1^{iv}] = e_3^{iv}, \quad [e_1^{iv}, e_2^{iv}] = \alpha e_4''', \quad [e_2^{iv}, e_1^{iv}] = e_3^{iv}, \quad [e_2^{iv}, e_2^{iv}] = \beta_2 e_4''', \quad [e_3^{iv}, e_1^{iv}] = e_4^{iv}$$

Se $\beta_1 = 1$, então obtemos uma família de álgebra

$$F_2(\alpha,\beta) : [e_1, e_1] = e_3, \quad [e_1, e_2] = \alpha e_4, \quad [e_2, e_2] = \beta e_4, \quad [e_3, e_1] = e_4.$$

Caso 02. Seja $\alpha_1 = 0$. Tomando a mudança de base

$$e_1' = e_1, e_2' = e_2 - \delta_1 e_1, \quad e_3' = e_3 - \alpha_2\delta_1 e_4, e_4' = e_4$$

derivamos $\delta_1 = 0$ teremos:

$$[e_1', e_1'] = [e_1, e_1] = \cancel{\alpha_1 e_3} + \alpha_2 e_4 = \alpha_2 e_4$$

$$[e_1', e_2'] = [e_1, e_2 - \delta_1 e_1] = [e_1, e_2] - \cancel{\delta_1[e_1, e_1]} = \gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4$$

$$[e_1', e_3'] = [e_1, e_3 - \alpha_2\delta_1 e_4] = [e_1, e_3] - \cancel{\alpha_2\delta_1[e_1, e_4]} = \delta_2 e_4$$

$$[e_2', e_1'] = [e_2 - \delta_1 e_1, e_1] = [e_2, e_1] - \cancel{\delta_1[e_1, e_1]} = e_3$$

$$[e_2', e_2'] = [e_2 - \delta_1 e_1, e_2 - \delta_1 e_1] = [e_2, e_2] - \cancel{\delta_1[e_2, e_1]} - \cancel{\delta_1[e_1, e_2]} + \cancel{\delta_1^2[e_1, e_1]} = \beta_1 e_3 + \beta_2 e_4$$

$$[e_2', e_3'] = [e_2 - \delta_1 e_1, e_3 - \alpha_2\delta_1 e_4] = [e_2, e_3] - \cancel{\alpha_2\delta_1[e_2, e_4]} - \cancel{\delta_1[e_1, e_3]} + \cancel{\alpha_2\delta_1^2[e_1, e_4]} = \delta_3 e_4$$

$$[e_3', e_1'] = [e_3 - \alpha_2\delta_1 e_4, e_1] = [e_3, e_1] - \cancel{\alpha_2\delta_1[e_4, e_1]} = e_4$$

daí teremos a seguinte tabela de multiplicação:

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = \alpha_2 e_4, & [e_2, e_2] = \beta_1 e_3 + \beta_2 e_4 \\ [e_1, e_2] = \gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4, & [e_1, e_3] = \delta_2 e_4 \\ [e_2, e_1] = e_3, & [e_2, e_3] = \delta_3 e_4 \\ [e_3, e_1] = e_4 & \end{cases}$$

Das igualdades

$$\gamma_1\delta_2 e_4 = \gamma_1\left[e_1, e_3\right] + \gamma_2\cancel{[e_1, e_4]} = [e_1, \gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4] = [e_1, [e_1, e_2]]$$

por outro lado

$$[e_1, [e_1, e_2]] = \left[\left[e_1, e_1\right], e_2\right] - \left[\left[e_1, e_2\right], e_1\right] = [\alpha_2 e_4, e_2] - [\gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4, e_1] = \cancel{[\alpha_2 e_4, e_2]} - \gamma_1\left[e_3, e_1\right] - \gamma_2\cancel{[e_4, e_1]} = -\gamma_1 e_4$$

e também temos

$$\gamma_1\delta_3 e_4 = \gamma_1\left[e_2, e_3\right] + \gamma_2\cancel{[e_2, e_4]} = [e_2, \gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4] = [e_2, [e_1, e_2]]$$

e por outro lado temos,

$$[e_2, [e_1, e_2]] = \left[\left[e_2, e_1\right], e_2\right] - \left[\left[e_2, e_2\right], e_1\right] = \cancel{[e_3, e_2]} - \beta_1\left[e_3, e_1\right] - \beta_2\cancel{[e_4, e_1]} = -\beta_1 e_4$$

daí concluímos que

$$\gamma_1\left(\delta_2 + 1\right) = 0, \quad \beta_1 = -\gamma_1\delta_3$$

Além disso, as igualdades

$$\delta_2 e_4 = [e_1, e_3] = [e_1, [e_2, e_1]]$$

e por outro lado temos,

$$[e_1, [e_2, e_1]] = \left[\left[e_1, e_2\right], e_1\right] - \left[\left[e_1, e_1\right], e_2\right] = \gamma_1\left[e_3, e_1\right] + \gamma_2\cancel{[e_4, e_1]} - \alpha_2\cancel{[e_4, e_2]} = \gamma_1 e_4$$

veja que,

$$\delta_3 e_4 = [e_2, e_3] = [e_2, [e_2, e_1]]$$

e por outro lado temos,

$$[e_2, [e_2, e_1]] = \left[\left[e_2, e_2\right], e_1\right] - \left[\left[e_2, e_1\right], e_2\right] = [\beta_1 e_3 + \beta_2 e_4, e_1] - \cancel{[e_4, e_1]} = \beta_1\left[e_3, e_1\right] + \beta_2\cancel{[e_4, e_1]} = \beta_1 e_4$$

e por fim veja que

$$\beta_1\delta_2 e_4 = \beta_1\left[e_1, e_2\right] + \beta_2\cancel{[e_1, e_4]}\,[e_1, \beta_1 e_3 + \beta_2 e_4] = [e_1, [e_2, e_2]]$$

e por outro lado temos

$$[e_1, [e_2, e_2]] = \left[\left[e_1, e_2\right], e_2\right] - \left[\left[e_1, e_2\right], e_2\right] = 0$$

das igualdades segue-se que

$$\delta_2\beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = \delta_2, \beta_1 = \delta_3$$

portanto, temos $\beta_1 = 0$ e a tabela de multiplicação de L terá o seguinte forma:

$$\begin{cases} \begin{array}{rr} [e_2, e_1] = e_3 & [e_3, e_1] = e_4 \\ [e_1, e_1] = \alpha_2 e_4 & [e_2, e_2] = \beta_2 e_4 \\ [e_1, e_2] = \gamma_1 e_3 + \gamma_2 e_4 & [e_1, e_3] = \gamma_1 e_4 \end{array} \end{cases}$$

com a restrição de γ_1 como segue

$$\gamma_1(\gamma_1+1)=0$$

Se $\gamma_1=0$, então a tabela de multiplicação será:

$$\begin{cases} [e_2,e_1]=e_3 & [e_3,e_1]=e_4 \\ [e_1,e_1]=\alpha_2 e_4 & [e_2,e_2]=\beta_2 e_4 \\ [e_1,e_2]=\gamma_2 e_4 & \end{cases}$$

Tomando as seguintes bases

$$e_1'=e_1+e_2-(\gamma_2+\alpha_2)\,e_3, e_2'=e_2 \quad e_3'=e_3+\beta_2 e_4, e_4'=e_4$$

então,

$[e_1',e_1']=[e_1+e_2-(\gamma_2+\alpha_2)e_3, e_1+e_2-(\gamma_2+\alpha_2)\,e_3]=[e_1,e_1]+[e_1,e_2]-(\gamma_2+\alpha_2)\cancel{[e_1,e_3]}+[e_2,e_1]+[e_2,e_2]-(\gamma_2+\alpha_2)\cancel{[e_2,e_3]}-(\gamma_2+\alpha_2)[e_3,e_1]-(\gamma_2+\alpha_2)\cancel{[e_3,e_2]}+(\gamma_2+\alpha_2)^2\cancel{[e_3,e_3]}=\cancel{\alpha_2 e_4}+\cancel{\gamma_2 e_4}+e_3+\beta_2 e_4-\cancel{(\gamma_2+\alpha_2)e_4}=e_3+\beta_2 e_4=e_3'$

$[e_1',e_2']=[e_1+e_2-(\gamma_2+\alpha_2)e_3, e_2]=[e_1,e_2]+[e_2,e_2]-(\gamma_2+\alpha_2)\cancel{[e_3,e_2]}=\gamma_2 e_4+\beta_2 e_4=(\gamma_2+\alpha_2)e_4=\alpha e_4'$

$[e_2',e_1']=[e_2, e_1+e_2-(\gamma_2+\alpha_2)e_3]=[e_2,e_1]+[e_2,e_2]-(\gamma_2+\alpha_2)\cancel{[e_2,e_3]}=e_3+\beta_2 e_4=e_3'$

$[e_3',e_1']=[e_3+\beta_2 e_4, e_1+e_2-(\gamma_2+\alpha_2)e_3]=[e_3,e_1]+\cancel{[e_3,e_2]}-(\gamma_2+\alpha_2)\cancel{[e_3,e_3]}+\beta_2\cancel{[e_4,e_1]}+\beta_2\cancel{[e_4,e_2]}-\beta_2(\gamma_2+\alpha_2)\cancel{[e_4,e_3]}=e_4=e_4'$

$[e_2',e_2']=[e_2,e_2]=\beta_2 e_4=\beta_2 e_4'$

o que nos fornece a família de álgebras $F_1(\alpha,\beta)$.

Se $\gamma_1=-1$, então teremos a seguinte tabela de multiplicação

$$\begin{cases} [e_2,e_1]=e_3 & [e_3,e_1]=e_4 \\ [e_1,e_1]=\alpha_2 e_4 & [e_2,e_2]=\beta_2 e_4 \\ [e_1,e_2]=-e_3+\gamma_2 e_4 & [e_1,e_3]=-e_4 \end{cases}$$

utilizando a mesma base que tínhamos utilizado para $\gamma_1=0$ teremos,

$[e_1', e_1'] = [e_1 + e_2 - (\gamma_2 + \alpha_2)e_3, e_1 + e_2 - (\gamma_2 + \alpha_2)e_3] = [e_1, e_1] + [e_1, e_2] - (\gamma_2 + \alpha_2)[e_1, e_3] + [e_2, e_1] + [e_2, e_2] - (\gamma_2 + \alpha_2)\cancel{[e_2, e_3]} - (\gamma_2 + \alpha_2)[e_3, e_1] - (\gamma_2 + \alpha_2)\cancel{[e_3, e_2]} + (\gamma_2 + \alpha_2)^2\cancel{[e_3, e_3]} = \alpha_2 e_4 - e_3 + \gamma_2 e_4 - (\gamma_2 + \alpha_2)(-e_4) + e_3 + \beta_2 e_4 - (\gamma_2 + \alpha_2)e_4 = \cancel{\alpha_2 e_4} - \cancel{e_3} + \cancel{\gamma_2 e_4} + \gamma_2 e_4 + \alpha_2 e_4 + \cancel{e_3} + \beta_2 e_4 - \cancel{\gamma_2 e_4} - \cancel{\alpha_2 e_4} = \gamma_2 e_4 + \alpha_2 e_4 + \beta_2 e_4 = (\gamma_2 + \alpha_2 + \beta_2)e_4 = \alpha e_4$

$[e_2', e_2'] = [e_2, e_2] = \beta_2 e_4$

$[e_2', e_1'] = [e_2, e_1 + e_2 - (\gamma_2 + \alpha_2)e_3] = [e_2, e_1] + [e_2, e_2] - (\gamma_2 + \alpha_2)\cancel{[e_2, e_3]} = e_3 + \beta_2 e_4 = e_3'$

$[e_3', e_1'] = [e_3 + \beta_2 e_4, e_1 + e_2 - (\gamma_2 + \alpha_2)e_3] = [e_3, e_1] + \cancel{[e_3, e_2]} - (\gamma_2 + \alpha_2)\cancel{[e_3, e_3]} + \beta_2\cancel{[e_4, e_1]} + \beta_2\cancel{[e_4, e_2]} - \beta_2(\gamma_2 + \alpha_2)\cancel{[e_4, e_3]} = e_4 = e_4'$

$[e_1', e_2'] = [e_1 + e_2 - (\gamma_2 + \alpha_2)e_3, e_2] = [e_1, e_2] + [e_2, e_2] - (\gamma_2 + \alpha_2)\cancel{[e_3, e_2]} = -e_3 + \gamma_2 e_4 + \beta_2 e_4 = -e_3 + (\gamma_2 + \beta_2 e)e_4 = -e_3 + \gamma e_4$

$[e_1', e_3'] = [e_1 + e_2 - (\gamma_2 + \alpha_2)e_3, e_3 + \beta_2 e_4] = [e_1, e_3] + \beta_2\cancel{[e_1, e_4]} + \cancel{[e_2, e_3]} + \beta_2\cancel{e_2, e_4]} - (\gamma_2 + \alpha_2)\cancel{[e_3, e_3]} - \beta_2(\gamma_2 + \alpha_2)\cancel{[e_3, e_4]} = -e_4 = -e_4'$

então obtemos

$F_3(\alpha, \beta, \gamma) : [e_1, e_1] = \alpha e_4, [e_2, e_2] = \beta_2 e_4', [e_2, e_1] = e_3', [e_3, e_1] = e_4', [e_1, e_2] = -e_3 + \gamma e_4', [e_1, e_3] = -e_4'$

Onde, neste último caso, pelo menos um de α, β, γ não é zero.

A partir desse momento nós vamos para de seguir o resultado de (Camacho et al. 2010) e iniciaremos a demonstração do resultado principal sobre o corpo de característica 2:

Vamos considerar os isomorfismos dentro de cada uma das famílias $F_1(\alpha, \beta)$, $F_2(\alpha, \beta)$ e $F_3(\alpha, \beta, \gamma)$.

Iniciaremos com $F_1(\alpha, \beta)$. Os seguintes casos podem ocorrer:

Caso 1.1: Consideramos a função $g : F_1(0, 1) \to F_1(0, 0)$ definida por

$$g(e_i') = \sum_{j=2}^{4} a_{ij} e_j.$$

Aplicando as multiplicações da função obteremos o seguinte sistema para os coeficientes:

$$\begin{cases} a_{31} = a_{32} = 0 \\ a_{33} = a_{11}^2 + a_{12}a_{11} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{11} \\ a_{34} = a_{13}a_{11} = a_{23}a_{11} \\ a_{41} = a_{42} = 0 \\ a_{43} = a_{31}a_{11} + a_{32}a_{11} = a_{21}^2 + a_{22}a_{21} = 0 \\ a_{44} = a_{33}a_{11} = a_{23}a_{21} \end{cases}$$

Veja que se $a_{21} = 0$, então da penúltima e última equação teremos que $a_{44} = 0$ o que implica que $g(e'_4) = 0$, ou seja, a função g não é bijetiva.

Analogamente $a_{11} \neq 0$, pois $g(e'_3)$ deve ser diferente de zero. Assim da última equação obteremos que

$$a_{21} = a_{22} = 1.$$

Consequentemente,

$$a_{33} = 1 * 1 + 1 * 1 = 0 \quad \text{e} \quad a_{34} = 1 * 1 + 1 * 1 = 0.$$

Logo, $g(e'_3) = 0$. Isso demonstra que não há isomorfismo entre $F_1(0,1)$ e $F_1(0,0)$. Notaremos que álgebra $F_1(0,0)$ coincide com R_1 já definida.

Caso 1.2: De forma análoga considerando $g : F_1(1,0) \to F_1(0,0)$ definida por

$$g(e'_i) = \sum_{j=2}^{4} a_{ij}e_j.$$

Aplicando as multiplicações da função obteremos o seguinte sistema para os coeficientes:

$$\begin{cases} a_{31} = a_{32} = 0 \\ a_{33} = a_{11}^2 + a_{12}a_{11} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{11} \\ a_{34} = a_{13}a_{11} = a_{23}a_{11} \\ a_{41} = a_{42} = 0 \\ a_{43} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{21} = a_{31}a_{11} + a_{32}a_{11} = 0 \\ a_{44} = a_{13}a_{21} = a_{33}a_{11} \end{cases}$$

Veja que se $a_{21} = 0$, então teremos que $a_{44} = 0$ o que implica que $g(e'_4) = 0$, ou seja, a função g não é bijetiva.

Analogamente $a_{11} \neq 0$, pois $g(e'_3)$ deve ser diferente de zero. Assim, podemos supor que

$$a_{11} = a_{13} = a_{21} = a_{33} = 1 \quad \Rightarrow a_{44} = 1.$$

Daí da segunda equação teremos,

$$1 = 1 + a_{12} = a_{21} + a_{22} \quad \Rightarrow a_{12} = 0.$$

usando a quinta equação teremos,

$$a_{21}(a_{11} + a_{12}) = 0 \quad \Rightarrow a_{21} = 0.$$

Logo, $g(e'_4) = 0$. Isso demonstra que não há isomorfismo entre $F_1(1,0)$ e $F_1(0,0)$.
Caso 1.3: De forma análoga considerando $g : F_1(1,1) \to F_1(0,0)$ definida por

$$g(e'_i) = \sum_{j=2}^{4} a_{ij} e_j.$$

Aplicando as multiplicações da função obteremos o seguinte sistema para os coeficientes:

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{31} = a_{32} = 0 \\ a_{33} = a_{11}^2 + a_{12}a_{11} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{11} \\ a_{34} = a_{13}a_{11} = a_{23}a_{11} \\ a_{41} = a_{42} = 0 \\ a_{43} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{21} = a_{31}a_{11} + a_{32}a_{11} = a_{21}^2 + a_{22}a_{21} = 0 \\ a_{44} = a_{13}a_{21} = a_{33}a_{11} = a_{23}a_{21} \end{array} \right.$$

Veja que se $a_{21} = 0$, então teremos que $a_{44} = 0$ o que implica que $g(e'_4) = 0$, ou seja, a função g não é bijetiva.

Analogamente $a_{11} \neq 0$, pois $g(e'_3)$ deve ser diferente de zero. Assim, podemos supor que

$$a_{11} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{33} = 1 \quad \Rightarrow a_{44} = 1.$$

Daí da segunda equação teremos,

$$1(1 + a_{12}) = 1 \quad \Rightarrow a_{12} = 0$$

usando a quinta equação teremos,

$$a_{43} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{21} \quad \Rightarrow a_{21} = 0$$

substituindo teremos,

$$0 = 1 * 1 + 0 \quad \text{absurdo!, o que implica que} \quad a_{21} = 0.$$

Logo, $g(e_4') = 0$. Isso demonstra que não há isomorfismo entre $F_1(1,1)$ e $F_1(0,0)$.
Caso 1.4: De forma análoga considerando $g : F_1(1,0) \rightarrow F_1(0,1)$ definida por

$$g(e_i') = \sum_{j=2}^{4} a_{ij}e_j.$$

Aplicando as multiplicações da função obteremos o seguinte sistema para os coeficientes:

$$\begin{cases} a_{31} = a_{32} = 0 \\ a_{33} = a_{11}^2 + a_{12}a_{11} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{11} \\ a_{34} = a_{13}a_{11} + a_{12}^2 = a_{23}a_{11} + a_{22}a_{12} \\ a_{41} = a_{42} = 0 \\ a_{43} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{21} = a_{31}a_{11} + a_{32}a_{11} = 0 \\ a_{44} = a_{13}a_{21} + a_{12}a_{22} = a_{33}a_{11} \end{cases}$$

Veja que se $a_{33} = 0$, então teremos que $a_{44} = 0$ o que implica que $g(e_4') = 0$, ou seja, a função g não é bijetiva.

Analogamente $a_{11} \neq 0$, pois $g(e_4')$ deve ser diferente de zero. Assim, podemos supor que

$$a_{11} = a_{33} = 1 \quad \Rightarrow a_{44} = 1.$$

Veja que temos que,

$$a_{33} = a_{11}^2 + a_{12}a_{11}$$

substituindo teremos,

$$1 = 1 + a_{12} \Rightarrow a_{12} = 0$$

mas temos que

$$a_{43} = a_{11}a_{21} + a_{12}a_{21}$$

substituindo pelos valores assumidos teremos,

$$a_{21} = 0$$

isso implica que

$$a_{44} = a_{13}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0 \quad \text{absurdo!}$$

porque $a_{44} = 1$

Logo, $g(e_4') = 0$. Isso demonstra que não há isomorfismo entre $F_1(1,0)$ e $F_1(0,1)$.

Agora verificaremos o isomorfismo dentro da família $F_2(\alpha,\beta)$ que é dado da seguinte forma:

$$[e_1, e_1] = e_3$$

$$[e_1, e_2] = \alpha e_4$$

$$[e_2, e_2] = \beta e_4$$

$$[e_3, e_1] = e_4$$

Veja que se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ teremos:

$$R_5 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3 \\ [e_1, e_2] = e_4 \\ [e_3, e_1] = e_4 \end{cases}$$

Observação: $Ann_e R_5 = \{e_2, e_4\}$

Já para $F_2(\alpha, 1)$ teremos:

$$[e_1, e_1] = e_3$$

$$[e_1, e_2] = \alpha e_4$$

$$[e_2, e_2] = e_4$$

$$[e_3, e_1] = e_4$$

Então se tomamos, $e_1' = e_1 + \alpha e_2$, $e_2' = e_2 + e_3$, $e_3' = e_3 + (\alpha + \alpha^2)e_4$ e $e_4' = e_4$

$[e_1', e_1'] = [e_1 + \alpha e_2, e_1 + \alpha e_2] = e_3 + (\alpha + \alpha^2)e_4 = e_3'$

$[e_1', e_2'] = [e_1 + \alpha e_2, e_2 + e_3] = \alpha e_4 + \alpha e_4 = 2\alpha e_4 = \alpha' e_4'$

$[e_2', e_2'] = [e_2 + e_3, e_2 + e_3] = e_4 = e_4'$

$[e_3', e_1'] = [e_3 + (\alpha + \alpha^2)e_4, e_1 + \alpha e_2] = e_4 = e_4'$

Assim, obteremos

$$R_6 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3 \\ [e_2, e_2] = e_4 \\ [e_3, e_1] = e_4 \end{cases}$$

Observação: $Ann_e R_6 = \{e_4\}$.
Veja que R_5 e R_6 não são isomorfos pela dimensão dos aniquiladores.

Por outro lado, temos que $F_2(0,0)$ é uma álgebra com divisão o que significa que cada elemento tem inverso. Que é diferente das outras álgebras da F_2 logo não existe isomorfismo entre ele e as outras álgebras no F_2.

E por fim, verificaremos o isomorfismo dentro da família $F_3\,(\alpha, \beta, \gamma)$. Se α, β, γ não nulos , implica que F_3 é uma álgebra de Lie, ou melhor dizendo, é uma álgebra de Lie filiforme de dimensão 4 que é dado da seguinte forma:

$$[e_1, e_1] = \alpha e_4$$

$$[e_2, e_2] = \beta e_4$$

$$[e_2, e_1] = e_3$$

$$[e_3, e_1] = e_4$$

$$[e_1, e_2] = -e_3 + \gamma e_4 = e_3 + \gamma e_4$$

$$[e_1, e_3] = -e_4 = e_4$$

Seja $F_3\,(\alpha, \beta, \gamma)$ não Lie.
Primeiro caso: Se $\alpha \neq 0$, então $F_3\,(1, \beta, \gamma)$
a) $F_3\,(1, 0, 1)$

$$[e_1, e_1] = e_4$$

$$[e_2, e_1] = e_3$$

$$[e_3, e_1] = e_4$$

$$[e_1, e_2] = e_3 + e_4$$

$$[e_1, e_3] = e_4$$

Observação: Veja que $F_3\,(1, 0, 1)$ tem dois elementos comutando e

$$e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_1^3 = 0.$$

b) $F_3\left(1,1,0\right)$

$$[e_1, e_1] = e_4$$

$$[e_2, e_2] = e_4$$

$$[e_2, e_1] = e_3$$

$$[e_3, e_1] = e_4$$

$$[e_1, e_2] = e_3$$

$$[e_1, e_3] = e_4$$

Observação: Veja que $F_3\left(1,1,0\right)$ tem três elementos comutando e

$$e_3^2 = e_4^2 = e_1^3 = 0.$$

c) $F_3\left(1,0,0\right)$

$$[e_1, e_1] = e_4$$

$$[e_2, e_1] = e_3$$

$$[e_3, e_1] = e_4$$

$$[e_1, e_2] = e_3$$

$$[e_1, e_3] = e_4$$

Observação: Veja que $F_3\left(1,0,0\right)$ tem três elementos comutando e

$$e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_1^3 = 0.$$

Note que $F_3\left(1,0,1\right)$ e $F_3\left(1,1,0\right)$ não são isomorfos pelo número de elementos que estão comutando e de forma análoga $F_3\left(1,0,1\right)$ e $F_3\left(1,0,0\right)$ não são isomorfos pelo número de elementos que estão comutando. Já $F_3\left(1,1,0\right)$ e $F_3\left(1,0,0\right)$ não são isomorfos pelo índice de nilpotência.

Segundo caso: Se $\alpha = 0$, então $F_3\left(0,\beta,\gamma\right)$

a) $F_3\,(0,1,1)$

$$[e_2, e_2] = e_4$$

$$[e_2, e_1] = e_3$$

$$[e_3, e_1] = e_4$$

$$[e_1, e_2] = e_3 + e_4$$

$$[e_1, e_3] = e_4$$

Observação: Veja que $F_3\,(0,1,1)$ tem dois elementos comutando e

$$e_1^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_2^3 = 0.$$

b) $F_3\,(0,1,0)$

$$[e_2, e_2] = e_4$$

$$[e_2, e_1] = e_3$$

$$[e_3, e_1] = e_4$$

$$[e_1, e_2] = e_3$$

$$[e_1, e_3] = e_4$$

Observação: Veja que $F_3\,(0,1,0)$ tem três elementos comutando e

$$e_1^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_2^3 = 0.$$

c) $F_3\,(0,0,1)$

$$[e_2, e_1] = e_3$$

$$[e_3, e_1] = e_4$$

$$[e_1, e_2] = e_3 + e_4$$

$$[e_1, e_3] = e_4$$

Observação: Veja que $F_3\,(0,0,1)$ tem dois elementos comutando e

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = 0.$$

d) $F_3\,(0,0,0)$

$$[e_2, e_1] = e_3$$
$$[e_3, e_1] = e_4$$
$$[e_1, e_2] = e_3$$
$$[e_1, e_3] = e_4$$

Observação: Veja que $F_3\,(0,0,0)$ tem três elementos comutando e

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = 0.$$

Note que $F_3\,(0,1,1)$ e $F_3\,(0,1,0)$, $F_3\,(0,1,1)$ e $F_3\,(0,0,0)$ não são isomorfos pelo número de elementos que estão comutando, $F_3\,(0,1,1)$ e $F_3\,(0,0,1)$ não são isomorfos pelo índice de nilpotencia em e_2. Já $F_3\,(0,1,0)$ e $F_3\,(0,0,1)$ também não são isomorfos pelo número de elementos que estão comutando e também temos que $F_3\,(0,1,0)$ e $F_3\,(0,0,0)$ não são isomorfos pelo índice de nilpotencia em e_2 . E por fim note que $F_3\,(0,0,1)$ e $F_3\,(0,0,0)$ também não são isomorfos pelo número de elementos que estão comutando.

Assim foi demonstrado o resultado principal da tese que é o nosso teorema a seguir:

Teorema 4.2 *A menos um isomorfismo existem 15 álgebras de Leibniz nilpotentes de dimensão 4 sobre o corpo de característica 2, definidas pelas seguintes tabelas de multiplicação:*

R_1: $[e_1,e_1] = e_2$, $[e_2,e_1] = e_3$, $[e_3,e_1] = e_4$
R_2: $[e_1,e_1] = e_3$, $[e_1,e_2] = e_4$, $[e_2,e_1] = e_3$, $[e_3,e_1] = e_4$
R_3: $[e_1,e_1] = e_3$, $[e_2,e_1] = e_3$, $[e_2,e_2] = e_4$, $[e_3,e_1] = e_4$
R_4: $[e_1,e_1] = e_3$, $[e_1,e_2] = e_4$, $[e_2,e_1] = e_3$, $[e_2,e_2] = e_4$, $[e_3,e_1] = e_4$
R_5: $[e_1,e_1] = e_3$, $[e_1,e_2] = e_4$, $[e_3,e_1] = e_4$
R_6: $[e_1,e_1] = e_3$, $[e_2,e_2] = e_4$, $[e_3,e_1] = e_4$
R_7: $[e_1,e_1] = e_3$, $[e_3,e_1] = e_4$
R_8: $[e_1,e_1] = e_3$, $[e_1,e_2] = e_4$, $[e_2,e_2] = e_4$, $[e_3,e_1] = e_4$
R_9: $[e_1,e_1] = e_4$, $[e_2,e_1] = e_3$, $[e_3,e_1] = e_4$, $[e_1,e_2] = e_3 + e_4$, $[e_1,e_3] = e_4$
R_{10}: $[e_1,e_1] = e_4$, $[e_2,e_2] = e_4$, $[e_2,e_1] = e_3$, $[e_3,e_1] = e_4$, $[e_1,e_2] = e_3$, $[e_1,e_3] = e_4$

R_{11}: $[e_1, e_1] = e_4, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4$

R_{12}: $[e_2, e_2] = e_4, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = e_3 + e_4, \quad [e_1, e_3] = e_4$

R_{13}: $[e_2, e_2] = e_4, \quad [e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4$

R_{14}: $[e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = e_3 + e_4, \quad [e_1, e_3] = e_4$

R_{15}: $[e_2, e_1] = e_3, \quad [e_3, e_1] = e_4, \quad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4$

5 CONCLUSÃO

Objetivo deste trabalho foi apresentar a classificação das álgebras de Leibniz nilpotentes de dimensão 4 sobre um corpo de característica 2. Para atingir esse objetivo inicialmente fizemos um estudo das bases da teoria das álgebras não lineares e as álgebras de Leibniz em particular e em seguida consideramos alguns resultados sobre as álgebras de Leibniz nilpotentes. Seguindo a classificação desenvolvida em (Camacho et al. 2010), demonstramos com a precisão de isomorfismo que existam 15 álgebras de Leibniz nilpotentes de dimensão 4 sobre corpo de característica 2.

Pode-se ver que não há isomorfismo das álgebras encontradas no $F_1(\alpha, \beta)$, $F_2(\alpha, \beta)$, e $F_3(\alpha, \beta, \gamma)$.

As provas e as demonstrações alguns foram retirados do livro e outros na sua maioria retirados do livro mas com mais desenvolvimentos no cálculo. No que diz respeito as álgebras encontradas e isomorfismo entre elas foram feitas durante o trabalho.

Referências

AYUPOV, S. A.; OMIROV, B. A. On some classes of nilpotent leibniz algebras. *Siberian Mathematical Journal*, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, v. 42, n. 1, p. 15–24, 2001.

BAHARUDDIN, M.; ABDULLAH, W. S. W. The book al-jabr wa al-muqābalah: A research on its content, writing methodology and elementary algebra by al-khwārizmī. *Afkar-Jurnal Akidah & Pemikiran Islam*, v. 15, n. 1, p. 135–162, 2014.

BLOKH, A. Y. A generalization of the concept of a lie algebra. In: RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES. *Doklady Akademii Nauk*. [S.l.], 1965. v. 165, n. 3, p. 471–473.

CAMACHO, L. et al. Naturally graded quasi-filiform leibniz algebras. *Journal of Symbolic Computation*, Elsevier, v. 44, n. 5, p. 527–539, 2009.

CAMACHO, L. et al. The classification of naturally graded p-filiform leibniz algebras. *Communications in Algebra®*, Taylor & Francis, v. 39, n. 1, p. 153–168, 2010.

LODAY, J.-L.; PIRASHVILI, T. Universal enveloping algebras of leibniz algebras and (co) homology. *Mathematische Annalen*, Springer-Verlag, v. 296, n. 1, p. 139–158, 1993.

MAZZOLA, G. The algebraic and geometric classification of associative algebras of dimension five. *manuscripta mathematica*, Springer, v. 27, n. 1, p. 81–101, 1979.

VERGNE, M. Réductibilité de la variété des algèbres de lie nilpotentes. *COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L ACADEMIE DES SCIENCES SERIE A*, GAUTHIER-VILLARS/EDITIONS ELSEVIER 23 RUE LINOIS, 75015 PARIS, FRANCE, v. 263, n. 1, p. 4, 1966.