



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DOUGLAS VIEIRA LIMA

CAMPOS DE VETORES CONFORMES FECHADOS EM SUPERFÍCIES
DE REVOLUÇÃO

REDENÇÃO - CE

2022

DOUGLAS VIEIRA LIMA

CAMPOS DE VETORES CONFORMES FECHADOS EM SUPERFÍCIES DE
REVOLUÇÃO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

REDENÇÃO - CE

2022

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Lima, Douglas Vieira.

L696ac

Campos de vetores conformes fechados em superfícies de revolução
/ Douglas Vieira Lima. - Redenção, 2022.
57f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e
da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira, Redenção, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Geometria diferencial. 2. Superfície (Matemática). I.
Título

CE/UF/BSP

CDD 510

DOUGLAS VIEIRA LIMA

CAMPOS DE VETORES CONFORMES FECHADOS EM SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 11/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Prof. Dr. João Nunes de Araújo Neto

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE



Documento assinado eletronicamente por **RAFAEL JORGE PONTES DIOGENES, PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 11/02/2022, às 16:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOÃO NUNES DE ARAÚJO NETO, Usuário Externo**, em 16/02/2022, às 12:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOAO FRANCISCO DA SILVA FILHO, PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 16/02/2022, às 18:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unilab.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0405149** e o código CRC **047F1884**.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus,
por me sustentar nos momentos mais difíceis
e aos meus familiares e amigos que me apoi-
aram durante toda esta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu bom Deus pelo dom da vida, me abençoando com força, saúde, persistência e perseverança para vencer todos os obstáculos até aqui.

Agradeço aos meus pais que sempre me incentivaram no decorrer da graduação.

A todos os meus amigos e parceiros que construí ao longo dessa caminhada acadêmica, pelos bons momentos que tivemos. Principalmente aos meus amigos: Camila, Jhordana, Bárbara, Maria José (Masé), Vitória, Cristiano, Lucas, Mateus, Marcelo, Alan, Abymael, Isaac, Dayane, Anne Larisse, Débora Matos, enfim. Sou grato pelo companheirismo, cumplicidade, pelas conversas, momentos de estudo, brincadeiras e momentos de descontração.

Aos professores participantes da banca examinadora: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho e Prof. Dr. João Nunes de Araújo Neto por aceitarem participar, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Gratidão a todos os professores que me influenciaram na minha trajetória de forma direta ou indireta. Em especial, o professor Rafael Jorge Pontes Diógenes, meu orientador, pela parceria, amizade, dedicação, paciência e profissionalismo. Sendo imprescindível para a conclusão deste trabalho.

“O homem não teria alcançado o possível se, repetidas vezes, não tivesse tentado o impossível.”

Max Weber

RESUMO

Este trabalho propõe-se a estudar campos de vetores conforme fechados em superfícies de revolução no espaço tridimensional. Um campo de vetores ξ em uma superfície S de \mathbb{R}^3 é dito conforme fechado se a derivada covariante do campo conforme ξ na direção de qualquer campo Y resulta em um múltiplo de Y . O problema em questão concentra-se fortemente em descrever completamente um campo de vetores conforme fechado em uma superfície de revolução. Essa busca por classificações ou caracterizações são problemas de muita importância dentro da geometria diferencial. Nesse sentido, é obtido uma descrição completa de um campo de vetores conforme fechado em uma superfície de revolução em termos das funções coordenadas da parametrização. Além disso, obtêm-se algumas consequências nas quais se caracteriza o campo ou a superfície de revolução.

Palavras-chave: Campos de vetores. Conforme fechado. Superfície de Revolução.

ABSTRACT

This work proposes to study closed conformal vector field on surfaces of revolution in three-dimensional space. A vector field ξ on a surface S of \mathbb{R}^3 is said to be closed conformal if the covariant derivative of the conformal field ξ in the direction of any field Y results in a multiple of Y . The problem in question focuses on fully describing a closed conformal vector field of a surface of revolution. This search for classifications or characterizations are very important problems within differential geometry. In this sense, is obtained a complete description of a vector field closed conformal on a surface of revolution in terms of the coordinate functions of the parameterization. In addition, some consequences are obtained in which the field or surface of revolution are be characterized.

Keywords: Vector field. Closed conformal. Revolution Surfaces.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$	12
Figura 2 – Aplicação dX_p	13
Figura 3 – Helicóide.	15
Figura 4 – Parabolóide Hiperbólico.	17
Figura 5 – Curva $\alpha(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s))$	18
Figura 6 – Rotação de $\alpha(s)$ em torno de z	19
Figura 7 – Visão detalhada da rotação de $\alpha(s)$ em torno de z	19
Figura 8 – Relação.	20
Figura 9 – Faixa de Möbius.	24
Figura 10 – Aplicação de Gauss.	25
Figura 11 – Campo de vetores no Toro de revolução.	36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	12
2.1	Superfícies Regulares	12
2.2	Formas Fundamentais	21
2.3	Curvaturas	29
2.4	Símbolos de Christoffel	32
3	CAMPOS DE VETORES CONFORMES FECHADOS	36
3.1	Derivada Covariante	36
3.2	Campos de Vetores Conformes Fechados	41
4	CONCLUSÃO	56
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

Obter resultados de classificações ou caracterizações são problemas bastantes interessantes em geometria diferencial. Com isso, este trabalho tem por objetivo principal, estudar os campos de vetores conformes fechados em uma superfície de revolução no espaço Euclidiano tridimensional, buscando obter caracterizações e descrição completa do campo por meio de equações diferenciais parciais e ordinárias.

Para a comodidade do leitor, iniciamos com um capítulo de preliminares, onde é feito uma breve revisão de alguns conteúdos essenciais de geometria diferencial, tais como as superfícies regulares, plano tangente, suas principais estruturas, destacando as superfícies de revolução, as formas fundamentais, a curvatura Gaussiana e os símbolos de Christoffel. Como nosso foco principal são as superfícies de revolução, os principais entes geométricos que necessitamos vão sendo calculados ao longo de todo o trabalho.

Após o capítulo introdutório, inicia-se no capítulo 3, o estudo dos campos de vetores conformes fechado nas superfícies de revolução. Para isso, é definido inicialmente a derivada covariante, que é o conceito de derivada para campos de vetores, sendo similar a definição para quando calculamos a derivada de uma função na direção de um vetor. Nesta abordagem, a derivada covariante corresponde a derivada de um campo de vetores na direção de um vetor e , posteriormente, é visto que a derivada covariante também é aplicada para a derivada de um campo de vetores na direção de outro campo de vetores. Um caso particular desse estudo é quando a direção é invariante, ou seja, um campo de vetores conforme é fechado se tomarmos a derivada covariante do campo em qualquer direção e logo, o resultado será o múltiplo deste campo.

Seguidamente ao conceito introdutório da derivada covariante, é feito um estudo de campos de vetores conformes fechados sobre uma superfície de revolução, onde, além da definição, exibimos alguns exemplos de campos de vetores conformes fechados, especificamente nas superfícies de revolução. Adiante, na busca por alcançarmos o nosso resultado principal, é feito um estudo através de equações diferenciais. Tal resultado, é alcançado através do teorema principal deste trabalho, sendo ele, o Teorema 3.2, onde conseguimos de fato, fazer a descrição completa dos campos de vetores conforme fechados nas superfícies de revolução.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo trataremos inicialmente sobre alguns conceitos e definições diante do espaço Euclidiano em \mathbb{R}^3 , onde veremos a definição de superfícies regulares, no qual vamos abordar fortemente em nosso trabalho, demonstrando alguns resultados e exemplos. Ainda no contexto das superfícies regulares, introduziremos a definição de superfícies de revolução, onde vamos explorar vários resultados importantes dentro dessa família de superfícies, nos preparando para o capítulo seguinte.

Vale ressaltar que, neste capítulo, estabelecemos as anotações, resultados e definições contidas em (CARMO, 2008), estas, por sua vez, serão utilizadas ao longo do trabalho.

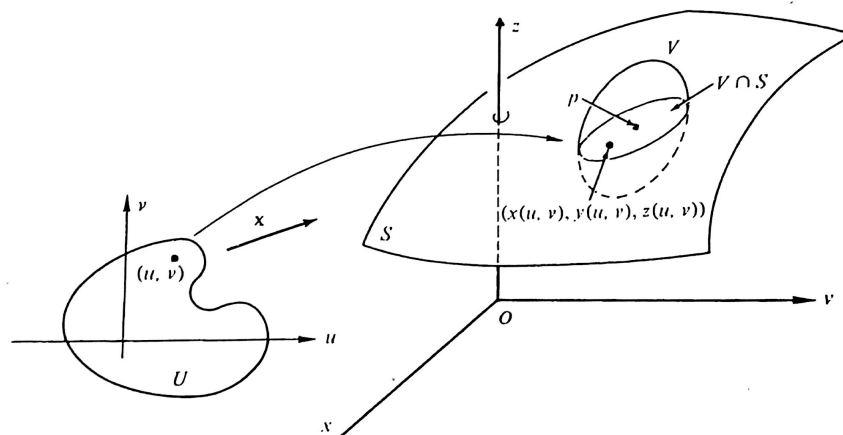
2.1 Superfícies Regulares

Definição 2.1 Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ de tal maneira satisfaz as três seguintes condições.

- i) X é diferenciável de classe C^∞ ;
- ii) X é um homeomorfismo;
- iii) Para todo $p \in U$, a diferencial $dX_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva;

Observe a seguinte representação na figura a seguir:

Figura 1 – Aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$.



Fonte: Carmo (2008).

Note que a aplicação X é uma parametrização. Além disso, temos a vizinhança coordenada $V \cap S$ de p no subconjunto S . Ademais, veja que a condição i) da Definição 2.1 significa que todas as funções coordenadas de uma determinada aplicação possuem derivadas parciais contínuas de ordem infinita em seu domínio.

Já a condição ii) equivale dizer que, sabendo que X é contínua pela condição i), logo X possui inversa, de modo que $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ é contínua.

E por fim, a condição *iii*) nos garante de fato que para cada $p \in S$, o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de S que passam por p , estabelecem um plano, que vamos chamar de plano tangente $T_p S$.

Para falarmos do plano tangente, primeiramente, vamos definir o vetor tangente a uma superfície S como um vetor que é tangente a uma curva da superfície.

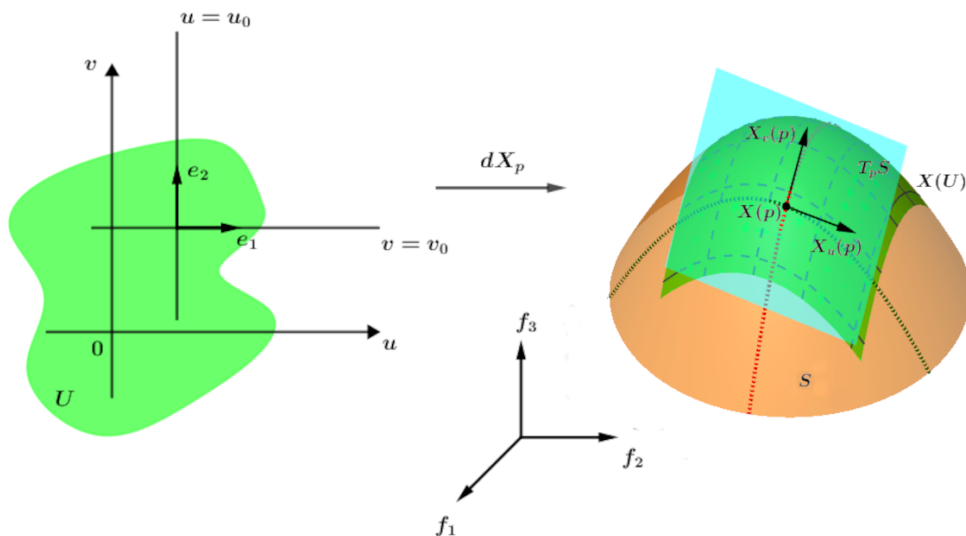
Definição 2.2 *Seja a superfície parametrizada regular $S \subset \mathbb{R}^3$ e $p \in S$. O vetor $w \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a superfície S em um ponto p se $w = \alpha'(0)$, tal que $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ é uma curva parametrizada diferenciável, onde $\alpha(0) = p$.*

Para um ponto $p = (u_0, v_0)$. Os vetores $X_u(p)$ e $X_v(p)$ são os vetores tangentes a S . Sendo eles, vetores tangentes às curvas coordenadas $X(u, v_0)$ e $X(u_0, v)$. Dessa forma, já podemos definir o plano tangente.

Definição 2.3 *O plano tangente a $S \in \mathbb{R}^3$ em um ponto $p = (u_0, v_0)$ é o conjunto de todos os vetores tangentes a S em $p \in S$, denotado por $T_p S$.*

Com o objetivo de aprofundar o item *iii*) da Definição 2.1 de forma mais familiar, iremos calcular a matriz associada a aplicação linear dX_p nas bases canônicas $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de \mathbb{R}^2 com coordenadas (u, v) e $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ e $f_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) .

Figura 2 – Aplicação dX_p .



Fonte: Autor (2021).

Sendo $p = (u_0, v_0)$. O vetor e_1 é o vetor tangente à curva $u \rightarrow (u, v_0)$ no qual a imagem por X é a curva coordenada $u \rightarrow (u, v_0)$:

$$X(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

Essa curva está localizada em S e tem o vetor tangente no ponto $X(p)$, sendo esse o vetor X_u .

De forma análoga, o vetor e_2 é tangente à curva coordenada $v \rightarrow (u_0, v)$ cuja

sua imagem por X é $v \rightarrow (u_0, v)$:

$$X(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)).$$

Essa curva tem o vetor tangente X_v no ponto $X(p)$. Portanto, a matriz da aplicação linear dX_p é:

$$dX_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

Essa matriz associada a dX_p é conhecida como matriz Jacobiana. Vamos denotar os vetores coluna dessa matriz como $X_u(p)$ e $X_v(p)$, sendo

$$X_u(p) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(p), \frac{\partial y}{\partial u}(p), \frac{\partial z}{\partial u}(p) \right),$$

$$X_v(p) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(p), \frac{\partial y}{\partial v}(p), \frac{\partial z}{\partial v}(p) \right).$$

Dessa forma, o item *iii*) da Definição 2.1 nos fala que a aplicação $dX_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva. Isso significa que os vetores coluna da matriz Jacobiana acima são linearmente independentes, ou seja, que o produto vetorial entre $X_u(p)$ e $X_v(p)$ é diferente de zero:

$$X_u(p) \times X_v(p) \neq 0.$$

Ou ainda, que a matriz dX_p tem posto 2, isto é, existe uma submatriz 2×2 da matriz Jacobiana onde um dos determinantes:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}(p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{vmatrix},$$

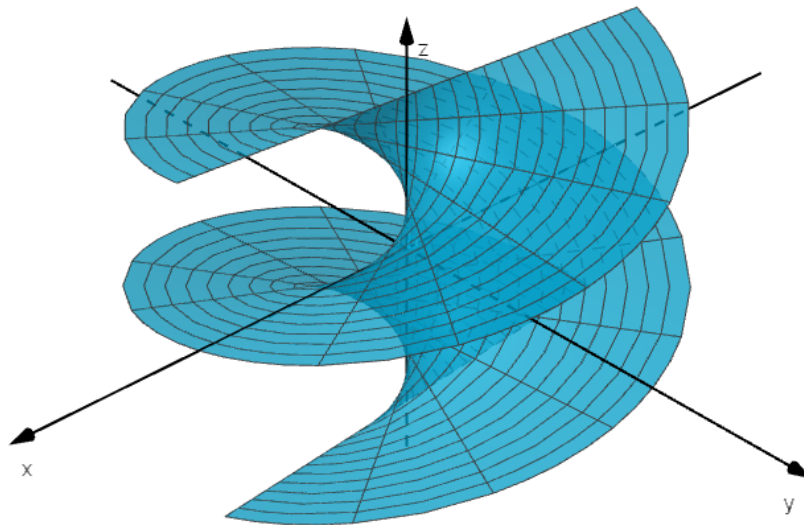
é diferente de zero.

Vejamos à seguir, dois exemplos de superfícies regulares para que possamos fixar as ideias abordadas.

Exemplo 2.1 Considere a hélice circular $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, au), \quad a \neq 0.$$

Por cada ponto da hélice, trace um segmento de reta paralela ao plano xy e que intercepta o eixo Oz . A superfície S que vai ser gerada por esses segmentos de retas é chamada de *Helicóide*.

Figura 3 – Helicóide.

Fonte: Autor (2021).

Irermos mostrar que a aplicação $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow S$ dada por

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au),$$

é uma parametrização para a superfície Helicóide. Perceba que as funções coordenadas $v \cos u$, $v \sin u$ e au possuem derivadas de todas as ordens, satisfazendo então o item i) da Definição 2.1. Além disso, essa aplicação possui as seguintes derivadas parciais:

$$X_u = (-v \cos u, v \sin u, a)$$

$$X_v = (\cos u, \sin u, 0).$$

Onde,

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -v \cos u & v \sin u & a \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix}.$$

Portanto

$$X_u \times X_v = (-a \sin u, a \cos u, -v) \neq 0, \forall (u, v) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\| &= \sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + v^2} \\ &= \sqrt{a^2 + v^2} \neq 0, \end{aligned}$$

devido ao fato que $v^2 \geq 0$ e $a \neq 0$. Com isso, a condição do item iii) da Definição 2.1 é satisfeita.

Agora, para mostrar a validade do item ii) da Definição 2.1, temos que mostrar que a aplicação X é contínua e sua inversa é contínua.

Seja $(x, y, z) = (v \cos u, v \sin u, au)$, logo conseguimos as seguintes relações:

$$u = \frac{z}{a} \quad e \quad v = \sqrt{x^2 + y^2},$$

implicando então que u e v podem ser determinados de forma única. Além do mais, temos:

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{x}{v} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin u &= \frac{y}{v} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

onde $u \in (0, 2\pi)$. Dessa maneira, podemos concluir que a aplicação X é bijetora.

Vamos mostrar agora que X^{-1} é contínua. Note que v é uma função contínua de x e y , logo, também é uma função contínua de (x, y, z) . Observe também que,

$$\cotg \frac{u}{2} = \frac{\cos \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} = \frac{2 \cos \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \frac{\frac{y}{v}}{1 - \frac{x}{v}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$$

resultando em

$$u = 2 \operatorname{arccotg} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - x},$$

sendo uma função contínua em (x, y, z) . Assim, podemos concluir então que X^{-1} é contínua, satisfazendo o item ii) da Definição 2.1. Portanto, a superfície Helicóide é regular.

Vale ressaltar que verificar a regularidade de uma superfície através da Definição 2.1 pode ser uma tarefa bastante desafiadora algumas vezes. Sendo assim, antes de proseguirmos com os exemplos, vamos apresentar um resultado que vai simplificar a nossa maneira de mostrar a regularidade de uma superfície.

Proposição 2.1 *Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável definida em um conjunto aberto $U \in \mathbb{R}^2$, então o gráfico de f , ou melhor, a aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ onde $(u, v) \in U$, é uma superfície regular.*

Demonstração: Seja a aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Note que X é uma parametrização do gráfico, onde a vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico de f . Sendo assim, como f é diferenciável, logo o item i) da Definição 2.1 é verificado.

Para verificar o item iii), basta observar que o determinante da matriz jacobiana da

aplicação X , dado por

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

tem posto 2.

Além disso, veja que cada ponto (x, y, z) do gráfico é a imagem por X de um único ponto $(x, y) = (u, v) \in U$. Dessa forma, temos que X é bijetora, e note então que X^{-1} é a restrição ao gráfico de f da projeção de \mathbb{R}^3 sobre o plano xy , é contínua. Logo chegamos que X^{-1} é contínua, satisfazendo o item *ii*). Portanto, mostramos que o gráfico de f é uma superfície regular. ■

Exemplo 2.2 *O parabolóide hiperbólico dado pela aplicação*

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

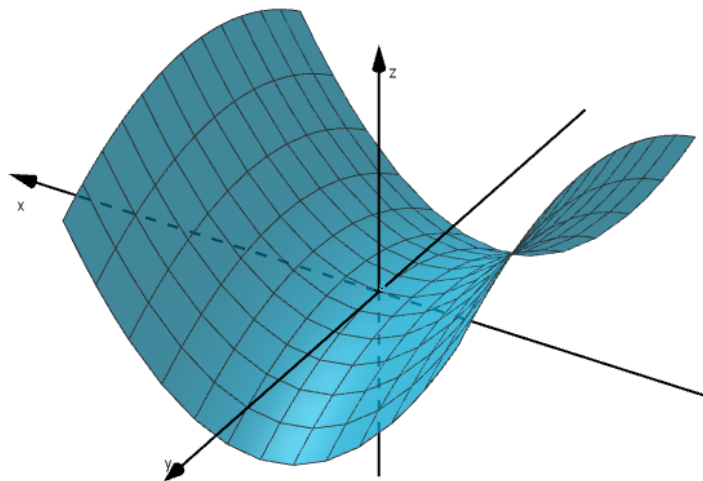
onde a e b são constantes não-nulas positivas, é uma superfície parametrizada regular, onde

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

é o gráfico da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Figura 4 – Parabolóide Hiperbólico.



Fonte: Autor (2021).

Antes de seguir adiante, definiremos uma forma diferente de verificar o item *ii*) da Definição 2.1.

Definição 2.4 Uma aplicação contínua $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um homeomorfismo sobre $X(U)$ se X é injetiva e a inversa $X^{-1} : X(U) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua. Dessa maneira, temos que U e $X(U)$ são conjuntos homeomorfos.

Vamos agora definir um tipo especial de superfície chamado de Superfície de Revolução, no qual nosso estudo estará focado neste trabalho.

Definição 2.5 (Superfícies de Revolução) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana C em torno de um eixo no plano que não encontra a curva. Esse conjunto obtido vai gerar o que vamos chamar de Superfície de Revolução. A curva C é chamada de geratriz de S e o eixo é chamado de eixo de revolução (ou rotação) de S .

Proposição 2.2 Seja C uma curva parametrizada pelo comprimento de arco dada por

$$\alpha(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s)) \text{ com } a < s < b \text{ e } \varphi(s) > 0.$$

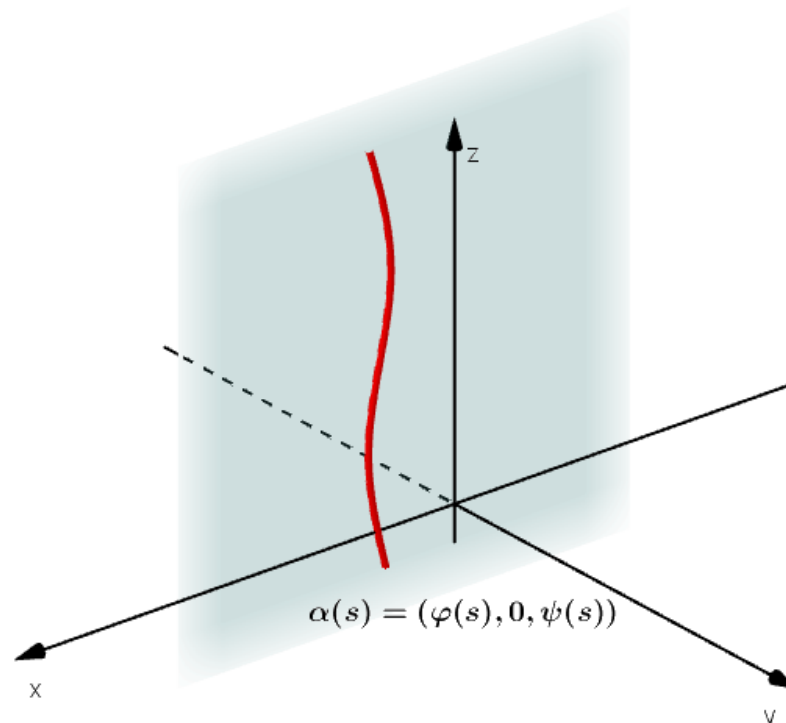
Então a aplicação

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos\theta, \varphi(s)\sin\theta, \psi(s)),$$

do conjunto aberto $U = \{(s, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 < \theta < 2\pi, a < s < b\}$ é uma parametrização para a superfície de revolução S gerada por α .

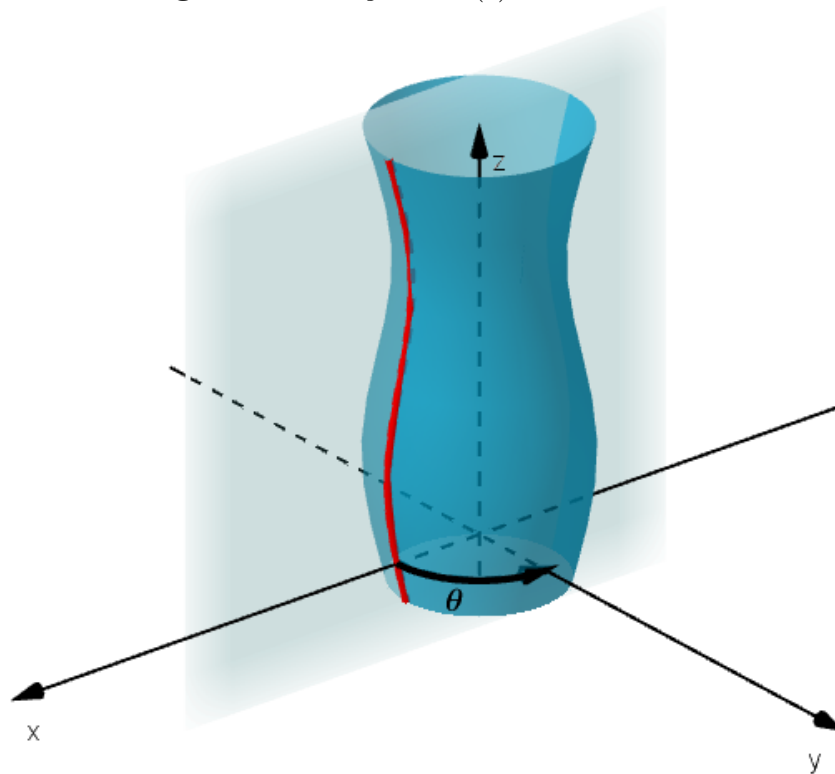
Demonstração: Seja $\alpha(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s))$ com $a < s < b$ e $\varphi(s) > 0$, uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, de classe C^∞ , contida no intervalo no conjunto aberto U . Rotacionando a curva α em torno do eixo de revolução z , obtemos a superfície S . Veja as Figuras 5 e 6:

Figura 5 – Curva $\alpha(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s))$.



Fonte: Autor (2021).

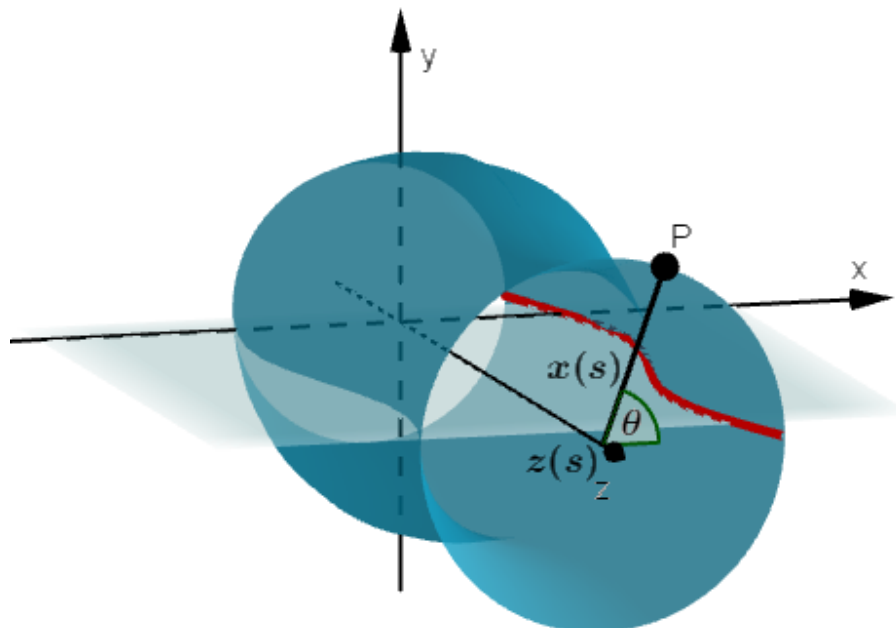
Figura 6 – Rotação de $\alpha(s)$ em torno de z .



Fonte: Autor (2021).

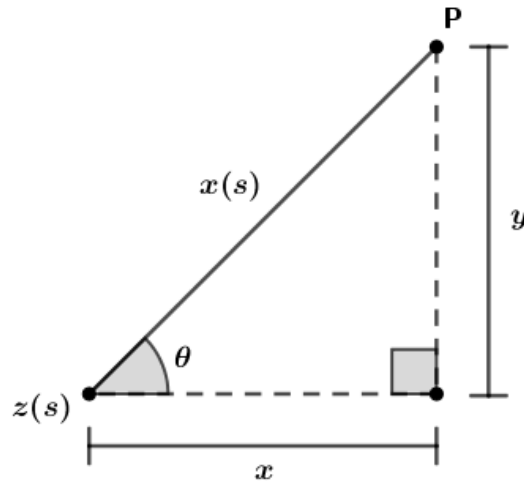
Podemos obter então a parametrização da superfície de revolução gerada S em função de s e $\theta \in \mathbb{R}$. Seja $p = (x, y, z) \in S$ qualquer e considere as relações que aparecem nas Figuras 7 e 8.

Figura 7 – Visão detalhada da rotação de $\alpha(s)$ em torno de z .



Fonte: Autor (2021).

Figura 8 – Relação.



Fonte: Autor (2021).

De acordo com as Figuras 7 e 8, perceba que $x(s) = \varphi(s)$ e $z(s) = \psi(s)$. Além disso, podemos calcular o $\text{sen } \theta$ e $\text{cos } \theta$, obtendo os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{x}{\varphi(s)} \Rightarrow x = \varphi(s) \cos \theta ; \\ \text{sen } \theta &= \frac{y}{\varphi(s)} \Rightarrow y = \varphi(s) \text{sen } \theta .\end{aligned}$$

E dessa maneira, podemos concluir que a parametrização da superfície de revolução é dada por

$$X(s, \theta) = (\varphi(s) \cos \theta, \varphi(s) \text{sen } \theta, \psi(s)).$$

Veja que como as funções $\varphi(s)$ e $\psi(s)$ são diferenciáveis em U , logo o item i) da Definição 2.1 é satisfeito. Além disso, realizando as derivadas parciais em relação a s e θ , temos

$$\begin{aligned}X_s &= (\varphi'(s) \text{sen } \theta, \varphi'(s) \cos \theta, \psi'(s)) \\ X_\theta &= (-\text{sen } \theta \varphi(s), \cos \theta \varphi(s), 0).\end{aligned}$$

Onde o produto vetorial entre X_s e X_θ é dado por

$$X_s \times X_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \varphi'(s) \cos \theta & \varphi'(s) \text{sen } \theta & \psi'(s) \\ -\text{sen } \theta \varphi(s) & \cos \theta \varphi(s) & 0 \end{vmatrix} = (-\varphi(s) \psi'(s) \cos \theta, -\varphi(s) \psi'(s) \text{sen } \theta, \varphi(s) \varphi'(s)).$$

Resultando em

$$\begin{aligned}\|X_s \times X_\theta\| &= \sqrt{[\varphi(s)]^2 [\psi'(s)]^2 \cos^2 \theta + [\varphi(s)]^2 [\psi'(s)]^2 \text{sen}^2 \theta + [\varphi(s) \varphi'(s)]^2} \\ &= \sqrt{[\varphi(s) \psi'(s)]^2 [\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta] + [\varphi(s) \varphi'(s)]^2} \\ &= \sqrt{[\varphi(s)]^2 [[\psi'(s)]^2 + [\varphi'(s)]^2]} \\ &= \sqrt{[\varphi(s)]^2} = \varphi(s) > 0, \forall (s, \theta) \in U.\end{aligned}$$

Dessa forma, o item *iii*) da Definição 2.1 é satisfeito.

Para verificar o item *ii*), vamos mostrar que a aplicação X é um homeomorfismo. Logo, à partir da Definição 2.4, temos que mostrar que a aplicação X é injetora e a sua inversa X^{-1} é contínua.

Primeiramente iremos verificar que X é uma aplicação injetiva. Observe que, de fato, como $(x, y, z) = (\varphi(s)\cos\theta, \varphi(s)\sin\theta, \psi(s))$, então, temos as relações

$$z = \psi(s) \text{ e } \varphi(s) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

E como temos que $(\varphi(s), 0, \psi(s))$ é uma parametrização de C , logo é localmente injetiva, então, podemos determinar s de maneira única. Além disso, veja que θ também pode ser determinado de maneira única, uma vez que

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{\varphi(s)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \text{sen}\theta &= \frac{y}{\varphi(s)} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

com $0 < \theta < 2\pi$. Resultando em X ser injetiva.

Agora, para verificar que a aplicação X^{-1} é contínua, observe que pelo fato de $(\varphi(s), 0, \psi(s))$ ser uma parametrização da curva C , logo s é uma função contínua de z e $\sqrt{x^2 + y^2}$, sendo uma função contínua de (x, y, z) . Basta mostrar agora que θ é uma função contínua de (x, y, z) .

Note que θ pertence ao intervalo aberto $(0, 2\pi)$, então a função $\text{tg}\frac{\theta}{2}$ está definida em todo o intervalo $\theta \in (0, 2\pi)$. Daí vem que,

$$\text{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\text{sen}\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{\frac{y}{\varphi(s)}}{1 + \frac{x}{\varphi(s)}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x};$$

daí,

$$\theta = 2 \text{arccotg} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

e, portanto, θ é uma função contínua de (x, y, z) . Com isso, chegamos a conclusão que a aplicação X^{-1} é contínua, o que satisfaz o item *ii*) da Definição 2.1, finalizando assim a nossa verificação e, portanto, S é uma superfície parametrizada regular. ■

2.2 Formas Fundamentais

Vamos apresentar agora duas formas quadráticas conhecidas como primeira e segunda formas fundamentais. A primeira, que veremos logo adiante, está ligada à estruturas geométricas importantes associadas a uma superfície, tais como o comprimento de curvas, ângulo entre vetores tangentes, cálculo de área. Já a segunda, está ligada com a curvatura das curvas de uma superfície.

Definição 2.6 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $T_p S$ o plano tangente à S no ponto $p \in S$. A forma quadrática I_p em $T_p S$ é definida por*

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

é chamada de primeira forma fundamental de S em $p \in S$.

Vale ressaltar que a primeira forma fundamental é equivalente ao produto interno canônico (usual) de \mathbb{R}^3 diante dos vetores tangentes à superfície S . Denotaremos o produto interno por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Agora vamos expressar a primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$, associada a uma superfície regular S dada pela parametrização $X(u, v)$ em $p \in S$. Seja $w \in T_p S$ o vetor tangente a curva parametrizada $\alpha'(0) = X(u(0), v(0))$, tal que $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$ e $\alpha'(0) = w$. Dessa maneira, usando a fórmula da Definição 2.6, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + \langle X_u, X_v \rangle_p u' v' + \langle X_u, X_v \rangle_p u' v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2 \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle X_u, X_v \rangle_p u' v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2. \end{aligned}$$

Note que estamos calculando os valores das funções em $t = 0$, assim, podemos denotar

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0)_p, \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0)_p, \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0)_p, \end{aligned}$$

resultando em

$$I_p(\alpha'(0)) = E(u')^2 + 2F(u'v') + G(v')^2.$$

Sendo E , F e G chamados de coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ de $T_p S$. Dessa forma, ao fazer o ponto p variar na vizinhança coordenada de $X(u, v)$, logo obtemos as funções diferenciáveis $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$. Além disso, vale ressaltar que, à partir de agora, omitiremos colocar o índice p na indicação do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Convém observar que os coeficientes da primeira forma fundamental satisfazem as seguintes propriedades:

- i) $E(u, v) > 0$ e $G(u, v) > 0$ para todo (u, v) , pois X_u e X_v são vetores não nulos;
- ii) $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$. De fato, seja θ o ângulo entre X_u e X_v , teremos que

$$|X_u \times X_v|^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 \sin^2 \theta,$$

e

$$\langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 \cos^2 \theta.$$

Daí vem que

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2.$$

Portanto

$$EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0$$

$$|X_u \times X_v| = \sqrt{EG - F^2} > 0.$$

Vejamos adiante dois exemplos para fixarmos as ideias.

Exemplo 2.3 *Seja a superfície helicóide (Exemplo 2.1), dada pela parametrização*

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au).$$

Temos as derivadas parciais de primeira ordem

$$X_u = (-v \sin u, v \cos u, a)$$

$$X_v = (\cos u, \sin u, 0).$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = v^2 \sin^2 u + v^2 \cos^2 u + a^2 = v^2 + a^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -v \sin u \cos u + v \sin u \cos u = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

Exemplo 2.4 *Seja S a superfície de revolução dada pela Proposição 2.2, onde $X(s, \theta)$ é uma parametrização de S , tal que*

$$X(s, \theta) = (\varphi(s) \cos \theta, \varphi(s) \sin \theta, \psi(s)),$$

com

$$U = \{(s, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 < \theta < 2\pi, a < s < b\}.$$

Vale observar que supomos anteriormente que sua geratriz está parametrizada pelo comprimento de arco, assim, temos que

$$[\varphi'(s)]^2 + [\psi'(s)]^2 = 1.$$

Calculando as derivadas parciais de primeira ordem, obtemos;

$$X_s = (\varphi'(s) \cos \theta, \varphi'(s) \sin \theta, \psi'(s))$$

$$X_\theta = (-\varphi(s) \sin \theta, \varphi(s) \cos \theta, 0).$$

Para os coeficientes da primeira forma fundamental, temos

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_s, X_s \rangle = [\varphi'(s)]^2 \cos^2 \theta + [\varphi'(s)]^2 \sin^2 \theta + [\psi'(s)]^2 = [\varphi'(s)]^2 + [\psi'(s)]^2 = 1 \\
F &= \langle X_s, X_\theta \rangle = -\varphi'(s)\varphi(s)\sin \theta \cos \theta + \varphi'(s)\varphi(s)\sin \theta \cos \theta = 0 \\
G &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = [\varphi(s)]^2 \sin^2 \theta + [\varphi(s)]^2 \cos^2 \theta = [\varphi(s)]^2.
\end{aligned}$$

Antes de abordarmos sobre a segunda forma quadrática, vamos introduzir algo bastante importante que é o conceito de vetor normal unitário. Assim, seja S uma superfície regular descrita pela parametrização

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S.$$

Dado um ponto $p \in S$, temos que $T_p S$ é o plano tangente gerado pelos vetores X_u e X_v , tangentes a $p \in S$. Dessa forma, existem dois vetores unitários normais a $T_p S$. Logo podemos definir a escolha de um vetor normal unitário associado a cada ponto $p \in X(U)$, dada pela seguinte aplicação

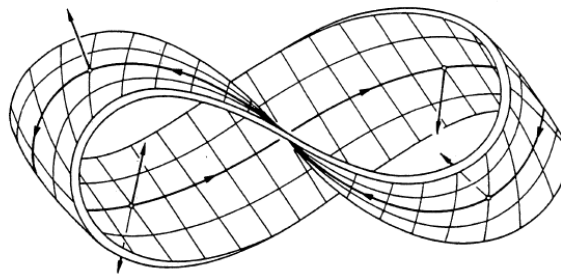
$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(p).$$

Assim, $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que associa um vetor normal unitário $N(p)$ a cada $p \in X(U)$. Vale lembrar que, se $V = X(U) \subset S$ é um conjunto aberto em S , logo, dizemos que $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo diferenciável de vetores normais unitários em V .

Definição 2.7 *Uma superfície regular é orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definidos em toda superfície e, a escolha de tal campo é chamada uma orientação de S .*

É importante destacar que nem toda superfície admite um campo diferenciável de vetores unitários definidos sobre toda a superfície. Um exemplo disso é a faixa de Möbius.

Figura 9 – Faixa de Möbius.



Fonte: Carmo (2008).

Ela não é orientável, pois note que ao percorrermos um vez o círculo médio, o campo normal unitário N retornaria como $-N$, o que seria uma contradição para a continuidade do campo.

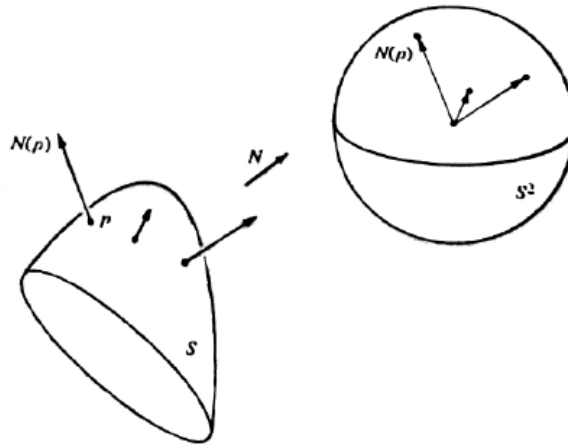
Iremos, à partir de agora, tratar somente sobre superfícies orientáveis. Assim, S denotará uma superfície regular orientável.

Definição 2.8 *Seja uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ com orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária*

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A aplicação $N : S \rightarrow S^2$, assim definida, é chamada de Aplicação de Gauss de S .

Figura 10 – Aplicação de Gauss.



Fonte: Carmo (2008).

A aplicação de Gauss é diferenciável. Assim, a diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$ em $p \in S$ é uma aplicação linear de $T_p S$ em $T_{N(p)} S^2$, pois ambos os planos constituem o mesmo espaço vetorial. Logo, diremos apenas que dN_p é uma aplicação linear de $T_p S$.

Proposição 2.3 *A diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ da aplicação de Gauss é uma aplicação auto-adjunta.*

Demonstração: Sabendo que a aplicação dN_p é linear, basta verificarmos que

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$$

para uma base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p S$, ou seja, que ela é auto-adjunta. Para isso, considere $X(u, v)$ uma parametrização de S em p e $\{X_u, X_v\}$ como a base associada a $T_p S$. Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$. Teremos que

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} N(u(t), v(t)) \right|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0). \end{aligned}$$

Desde que

$$dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) = N_u u'(0) + N_v v'(0),$$

teremos as seguintes relações

$$dN_p(X_u) = N_u$$

e

$$dN_p(X_v) = N_v.$$

Devemos mostrar que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle.$$

Observe que N é ortogonal a X_u e X_v , resultando em

$$\langle N, X_u \rangle = 0$$

e

$$\langle N, X_v \rangle = 0.$$

Agora, derivando $\langle N, X_u \rangle = 0$ e $\langle N, X_v \rangle = 0$ respectivamente em relação a v e u , temos

$$\langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0,$$

$$\langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0.$$

Assim,

$$\langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle,$$

$$\langle N_u, X_v \rangle = -\langle N, X_{vu} \rangle.$$

Portanto

$$\langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle.$$

Assim, temos

$$\langle dN_p(X_u), X_v \rangle = \langle X_u, dN_p(X_v) \rangle.$$

■

Como consequência do resultado anterior, dada a aplicação auto-adjunta $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, logo podemos associar à dN_p uma forma quadrática Q em $T_p S$, dada por

$$Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle, v \in T_p S.$$

Definição 2.9 A forma quadrática II_p , definida em $T_p S$ por

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle,$$

é chamada a segunda forma fundamental de S em p .

Vamos calcular agora os coeficientes da segunda forma fundamental. Para isso, seja $X(u, v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ da superfície S com $X(q) = p$ e, seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , tal que $\alpha(0) = p$. Observe que o vetor tangente de $\alpha(t)$ em p é $\alpha'(t) = X_u(q)u'(t) + X_v(q)v'(t)$. Assim, restringindo o vetor normal N à curva $\alpha(t)$, obtemos

$$N(t) = N(\alpha(t)) = N(u(t), v(t)).$$

E como $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$, logo

$$\begin{aligned} N'(t) &= dN_p(\alpha'(t)) \\ dN_p(\alpha'(t)) &= N_u(q)u'(t) + N_v(q)v'(t). \end{aligned}$$

À partir de agora, vamos adotar uma notação mais simples, de modo todas as funções que aparecerem abaixo vão indicar seus valores em p . Dito isto, como N_u e N_v pertencem a T_pS , logo podemos escrevemos como uma combinação linear, tal que

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$$

e

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v.$$

Daí vem que,

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v' \\ &= a_{11}X_uu' + a_{21}X_vu' + a_{12}X_uv' + a_{22}X_vv' \\ &= (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v. \end{aligned}$$

Reescrevendo na forma matricial o resultado acima, temos

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Dessa maneira, temos que, na base $\{X_u, X_v\}$, a aplicação dN será dada pela matriz a_{ij} , $i, j = 1, 2$. Agora, calculando a segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$, aplicada no ponto p segundo α' , temos

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_uu' + N_vv', X_uu' + X_vv' \rangle \\ &= -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - (\langle N_u, X_v \rangle + \langle N_v, X_u \rangle) (u'v') - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2. \end{aligned}$$

Dado que

$$\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0,$$

derivando a expressão acima em relação a u e v , temos

$$\begin{aligned} \langle N_u, X_u \rangle &= -\langle N, X_{uu} \rangle = -e, \\ \langle N_v, X_u \rangle &= -\langle N, X_{uv} \rangle = -f, \\ \langle N_u, X_v \rangle &= -\langle N, X_{vu} \rangle = -f, \\ \langle N_v, X_v \rangle &= -\langle N, X_{vv} \rangle = -g. \end{aligned}$$

Dessa maneira, a expressão para $II_p(\alpha')$ se torna

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2,$$

sendo e , f e g os coeficientes da segunda forma fundamental.

Exemplo 2.5 Vamos agora obter os coeficientes da segunda forma fundamental para a superfície de revolução usada no Exemplo 2.4. Seja S a superfície de revolução e $X(s, \theta)$ a parametrização de S dada por

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos \theta, \varphi(s)\sen \theta, \psi(s)).$$

Temos que

$$\begin{aligned} X_s &= (\varphi'(s)\cos \theta, \varphi'(s)\sen \theta, \psi'(s)), \\ X_\theta &= (-\varphi(s)\sen \theta, \varphi(s)\cos \theta, 0), \\ X_{ss} &= (\varphi''(s)\cos \theta, \varphi''(s)\sen \theta, \psi''(s)), \\ X_{s\theta} &= (-\varphi'(s)\sen \theta, \varphi'(s)\cos \theta, 0), \\ X_{\theta\theta} &= (-\varphi(s)\cos \theta, -\varphi(s)\sen \theta, 0). \end{aligned}$$

Lembrando que como já calculamos no Exemplo 2.4, temos que os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E &= \langle X_s, X_s \rangle = 1 \\ F &= \langle X_s, X_\theta \rangle = 0 \\ G &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = [\varphi(s)]^2. \end{aligned}$$

Antes de calcularmos os coeficientes da segunda forma fundamental, precisamos obter o vetor normal unitário, dado por

$$N = \frac{X_s \times X_\theta}{|X_s \times X_\theta|},$$

lembrando que

$$|X_s \times X_\theta| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Dessa forma, temos que

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\begin{vmatrix} \varphi'(s)\sen \theta & \psi'(s) \\ \varphi(s)\cos \theta & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \varphi'(s)\cos \theta & \psi'(s) \\ -\varphi(s)\sen \theta & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \varphi'(s)\cos \theta & \varphi'(s)\sen \theta \\ -\varphi(s)\sen \theta & \varphi(s)\cos \theta \end{vmatrix} \right).$$

Resultando em

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} (-\varphi(s)\psi'(s)\cos \theta, -\varphi(s)\psi'(s)\sen \theta, \varphi(s)\varphi'(s)) \\ &= \frac{1}{\varphi(s)} \varphi(s) (-\psi'(s)\cos \theta, -\psi'(s)\sen \theta, \varphi'(s)) \\ &= (-\psi'(s)\cos \theta, -\psi'(s)\sen \theta, \varphi'(s)). \end{aligned}$$

Assim, para os coeficientes da segunda forma fundamental, obtemos:

$$\begin{aligned}
 e &= \langle X_{ss}, N \rangle = -\varphi''(s)\psi(s)\cos^2\theta - \varphi''(s)\psi'(s)\sin^2\theta + \varphi'(s)\psi''(s) \\
 &= \varphi'(s)\psi''(s) - \varphi''(s)\psi(s), \\
 f &= \langle X_{s\theta}, N \rangle = \varphi(s)\psi'(s)\sin\theta\cos\theta - \varphi(s)\psi'(s)\sin\theta\cos\theta = 0, \\
 g &= \langle X_{\theta\theta}, N \rangle = \varphi(s)\psi'(s)\cos^2\theta + \varphi(s)\psi'(s)\sin^2\theta = \varphi(s)\psi'(s).
 \end{aligned}$$

Logo, temos os coeficientes da segunda forma fundamental para a superfície de revolução. ■

2.3 Curvaturas

Quando estudamos sobre curvas, aprendemos que a taxa de variação da reta tangente em uma curva C é o que determina a curvatura de C . Nesta seção, vamos tratar de entender essa ideia aplicada nas superfícies regulares, no qual, pode-se entender como o quanto uma superfície S se afasta do plano tangente T_pS , em uma vizinhança de $p \in S$. Isso é equivalente a calcular a taxa de variação dada pela diferencial da aplicação de Gauss.

Dada a diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ da aplicação de Gauss e a base w_1, w_2 de T_pS de autovetores de dN_p , vimos na seção 2.2 que podemos associar uma matriz a aplicação dN_p relacionada a essa base, onde, neste caso, será dada por uma matriz diagonal, sendo esses elementos da diagonal, os autovalores associados a w_1 e w_2 .

Definição 2.10 *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. A curvatura Gaussiana K de S em p , é dada pelo determinante de dN_p .*

Podemos expressar a curvatura Gaussiana K em relação aos termos da primeira e segunda formas fundamentais. Como vimos na Definição 2.9, temos que N_u e N_v pertencem ao plano tangente T_pS e são escritos como

$$\begin{aligned}
 N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\
 N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v.
 \end{aligned}$$

Logo podemos escrever os coeficientes da segunda forma fundamental como

$$\begin{aligned}
 -e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}\langle X_u, X_u \rangle + a_{21}\langle X_v, X_u \rangle, \\
 -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}\langle X_u, X_v \rangle + a_{21}\langle X_v, X_v \rangle, \\
 -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}\langle X_u, X_u \rangle + a_{22}\langle X_v, X_u \rangle, \\
 -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}\langle X_u, X_v \rangle + a_{22}\langle X_v, X_v \rangle.
 \end{aligned}$$

Assim, em termos da primeira forma fundamental, temos que

$$\begin{aligned}
-e &= a_{11}E + a_{21}F, \\
-f &= a_{11}F + a_{21}G, \\
-f &= a_{12}E + a_{22}F, \\
-g &= a_{12}F + a_{22}G.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, podemos reescrever essas relações na forma matricial, expressas por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Vamos encontrar os valores para os termos a_{ij} , $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, de modo que, primeiramente precisaremos obter a matriz inversa da matriz à extrema direita da equação acima. Observe que o determinante dessa matriz é diferente de zero, pois caso contrário, a área da superfície S seria nula. Assim, dada uma matriz invertível A , a sua inversa A^{-1} é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A')^t,$$

onde $(A')^t$ representa a transposta da matriz dos cofatores de A . À partir disso, obtemos então que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Destacando a matriz a_{ij} , $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, temos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Onde,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & -eF + fE \\ fG - gF & -fF + gE \end{pmatrix}.$$

Podemos agora, obter as expressões para os coeficientes (a_{ij}) da matriz de dN na base $\{X_u, X_v\}$, no qual são dados por

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{21} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\
a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

Como bem definimos a curvatura Gaussiana sendo $K = \det(dN_p)$, temos então que

$$K = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Aplicando os resultados obtidos para os coeficientes (a_{ij}) , obtemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{(fF - eG)(fF - gE)}{(EG - F^2)^2} - \frac{(eF - fE)(gF - fG)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{f^2F^2 - fFgE - eGfF + eGgE - geF^2 + gFfE + fGeF - f^2GE}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{f^2F^2 + eGgE - geF^2 - f^2GE}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{(EG - F^2)(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Portando, a curvatura Gaussiana é dada pela expressão

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

A curvatura Gaussiana K não depende da parametrização $X(u, v)$ da superfície. Veja que K é o determinante da matriz (a_{ij}) e, uma outra parametrização produzirá uma matriz semelhante a (a_{ij}) .

Vale ressaltar que existem outras maneiras de se definir a curvatura Gaussiana e mostrar que é equivalente à definição dada nesse trabalho. Um exemplo disso seria através das curvaturas principais. Para maiores detalhes, veja (CARMO, 2008).

Exemplo 2.6 *Vamos calcular a curvatura Gaussiana de uma superfície da revolução dada no Exemplo 2.4. Seja S a superfície de revolução e $X(s, \theta)$ a parametrização de S dada por*

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos\theta, \varphi(s)\sin\theta, \psi(s)).$$

Vale lembrar que nos Exemplos 2.4 e 2.5, calculamos os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Assim, apresentaremos somente os resultados, sendo eles:

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= 0, \\ G &= [\varphi'(s)]^2, \\ e &= \varphi'(s)\psi''(s) - \varphi''(s)\psi(s), \\ f &= 0, \\ g &= \varphi(s)\psi'(s). \end{aligned}$$

Onde E , F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental. E e, f e g , os

coeficientes da segunda forma fundamental. Veja que como

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

temos que

$$K = \frac{\varphi(s)\psi'(s)(\psi''(s)\varphi'(s) - \psi'(s)\varphi''(s))}{[\varphi(s)]^2} = \frac{\psi'(s)(\psi''(s)\varphi'(s) - \psi'(s)\varphi''(s))}{\varphi(s)}.$$

Lembrando que temos $[\varphi'(s)]^2 + [\psi'(s)]^2 = 1$. Assim, diferenciando implicitamente essa expressão, obtemos

$$2\varphi'(s)\varphi''(s) + 2\psi'(s)\psi''(s) = 0,$$

isto é,

$$\varphi'(s)\varphi''(s) = -\psi'(s)\psi''(s).$$

Portanto, aplicando esse resultado em K , temos uma nova expressão equivalente para a curvatura Gaussiana da superfície de revolução, dada por

$$K = \frac{-[\varphi'(s)]^2\varphi''(s) - \varphi''(s)[\psi'(s)]^2}{\varphi(s)} = -\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}.$$

■

2.4 Símbolos de Christoffel

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização local compatível com a orientação de S . Assim é possível associar a cada ponto $X(U)$ um triedro natural obtido pelos vetores X_u , X_v e N . Dessa forma, podemos expressar a derivada de cada um desses vetores da base $\{X_u, X_v, N\}$ em relação a u e v como combinação linear destes vetores, ou seja, existem $\Gamma_{ij}^k \in \mathbb{R}$, $i, j, k = 1, 2$ e $L_1, L_2, \bar{L}_2, L_3 \in \mathbb{R}$, tais que

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N, \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v, \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v. \end{aligned} \tag{1}$$

Onde os a_{ij} , $i, j = 1, 2$ são entradas da matriz de dN já calculados na seção 2.3. Os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j = 1, 2$ são chamados Símbolos de Christoffel de S na parametrização

de X . Logo, como $X_{uv} = X_{vu}$, podemos concluir que $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ e $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$, isto é, os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores. Note que

$$\begin{aligned}\langle X_{uu}, N \rangle &= e = \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, N \rangle = L_1, \\ \langle X_{uv}, N \rangle &= f = \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, N \rangle = L_2, \\ \langle X_{vv}, N \rangle &= g = \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, N \rangle = L_3.\end{aligned}$$

Logo, novamente de $X_{uv} = X_{vu}$, vem que $L_2 = \bar{L}_2$.

Proposição 2.4 *Os Símbolos de Christoffel podem ser escritos em relação aos coeficientes da primeira forma fundamental, da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

Demonstração: Tomando o produto interno das primeiras quatro relações em (1) com X_u e X_v , obtemos

$$\begin{aligned}\langle X_{uu}, X_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_u \rangle + e \langle N, X_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F, \\ \langle X_{uu}, X_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_v \rangle + e \langle N, X_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G, \\ \langle X_{uv}, X_u \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle X_v, X_u \rangle + f \langle N, X_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F, \\ \langle X_{uv}, X_v \rangle &= \Gamma_{12}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle X_v, X_v \rangle + f \langle N, X_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G, \\ \langle X_{vv}, X_u \rangle &= \Gamma_{22}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle X_v, X_u \rangle + g \langle N, X_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F, \\ \langle X_{vv}, X_v \rangle &= \Gamma_{22}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle X_v, X_v \rangle + g \langle N, X_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G.\end{aligned}\tag{2}$$

Observe que derivando $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$ em relação à u e v , obtemos

$$\begin{aligned}E_u &= \langle X_{uu}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uu} \rangle = 2\langle X_{uu}, X_u \rangle, \\ E_v &= \langle X_{uv}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle = 2\langle X_{uv}, X_u \rangle, \\ F_u &= \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vu} \rangle, \\ F_v &= \langle X_{uv}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle, \\ G_u &= \langle X_{vu}, X_v \rangle + \langle X_v, X_{vu} \rangle = 2\langle X_{uv}, X_v \rangle, \\ G_v &= \langle X_{vv}, X_v \rangle + \langle X_v, X_{vv} \rangle = 2\langle X_{vv}, X_v \rangle.\end{aligned}\tag{3}$$

Veja que das duas primeiras e das duas últimas equações de (3), temos

$$\begin{aligned}
\langle X_{uu}, X_u \rangle &= \frac{1}{2}E_u, \\
\langle X_{uv}, X_u \rangle &= \frac{1}{2}E_v, \\
\langle X_{uv}, X_v \rangle &= \frac{1}{2}G_u, \\
\langle X_{vv}, X_v \rangle &= \frac{1}{2}G_v.
\end{aligned}$$

Aplicando esses resultados acima, nas equações de (3), temos os seguintes sistemas lineares

$$\begin{cases}
\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2}E_u \\
\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2}E_v
\end{cases},$$

$$\begin{cases}
\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2}E_v \\
\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = F_u - \frac{1}{2}G_u
\end{cases}, \tag{4}$$

$$\begin{cases}
\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2}G_u \\
\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2}G_v
\end{cases}.$$

Note que a matriz associada a cada um destes sistemas é $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$, cujo o determinante é dado por $EG - F^2$ e, além disso, $EG - F^2 = |X_u \times X_v|^2 \neq 0$, onde X é uma parametrização de uma superfície regular S . Dessa forma, aplicando a regra de Cramer para cada sistema em (4), temos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{\frac{1}{2}GE_u - F(F_u - \frac{1}{2}E_v)}{EG - F^2} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{E(F_u - \frac{1}{2}E_v) - \frac{1}{2}FE_u}{EG - F^2} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{\frac{1}{2}GE_v - \frac{1}{2}FG_u}{EG - F^2} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} = \Gamma_{21}^1, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{\frac{1}{2}EG_u - \frac{1}{2}FE_v}{EG - F^2} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} = \Gamma_{21}^2, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{G(F_v - \frac{1}{2}G_u) - \frac{1}{2}FG_v}{EG - F^2} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{\frac{1}{2}EG_v - F(F_v - \frac{1}{2}G_u)}{EG - F^2} = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}$$

Observação 2.1 Vale ressaltar que o fato de podermos resolver os sistemas em (4) e encontrar os símbolos de Christoffel em relação aos coeficientes da primeira forma fundamental e suas respectivas derivadas, nos permite afirmar que os conceitos geométricos e as propriedades em termos dos símbolos de Christoffel são invariantes por isometrias. ■

Exemplo 2.7 (Símbolos de Christoffel para uma Superfícies de Revolução). Como já vimos no Exemplo 2.4, a superfície de revolução parametrizada por

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos \theta, \varphi(s)\sen \theta, \psi(s)),$$

tem os seguintes coeficientes da primeira forma fundamental

$$\begin{aligned} E &= 1, \\ F &= 0, \\ G &= [\varphi(s)]^2. \end{aligned}$$

Logo

$$EG - F^2 = [\varphi(s)]^2.$$

Derivando os coeficientes E , F , e G em relação à s e θ , obtemos

$$\begin{aligned} E_s &= 0, & E_\theta &= 0, \\ F_s &= 0, & F_\theta &= 0, \\ G_s &= 2\varphi(s)\varphi'(s), & G_\theta &= 0. \end{aligned}$$

Dessa maneira, já podemos calcular os símbolos de Christoffel através dos resultados obtidos na Proposição 2.4. Rapidamente, já conseguimos observar que

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

E para o restante, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{2\varphi(s)\varphi'(s)}{2[\varphi(s)]^2} = \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-2[\varphi(s)]^3\varphi'(s)}{2[\varphi(s)]^2} = -\varphi(s)\varphi'(s). \end{aligned}$$

Dessa maneira, conseguimos determinar os símbolos de Christoffel para uma superfície de revolução. ■

3 CAMPOS DE VETORES CONFORMES FECHADOS

Neste capítulo, denotaremos por $C^\infty(S)$, o conjunto de todas as funções "suaves" de S que possuem derivadas de todas as ordens em seu domínio, ou seja, são diferenciáveis.

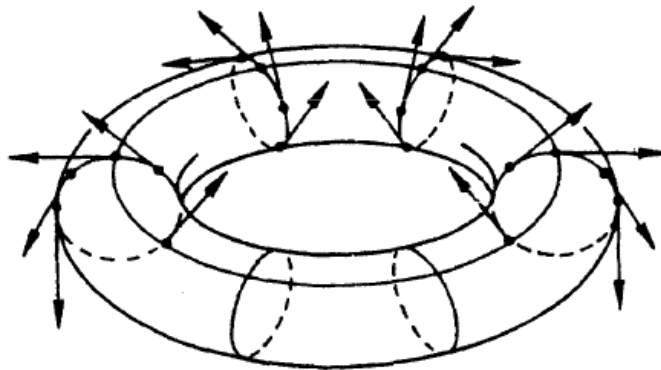
O objetivo deste capítulo é classificar e descrever um tipo especial de campo de vetores na superfície de revolução. Mas para isso, precisamos primeiramente compreender o que é, de fato, um campo de vetores, logo, segue a seguinte definição:

Definição 3.1 *Um campo de vetores em um conjunto aberto $U \subset S$ de uma superfície regular S é uma correspondência w que associa a cada ponto $p \in U$ um vetor $w(p) \in T_p S$.*

O campo de vetores é diferenciável em $p = (u, v)$ se, para alguma parametrização $X(u, v)$ em p , as componentes (funções) $a(u, v)$ e $b(u, v)$ de $w(p) = a(u, v)X_u + b(u, v)X_v$ na base $\{X_u, X_v\}$ são funções diferenciáveis em p . O campo de vetores w é diferenciável em U se é diferenciável para todo $p \in U$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(S)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis sobre S .

Exemplo 3.1 *Um campo de vetores no toro de revolução T pode ser obtido parametrizando os meridianos de T pelo comprimento de arco e definindo $w(p)$ como vetor velocidade do meridiano passando por p , de modo que $|w(p)| = 1$.*

Figura 11 – Campo de vetores no Toro de revolução.



Fonte: Carmo (2008).

Antes de definirmos o que é um campo de vetores conforme fechado, precisamos entender alguns conceitos. Um deles, é o conceito de derivada covariante sobre uma superfície, mas para isso, vamos entender como funciona a derivada covariante em \mathbb{R}^3 .

3.1 Derivada Covariante

Esta seção tem como principal referência (O'NEILL, 2006). A derivada covariante surge da necessidade de derivar campos de vetores, logo, segue a seguinte definição.

Definição 3.2 Seja W um campo de vetores em \mathbb{R}^3 , e seja v um campo de vetores tangente em \mathbb{R}^3 no ponto p . Então a derivada covariante de W com respeito ao vetor v é

$$\nabla_v W = W(p + tv)'(0) \quad (5)$$

no ponto p .

Observação 3.1 $\nabla_v W$ mede a taxa inicial de mudança de $W(p)$ à medida que p se move na direção de v .

Exemplo 3.2 Considere $W = x^2 e_1 + y z e_3$, e $v = (-1, 0, 2)$ em $p = (2, 1, 0)$. Então

$$p + tv = (2 - t, 1, 2t),$$

assim

$$W(p + tv) = (2 - t)^2 e_1 + 2t e_3,$$

de modo que, estritamente falando, e_1 e e_3 também são avaliados em $p + tv$. Portanto, com

$$\begin{aligned} W(p + tv)'(t) &= 2(2 - t)(-1)e_1 + 2e_3 \\ &= -2(2 - t)e_1 + 2e_3, \end{aligned}$$

logo teremos que

$$\nabla_v W = W(p + tv)'(0) = -4e_1(p) + 2e_3(p).$$

■

Lema 3.1 Se $W = \sum_{i=1}^3 w_i e_i$ é um campo de vetores em \mathbb{R}^3 , e v é um vetor em p , então

$$\nabla_v W = \sum_{i=1}^3 v(w_i) e_i(p),$$

onde $v(w_i)$ é a derivada direcional de w_i na direção de v .

Demonstração: Temos

$$W(p + tv) = \sum_{i=1}^3 w_i(p + tv) e_i(p + tv)$$

para a restrição de W diante da curva $t \rightarrow p + tv$. Para diferenciar tal campo vetorial em $t = 0$, basta simplesmente diferenciar suas coordenadas Euclidianas em $t = 0$. Mas, pela derivada direcional usual, temos que a derivada de $w_i(p + tv)$ em $t = 0$ é precisamente $v(w_i)$. Portanto

$$\nabla_v W = W(p + tv)'(0) = \sum_{i=1}^3 v(w_i) e_i(p).$$

■

Em resumo, para aplicar ∇_v para um campo de vetores, basta aplicar v em

suas coordenadas Euclidianas. Assim, a linearidade e as propriedades Leibnizianas da derivada covariante segue facilmente das propriedades da derivada direcional usual.

Teorema 3.1 *Sejam v e w vetores de \mathbb{R}^3 em p , e sejam Y e Z campos vetoriais em \mathbb{R}^3 . Então para os números a, b e funções f , temos*

1. $\nabla_{av+bw}Y = a\nabla_vY + b\nabla_wY$;
2. $\nabla_v(aY + bZ) = a\nabla_vY + b\nabla_vZ$;
3. $\nabla_v(fY) = v(f)Y(p) + f(p)\nabla_vY$;
4. $v(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_vY, Z(p) \rangle + \langle Y(p), \nabla_vZ \rangle$;

Demonstração: Para demonstrar o primeiro item, basta tomar

$$Y = \sum_{i=1}^3 y_i e_i,$$

logo, através das propriedades da derivada direcional usual, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_{av+bw}Y &= \sum_{i=1}^3 (av + bw)(y_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (av(y_i) + bw(y_i)) e_i \\ &= a \sum_{i=1}^3 v(y_i) e_i + b \sum_{i=1}^3 w(y_i) e_i. \end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 3.1, segue que

$$\nabla_{av+bw}Y = a\nabla_vY + b\nabla_wY.$$

Para o segundo item, tomamos

$$Y = \sum_{i=1}^3 y_i e_i \text{ e } Z = \sum_{i=1}^3 z_i e_i,$$

dessa forma, pelas propriedades da derivada direcional usual,

$$\begin{aligned} \nabla_v(aY + bZ) &= \sum_{i=1}^3 v(ay_i + bz_i) e_i \\ &= \sum_{i=1}^3 (av(y_i) + bv(z_i)) e_i \\ &= \sum_{i=1}^3 av(y_i) e_i + \sum_{i=1}^3 bv(z_i) e_i \\ &= a \sum_{i=1}^3 v(y_i) e_i + b \sum_{i=1}^3 v(z_i) e_i. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1, podemos concluir que

$$\nabla_v(aY + bZ) = a\nabla_vY + b\nabla_vZ.$$

Para o terceiro item, tomamos

$$Y = \sum_{i=3}^3 y_i e_i.$$

Logo, pelas propriedades da derivada direcional usual, tiramos que

$$\begin{aligned} \nabla_v(fY) &= v\left(\sum_{i=3}^3 f y_i\right) \\ &= \sum_{i=3}^3 v(f)y_i(p) + \sum_{i=3}^3 f(p)v(y_i). \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1, segue

$$\nabla_v(fY) = v(f)Y(p) + f(p)\nabla_vY.$$

Por fim, para o quarto e último item, tomamos

$$Y = \sum_{i=1}^3 y_i e_i \text{ e } Z = \sum_{i=1}^3 z_i e_i,$$

logo

$$\langle Y, Z \rangle = \sum_{i=1}^3 y_i z_i.$$

Assim, pelas propriedades da derivada direcional usual,

$$\begin{aligned} v(\langle Y, Z \rangle) &= v\left(\sum_{i=1}^3 y_i z_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^3 v(y_i)z_i(p) + \sum_{i=1}^3 y_i(p)v(z_i). \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 3.1, concluímos que

$$v(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_v Y, Z(p) \rangle + \langle Y(p), \nabla_v Z \rangle.$$

■

Através do princípio pontual, podemos tomar a derivada covariante de um campo de vetores W em relação ao campo de vetores V , em vez de um vetor único vetor v . O resultado disso é o campo vetores $\nabla_V W$, cujo o valor em cada ponto p é $\nabla_{V(p)} W$. Dessa forma, $\nabla_V W$ consiste em todas as derivadas covariantes de W com respeito aos vetores de V . Assim, segue do Lema 3.1 que se

$$W = \sum_{i=1}^3 w_i e_i,$$

então

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^3 V(w_i) e_i.$$

Os cálculos de coordenadas são fáceis de realizar, basta utilizar a identidade básica

$$e_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Exemplo 3.3 *Suponha $V = (y - x)e_1 + xye_3$ e $W = x^2e_1 + yze_3$. Para calcular $\nabla_V W$, façamos*

$$\begin{aligned} V(x^2) &= (y - x)e_1(x^2) + xye_3(x^2) = 2x(y - x), \\ V(yz) &= (y - x)e_1(yz) + xye_3(yz) = xy^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_V W = 2x(y - x)e_1 + xy^2e_3. \quad \blacksquare$$

Veja que para a derivada covariante $\nabla_V W$ expressa inteiramente em termos de campos de vetores, as propriedades do Teorema 3.1 levam ao seguinte formato.

Corolário 3.1 *Seja V, W, Y e Z campos de vetores em \mathbb{R}^3 . Então*

1. $\nabla_{fV+gW} Y = f\nabla_V Y + g\nabla_W Y$, para todas as funções f e g .
2. $\nabla_V(aY + bZ) = a\nabla_V Y + b\nabla_V Z$, para todos os números a e b .
3. $\nabla_V(fY) = V(f)Y + f\nabla_V Y$, para todas as funções f .
4. $V(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_V Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_V Z \rangle$.

Note que $\nabla_V Y$ não se comporta simetricamente em relação a V e Y . Isso é de se esperar, pois é Y que está sendo diferenciado, enquanto o papel de V é meramente algébrico. Em particular, $\nabla_{fV} Y = f\nabla_V Y$, mas $\nabla_V(fY) \neq f\nabla_V Y$, ou seja, há um termo extra da diferenciação de f por V .

Podemos agora definir a derivada covariante em uma superfície S para campos de vetores tangentes à S .

Definição 3.3 *Sejam V e W campos de vetores tangentes em uma superfície S . Denotaremos por (D) , a derivada covariante em S , sendo*

$$D_V W = \nabla_V W - \langle \nabla_V W, N \rangle N.$$

onde N é o vetor normal unitário.

Note que a derivada covariante (D) é a parte tangente da derivada covariante de \mathbb{R}^3 . Logo (D) satisfaz as seguintes propriedades:

1. $D_{fY+gZ} X = fD_Y X + gD_Z X, \forall f, g \in C^\infty(S)$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$;
2. $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$;
3. $D_{fY} X = fD_Y X + X(f)Y, \forall f \in C^\infty(S)$ e $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, onde $X(f) = df(X) = \langle \nabla f, X \rangle$.

Para maiores detalhes, ver a seção 7.3 de (O'NEILL, 2006).

3.2 Campos de Vetores Conformes Fechados

Definição 3.4 *Um campo de vetores $\xi \neq 0$ em $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito conforme fechado se*

$$D_Y \xi = \eta Y, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(S), \quad (6)$$

onde η é uma função suave em S chamada de fator conforme.

Definição 3.5 *Seja ξ um campo de vetores conforme fechado em S com fator conforme η .*

1. *Se $\eta \neq 0$ for constante, então o campo ξ é dito Homotético.*
2. *Se $\eta = 0$, então o campo ξ é dito Killing.*

Exemplo 3.4 *Vamos tomar como exemplo a superfície de revolução S do Exemplo 2.4, com a paramentrização dada por*

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos \theta, \varphi(s)\sen \theta, \psi(s)).$$

O campo $\xi = \varphi(s)X_s$ é um campo de vetores conformes fechado.

De fato, primeiramente, pelas propriedades da derivada covariante, temos que

$$D_{X_s} \xi = D_{X_s}(\varphi(s)X_s) = \varphi(s)D_{X_s}X_s + X_s(\varphi(s))X_s \quad (7)$$

e

$$D_{X_\theta} \xi = D_{X_\theta}(\varphi(s)X_s) = \varphi(s)D_{X_\theta}X_s + X_\theta(\varphi(s))X_s. \quad (8)$$

Vale observar que as derivadas covariantes $D_{X_s}X_s$, $D_{X_s}X_\theta$ e $D_{X_\theta}X_\theta$ são as partes tangentes de X_{ss} , $X_{s\theta}$ e $X_{\theta\theta}$, respectivamente, isto é, podemos escreve-las como

$$D_{X_s}X_s = \Gamma_{11}^1 X_s + \Gamma_{11}^2 X_\theta, \quad (9)$$

$$D_{X_s}X_\theta = D_{X_\theta}X_s = \Gamma_{12}^1 X_s + \Gamma_{12}^2 X_\theta, \quad (10)$$

$$D_{X_\theta}X_\theta = \Gamma_{22}^1 X_s + \Gamma_{22}^2 X_\theta. \quad (11)$$

Aplicando os resultados para os símbolos de Christoffel obtidos no Exemplo 2.7 nas equações (9),(10) e (11), obtemos

$$\begin{aligned} D_{X_s}X_s &= 0X_s + 0X_\theta = 0, \\ D_{X_s}X_\theta &= D_{X_\theta}X_s = 0X_s + \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}X_\theta = \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}X_\theta, \\ D_{X_\theta}X_\theta &= -\varphi(s)\varphi'(s)X_s + 0X_\theta = -\varphi(s)\varphi'(s)X_s. \end{aligned} \quad (12)$$

Assim, substituindo (12) em (7) e (8), obtemos

$$D_{X_s}\xi = \varphi(s)0 + \varphi'(s)X_s = \varphi'(s)X_s, \quad (13)$$

$$D_{X_\theta}\xi = \varphi(s)\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}X_\theta + 0X_s = \varphi'(s)X_\theta. \quad (14)$$

Note que $X_s(\varphi(s))$ equivale à $\varphi'(s)$, pois significa derivar $\varphi(s)$ na direção do campo X_s . Já $X_\theta(\varphi(s)) = 0$, pois a derivada de $\varphi(s)$ na direção do campo X_θ é igual a zero.

Analisando os resultados em (13) e (14), percebe também que a derivada covariante na direção de X_s é equivalente a um múltiplo de X_s , e o mesmo acontece para a derivada covariante na direção X_θ , resultando em um múltiplo de X_θ . Assim, obtemos o mesmo múltiplo $\varphi'(s)$ para os dois casos.

Agora, vamos mostrar que esse resultado é válido para qualquer que seja o campo de vetores.

Tomando um campo de vetores qualquer $U = \alpha X_s + \beta X_\theta$, teremos a derivada covariante dada por

$$D_U\xi = D_{(\alpha X_s + \beta X_\theta)}\xi = \alpha D_{X_s}\xi + \beta D_{X_\theta}\xi. \quad (15)$$

Veja que $D_{X_s}\xi$ e $D_{X_\theta}\xi$ já foram calculados em anteriormente em (13) e (14) respectivamente. Logo, aplicando esses resultados em (15), obtemos

$$D_U\xi = D_{(\alpha X_s + \beta X_\theta)}\xi = \varphi'(s)(\alpha X_s + \beta X_\theta) = \varphi'(s)U. \quad (16)$$

Dessa forma, veja que a derivada covariante de ξ em qualquer direção U resultará em um múltiplo de U .

Portanto, pela Definição 3.4, podemos concluir que, de fato, o campo de vetores $\xi = \varphi(s)X_s$ em S (superfícies de revolução arbitrária) é um campo de vetores conforme fechado, onde o fator conforme será

$$\eta = \varphi'(s). \quad (17)$$

■

Exemplo 3.5 Considere S , a esfera dada pela parametrização

$$X(s, \theta) = (\cos(s)\cos(\theta), \cos(s)\sin(\theta), \sin(s)), \quad -\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2} \quad e \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

O campo $\xi = -\sin(s)\sin(\theta)X_s + \frac{\cos(\theta)}{\cos(s)}X_\theta$ é um campo de vetores conforme fechado, com fator conforme

$$\eta = -\cos(s)\sin(\theta).$$

Primeiramente, veja que pelas propriedades da derivada covariante, temos que

$$\begin{aligned} D_{X_s}\xi &= D_{X_s}(-\sin(s)\sin(\theta)X_s) + D_{X_s}\left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(s)}X_\theta\right) \\ &= -\sin(s)\sin(\theta)D_{X_s}X_s + X_s(-\sin(s)\sin(\theta))X_s \\ &\quad + \frac{\cos(\theta)}{\cos(s)}D_{X_s}X_\theta + X_s\left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(s)}\right)X_\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
D_{X_\theta}\xi &= D_{X_\theta}(-\operatorname{sen}(s)\operatorname{sen}(\theta)X_s) + D_{X_\theta}\left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(s)}X_\theta\right) \\
&= -\operatorname{sen}(s)\operatorname{sen}(\theta)D_{X_\theta}X_s + X_\theta(-\operatorname{sen}(s)\operatorname{sen}(\theta))X_s \\
&\quad + \frac{\cos(\theta)}{\cos(s)}D_{X_\theta}X_\theta + X_\theta\left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(s)}\right)X_\theta.
\end{aligned} \tag{19}$$

Pela parametrização da esfera dada, temos que $\varphi(s) = \cos(s)$, além disso, pelas equações em (12) do Exemplo 3.4, conseguimos determinar $D_{X_s}X_s$, $D_{X_s}X_\theta$ e $D_{X_\theta}X_\theta$, sendo então

$$\begin{aligned}
D_{X_s}X_s &= 0, \\
D_{X_s}X_\theta &= D_{X_\theta}X_s = \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}X_\theta = -\frac{\operatorname{sen}(s)}{\cos(s)}X_\theta, \\
D_{X_\theta}X_\theta &= -\varphi(s)\varphi'(s)X_s = \cos(s)\operatorname{sen}(s)X_s.
\end{aligned} \tag{20}$$

Assim, substituindo (20) em (18) e (19), obtemos

$$\begin{aligned}
D_{X_s}\xi &= -\cos(s)\operatorname{sen}(\theta)X_s + \left(\frac{\operatorname{sen}(s)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(s)\cos(\theta)}{\cos^2(s)}\right)X_\theta \\
&= -\cos(s)\operatorname{sen}(\theta)X_s,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
D_{X_\theta}\xi &= (\operatorname{sen}(s)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(s)\cos(\theta))X_s + \left(-\frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos^2(s)}{\cos(s)}\right)X_\theta \\
&= -\cos(s)\operatorname{sen}(\theta)X_\theta.
\end{aligned} \tag{22}$$

Analisando os resultados em (21) e (22), percebe-se que a derivada covariante de ξ na direção de X_s é equivalente a um múltiplo de X_s , e o mesmo acontece para a derivada covariante de ξ na direção X_θ , resultando em um múltiplo de X_θ . Assim, obtemos o mesmo múltiplo $(-\cos(s)\operatorname{sen}(\theta))$ para os dois casos.

Agora, vamos mostrar que esse resultado é válido para qualquer campo de vetores. Assim, tomando um campo de vetores qualquer $U = \alpha X_s + \beta X_\theta$, teremos a derivada covariante dada por

$$D_U\xi = D_{(\alpha X_s + \beta X_\theta)}\xi = \alpha D_{X_s}\xi + \beta D_{X_\theta}\xi.$$

Veja que $D_{X_s}\xi$ e $D_{X_\theta}\xi$ já foram calculados anteriormente em (21) e (22) respectivamente. Logo, aplicando esses resultados em $D_U\xi$, obtemos

$$D_U\xi = D_{(\alpha X_s + \beta X_\theta)}\xi = -\cos(s)\operatorname{sen}(\theta)(\alpha X_s + \beta X_\theta) = -\cos(s)\operatorname{sen}(\theta)(s)U. \tag{23}$$

Dessa forma, veja que a derivada covariante de ξ em qualquer direção U resultará em um múltiplo de U .

Portanto, pela Definição 3.4, podemos concluir que, de fato, o campo de vetores $\xi = -\operatorname{sen}(s)\operatorname{sen}(\theta)X_s + \frac{\cos(\theta)}{\cos(s)}X_\theta$ em S (Esfera) é um campo de vetores conforme fechado, onde o fator conforme será

$$\eta = -\cos(s)\operatorname{sen}(\theta). \tag{24}$$

■

Lema 3.2 *Seja S uma superfície de revolução parametrizada por*

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos \theta, \varphi(s)\sen \theta, \psi(s)),$$

onde $\varphi(s) > 0, s \in I \subset \mathbb{R}, 0 < \theta < 2\pi$ e $\gamma(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s))$ é a curva geratriz parametrizada pelo comprimento de arco, isto é,

$$[\varphi'(s)]^2 + [\psi'(s)]^2 = 1.$$

Considere $E_1 = X_s$ e $E_2 = \frac{1}{\varphi(s)}X_\theta$, então $\{E_1, E_2\}$ é um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(S)$. Além disso, vale as seguintes relações:

$$\begin{aligned} D_{E_1}E_1 &= 0, & D_{E_1}E_2 &= 0, \\ D_{E_2}E_1 &= \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}E_2, & D_{E_2}E_2 &= -\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}E_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Demonstração: Inicialmente, iremos verificar que o referencial $\{E_1, E_2\}$ é um referencial ortonormal. Temos os campos $E_1 = X_s$ e $E_2 = \frac{1}{\varphi(s)}X_\theta$, onde

$$E_1 = X_s = (\varphi'(s)\cos \theta, \varphi'(s)\sen \theta, \psi'(s)), \quad (26)$$

$$E_2 = \frac{1}{\varphi(s)}X_\theta = \frac{\varphi(s)}{\varphi(s)}(-\sen \theta, \cos \theta, 0) = (-\sen \theta, \cos \theta, 0). \quad (27)$$

Calculando o produto interno entre E_1 e E_2 , obtemos

$$\langle E_1, E_2 \rangle = -\varphi'(s)\sen \theta \cos \theta + \varphi'(s)\sen \theta \cos \theta = 0. \quad (28)$$

Assim, podemos concluir que $\{E_1, E_2\}$ é um referencial ortogonal. Além disso, calculando o módulo de E_1 e E_2 , teremos

$$\begin{aligned} |E_1| &= \sqrt{[\varphi'(s)]^2(\sen^2 \theta + \cos^2 \theta) + [\psi'(s)]^2} = \sqrt{[\varphi'(s)]^2 + [\psi'(s)]^2} = 1, \\ |E_2| &= \sqrt{\sen^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1. \end{aligned}$$

Como as normas de E_1 e E_2 são iguais a um, logo são unitários. Dessa maneira, o referencial $\{E_1, E_2\}$ é um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(S)$. Agora vamos mostrar que as relações em (25) são válidas. Calculando a derivada covariante de E_1 e E_2 nas direções um do outro, temos

$$D_{E_1}E_1 = D_{X_s}X_s, \quad (29)$$

$$D_{E_1}E_2 = D_{X_s}\left(\frac{1}{\varphi(s)}X_\theta\right) = \frac{1}{\varphi(s)}D_{X_s}X_\theta + X_s\left(\frac{1}{\varphi(s)}\right)X_\theta, \quad (30)$$

$$D_{E_2}E_1 = D\left(\frac{1}{\varphi(s)}X_\theta\right)X_s = \frac{1}{\varphi(s)}D_{X_\theta}X_s, \quad (31)$$

$$D_{E_2}E_2 = D\left(\frac{1}{\varphi(s)}X_\theta\right)\left(\frac{1}{\varphi(s)}X_\theta\right) = \frac{1}{[\varphi(s)]^2}D_{X_\theta}X_\theta + \frac{1}{\varphi(s)}X_\theta\left(\frac{1}{\varphi(s)}\right)X_\theta. \quad (32)$$

Note que,

$$X_s \left(\frac{1}{\varphi(s)} \right) = -\frac{\varphi'(s)}{[\varphi(s)]^2} \text{ e } X_\theta \left(\frac{1}{\varphi(s)} \right) = 0. \quad (33)$$

Usando (33) e os resultados obtidos em (12), concluímos que

$$D_{E_1} E_1 = 0, \quad (34)$$

$$D_{E_1} E_2 = \frac{\varphi'(s)}{[\varphi(s)]^2} X_\theta - \frac{\varphi'(s)}{[\varphi(s)]^2} X_\theta = 0, \quad (35)$$

$$D_{E_2} E_1 = \frac{\varphi'(s)}{[\varphi(s)]^2} X_\theta = \frac{\varphi(s)}{\varphi(s)} E_2, \quad (36)$$

$$D_{E_2} E_2 = -\frac{\varphi(s)\varphi'(s)}{[\varphi(s)]^2} X_s = -\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} E_1. \quad (37)$$

■

Antes de apresentarmos o próximo Lema, vamos estabelecer um Lema cuja a demonstração pode ser encontrada em (CARMO, 2008), que será útil na demonstração do próximo Lema.

Lema 3.3 *Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma superfície regular, com parâmetros u e v , e seja K a curvatura Gaussiana de S . Então para um campo de vetores qualquer V , tem-se*

$$D_{X_v} D_{X_u} V - D_{X_u} D_{X_v} V = K(X_u \times X_v) \times V \quad (38)$$

Assim, já podemos enunciar o Lema à seguir.

Lema 3.4 *Seja S uma superfície de revolução com a parametrização dada por*

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos \theta, \varphi(s)\sen \theta, \psi(s)),$$

nas condições do Lema 3.2, e com curvatura Gaussiana K . Se $\xi = \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2$ é um campo de vetores conforme fechado, com fator conforme η , logo vale as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial s} &= \eta, & \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} &= \varphi'(s)\xi_2, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial s} &= 0, & \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} &= \varphi(s)\eta - \varphi'(s)\xi_1, \\ \frac{\partial \eta}{\partial s} &= -K\xi_1, & \frac{\partial \eta}{\partial \theta} &= -K\varphi(s)\xi_2. \end{aligned} \quad (39)$$

Em particular, ξ_2 não depende de s e daí vem que $\xi_2(s, \theta) = \xi_2(\theta)$.

Demonstração: Sabendo que ξ é um campo de vetores conforme fechado, podemos obter, à partir da Definição 3.4, que

$$D_{E_1} \xi = \eta E_1 \text{ e } D_{E_2} \xi = \eta E_2. \quad (40)$$

Para $D_{E_1} \xi = \eta E_1$, teremos

$$\eta E_1 = D_{E_1}(\xi_1 E_1 + \xi_2 E_2) = \xi_1 D_{E_1} E_1 + E_1(\xi_1) E_1 + \xi_1 D_{E_1} E_2 + E_1(\xi_2) E_2. \quad (41)$$

Aplicando os resultados do Lema 3.2 na equação (41), obtemos

$$\eta E_1 = X_s(\xi_1) E_1 + X_s(\xi_2) E_2 = \frac{\partial \xi_1}{\partial s} E_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial s} E_2. \quad (42)$$

Portanto,

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial s} = \eta \quad (43)$$

e

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = 0. \quad (44)$$

Já, para $D_{E_2} \xi = \eta E_2$, teremos

$$\eta E_2 = D_{E_2}(\xi_1 E_1 + \xi_2 E_2) = \xi_1 D_{E_2} E_1 + E_2(\xi_1) E_1 + \xi_2 D_{E_2} E_2 + E_2(\xi_2) E_2. \quad (45)$$

Aplicando os resultados do Lema 3.2 na equação (45), obtemos

$$\eta E_2 = \left(\frac{1}{\varphi(s)} X_\theta(\xi_1) - \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \xi_2 \right) E_1 + \left(\frac{1}{\varphi(s)} X_\theta(\xi_2) + \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \xi_1 \right) E_2. \quad (46)$$

Portanto,

$$\frac{1}{\varphi(s)} \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} - \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \xi_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = \varphi'(s) \xi_2 \quad (47)$$

e

$$\frac{1}{\varphi(s)} \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} + \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} \xi_1 = \eta \Rightarrow \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} = \varphi(s) \eta(s) - \varphi'(s) \xi_1. \quad (48)$$

Agora, aplicando a equação (38) do Lema 3.3 para o campo de vetores ξ , teremos

$$D_{X_\theta} D_{X_s} \xi - D_{X_s} D_{X_\theta} \xi = K(X_s \times X_\theta) \times \xi. \quad (49)$$

Usando o fato de que o campo de vetores ξ é conforme fechado, podemos então fazer

$$\begin{aligned} D_{X_\theta} D_{X_s} \xi - D_{X_s} D_{X_\theta} \xi &= D_{X_\theta}(\eta X_s) - D_{X_s}(\eta X_\theta) \\ &= \eta D_{X_\theta} X_s + X_\theta(\eta) X_s - \eta D_{X_s} X_\theta - X_s(\eta) X_\theta. \end{aligned} \quad (50)$$

Usando em (50) os resultados das equações de (12), obtemos

$$D_{X_\theta} D_{X_s} \xi - D_{X_s} D_{X_\theta} \xi = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} E_1 - \varphi(s) \frac{\partial \eta}{\partial s} E_2. \quad (51)$$

Agora, aplicando as propriedades do produto vetorial para $K(X_s \times X_\theta) \times \xi$, temos

$$\begin{aligned} K(X_s \times X_\theta) \times \xi &= K\langle X_s, \xi \rangle X_\theta - K\langle X_\theta, \xi \rangle X_s \\ &= K\langle E_1, \xi \rangle \varphi(s) E_2 - K\langle \varphi(s) E_2, \xi \rangle E_1. \end{aligned} \quad (52)$$

Como já mostramos no Lema 3.2 que o referencial $\{E_1, E_2\}$ é um referencial ortonormal, sendo $\xi = \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2$, logo teremos

$$\langle E_1, \xi \rangle = \xi_1, \quad \langle E_2, \xi \rangle = \xi_2. \quad (53)$$

Portanto, substituindo em (52) os resultados obtidos na equação (53), temos

$$K(X_s \times X_\theta) \times \xi = K\varphi(s)\xi_1 E_2 - K\varphi(s)\xi_2 E_1. \quad (54)$$

Logo, pelas equações (49), (51) e (54), temos o seguinte resultado

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} E_1 - \frac{\partial \eta}{\partial s} \varphi(s) E_2 = K\varphi(s)\xi_1 E_2 - K\varphi(s)\xi_2 E_1. \quad (55)$$

E assim, da equação (55), podemos concluir que

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = -K\varphi(s)\xi_2 \quad (56)$$

e

$$\frac{\partial \eta}{\partial s} = -K\xi_1. \quad (57)$$

■

Lema 3.5 *Seja S uma superfície de revolução dada pela parametrização*

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos \theta, \varphi(s)\sen \theta, \psi(s)),$$

nas condições do Lema 3.2 e com curvatura Gaussiana K . Se $\xi = \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2$ é um campo de vetores conforme fechado com fator conforme η , então vale as seguintes relações:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial s^2} + K\xi_1 = 0, \quad (58)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \theta^2} + \varphi'(s)\xi_1 = \varphi(s)\varphi'(s)\eta, \quad (59)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \theta^2} + \Lambda(s)\xi_2 = 0, \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + K\eta = 0, \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + K[\varphi(s)]^2 \eta = K\varphi(s)\varphi'(s)\xi_1. \quad (62)$$

onde, para a equação (60), $\Lambda(s) = [\varphi'(s)]^2 + K[\varphi(s)]^2$ depende só de s .

Demonstração: Para chegarmos nas relações, basta tomarmos os resultados do Lema 3.4 e aplicar as derivadas parciais para cada expressão.

Para $\frac{\partial \xi_1}{\partial s} = \eta$, temos

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial s^2} = \frac{\partial \eta}{\partial s}. \quad (63)$$

Substituindo a expressão (57) em (63), logo

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial s^2} + K\xi_1 = 0. \quad (64)$$

De $\frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = \varphi'(s)\xi_2$, obtemos

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \theta^2} = \varphi'(s) \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta}. \quad (65)$$

Assim, substituindo a expressão (48) em (65), conseguimos

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial \theta^2} + [\varphi'(s)]^2 \xi_1 = \varphi(s) \varphi'(s) \eta. \quad (66)$$

Da expressão $\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = 0$, teremos

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial s^2} = 0. \quad (67)$$

Seguindo, da expressão $\frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} = \varphi(s)\eta - \varphi'(s)\xi_1$, vem que

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \theta^2} = \varphi(s) \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \varphi'(s) \frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = -K[\varphi(s)]^2 \xi_2 - [\varphi'(s)]^2 \xi_2. \quad (68)$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \theta^2} + (K[\varphi(s)]^2 + [\varphi'(s)]^2) \xi_2 = 0. \quad (69)$$

Observe que a expressão $K[\varphi(s)]^2 + [\varphi'(s)]^2$ só depende de s , assim, podemos fazer

$$\Lambda(s) = K[\varphi(s)]^2 + [\varphi'(s)]^2. \quad (70)$$

E aplicando (70) em (69), temos, portanto,

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \theta^2} + \Lambda(s) \xi_2 = 0. \quad (71)$$

Para a expressão $\frac{\partial \eta}{\partial s} = -K\xi_1$, sabendo que K só depende de s , logo tiramos que

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} = -K \frac{\partial \xi_1}{\partial s} - K' \xi_1. \quad (72)$$

Substituindo a expressão (43) em (72), então teremos que

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + K\eta = -K' \xi_1. \quad (73)$$

Por fim, de $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = -K\varphi(s)\xi_2$, temos que

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} = -K\varphi(s) \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta}. \quad (74)$$

E substituindo a expressão (48) em (74), concluímos que

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + K[\varphi(s)]^2 \eta = K\varphi(s)\varphi'(s)\xi_1. \quad (75)$$

Temos então todas as relações que queríamos. ■

Agora, vamos trabalhar com o objetivo de buscar descrever o campo de vetores

conforme fechado na superfície de revolução. Para isso, precisamos antes enunciar o seguinte lema de EDO que será bastante recorrente.

Lema 3.6 *Seja $g''(s) + cg(s) = 0$, uma EDO homogênea de ordem 2, com coeficientes constantes, temos então três casos distintos para a sua solução:*

$$g(s) = \begin{cases} c_1 + c_2s, & \text{se } c = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{c}s) + c_2 \text{sen}(\sqrt{c}s), & \text{se } c > 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-c}s} + c_2 e^{-\sqrt{-c}s}, & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

onde c_1 e c_2 são constantes quaisquer.

A demonstração geral para EDOs desse tipo pode ser vista em (ZILL; CULLEN, 2001). Com isso, estamos preparados para seguir com a descrição do campo de vetores conforme fechado na superfície de revolução, através do seguinte Teorema.

Teorema 3.2 *Seja S uma superfície de revolução parametrizada por*

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos\theta, \varphi(s)\text{sen}\theta, \psi(s)),$$

cuja curva geratriz seja parametrizada pelo comprimento de arco. Se o campo

$$\xi = \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 = \xi_1 X_s + \frac{1}{\varphi(s)} \xi_2 X_\theta$$

é um campo de vetores conforme fechado com fator conforme η , então

1. $\xi_2 = 0$,

$$\xi = a\varphi(s)X_s,$$

onde a é uma constante real não nula e $\eta = a\varphi'(s)$.

2. Ou $\xi_2 \neq 0$, a superfície S tem curvatura Gaussiana constante e vale que:

$$\varphi(s) = \begin{cases} a + bs, & \text{se } K = 0 \\ a \cos(\sqrt{K}s) + b \text{sen}(\sqrt{K}s), & \text{se } K > 0 \\ ae^{\sqrt{-K}s} + be^{-\sqrt{-K}s}, & \text{se } K < 0 \end{cases},$$

$$\xi = \varphi'(s) \int \xi_2 d\theta X_s + \frac{1}{\varphi(s)} \xi_2 X_\theta,$$

onde

$$\xi_2(\theta) = \begin{cases} a_2 + b_2\theta, & \text{se } \Lambda = 0 \\ a_2 \cos(\sqrt{\Lambda}\theta) + b_2 \text{sen}(\sqrt{\Lambda}\theta), & \text{se } \Lambda > 0 \\ a_2 e^{\sqrt{-\Lambda}\theta} + b_2 e^{-\sqrt{-\Lambda}\theta}, & \text{se } \Lambda < 0 \end{cases},$$

com

$$\Lambda = \begin{cases} b^2 & \geq 0, \text{ se } K = 0 \\ (a^2 + b^2)K & \geq 0, \text{ se } K > 0 \\ 4abK & , \text{ se } K < 0 \end{cases}$$

e

$$\eta = -K\varphi(s) \int \xi_2(\theta)d\theta.$$

Demonstração: Inicialmente, observe que pela equação (60) do Lema 3.5, sabemos que ξ_2 não depende de s . Podemos então determinar dois casos para satisfazer sua igualdade. Ou $\xi_2 = 0$ ou $\Lambda(s)$ é constante. Para cada caso podemos tirar algumas conclusões importantes com relação ao comportamento do campo ξ .

Primeiro caso: $\xi_2 = 0$

Do Lema 3.4, segue que

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = \varphi'(s)\xi_2 = 0, \quad (76)$$

logo temos que ξ_1 também não depende de θ . Além disso, para o campo $\xi = \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2$, com $\xi_2 = 0$, logo resulta em

$$\xi = \xi_1 E_1. \quad (77)$$

Ainda do Lema 3.4, temos

$$0 = \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} = \varphi(s)\eta - \varphi'(s)\xi_1,$$

logo

$$\eta = \frac{\varphi'(s)\xi_1}{\varphi(s)}. \quad (78)$$

E da equação (43), sendo $\frac{\partial \xi_1}{\partial s} = \eta$, obtemos então

$$\xi_1' = \frac{\partial \xi_1}{\partial s} = \frac{\varphi'(s)\xi_1}{\varphi(s)}, \quad (79)$$

ou seja,

$$\frac{\xi_1'}{\xi_1} = \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}. \quad (80)$$

Como ξ_1 e $\varphi(s)$ dependem só de s , veja que podemos integrar ambos os membros da igualdade (84), assim, teremos que

$$\int \frac{\xi_1'}{\xi_1} ds = \int \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds. \quad (81)$$

Fazendo $u = \xi_1$ e $t = \varphi(s)$, logo, teremos $du = \xi_1' ds$ e $dt = \varphi'(s) ds$ respectivamente. Assim, substituindo esses resultados em (85), teremos então

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dt}{t}. \quad (82)$$

Resultando em

$$\ln(\xi_1) + c_1 = \ln(\varphi(s)) + c_2. \quad (83)$$

Aplicando a função exponencial em ambos os membros de (87), obtemos

$$e^{(\ln(\xi_1)+c_1)} = e^{(\ln(\varphi(s)+c_2)} \quad (84)$$

Assim,

$$\xi_1 e^{c_1} = \varphi(s) e^{c_2}. \quad (85)$$

Com isso, temos

$$\xi_1 = e^{(c_2-c_1)} \varphi(s). \quad (86)$$

Fazendo $a = e^{(c_2-c_1)}$, logo a equação (86) resulta em

$$\xi_1 = a\varphi(s). \quad (87)$$

Dessa maneira, substituindo a equação (87) no campo $\xi = \xi_1 E_1$ obtido em (77). Lembrando também que do Lema 3.2, temos $E_1 = X_s$, logo vamos obter que

$$\xi = a\varphi(s)X_s. \quad (88)$$

Neste caso, pelas equações (43) e (56) do Lema 3.4, temos

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial s} = \eta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = -K\varphi(s)\xi_2,$$

respectivamente.

Da equação (56), sabendo que $\xi_2 = 0$, logo obtemos que

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 0,$$

dessa forma, podemos concluir que η não depende de θ . Além disso, das equações (87) e (43), conseguimos, portanto, determinar η sendo então

$$\frac{\partial(a\varphi(s))}{\partial s} = \eta,$$

assim, o fator conforme para este caso é

$$\eta = a\varphi'(s) \quad (89)$$

Segundo caso: $\Lambda = \Lambda(s) = [\varphi'(s)]^2 + K[\varphi(s)]^2$ é constante.

Aplicando a derivada em relação a s , temos que

$$0 = \Lambda' = 2\varphi'(s)\varphi''(s) + 2K\varphi(s)\varphi'(s) + K'[\varphi(s)]^2. \quad (90)$$

Do Exemplo 2.6, temos que $K = -\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}$, assim, aplicando esse resultado em (90), obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \Lambda' &= 2\varphi'(s)\varphi''(s) - 2\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}\varphi(s)\varphi'(s) + K'[\varphi(s)]^2 \\ 0 &= K'[\varphi(s)]^2, \end{aligned} \quad (91)$$

sendo $\varphi(s) > 0$, da equação (91), podemos concluir que $K' = 0$ e, assim, K será constante.

Sendo K constante, note que através do Exemplo 2.6, temos que $\varphi''(s) + K\varphi(s) = 0$. Logo, pelo Lema 3.6, obtemos os seguintes casos para a função $\varphi(s)$:

$$\varphi(s) = \begin{cases} a + bs, & \text{se } K = 0 \\ a\cos(\sqrt{K}s) + b\sin(\sqrt{K}s), & \text{se } K > 0 \\ ae^{\sqrt{-K}s} + be^{-\sqrt{-K}s}, & \text{se } K < 0 \end{cases} \quad (92)$$

onde a e b são constantes quaisquer.

Agora, podemos destacar três resultados distintos de Λ para cada valor de K .

- $K = 0$.

Neste caso, de (92), temos que $\varphi(s) = a + bs$, assim, a derivada de $\varphi(s)$ em relação à s será dada por

$$\varphi'(s) = b. \quad (93)$$

Logo, aplicando (93) em $\Lambda = K[\varphi(s)]^2 + [\varphi'(s)]^2$, obtemos

$$\Lambda = b^2. \quad (94)$$

- $K > 0$.

De (92), temos que $\varphi(s) = a\cos(\sqrt{K}s) + b\sin(\sqrt{K}s)$ e, derivando $\varphi(s)$ em relação à s , obtemos

$$\varphi'(s) = -a\sqrt{K}\sin(\sqrt{K}s) + b\sqrt{K}\cos(\sqrt{K}s). \quad (95)$$

Substituindo $\varphi(s)$ e sua respectiva derivada (95), em Λ , conseguimos

$$\begin{aligned} \Lambda &= [b\sqrt{K}\cos(\sqrt{K}s) - a\sqrt{K}\sin(\sqrt{K}s)]^2 + K(a\cos(\sqrt{K}s) + b\sin(\sqrt{K}s))^2 \\ &= K[a^2(\sin^2(\sqrt{K}s) + \cos^2(\sqrt{K}s)) + b^2(\sin^2(\sqrt{K}s) + \cos^2(\sqrt{K}s))] \\ &= (c_1^2 + c_2^2)K. \end{aligned} \quad (96)$$

- $K < 0$.

De (92), temos que $\varphi(s) = ae^{\sqrt{-K}s} + be^{-\sqrt{-K}s}$, assim, fazendo a derivada de $\varphi(s)$ em relação à s , vem que

$$\varphi'(s) = a\sqrt{-K}e^{\sqrt{-K}s} - b\sqrt{-K}e^{-\sqrt{-K}s}. \quad (97)$$

Com isso, aplicando $\varphi(s)$ e sua respectiva derivada (97), em Λ , obtemos

$$\begin{aligned} \Lambda &= (a\sqrt{-K}e^{\sqrt{-K}s} - b\sqrt{-K}e^{-\sqrt{-K}s})^2 + K(ae^{\sqrt{-K}s} + be^{-\sqrt{-K}s})^2 \\ &= -2ab(-K) + 2abK \\ &= 4abK. \end{aligned} \quad (98)$$

Com isso, podemos tirar as seguintes conclusões, que

$$\Lambda = \begin{cases} b^2 & \geq 0, \text{ se } K = 0 \\ (a^2 + b^2)K & \geq 0, \text{ se } K > 0 \\ 4abK & , \text{ se } K < 0. \end{cases} \quad (99)$$

Agora vamos determinar ξ_2 . Veja que, pela equação (60), temos que

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \theta^2} + \Lambda \xi_2 = 0.$$

Logo, pelo Lema 3.6, sabendo que Λ é constante, conseguimos então os seguintes casos para $\xi_2(\theta)$:

$$\xi_2(\theta) = \begin{cases} a_2 + b_2\theta, & \text{se } \Lambda = 0 \\ a_2 \cos(\sqrt{\Lambda}\theta) + b_2 \sin(\sqrt{\Lambda}\theta), & \text{se } \Lambda > 0 \\ a_2 e^{\sqrt{-\Lambda}\theta} + b_2 e^{-\sqrt{-\Lambda}\theta}, & \text{se } \Lambda < 0, \end{cases} \quad (100)$$

onde a_2 e b_2 são constantes quaisquer.

Prosseguindo, podemos notar também que através do Lema 3.4, onde

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \theta} = \varphi'(s)\xi_2,$$

podemos deduzir a integral que pode ser utilizada para descobrir os valores de ξ_1 , logo, temos que

$$\xi_1 = \varphi'(s) \int \xi_2(\theta) d\theta. \quad (101)$$

Ainda para este caso, à partir equação (43) do Lema 3.4 e da equação (101), temos que

$$\eta = \frac{\partial(\varphi'(s))}{\partial s} \int \xi_2(\theta) d\theta = \varphi''(s) \int \xi_2(\theta) d\theta. \quad (102)$$

Além disso, de $K = -\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}$ do Exemplo 2.6, temos que

$$\varphi''(s) = -K\varphi(s), \quad (103)$$

dessa maneira, substituindo a equação (103) em (102), obtemos

$$\eta = -K\varphi(s) \int \xi_2(\theta) d\theta, \quad (104)$$

e com isso, conseguimos determinar o fator conforme η para este caso.

Assim, diante dos resultados demonstrados aqui, podemos então descrever de forma bem detalhada o campo de vetores conforme fechado ξ . ■

Veja que, de acordo com o que foi demonstrado no Teorema 3.2, somos capazes de fazer uma boa observação quanto ao comportamento de ξ em decorrência da curvatura Gaussiana K , assim, podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 3.2 *Seja S uma superfície de revolução com parametrização*

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos \theta, \varphi(s)\sin \theta, \psi(s)),$$

nas condições do Lema 3.2. Seja ξ um campo de vetores conforme fechado, logo, se a curvatura Gaussiana K não for constante, então $\xi = c\varphi(s)X_s$, onde c é uma constante qualquer.

Se considerarmos ξ um campo de Killing, podemos caracterizar a superfície de

revolução.

Corolário 3.3 *Seja S uma superfície de revolução com parametrização*

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos \theta, \varphi(s)\sen \theta, \psi(s)),$$

nas condições do Lema 3.2. Seja ξ um campo de vetores conforme fechado de Killing, então S é um cilindro circular reto, um cone circular reto ou um plano.

Demonstração: Se o campo ξ é Killing, então $\eta = 0$, assim, nos termos do Teorema 3.2, precisamos analisar os dois casos contidos. Logo, para o primeiro caso, temos

$$\xi_2 = 0 \quad \text{e} \quad \eta = a\varphi'(s).$$

Mas veja que como o campo ξ é Killing, logo temos que

$$\eta = a\varphi'(s) = 0, \tag{105}$$

e de (105), podemos concluir que $\varphi'(s) = 0$ e, conseqüentemente, $K = \frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)} = 0$.

Agora, para o segundo caso onde temos $\xi_2 \neq 0$, curvatura Gaussiana constante e

$$\eta = -K\varphi(s) \int \xi_2(\theta)d\theta.$$

Sabendo que o campo ξ é Killing, logo temos que

$$0 = \eta = -K\varphi(s) \int \xi_2(\theta)d\theta, \tag{106}$$

onde

$$\varphi(s) > 0 \quad \text{e} \quad \int \xi_2(\theta)d\theta \neq 0,$$

dessa forma, podemos concluir que $K = 0$.

Portanto, em ambos os casos, temos que a curvatura Gaussiana é identicamente nula, logo S é um cilindro circular reto, um cone circular reto ou um plano (veja o exercício 7, seção 3.3 de (CARMO, 2008)).

■

Agora se considerarmos ξ um campo de Homotético, também podemos caracterizar a superfície de revolução.

Corolário 3.4 *Seja S uma superfície de revolução com parametrização*

$$X(s, \theta) = (\varphi(s)\cos \theta, \varphi(s)\sen \theta, \psi(s)),$$

nas condições do Lema 3.2. Seja ξ um campo de vetores conforme fechado Homotético, então S é um cone circular reto ou um plano.

Demonstração: Se o campo ξ é Homotético, então $\eta \neq 0$ é constante, assim, nos termos do Teorema 3.2, precisamos analisar os dois casos contidos. Logo, para o primeiro caso, temos

$$\xi_2 = 0 \quad \text{e} \quad \eta = a\varphi'(s).$$

Mas veja que como o campo ξ é Homotético, com $\eta \neq 0$ constante e a é uma constante real não nula, logo podemos concluir, à partir da equação de η para o primeiro caso do Teorema 3.2 que

$$\varphi'(s) = \frac{\eta}{a} \quad (107)$$

é constante. Além disso, com $\varphi'(s)$ constante, de $K = -\frac{\varphi''(s)}{\varphi(s)}$ do Exemplo 2.6, podemos obter também que

$$K = -\frac{0}{\varphi(s)} = 0,$$

ou seja, a curvatura Gaussiana $K = 0$.

Agora, para o segundo caso onde temos $\xi_2 \neq 0$, curvatura Gaussiana constante e

$$\eta = -K\varphi(s) \int \xi_2(\theta) d\theta.$$

Sabendo que o campo ξ é Homotético, com $\eta \neq 0$ constante, logo, através da equação (61) do Lema 3.5, obtemos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + K\eta = 0 \Rightarrow K\eta = 0. \quad (108)$$

Da equação (108), note que podemos ter $K = 0$ ou $\eta = 0$. Mas veja que o campo ξ é Homotético, dessa forma, teremos $\eta \neq 0$. Então, isso significa que a curvatura Gaussiana $K = 0$. Entretanto, sabendo que $K = 0$, da equação de η do segundo caso do Teorema 3.2, conseguimos concluir que

$$\begin{aligned} \eta &= -K\varphi(s) \int \xi_2(\theta) d\theta \\ &= 0, \end{aligned} \quad (109)$$

que seria um absurdo, pois o campo ξ é Homotético e, conseqüentemente $\eta \neq 0$. Portanto, temos que só pode ocorrer no primeiro caso.

Analisando os resultados para o primeiro caso, temos que $K = 0$ e, aplicando a integral em relação a s em ambos os lados da equação (107), obtemos

$$\int \varphi'(s) ds = \int \frac{\eta}{a} ds \Rightarrow \varphi(s) = \frac{\eta}{a}s + c_1, \quad (110)$$

com $\frac{\eta}{a} \neq 0$ constante e c_1 uma constante qualquer. E pela equação (110), com $\varphi(s) = \frac{\eta}{a}s + c_1$, já podemos garantir que ao aplicar $\varphi(s)$ na parametrização da superfície de revolução, não teremos o cilindro circular reto, pois, além de ter $K = 0$, $\varphi(s)$ teria que ser constante. Portanto, S é um cone circular reto ou um plano (veja o exercício 7, seção 3.3 de (CARMO, 2008)).

■

4 CONCLUSÃO

Graças aos resultados obtidos neste trabalho, conseguimos descrever completamente um campo de vetores conforme fechado em uma superfície de revolução. Como consequência deste resultado, mostramos que para as superfícies de revolução com curvatura Gaussiana K não constante, existe apenas um tipo de campo de vetor conforme fechado. Além disso, no caso em que o campo de vetores conforme fechado é de Killing ou Homotético, foi possível classificar as superfícies de revolução.

Sabendo que as técnicas usadas para a caracterização e descrição do campo são dificilmente encontradas com familiaridade na literatura. Logo, procuramos neste trabalho, fazer uma abordagem com uma linguagem mais simplificada, para que o leitor pudesse fazer uma leitura sem tantas barreiras de dificuldade.

Vale destacar que a base dos estudos usadas na pesquisa deste trabalho somente eram encontradas diante uma linguagem presente na Geometria Riemanniana, porém, através deste trabalho, conseguimos usar apenas a geometria diferencial no espaço Euclidiano para se alcançar os resultados desejados, trazendo assim, grandes contribuições para essa área.

Por fim, observamos que os resultados alcançados neste trabalho não são encontrados na literatura de geometria diferencial no espaço Euclidiano, o que destaca ainda mais a importância destes resultados. Esperamos que o assunto abordado neste trabalho possa ajudar e despertar o interesse de outras pessoas sobre essa área do conhecimento. Ademais, os resultados obtidos aqui, deixam em aberto para que outras pessoas possam se aventurar na caracterização de novos campos de vetores conforme fechado em outros tipos de superfícies, como por exemplo, as superfícies regradas.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008. (Coleção Textos Universitários).

TANNO, S.; WEBER, W. C. **Closed conformal vector fields**. *Journal of Differential Geometry*, 3, 361-366, 1969.

TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

O'NEILL, B. **Elementary Differential Geometry**. Rev. 2nd ed. Amsterdam: Academic Pres, 2006.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. S. **Equações Diferenciais**. v. 1, 3. ed. São Paulo: Makron Books, 2001.