UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FRANCISCO MATEUS COSTA RODRIGUES

A FUNÇÃO DE WEIERSTRASS: UMA FUNÇÃO CONTÍNUA QUE NÃO ADMITE DERIVADA EM NENHUM PONTO DO DOMÍNIO

REDENÇÃO
2022

FRANCISCO MATEUS COSTA RODRIGUES

A FUNÇÃO DE WEIERSTRASS: UMA FUNÇÃO CONTÍNUA QUE NÃO ADMITE DERIVADA EM NENHUM PONTO DO DOMÍNIO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciada em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO

2022

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Rodrigues, Francisco Mateus Costa.

R696f

A função de Weierstrass: Uma função contínua que não admite derivada em nenhum ponto do domínio / Francisco Mateus Costa Rodrigues. - Redenção, 2022.
49f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2022.

Orientador:Prof.º Dr.º Joserlan Perote da Silva.

1. Continuidade. 2. Derivabilidade. 3. Função de Weierstrass. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 516.5

FRANCISCO MATEUS COSTA RODRIGUES

A FUNÇÃO DE WEIERSTRASS: UMA FUNÇÃO CONTÍNUA QUE NÃO ADMITE DERIVADA EM NENHUM PONTO DO DOMÍNIO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 15/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Prof^a. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Prof^a. Ma. Kelma Gomes de Melo
Secretaria da Educação do Estado do Ceará - SEDUC

Documento assinado eletronicamente por **JOSERLAN PEROTE DA SILVA**, **PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 17/02/2022, às 11:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6°, § 1°, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **AMANDA ANGELICA FELTRIN NUNES**, **PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 17/02/2022, às 12:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6°, § 1°, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **KELMA GOMES DE MELO**, **Usuário Externo**, em 17/02/2022, às 13:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6°, § 1°, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unilab.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0411531** e o código CRC **9C4BC31A**.

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a minha família, em especial minha mãe, por sempre buscar o melhor para mim.

Agradeço imensamente ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva pelo seu incansável trabalho, apoio, orientação, paciência, compreensão e incentivo ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

As professoras participantes da banca examinadora, Prof.ª Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes e Prof.ª Ma. Kelma Gomes de Melo pelo tempo disponilizado, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática da Unilab pelos valiosos ensinamentos.

Aos meus professores do ensino básico pelas aulas de matemática que serviram de incentivo e motivação.

Aos meus colegas de turma, em especial, Aline, Augusto, Douglas e Marcelo, pelos diálogos, experiências e ensinamentos que pudemos compartilhar ao longo da graduação.

A minha namorada Ana Eunice, pelo seu apoio, incentivo e compressão.

Por fim, agradeço a todos que puderam fazer parte ou contribuíram de maneira direta ou indireta para esta realização.

"O grande livro da natureza está escrito em linguagem matemática." Galileu Galilei

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é mostrar um exemplo que prova a possibilidade de existência de uma função contínua em toda a reta, mas que não é derivável em lugar nenhum. Em 18 de julho de 1872, o matemático alemão Karl Weierstrass apresentou uma função com essa característica em uma palestra na Royal Academy of Science, em Berlim. A exibição dessa função causou uma grande surpresa a comunidade acadêmica da época, tanto pela sua importância como por ser um contra exemplo para a recíproca de um dos teoremas mais conhecidos do cálculo diferencial, a saber: "se uma função é derivável em um ponto c real, então essa função é contínua em c", tratando-se também de ser a primeira função apresentada com essa característica. A função que Weierstrass construiu recebeu o seu nome em sua homenagem, sendo uma função limitada e contínua em toda a reta, mas não é derivável em nenhum ponto. Nos dias de hoje, é de conhecimento matemático que existam mais funções com essas características da função de Weierstrass, no entanto, visto que a construção dessas funções é um trabalho demorado e cuidadoso, não é fácil de encontrar exemplos das mesmas. Apresentamos no trabalho também um estudo introdutório aos limites, continuidade e derivadas de funções; sequências e séries numéricas e as sequências e séries de funções, que servirão de base para a construção da função de Weierstrass. Espera-se que o trabalho possa servir de fonte de pesquisa e motivação para estudantes de matemática ou áreas relacionadas, principalmente quando estiverem estudando o cálculo diferencial.

Palavras-chave: Continuidade. Derivabilidade. Função de Weierstrass.

ABSTRACT

The main objective of this work is to show an example that proves the possibility of the existence of a continuous function on the entire line, but which is nowhere differentiable. On July 18, 1872, the German mathematician Karl Weierstrass presented a function with this characteristic in a lecture at the Royal Academy of Science in Berlin. The exhibition of this function caused great surprise to the academic community of the time, both for its importance and for being a counter-example to the reciprocal of one of the best known theorems of differential calculus, namely: "if a function is differentiable at a real point c, then this function is continuous in c", being also the first function presented with this characteristic. The function that Weierstrass constructed was named in his honor, being a bounded and continuous function on the entire line, but not differentiable at any point. Nowadays, it is of mathematical knowledge that there are more functions with these characteristics of the Weierstrass function, however, since the construction of these functions is a long and careful work, it is not easy to find examples of them. We also present in the work an introductory study on limits, continuity and derivatives of functions; sequences and numerical series and the sequences and series of functions, which will serve as the basis for the construction of the Weierstrass function. It is hoped that the work can serve as a source of research and motivation for students in mathematics or related fields, especially when studying differential calculus.

Keywords: Continuity. Derivability. Weierstrass function.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Intuitivamente, a ideia de uma função ser contínua parte do princípio de que o gráfico dela pode ser traçado sem tirarmos o lápis do papel, sendo uma função contínua derivável em um ponto se o seu gráfico admite uma reta tangente neste ponto. Podemos facilmente dar exemplos de funções que são contínuas em toda a reta, mas que não são deriváveis em um número finito de pontos, assim como também, podemos pensar em funções contínuas com uma infinidade de pontos onde não são deriváveis. Mas, ao falar de uma função contínua em toda a reta que não possui derivada em ponto algum, a nossa imaginação pode falhar.

Motivado pela ideia de construir uma função com tais características, algo que muitos matemáticos achavam não existir, Karl Weierstrass em 1872 tornou-se o primeiro a apresentar um exemplo de função que surpreendeu a todos, pois tinha continuidade em toda reta, mas não possuía a diferenciabilidade em nenhum ponto do seu domínio. Partindo do princípio da dúvida por parte da comunidade matemática, a função Weierstrass tornou-se desde a sua aparição um importante contraexemplo que conseguiu provar a hipótese da existência de funções com tais propriedades. A função é mostrada no seguinte teorema:

Seja $a \in (0,1)$ e seja b um inteiro ímpar tal que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Então a série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n cos(b^n \pi x)$$

converge uniformemente em $\mathbb{R}$ e define uma função contínua, mas não derivável em nenhum lugar.

No capítulo 2 é apresentada a teoria base para construirmos a função de Weierstrass. No desenvolvimento da teoria apresentada, admitimos um conhecimento prévio do leitor sobre conjuntos numéricos e de cálculos diferencial, com foco principal nos números reais. Partindo de conhecimento prévios iniciamos a teoria geral, com conceitos introdutórios de análise real, sequências e séries de números reais, de modo a familiarizar o leitor com o tema, caso não tenha conhecimento do mesmo, e desenvolvendo os conceitos na abordagem dos números reais, indo até as sequências e séries de funções.

No capítulo 3, o tema central deste trabalho, abordamos a função de Weierstrass propriamente dita. Iniciaremos sua construção, feita inicialmente por Weierstrass. Para isso, vamos estabelecer algumas condições necessárias para garantir a continuidade da função, onde utilizaremos ferramentas obtidas através da análise numérica, que foram abordadas nas preliminares para produzir essa construção. Feita a tarefa de mostrar sua continuidade vamos mostrar que a função não é derivável em ponto algum.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos definições e resultados iniciais que servirão de base para construir a função proposta. Vamos iniciar com os conceitos introdutórios limites de funções, funções contínuas, derivadas e sequências de números reais, desde sua definição, propriedades e exemplos. Após a apresentação de sequências de números reais, iremos adentrar nas séries de números reais, apoiando-se nos conceitos de sequências, mostrando as propriedades e exemplos.

Tendo exibido a teoria de sequencias e séries de números reais, vamos trabalhar as sequências de números reais, onde generalizamos algumas ideias vistas em sequências de números reais, porém no contexto de funções. Em seguida, vamos trabalhar um pouco sobre as séries de funções.

Todo o conteúdo mostrando nessas preliminares tem como objetivo preparar o leitor para que o mesmo possa compreender os resultados essenciais para a construção da função de Weierstrass.

2.1 LIMITE, CONTINUIDADE E DERIVABILIDADE DE FUNÇÕES

Vamos trabalhar nesta parte a noção de continuidade de uma função, onde para o nosso caso, trataremos de funções contínuas no conjunto dos números reais e também a derivada de funções de uma variável real. Para o estudo da seção, consideramos um certo nível de conhecimento sobre conjuntos e funções, juntamente com a noção de limite.

Tendo apresentado noções iniciais sobre a continuidade de uma função, iremos ver o que é derivada e uma função, abordando alguns pontos chaves que servirão de ferramentas em conceitos mais à frente no trabalho. Para um estudo mais aprofundado dos temas recomendamos consultar (LIMA, 2019).

Definição 2.1. (Ponto de acumulação). Seja X um subconjunto dos reais e $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é ponto de acumulação de X se todo intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, de centro a contém algum ponto $x \in X$, onde x diferente de a.
Simbolicamente, dizer que a é ponto de acumulação de X, com x diferente de a, é equivalente a:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x \in X;\ 0 < |x-a| < \varepsilon.$$

Notação: representamos o conjunto dos pontos de acumulação de X por X'.

Definição 2.2. (Ponto de acumulação à direita). Dizemos que um ponto a é ponto de acumulação à direita do conjunto X quando para $\varepsilon > 0$, todo intervalo $[a, a+\varepsilon)$, contém algum ponto de X diferentes de a.
Notação: denotaremos por X'_+ o conjunto dos pontos de acumulação à direita de X.

Definição 2.3. (Ponto de acumulação à esquerda). De maneira semelhante a definição de ponto de acumuação à direita, dizemos que a é ponto de acumulação à esquerda do conjunto X quando para $\varepsilon > 0$, todo intervalo $(a-\varepsilon, a]$, contém pontos de X diferentes de a.
Notação: denotamos por X'_- o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda de X.

2.1.1 Limite de funções

Seja a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}; X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X (ou seja $a \in X'$).
Definição 2.4. Diremos que limite de $f(x)$ quando x tende para a, representado por

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

quando para cada real $\varepsilon > 0$ arbitrário, existir $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ tivermos $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Simbolicamente:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0;\ x \in X,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema 2.1. (Unicidade do limite). *Dado $X \in \mathbb{R}$, seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se tivermos $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.*
Demonstração: LIMA (2019). ■

Proposição 2.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}, a \in X'$ e $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, então:*

1. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$;
2. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$;
3. $\lim_{x\to a}(\dfrac{f(x)}{g(x)}) = \dfrac{L_1}{L_2}$, *se* $L_2 \neq 0$.

Demonstração: Ver LIMA (2019). ■

Proposição 2.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R},\ a \in X'$ e $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e existe uma contante M tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in X - a$ então $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = 0$.*
Demonstração: Ver LIMA (2019). ■

Proposição 2.3. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R},\ f : X \longrightarrow \mathbb{R},\ g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(X) \subset Y$. Sejam $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to b} g(x) = c$ tem-se $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$, desde que $c = g(b)$.*
Demonstração: Ver LIMA (2019). ■
Proposição 2.4. *Sejam $X \subset \mathbb{R},\ a \in X'$ e $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se existe $r > 0$ e $L \in \mathbb{R}$*

tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *para todo* $x \in (a-r, a+r)$ *e* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a} h(x)$, *então* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$.

Demonstração: Ver GUIDORIZZI (2008). ■

Definição 2.5. (Limite à direita). Sejam $X \subset \mathbb{R}, f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$, ou seja, a um ponto de acumulação à direita de X. Dizemos que o número real L é limite à direita de $f(x)$ e denotamos por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

quando para todo $\varepsilon > 0$ arbitrário dado, pudermos obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, com $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$.

Simbolicamente $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0; x \in X, 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 2.6. (Limite à esquerda). De maneira semelhante a definição de limite à direita, dizemos que um número real L é limite à esquerda de $f(x)$ se:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

quando para todo $\varepsilon > 0$ arbitrário dado, pudermos obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, com $x \in X$ e $0 < a - x < \delta$.

Simbolicamente $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0; x \in X, 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Proposição 2.5. *Seja* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}; X \subset \mathbb{R}$, *e* $a \in X'_+ \cap X'_-$. *Então o limite* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

Demonstração: Ver LIMA (2019). ■

Definição 2.7. Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente, ou seja, não existe $b \in \mathbb{R}$ tal $x \leq b$ para todo $x \in X$. Dada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, escreve-se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

quando o número real L satisfaz a condição:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0; x \in X, \ x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 2.8. Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado inferiormente, ou seja, não existe $a \in \mathbb{R}$ tal $x \geq a$

para todo $x \in X$. Dada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, escreve-se

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

quando o número real L satisfaz a condição:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0; x \in X,\ x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 2.1. Determine o limite da função $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, ou seja, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$; $x \in X, x > \delta \Rightarrow x > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow x^2 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} < \varepsilon \Rightarrow$ $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Observação 2.1. As proposições 2.1, 2.2 e 2.3 são válidas quando substituimos o limite pelos limites laterais e pelo limite no infinito.

2.1.2 Funções contínuas

Definição 2.9. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in X$ se pudermos tornar $f(x)$ arbitrariamente próxima de $f(a)$, desde que tomemos x suficientemente próximo de a.
Precisamente, $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se para todo $\varepsilon > 0$ abitrário, pudermos encontrar $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0;\ x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemplo 2.2. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b, a \neq 0$ é contínua no ponto $p = p_0$. Com efeito, suponhamos $a > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{a}$; $x \in X$, logo:
$|x - p_0| < \delta \Rightarrow |x - p_0| < \dfrac{\varepsilon}{a} \Rightarrow |ax - ap_0| < \varepsilon \Rightarrow |ax + b - ap_0 - b| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |f(x) - f(p_0)| < \varepsilon.$$

Analogamente, o mesmo acontece para $a < 0$.

Definição 2.10. (Função contínua). Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.

Exemplo 2.3. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b, a \neq 0$ é contínua.
Como vimos, no exemplo anterior, a função $f(x) = ax + b, a \neq 0$ é contínua em um ponto $p = p_0$ no seu domínio. Assim, pela definição basta repetirmos o mesmo raciocínio em

um ponto p qualquer no domínio de f para mostramos que ela é o contínua em todos os pontos.

Exemplo 2.4. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é contínua.
Considere p um ponto qualquer do domínio de f e $f(x) = |x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$.
Veja que para $p > 0$ existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in (p - r, p + r)$, temos $f(x) = x$, Logo para $p > 0$, f é contínua pelo exercício 2.3. Já para $p < 0$, existe $r_1 > 0$ tal que $f(x) = -x$, para todo $x \in (p - r_1, p + r_1)$. Assim, novamente pelo exercício 2.3, podemos afirmar f é contínua em $p < 0$.
Finalmente, para $p = 0$ temos: Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon; |x - 0| < \delta \Rightarrow |x| < \delta$ $\Rightarrow ||x| - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Proposição 2.6. *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas no ponto $a \in \mathbb{X}$. Então as seguintes funções também são contínuas em a :*

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $f \cdot g$
4. $c \cdot f; \ c \in \mathbb{R}$
5. $\dfrac{f}{g}$, *se* $g(a) \neq 0$

Demonstração: Ver LIMA (2019). ■

Proposição 2.7. *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas nos pontos $a \in X$ e $b = f(a) \in X$, respectivamente, e ainda se $f(X) \subset Y$, então $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é também contínua no ponto a.*
Demonstração: Ver LIMA (2019). ■

2.1.3 Funções deriváveis

Definição 2.11. (Função derivável em um ponto). Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ diz-se derivável em um ponto $a \in X \cap X'$, sendo a um ponto de acumulação de X, se existir o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Caso o limite exista, denominamos o limite $f'(a)$ de a derivada de f em a.

Exemplo 2.5. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é uma função constante. Então a sua derivada em um ponto a é:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = 0,$$

$f'(a) = 0$ para $a \in \mathbb{R}$.

Observação 2.2. A derivada de uma função constante é sempre nula.

Se tomarmos a função $q : x \mapsto [f(x) - f(a)]/(x - a)$ definida em $X - \{a\}$. Então $q(x)$ irá representar a inclinação da reta secante passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. A reta passando pelo ponto $(a, f(a)) \in \mathbb{R}$ que tem inclinação $f'(a)$ é denominada a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Dito isto, a inclinação da reta tangente será dada pelo limite das inclinações das retas secantes que passam pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ quando $x \to a$.

Se escrevermos $h = x - a$ ou $x = a + h$, a derivada de f em $a \in X \cap X'$ vai ser dada pelo limite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Assim, a função $h \mapsto [f(a+h) - f(a)]/h$ é definida no conjunto $Y = \{h \in \mathbb{R} - 0; a + h \in \mathbb{X}\}$, o tem 0 como ponto de acumulação.

Exemplo 2.6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $ax + b$. Para todo $c \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$ arbitrário, temos:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} = a.$$

De fato,

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = a.$$

Portanto $f'(c) = a$.

Definição 2.12. (Derivada à direita). Quando $a \in X \cap X'_+$, ou seja, a é ponto de acumulação à direita de X, e pertence a X, podemos definir à derivada da função f no ponto a, caso exista, sendo o limite:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Observação 2.3. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto a se, e somente se, para qualquer sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ dada, com $x_n > a$ e $\lim x_n = a$, tivermos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'_+(a).$$

Definição 2.13. (Derivada à esquerda). De maneira análoga a definição de derivada à direita, definimos também a derivada à esquerda. Quando a é um ponto de acumulação à esquerda de X e está em X, a derivada à esquerda da função f no ponto a, caso exista, é dada pelo limite:

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Observação 2.4. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável à esquerda no ponto a se, e somente se, para qualquer sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ dada, com $x_n < a$ e $\lim x_n = a$, tivermos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'_-(a).$$

Observação 2.5. Quando a é ponto de acumulação tanto à esquerda, como à direita, então $f'(a)$ existe se, e somente se, as derivadas laterais existem e são iguais.

Exemplo 2.7. (Função módulo). $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.
Para $x \neq 0$, temos:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \pm 1.$$

Assim, existem $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$, no entanto, não existe $f'(0)$.
Mas se $a \neq 0$, $f'(a)$ existe e será igual a 1 para o caso em que $a > 0$ e -1 se $a < 0$.

Observação 2.6. Das propriedades de limites, uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a se, e somente se, para qualquer sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ dada, com $\lim x_n = a$, tivermos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a).$$

Definição 2.14. (Função derivável num conjunto). Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um conjunto X quando a derivada de f existe em todos os pontos $a \in X \cap X'$.

Observação 2.7. Dizemos simplemente que uma função é derivável, quando ela é derivável em todos os pontos do domínio.

Teorema 2.2. *Se a derivada $f'(a)$ existir, então a função f é contínua no ponto a.*
Demonstração: Considerando por hipótese a existência do limite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Assim, consequentemente também existe

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right] = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a}(x - a) = 0.$$

Portanto, f é contínua no ponto a. ∎

Observação 2.8. A recíproca do teorema não é válida, pois do exemplo 2.4 temos que a função $f(x) = |x|$ é contínua em todos os pontos do domínio, no entanto, o exemplo 2.7 nos diz que a função $f(x) = |x|$ não é derivável por conta da não derivabilidade na origem, apesar de ser derivável nos outros pontos do domínio. Então surge uma pergunta natural: há algum exemplo negando a recíproca de tal forma que a função é contínua e não é derivável em ponto algum?

A resposta para a pergunta feita na observação 2.8 é o tema central desse trabalho e será respondida no capítulo 3. No entanto, continuaremos desenvolvendo os conteúdo preparatórios para responder essa pergunta no próximo capítulo.

2.2 SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE NÚMEROS REAIS

Serão apresentadas nesta seção algumas definições, teoremas e resultados importantes a respeito das sequências e séries de números reais. A seção foi dividida em duas partes, onde na primeira parte é abordado os conceitos iniciais sobre sequências, como definição, sequências limitadas, monótonas, limite de uma sequência e convergência. Por último, abordamos as sequências de Cauchy e os resultados essências.

Na segunda parte mostramos um estudo introdutório das séries de números reais, onde buscamos trabalhar os principais resultados sobre o tema. São abordados conceitos iniciais como a definição, convergências das séries, critérios de comparação e séries absolutamente convergentes. No final da segunda parte apresentamos alguns testes importantes que permitem analisar a convergência de grande parte das séries, tais como o teste da razão e o teste da raiz. Para um estudo mais aprofundado dos temas recomendamos consultar (LIMA, 2019).

2.2.1 Sequências

Definição 2.15. (Sequência de números reais). Uma sequência de números reais é uma função real $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado termo de ordem n, ou n-ésimo termo da sequência. Escrevemos $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n), para indicar a sequência x.

Definição 2.16. (Sequência Limitada). Uma sequência (x_n) é dita limitada superiormente (respectivamente inferiormente) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a sequência (x_n) é limitada, quando ela é limitada superior e inferiormente. Equivalentemente existe um $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 2.9. Se uma sequênca não é limitada, ela é dita ilimitada.

Definição 2.17. (Sequência crescente e não-decrescente). Uma sequência (x_n) chama-se crescente quando $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, isto é, quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência diz-se não-decrescente.

Definição 2.18. (Sequência decrescente e não-crescente). Uma sequência (x_n) chama-se decrescente quando $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$, isto é, quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $x_n \geq x_{n+1}$ para todo n, então a sequência diz-se não-crescente.

Observação 2.10. (Sequência Monótona). As sequências crescentes, decrescentes, não-decrescentes e não-crescentes são chamadas de sequências monótonas.

Exemplo 2.8. $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos uma sequência constante (1,1,...,1,...); ela é evidentemente limitada, pois $x(\mathbb{N}) = 1$, não-decrescente e também não-crescente. Consequentemente, também monótona.

Exemplo 2.9. $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ é a aplicação de inclusão. Obtemos a sequência $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ que é uma sequência limitada inferiormente, ilimitada superiormente e monótona crescente.

Definição 2.19. (Subsequência). Seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Uma subsequência de x é uma restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ de $\mathbb{N}$. Utilizamos a notação $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para indicar a subsequência $x' = x|_{\mathbb{N}'}$.

Exemplo 2.10. A sequência $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $x(n) = 2^n$ é $(2, 4, 8, ...)$ e a restrição de x ao subconjunto $\mathbb{N}' = 2\mathbb{N}$ é uma subsequência de $x(n)$, com lei de formação $x : \mathbb{N}' = 2\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $(4, 16, ...)$.

Definição 2.20. (Limite de uma sequência). Diz-se que um número real a é limite de uma sequência (x_n) de números reais, e escreve-se $a = \lim x_n$ ou $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Simbolicamente:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Observação 2.11. Uma sequência que possui limite é dita convergente. Do contrário, ela é dita divergente.

Observação 2.12. A condição $|x_n - a| < \varepsilon$ é equivalente a termos $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, ou seja, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, implicando que x_n pertence ao intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Exemplo 2.11. A sequência $(x_n) = \dfrac{n}{2n+1}$ converge e tem limite $\dfrac{1}{2}\cdot$ De fato, como

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Para $n > n_0$, obtemos:

$$2n + 1 > 2n_0 + 1 > 2n_0 \Rightarrow 2(2n+1) > 2(2n_0) \Rightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{4n_0}.$$

Com isso, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $n_0 \geq \frac{1}{4\varepsilon}\cdot$ Ou seja, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Portanto $\lim x_n = \frac{1}{2}\cdot$

Teorema 2.3. *(Unicidade do limite). Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim x_n = b$*, então* $a = b$.

Demonstração: Se $\lim x_n = a$ devemos então obter que para todo número real $b \neq a$, $\lim x_n \neq b$. Tomando $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2} > 0$, então $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \varnothing$. Do contrário, $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, deveríamos ter $|a-x| < \varepsilon$ e $|b-x| < \varepsilon$, obtendo ainda $|a-b| \leq |a-x| + |x-b| < 2\varepsilon = |a-b|$, um absurdo. Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $x_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, já que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \varnothing$. Portando, $\lim x_n \neq b$. ■

Teorema 2.4. *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* (x_n) *converge para o limite* a.

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ a subsequência. Dado qualquer intervalo aberto I de centro a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com $n > n_0$, pertencem a I. Em particular, todos os termos x_{n_k}, com $n_k > n_0$ também pertencem a I. Logo $\lim x_{n_k} = a$. ■

Corolário 2.1. *Se* $\lim x_n = a$ *então, para todo* $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$.

Demonstração: Com efeito, $(x_{1+k}, x_{2+k}, \cdots, \cdots)$ é uma subsequência de (x_n). ■

Teorema 2.5. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $a = \lim x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Considerando, agora, um conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_0, a-1, a+1\}$. Sejam c o menor elemento e d o maior elemento de F. Então todos os termos x_n da sequência estão todos contidos no intervalo $[c, d]$; logo a sequência é limitada. ■

Observação 2.13. A recíproca do teorema acima é falsa.

Exemplo 2.12. A sequência $x_n = (-1)^n$ é limitada, mas não é convergente, visto que, suas subsequência $x_{2n} = (-1)^{2n}$ e $x_{2n+1} = (-1)^{2n+1}$ tendem respectivamente a 1 e -1.

Proposição 2.8. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada, então* $\lim x_n \cdot y_n = 0$ *(mesmo que o limite de* (y_n) *não exista).*

Demonstração: LIMA (2019). ■

Teorema 2.6. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência monótona, não-descrecente e limitada. Agora tomemos $a = \sup\{x_n; n = 1, 2, ...\}$. Estabelecendo que $lim x_n = a$, temos que para qualquer $\epsilon > 0$ dado, $a - \epsilon < a$, então o número $a - \epsilon$ não é cota superior dos conjunto formado por x_n. Assim, vai existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_n$. Portanto, como (x_n) é uma sequência monótona, $n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$, então $a - \epsilon < x_n$. Dado que $x_n \leq a, \forall n$, seque de $n > n_0$ que $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$. Logo, obtemos que $\lim x_n = a$. Para o caso de (x_n) ser não-crescente, basta tomarmos $\lim x_n = inf\{x_n; n = 1, 2, ...\}$, onde chegaríamos a mesma conclusão seguindo o mesmo racíonio. ■

Exemplo 2.13. A sequência $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, é crescente, pois $a_n < a_{n+1}$ e é limitada, visto que

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portando, pelo teorema acima, a sequência a_n converge.

Corolário 2.2. *Se uma sequência monótona (x_n) possui uma subsequência convergente, então (x_n) é convergente.*

Corolário 2.3. (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Definição 2.21. (Sequência de Cauchy). Seja (x_n) uma sequência de números reais. Ela se chama uma sequência de Cauchy quando cumpre a seguinte condição: dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Teorema 2.7. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*
Demonstração: Considere $lim x_n = a$. Escolhendo $\varepsilon > 0$ de maneira arbitrária,temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0 \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, concluindo que (x_n) é uma sequência de Cauchy. ■

Exemplo 2.14. A sequência $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ é uma sequência de Cauchy. De fato, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, então se $n, m > n_0$, podemos supor que $n > m$, assim, teremos $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0}$. De onde concluímos que:

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \left|\frac{1}{n_0} - 0\right| = \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Lema 2.1. *Toda sequência de Cauchy é limitada*
Demonstração: Dada (x_n) uma sequência de Cauchy. Escolhendo $\varepsilon = 1$, temos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$. Consequêntemente, para $n \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_0} - x_n| < 1$, se onde obtemos que para $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$. Agora sejam α e β respectivamente o menor e o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0-1}, x_{n_0+1}\}$. Assim, $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, portanto (x_n) é limitada. ■

Lema 2.2. *Se uma sequência de Cauchy (x_n) possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$, então $\lim x_n = a$.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Existe também $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Portanto, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Isto mostra que $\lim x_n = a$. ■

Teorema 2.8. *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.*

Demonstração: Seja (a_n) uma sequência de Cauchy de números reais. Pelo Lema 2.1, (a_n) é uma sequência limitada. Logo, resulta do Corolário 2.3 (Bolzano-Weierstrass) que (a_n) possui uma subsequência convergente, o que nos dá em consequência do Lema 2.2 que (a_n) é uma sequência converge. ■

2.2.2 Séries

Seja (a_n) uma sequência de números reais. Podemos associar a (a_n) uma nova sequência (s_n), chamada de sequência das somas parciais de (a_n), ou ainda, de sequência gerada por (a_n). Definimos a sequência (s_n) como:

$$s_0 = a_0,\ s_1 = s_0 + a_1 = a_0 + a_1, \cdots, s_n = s_{n-1} + a_n.$$

Observação 2.14. Vemos que $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ e $a_n = s_n - s_{n-1}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.22. (Série numérica). Uma série numérica é a sequência (s_n) mostrada anteriormente, que é gerada por uma sequência (a_n) de números reais. Denotada por:

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

onde a_n é chamado termo geral da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Definição 2.23. (Série convergente e divergente). Dizemos que uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, quando o existe o limite $S = \lim S_n$, e chamado S de soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Caso o limite não exista dizemos que a série diverge.

O Teorema a seguir nos dará um critério para identificar quando uma série é convergente ou diverge.

Teorema 2.9. *Se* $\sum a_n$ *é uma série convergente então* $\lim a_n = 0$.

Demonstração: Seja $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Então existe $s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Evidentemente tem-se também $s = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$. Logo $0 = s - s = \lim s_n - \lim s_{n-1} = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim a_n$. ■

Observação 2.15. É suficiente para verificar se uma série $\sum a_n$ diverge, mostrar que

$\lim a_n \neq 0$

Observação 2.16. A recíproca do teorema é falsa. Ou seja, se tivermos $\lim a_n = 0$ não podemos concluir que a série $\sum a_n$ converge.

Exemplo 2.15. Na série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, temos $\lim \frac{1}{n} = 0$, mas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.
A demonstração é feita da seguinte maneira:
Suponhamos por absurdo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge.
Assim, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \lim s_n = s$.
Pelo exposto anteriormente, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ também convergem, visto que $(a_{n_k}) = \left(\frac{1}{2n}\right) \subset (a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ e $(a_{n_l}) = \left(\frac{1}{2n-1}\right) \subset (a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ e também temos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2n} > 0$ e $\frac{1}{2n-1} > 0$.
Portanto, podemos denotar $\forall n \in \mathbb{N}$

$$t_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

consequentemente, existem $t, u \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \lim t_n = t$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \lim u_n = u$. Observamos também que $s_n = t_n + u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim

$$s \approx t + u.$$

Logo,

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \cdot s = \frac{s}{2}.$$

Desta forma, segue que $u = s - t$ e $t = \frac{s}{2}$ então $u = s - \frac{s}{2} \Rightarrow u = \frac{s}{2}$ implicando que $u = t$. Podemos ainda escrever $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - t_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2}$.
Concluindo que $0 = \frac{s}{2} - \frac{s}{2} = u - t \geq \frac{1}{2}$, um absurdo. Portanto, a série harmônica diverge.

Exemplo 2.16. (Série Geométrica) A série geométrica é obtida a partir da soma de infinitos termos de uma progressão geométrica.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

A série geométrica diverge quando $|a| \geq 1$ visto que $\lim_{n\to\infty} a^n \neq 0$. E para $|a| < 0$, a série geométrica converge, e $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$, seguindo um raciocínio semelhante ao do exemplo anterior.

Teorema 2.10. *Seja $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum a_n$ converge se, e somente se, as reduzidas $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ formam uma sequência limitada, isto é, se, e somente se, existe $k > 0$ tal que $a_1 + \cdots + a_n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Sendo $a_n \geq 0$, temos $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots$; logo a sequência (s_n) que é monótona, converge se, e somente se, é limitada. ■

Corolário 2.4. (Critério de comparação). *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não-negativos. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_n \leq c \cdot b_n$ para todo $n > n_0$ então a convergência de $\sum b_n$ implica a convergência de $\sum a_n$, enquanto que a divergência de $\sum a_n$ acarreta a de $\sum b_n$.*

Exemplo 2.17. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

De fato, temos que $n \leq n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ o que implica em $\sqrt{n} \leq n$. Consequentemente, $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \forall n \in \mathbb{N}$. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge, segue do Critério de Comparação que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ também diverge.

Teorema 2.11. (Critério de Cauchy para séries). *A fim de que a série $\sum a_n$ seja convergente é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p}| < \varepsilon$ quaisquer que sejam $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Basta observar que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p}| = |s_{m+p} - s_n|$, onde (s_n) é a sequência das reduzidas de $\sum a_n$, e aplicar o critério de Cauchy para sequências. ■

Definição 2.24. Uma série $\sum a_n$ chama-se absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ é uma série convergente.

Teorema 2.12. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração: Se $\sum |a_n|$ converge, então dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$, qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$. Nessas condições $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$, e portanto, $\sum a_n$ converge, pelo Critério de Cauchy para séries. ■

Teorema 2.13. (Teste da Razão). *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *uma série de números reais positivos tal que existe*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 0.$$

(a) Se $L < 1$, *a série converge;*
(b) Se $L > 1$, *a série diverge.*

Demonstração:

(a) Seja d um número real tal que $L \leq d < 1$. Pela definição de limite, se considerarmos um $n_0 > n$, temos $\frac{a_n + 1}{a_n} < d$, implicando em $a_n < da_n$. Logo, obtemos as seguintes desigualdades:

$$a_{n+1} < a_n d, \;\; a_{n+2} < a_{n+1} d < a_n d^2,$$

$$a_{n+3} < a_{n+2} d < a_n d^3, \cdots$$

e de modo geral,

$$a_{n+k} < a_n d^k, k = 1, 2, \cdots$$

Como a série $\sum_{n=0}^{\infty} d^k$ é absolutamente convengente, já que é uma série geométrica onde $0 < d < 1$ e, a partir do indice $n+1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é majorada por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n d^k$. Assim, pelo Critério de Comparação a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente.

(b) Se $L > 1$ temos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, o que implica em $a_{n+1} > a_n$ para n suficientemente grande, ou seja, o termo geral não tende a zero, consequentemente a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. ■

Observação 2.17. O caso em que $L = 1$ é inconclusivo para a convergência ou divergência da série.

Exemplo 2.18. Vamos verificar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Temos que $\lim \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \right| = \lim \left| \frac{2}{n+1} \right| = \lim \frac{2}{n+1} = 2 \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1$. Portanto, pelo Teste da Razão, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge.

Teorema 2.14. (Teste da Raiz). *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos tal que existe*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 0.$$

(a) Se $L < 1$, a série converge.

(b) Se $L > 1$, a série diverge.

Demonstração:

(a) Tomando um número real d tal que $L \leq d < 1$. Pela definição de limite, temos que $\sqrt[n]{a_n} \leq d < 1$, implicando em $a_n < d^n$, com n suficientemente grande. Logo, como a série $\sum_{n=0}^{\infty} d^n$ é absolutamente convergente, já que é uma série geométrica onde $0 < d < 1$ então, pelo Critério de Comparação a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente.

(b) Se $L > 1$, obtemos $\sqrt[n]{a_n} > 1$ o que nos dá $a_n > 1$ para n suficientemente grande. Portanto, a série diverge, já que seu termo geral não vai tender a zero. ■

Observação 2.18. O caso em que $L = 1$ é inconclusivo para a convergência ou divergência da série.

Exemplo 2.19. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n} \right)^n$ converge.

Verificamos a convergência pelo Teste da Raiz.

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\left| \frac{\log n}{n} \right|^n} = \lim \frac{\log n}{n} = 0.$$

Assim, como $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n} \right)^n$ é convergente.

2.3 SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Nesta seção apresentaremos conceitos iniciais sobre as sequência e séries de funções, um tema muito importante da matemática, levando em consideração as suas mais diversas aplicações, dentre elas a que usaremos aqui, a representação de funções como séries de potências, em especial para as funções seno e cosseno.

Iniciaremos a seção apresentando algumas definições e resultados importantes sobre o tema. Na primeira parte abordaremos conceitos inicias, como a convergência simples e uniforme de sequência de funções, sequências de Cauchy e o critério de Cauchy para a convergência uniforme. Já na segunda parte desta seção mostraremos conceitos base de séries de funções, tais como a definição de uma série de funções, série de funções normalmente convergente e o teste de Weierstrass, para um estudo mais aprofundado consultar (DJAIRO, 1974 e SOARES, 2014). No final da seção adentraremos nas séries de potências, abordando condições necessárias para a convergência da mesma, a convergência uniforme e critérios para a representação de funções como séries de potência em conjuntos com a série de Taylor e Maclaurin, onde mostraremos a representação das funções seno e cosseno como séries de potências.

2.3.1 Sequências de funções

Definição 2.25. (Sequência de funções). Seja X um conjunto de números reais. Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n, definida em X e tomando valores reais.

Definição 2.26. (Convergência simples). Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, do domínio, a sequência de números $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ converge para o número $f(x)$. Ou seja, para todo $x \in X$ fixado, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Observação 2.19. Na definição anterior, quando f_n converge simplesmente para uma função f dizemos que "f_n converge simplesmente para f em X". Ainda de maneira mais resumida: $f_n \longrightarrow f$ simplesmente em X.
Observação 2.20. A convergência simples, às vezes, também se chama convergência ponto a ponto ou convergência pontual.

Definição 2.27. (Convergência uniforme). Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

seja qual for $x \in X$.

Exemplo 2.20. A sequência de funções $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ convergente simplemente em toda reta para zero, ou seja, é uma função identicamente nula $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Observamos que para cada $x_0 \in X$ fixado, tem-se:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{n} = 0.$$
Exemplo 2.21. Seja $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções definida por $f_n(x) = x^n$, onde $(n = 1, 2, \cdots)$ então (f_n) converge simplemente para a função $f(x) = 0$ para o caso de $0 \leq x \leq 1$ e para $f(1) = 1$ se $x = 1$.
Note que $\forall x \in [0,1)$ temos:
$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$
e
$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

Definição 2.28. (Sequência de Cauchy). Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$

chama-se uma sequência de Cauchy quando, para quaisquer $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, qualquer que seja $x \in X$.

Teorema 2.15. (Critério de Cauchy para convergência uniforme). *Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Supondo por hipótese que $f_n \longrightarrow f$ é uniformemente convergente em X. Assim, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que se

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\ x \in X.$$

Assim, tomando novamente por hipótese $m, n > n_0$ vale a desigualdade anterior e

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\ x \in X.$$

Logo, se $m, n > n_o$ temos que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall\ x \in X.$$

Consequentemente (f_n) é uma sequência de Cauchy. De maneira semelhante, se a sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é de Cauchy, obtemos que para cada $x \in X$, os números $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, formam uma sequência de Cauchy de números reais. Portanto, pelo Teorema 2.8, como toda sequência de Cauchy de números reais é convergente, esta sequência converge para um número real $f(x)$. Definindo assim, uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \forall x \in X.$$

Para mostrar que $f_n \longrightarrow f$ converge uniformemente em X tomamos $\varepsilon > 0$ arbitrário, onde podemos encontrar n_0 tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in X.$$

Na igualdade anterior se mantermos n e x fixos, e fizermos $m \to \infty$ vamos obter

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in X$$

desde que $n > n_o$. Provando assim que $f_n \longrightarrow f$ é uniformemente convergente. ∎

Exemplo 2.22. A sequência de funções $f_n(x) = sen\dfrac{x}{n}$ definida em $x \in [0, 1]$, convergente simplesmente para $f = 0$.

De fato, para x_0 fixado, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n} = 0$ e $\lim\limits_{n\to\infty} sen\dfrac{x}{n} = 0$. A sequência $f_n(x) = sen\dfrac{x}{n}$ também converge uniformemente, o que é resultado da seguinte desigualdade:

$$sen\frac{x}{n} \leq sen\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

para $x \in [0,1]$ e do Critério de Cauchy para a convergência uniforme.

Teorema 2.16. *(Convergência uniforme e continuidade). Se $f_n \longrightarrow f$(converge) uniformemente em X e todas as f_n são contínuas num ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.*
Demonstração: LIMA (2019). ∎

Corolário 2.5. *O limite uniforme de uma sequência de funções contínuas é uma função contínua.*

2.3.2 Séries de funções

Definição 2.29. (Série de funções). Seja (f_n) uma sequência de funções; $f_n : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$. A partir de (f_n) uma nova sequência (s_n) cujos elementos são as somas:

$$s_1 = f_1, s_2 = f_1 + f_2, \cdots, s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n,$$

as quais chamaremos de reduzidas da série $\sum f_n$. A parcela f_n chamamos de termo geral da série.
Se existir o limite

$$s = \lim s_n = \lim_{n\to\infty}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n),$$

diremos que a série $\sum f_n$ é convergente e o limite s será chamado a soma da série. Escrevemos então:

$$s = \sum f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots .$$

Se a sequência das reduzidas não convergir, diremos que a série $\sum f_n$ é divergente.

Definição 2.30. Uma série de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se normalmente convergente quando existe uma sequência de constantes $a_n \geq 0$ tais que $\sum a_n$ converge e $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$.

Exemplo 2.23. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n^2}$ é normalmente convergente visto que as funções $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2}$, satisfazem $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ pois $sen(nx) \leq 1$ e $\sum \dfrac{1}{n^2}$ é uma série convegente de números reais. Tal fato segue do

Critério de comparação.

Teorema 2.17. (Teste de Weierstrass). *Se $\sum f_n$ é normalmente convergente então $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ são uniformemente convergentes.*

Demonstração: Seja X o domínio comum de todas as funções f_n. Para $n, p \in \mathbb{N}$ arbitrários e todo $x \in X$, temos $|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \leq a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$. Segue-se então do critério de Cauchy (Teorema de Cauchy para convergência uniforme) que $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ convergem uniformemente em X. ■

Teorema 2.18. (Critério de Cauchy para séries). *Dada uma série de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$. A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge se, e somente se, a sequência de suas somas parciais for uma sequência de Cauchy. Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existe um número positivo N tal que, para $n \geq m \geq N$, temos*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_n \right| < \epsilon,$$

ou equivalentemente:

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=n}^{n+m} f_n = 0.$$

Demonstração: Basta observar que $|f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots f_{n+p}| = |s_{m+p} - s_n|$, onde (s_n) é a sequência das reduzidas de $\sum f_n$, e aplicar o critério de Cauchy para sequências. ■

2.3.3 Séries de potências

Definição 2.31. (Série de potências). Dada uma sequência $(a_n(x - x_0)^n)$, a série gerada por ela denominamos série de potências com centro x_0, expressa como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots +$$

Teorema 2.19. *Dada uma série de potências, definida anteriormente. Seja R um número real dado por:*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}.$$

Temos as seguintes condições:

(i) Se $|x - x_0| < R$, então a série converge absolutamente.

(ii) Se $|x - x_0| > R$, então a série diverge.

Demonstração:

(i) Supondo que $|x| < R$, então existe um número real r tal que $|x| < r < R$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|^{1/n} < \dfrac{1}{r}$ para todo $n \geq n_0$, já que $\dfrac{1}{r} > \dfrac{1}{R}\cdot$ Então:

$$|a_n| < \frac{1}{r^n}, \forall n \geq n_0.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $|x|^n$, obtemos $|a_n x^n| < \dfrac{|x^n|}{r^n}$ implicando que $|a_n x^n| < \left(\dfrac{|x|}{r}\right)^n$ para todo $n > n_0$. Assim, a partir de n_0, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ é majorada pela série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{r}\right)^n$, que converge já que $\dfrac{|x|}{r} < 1$. Portanto, segue do Critério da Comparação (Corolário 2.4) que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente quando $|x| < R$.

(ii) Supondo que $|x| > R$, escolhemos um número real r de tal forma que $|x| > r > R$. Então, $\dfrac{1}{r} < \dfrac{1}{R}$ e, da definição de $\limsup$, há uma infinidade de números naturais n para os quais $\dfrac{1}{r} < |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Assim, $|a_n x^n| > \left(\dfrac{|x|}{r}\right)^n$ para uma infinidade de números naturais n e, como $\left(\dfrac{|x|}{r}\right) > 1, |a_n x^n|$ não converge para zero. Logo, quando $|x| > R$, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge.

$\blacksquare$

Definição 2.32. (Raio de convergência e disco de convergência). Ao número $0 \leq R \leq \infty$ definido anteriormente, damos o nome de raio de convergência da série de potências. O disco $D(x_0, R)$, é denominado o seu disco de convergência.

Teorema 2.20. *Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, a_n \neq 0$ uma série de potência, para todo $n \in \mathbb{N}$, e R, o seu raio de convergência, então:*

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_n + 1} \right|$$

se o seu limite existir.

Demonstração: Supondo que o limite exista, então pelo Teste da Razão (Teorema 2.13) que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, a_n \neq 0$ converge quando:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| < 1,$$

ou de maneira equivalente,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n(x-x_0)^n}{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}(x-x_0)}\right| = \frac{1}{|x-x_0|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > 1,$$

de onde obtemos que:

$$|x-x_0| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R,$$

de acordo com o Teorema 2.19 - (i).

Entretando, pelo Teste da Razão (Teorema 2.13), a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ diverge quando:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| > 1,$$

equivalendo a:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n(x-x_0)^n}{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}(x-x_0)}\right| = \frac{1}{|x-x_0|}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < 1,$$

ou ainda, quando:

$$|x-x_0| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R,$$

de acordo com o Teorema 2.19 - (ii). ■

Exemplo 2.24. Vamos encontrar o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Para isto, vamos aplicar o critério do quociente. Se $x \neq 0$ temos

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Como essa razão tende a 0 quando $n \to \infty$, temos que a série converge absolutamente para todo $x \neq 0$. A série também converge para $x = 0$, portanto o seu raio de convergência é $+\infty$.

Teorema 2.21. *Se uma função f é representada por uma série de potências no intervalo de convergência $(a-r, a+r)$ então:*

(a) A série derivada $\sum_{n=1}^{\infty} na(x-a)^{n-1}$ e f tem o mesmo raio de convergência

(b) A derivada $f'(x)$ existe para todo o x no intervalo de convergência e é definida por

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

Demonstração: Ver APOSTOL (1988). ■

Corolário 2.6. *A função f definida por uma série de potências, possui derivadas de todas as ordens em qualquer ponto do seu intervalo de convergência e suas derivadas sucessivas podem ser calculadas por derivação termo a termo.*

Agora vamos falar um pouco sobre conceitos chaves de série de Taylor apresentada em STEWART (2009) a partir dos quais nos fornecerão ferramentas necessárias para expressarmos funções como séries de potências.

Teorema 2.22. *Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!},$$

onde $f^n(a)$ representa as derivadas de f em a.

Demonstração: Supondo que f seja uma função arbitrária que possa ser representada como uma série de potência, ou seja:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)... \ , \ |x-a| < R$$

teremos então que determinar quais coeficientes c_n que devem aparecer em termos de f. Observamos inicialmente que:

$$f(a) = c_0$$

então pelo Teorema, podemos derivar a expressão $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)... \ , |x-a| < R$ termo a termo, logo:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \ , \ |x-a| < R.$$

Assim, fazendo a substituição $x = a$ na expressão anterior para a derivada, obtemos:

$$f'(a) = c_1.$$

Derivando novamente a expressão da primeira derivada, temos:

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \ , \ |x-a| < R.$$

Se substituirmos novamente $x = a$ na última expressão, resulta:

$$f''(a) = 2c_2$$

Repetindo o mesmo processo mais uma vez, vamos obter:

$$f'''(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \ , \ |x-a| < R$$

e

$$f'''(a) = 2\cdot 3c_3 = 3!c_3.$$

Se seguirmos o padrão, derivando as expressões seguintes e subtituindo $x = a$, iremos encontrar:

$$f^n(a) = 2\cdot 3\cdot 4\cdots nc_n = n!c_n$$

Colocando agora o n-ésimo coeficiente c_n em evidência, temos:

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

■

Observação 2.21. Se substituirmos o valor de $c_n = \dfrac{f^n(a)}{n!}$ de volta na série, admitindo que f tenha uma expansão em série de potências em a, então ela terá a seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n,$$

equivalentemente

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \cdot$$

Definição 2.33. (Série de Taylor). A série mostrada na observação anterior:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots ,$$

é chamada de série de Taylor da função f em a (ou em torno de a ou centrado em a).

Definição 2.34. (Série de Maclaurin). Na definição anterior, para o caso especial em que $a = 0$, a série de Taylor torna-se:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \ .$$

A série recebe o nome de série de Maclaurin.

A seguir mostraremos a definição de função analítica apresentada em LIMA (2019).

Definição 2.35. Uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto I, chama-se analítica quando é de classe C^{∞}, e para todo $x_0 \in I$, existe $r > 0$ tal que $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ implica que $x \in I$ e que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0) + \dots \ .$$

Assim, o valor de uma função analítica em cada ponto é dado por uma série de potências, a saber, uma série de Taylor.

Ora, pelo Coroário 2.6, toda função representada por uma série de potências é de classe C^{∞} e, se:

$f(x) = \sum a_n \cdot (x - x_0)^n$, então $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, isto é, toda série de potências é uma série de Taylor.

2.3.4 O erro na Série de Taylor

Vimos anteriormente que se uma função f puder ser representada como séries de potências em torno do ponto x_0, então f sera igual a soma de sua série de Taylor. Mas então, como podemos garantir que dada uma função, ela possa ser representada por uma série de Taylor?

Abaixo mostraremos critérios apresentados em STEWART (2009, p. 681) que nos darão suporte para verificar a possibilidade de uma função ser representada como série de potências. Dentre os assuntos apresentados estão o polinômio de Taylor, o resto da série de Taylor e a Desigualdade de Taylor. No fim da seção será apresentado ainda uma condição para a convergência da série de Taylor.

Se $f(x)$ é igual a soma de uma série, então $f(x)$ convergirá para o limite das somas parciais dessa série. E, digamos que $T_n(x)$ é a soma parcial da série:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

onde $T_n(x)$ é um polinômio e denominamos como **polinômio de Taylor de grau n** centrado em x_0. Em outras palavras,

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} T_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Assim, conforme n tende ao infinito a soma parcial dos termos do polinômio de Taylor é uma aproximação $f(x)$, isto é, $f(x) \approx T_n(x)$. Ainda, podemos escrever:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

onde $R_n(x)$ é o resto da série de Taylor. E de maneira equivalente

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

A seguir apresentaremos o teorema que expressa formalmente nossa analise:

Teorema 2.23. *Seja f uma função com derivada de todas as ordens e $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de grau n centrado em x_0 e*

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

para todo $|x - x_0| < R$, então f é igual a soma da sua série de Taylor no intervalo $|x - x_0| < R$.

Demonstração: O teorema acima sugere que se, de alguma maneira, pudermos mostrar que $R_n(x) = 0$ quando $n \to +\infty$, então $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, ou seja, a função f pode ser representada por uma série de Taylor. De fato, pois

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = \lim_{n\to+\infty} [f(x) - R_n(x)] = \lim_{n\to+\infty} f(x) - \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = f(x).$$

■

Teorema 2.24. (Desigualdade de Taylor). *Se $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ para $|x - a| \leq d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade:*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \quad \textit{para} \quad |x - a| \leq d.$$

Demonstração: Veja em STEWART (2009). ■

Exemplo 2.25. (Seno). Dada a função seno, $f(x) = senx$, como suas $n + 1$ derivadas $f^{(n+1)}(x)$ são $\pm senx$ ou $\pm cosx$, sabemos que $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq 1$ para todo x. Assim, podemos tomar $M = 1$ na Desigualdade de Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

O lado direito dessa desigualdade tende a 0 quando $n \to 0$, dessa forma, $|R_n(x)| \to 0$ pelo Proposição 2.4. Segue que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$, assim, $senx$ é igual à soma de sua série de Maclaurin pelo Teorema 2.23.

Exemplo 2.26. (Cosseno). Assim como no exemplo anterior, tomando $f(x) = cos(x)$, temos que as derivadas de f, $f^{(n+1)}(x)$ são $\pm senx$ ou $\pm cosx$, assim $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq 1$ para todo x. Portando tomamos $M = 1$ novamente na Desigualdade de Taylor, que nos dá:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Assim como antes, o lado direito dessa desigualdade tende a 0 quando $n \to 0$, dessa forma, $|R_n(x)| \to 0$ pelo Proposição 2.4. Segue que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$, assim, $senx$ é igual à soma de sua série de Maclaurin, novamente pelo Teorema 2.23.

Teorema 2.25. *Se f é infinitamente derivável num intervalo aberto $I = (a-r, a+r)$ e se existe uma constante positiva A tal que*

$$|f^n(x)| \leq A^n, n = 1, 2, 3...,$$

e todo x em I, então a série de Taylor gerada por f em a converge para $f(x)$ para todo o x em I.

Demonstração: Ver APOSTOL (1988, p. 506). ∎

Observação 2.22. Vemos pelos dois exemplos 2.25 e 2.26 que o teorema anterior é válido, já que as funções seno e cosseno e todas as suas derivadas são limitas por 1 em todo o eixo real. Assim a desigualdade do teorema é válida com $A = 1$ se $f(x) = senx$ ou se $f(x) = cosx$.

2.3.5 As funções seno e cosseno como séries de potências

Iremos mostrar nesta parte, com a teoria desenvolvida até aqui, a representação das funções seno e cosseno como séries de potências, que por sua vez, poderão ser derivadas, considerando os resultados apresentados anteriormente a respeito das séries de potências.

Exemplo 2.27. (Função seno). Considerando a série de Maclaurin, mostrada anteriormente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

temos para a função seno:

$$f(x) = senx, \quad f'(x) = cosx, \quad f''(x) = -senx, \quad f'''(x) = -cosx, \quad f^{(4)}(x) = senx$$

assim,

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0.$$

Portanto sua representação como série de potência é dada por:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Concluindo que:

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exemplo 2.28. (Função cosseno). Considerando novamente a série de Maclaurin:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

temos para a função cosseno:

$$f(x) = cosx, \quad f'(x) = -senx, \quad f''(x) = -cosx, \quad f'''(x) = senx, \quad f^{(4)}(x) = cosx$$

assim,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1.$$

Portanto, sua representação em série de potência é dada por:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Concluindo que:

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

3 A FUNÇÃO DE WEIERSTRASS

A função de Weierstrass é um importante contra-exemplo mostrando que pode existir funções que são contínuas em todos os pontos do conjunto dos números reais, mas que não são deriváveis em nenhum ponto. A função de Weierstrass como o próprio nome sugere, foi descoberta pelo matemático alemão Karl Weierstrass em 1872, tendo chocado a comunidade matemática ao mostrar uma função limitada e contínua em todos os pontos mas que não é derivável em ponto nenhum, sua principal importância além de ser um importante contra-exemplo, é dada em decorrência de ter sido a primeira função apresentada com essa característica.

Antes das demostracões sobre a função de Weierstrass, vejamos os seguintes resultados sobre as funções seno e cosseno:

Dadas as funções $sen, cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas com a forma geométrica usual estendida a todo $\mathbb{R}$. Assumiremos os seguintes fatos sobre essas funções:
(a) sen e cos são contínuas em $\mathbb{R}$;
(b) $|sen(x)|, |cos(x)| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
(c) $\left|\dfrac{sen(x)}{x}\right| \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R} - 0$;
(d) $cos(x) - cos(y) = -2sen\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cdot sen\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$;
(e) $cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
As funções seno e cosseno podem ser derivadas considerando, por exemplo, as representações das séries de potências:

$$\begin{aligned} sen(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \end{aligned}$$

O teorema a seguir é o tema central deste trabalho.

Teorema 3.1. (Karl Weierstrass, 1872). *Seja $a \in (0,1)$ e seja b um inteiro ímpar tal que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}\cdot$ Então a série*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n cos(b^n \pi x)$$

converge uniformemente em $\mathbb{R}$ e define uma função contínua, mas não derivável em nenhum lugar.

A função que aparece no teorema acima é chamada de função de Weierstrass. Antes de provar o teorema, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.1. (Teste M de Weierstrass). *Seja X um conjunto de números reais, e para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n > 0$ tal que*

$$f_n(x) < M_n, \ \forall x \in X.$$

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge uniformemente em X.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. O critério de Cauchy para a convergência de uma série implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$ temos

$$|M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots + M_m| = M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots + M_m < \epsilon.$$

Consequêntemente, para todo $n, m \geq N$ com $n < m$ temos para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{m} f_i(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right| = |f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \\ &\leq M_{n+1} + \cdots + M_m < \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja, a sequência de somas parciais $(\sum_{i=1}^{\infty} f_i)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz o critério de Cauchy para funções. Então, sabemos que essas somas parciais convergem uniformemente para a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. ■

Agora vamos a demonstração do resultado principal deste trabalho, a saber a construção da função de Weierstrass apresentada no Teorema 3.1.

Desde que $|a^n cos(b^n \pi x)| \leq a^n$ para todos os $x \in \mathbb{R}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge (já que é uma série geométrica com $a \in (0, 1)$), a série converge uniformemente pelo teste M de Weierstrass. Além disso, uma vez que as somas parciais são contínuas (como somas finitas de funções), temos pelo corolário 2.5 que seu limite uniforme f também é contínuo. Portanto, a função de Weierstrass é contínua em toda reta.

Para ver que f não é derivável em nenhum lugar, mostraremos para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

não existe. Em particular, mostraremos que, conforme x se aproxima de x_0 de cima para baixo, a respectiva diferença quocientes oscilam descontroladamente entre valores positivos e negativos cada vez maiores. Para isso utilizaremos as observações 2.3, 2.4 e 2.5, mostrando que as derivadas laterais não vão existir a partir da construção de duas sequências $y_m < x_0$ e $z_m > x_0$ que convergem para o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, uma pela esquerda e outra pela direita.

Fixe $x_0 \in \mathbb{R}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $\alpha_m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b^m x_0 - \alpha_m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Defina

$$x_m := b^m x_0 - \alpha_m; \quad y_m := \frac{\alpha_m - 1}{b^m} \quad \text{e} \quad z_m := \frac{\alpha_m + 1}{b^m}.$$

Observe que

$$y_m - x_0 = -\frac{1 + x_m}{b^m} < 0 < \frac{1 - x_m}{b^m} = z_m - x_0.$$

Assim, $y_m < x_0 < z_m$. Como $(1 + x_m)$ e $(1 - x_m)$ são limitados e $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{b^m} = 0$, então pela Proposição 2.8, temos:

$$\lim_{m\to\infty} |y_m - x_0| = \lim_{m\to\infty} x_0 - y_m = \lim_{m\to\infty} \frac{1 + x_m}{b^m} = 0,$$

e

$$\lim_{m\to\infty} |z_m - x_0| = \lim_{m\to\infty} z_m - x_0 = \lim_{m\to\infty} \frac{1 - x_m}{b^m} = 0.$$

Ou seja, $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ são sequências (meticulosamente construídas) convergindo para x_0, mas de cima e abaixo de x_0, respectivamente. Vamos examinar os quocientes de diferença para f procedendo ao longo de $x = y_m, m \in \mathbb{N}$, e $x = z_m, m \in \mathbb{N}$. Primeiro,

$$\begin{aligned}
\frac{f(y_m) - f(x_0)}{y_m - x_0} &= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n cos(b^n \pi y_m) - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n cos(b^n \pi x_0)}{y_m - x_0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{cos(b^n \pi y_m) - cos(b^n \pi x_0)}{y_m - x_0} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \frac{cos(b^n \pi y_m) - cos(b^n \pi x_0)}{b^n (y_m - x_0)} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+m} \frac{cos(b^{n+m} \pi y_m) - cos(b^{n+m} \pi x_0)}{y_m - x_0}.
\end{aligned}$$

Denotamos as duas somas na última expressão por S_1 e S_2, respectivamente. A grosso modo, vamos mostrar que S_1 é pequeno enquanto S_2 é grande. Usando a propriedade (d), temos

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n\frac{-2}{b^n(y_m-x_0)}sin\left(\frac{b^n\pi(y_m+x_0))}{2}\right)sin\left(\frac{b^n\pi(y_m-x_0))}{2}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{m-1}-\pi(ab)^n sin\left(\frac{b^n\pi(y_m+x_0)}{2}\right)\frac{sin\left(\dfrac{b^n\pi(y_m-x_0)}{2}\right)}{\dfrac{\pi b^n(y_m-x_0)}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triângular e as propriedades (b) e (c), temos:

$$|S_1|\leq\sum_{n=0}^{m-1}\pi(ab)^n 1\cdot 1=\pi\frac{(ab)^m-1}{ab-1}<\pi\frac{(ab)^m}{ab-1}\cdot$$

Assim, existe $\epsilon_1\in(-1,1)$ tal que $S_1=\epsilon_1\dfrac{\pi(ab)^m}{ab-1}\cdot$ Em seguida, lidamos com S_2.

Primeiro, lembre-se de que $y_m=\dfrac{\alpha_m-1}{b^m}$, tal que α_m é um inteiro e que b é um inteiro ímpar. Assim,

$$cos(b^{n+m}\pi y_m)=cos(b^n\pi(\alpha_m-1))=(-1)^{b^n(\alpha_m-1)}=(-1)^{\alpha_m-1}=-(-1)^{\alpha_m}.$$

Seguindo do fato de (α_m-1) ser um inteiro, e consequentemente $(b^n\cdot(\alpha_m-1))$ também ser um inteiro, o que implica que $cos(b^n\pi(\alpha_m-1))$ é um cosseno do tipo $cos(k\pi)$ onde $k\in\mathbb{Z}$, por consequência seu valor é 1, se k for par e -1, se k for ímpar. E ainda, como b é um inteiro ímpar e $n\in\mathbb{N}$, b^n é também um inteiro ímpar, implicando que $(-1)^{b^n}=-1$ e $(-1)^{b^n(\alpha_m-1)}=\left((-1)^{b^n}\right)^{\alpha_m-1}=(-1)^{\alpha_m-1}$.

Além disso, lembre-se de que $x_m=b^m x_0-\alpha_m$ de modo que usando a propriedade (e) obtemos:

$$\begin{aligned}
cos(b^{n+m}\pi x_0) &= cos(b^n\pi(x_m+\alpha_m))\\
&= cos(b^n\pi x_m)cos(b^n\pi\alpha_m)-sen(b^n\pi x_m)sen(b^n\pi\alpha_m)\\
&= (-1)^{b^n\alpha_m}cos(b^n\pi x_m)-0\\
&= (-1)^{\alpha_m}cos(b^n\pi x_m).
\end{aligned}$$

Com uma justicativa semelhante a que foi feita para $cos(b^{n+m}\pi y_m)$ e observando que $sen(b^n\pi\alpha_m)=0$, já que é um seno do tipo $sen(k\pi),k\in\mathbb{Z}$.

Usando esses cálculos, temos:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+m} \frac{-(-1)^{\alpha_m} - (-1)^{\alpha_m} cos(b^n \pi x_m)}{y_m - x_0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+m} (-1)(-1)^{\alpha_m} \frac{1 + cos(b^n \pi x_m)}{-\dfrac{1 + x_m}{b^m}} \\
&= (ab)^m (-1)^{\alpha_m} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + cos(b^n \pi x_m)}{1 + x_m}.
\end{aligned}$$

Lembre-se de que $x_m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ portanto, os termos da soma na última expressão não são negativos. Consequentemente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + cos(b^n \pi x_m)}{1 + x_m} \geq \frac{1 + cos(\pi x_m)}{1 + x_m} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Observe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + cos(b^n \pi x_m)}{1 + x_m} = \frac{1}{1 + x_m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n cos(b^n \pi x_m) \right]$$

sendo as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a^n cos(b^n \pi x_m)$ ambas convergentes. Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + cos(b^n \pi x_m)}{1 + x_m}$ converge para um número $C \geq \frac{2}{3}$. Portanto, existe $\eta_1 \geq 1$ tal que $S_2 = (ab)^m (-1)^{\alpha_m} \eta_1 \frac{2}{3}$. Colocando nossos cálculos para S_1 e S_2 juntos, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{f(y_m) - f(x_0)}{y_m - x_0} = S_1 + S_2 &= \epsilon_1 \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1} + (ab)^m (-1)^{\alpha_m} \eta_1 \frac{2}{3} \\
&= (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_1 \left(\frac{2}{3} + (-1)^{\alpha_m} \frac{\epsilon_1}{\eta_1} \frac{\pi}{ab - 1} \right).
\end{aligned}$$

Lembre-se de nossa suposição de que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, que equivale a $\frac{\pi}{ab - 1} < \frac{2}{3}$. Usando $|\epsilon_1| < 1$ e $\eta_1 \geq 1$, temos

$$\frac{2}{3} + (-1)^{\alpha_m} \frac{\epsilon_1}{\eta_1} \frac{\pi}{ab - 1} > \frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1} > 0.$$

Consequentemente, o sinal de $\frac{f(y_m) - f(x_0)}{y_m - x_0}$ é completamente determinado por $(-1)^{\alpha_m}$

e

$$\left|\frac{f(y_m)-f(x_0)}{y_m-x_0}\right| > (ab)^m\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}\right).$$

Assim, não apenas o quociente de diferença alterna os sinais rapidamente, mas sua magnitude tende a $+\infty$ conforme $m\to\infty$. Portanto, desde que $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = x_0$, isso é o suficiente para mostrar que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(y_m)-f(x_0)}{y_m-x_0}$$

não existe. Pois $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = x_0$ e $y_m < x_0$ implicam que

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{f(y_m)-f(x_0)}{y_m-x_0}$$

não existe, ou seja,

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$$

não existe.

Vamos mostrar que o mesmo comportamento também ocorre ao longo de $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$, com $z_m > x_0$. Usando a mesma divisão de antes, podemos escrever

$$\frac{f(z_m)-f(x_0)}{z_m-x_0} = S_1^{'} + S_2^{'},$$

e o mesmo argumento produz $S_1^{'} = \epsilon_2\dfrac{\pi(ab)^m}{ab-1}$ para $\epsilon_2 \in (1,1)$. Usando $z_m - x_0 = \dfrac{1-x_m}{b^m}$ nós temos

$$\begin{aligned} S_2^{'} &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{m+n}\frac{-(-1)^{\alpha_m}-(-1)^{\alpha_m}cos(b^n\pi x_m)}{1-x_m b^m} \\ &= -(ab)^m(-1)^{\alpha_m}\sum_{n=0}^{\infty} a^n\frac{1+cos(b^n\pi x_m)}{1-x_m}. \end{aligned}$$

Desde que $x_m \in \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, os termos da soma da última expressão não são negativos. Consequentemente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n\frac{1+cos(b^n\pi x_m)}{1-x_m} \geq \frac{1+cos(b^n\pi x_m)}{1-x_m} > \frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Portanto existe $\eta_2 \geq 1$ tal que $S_2' = -(ab)^m(-1)^{\alpha_m}\eta_2\frac{2}{3}$. Então

$$\begin{aligned}\frac{f(z_m)-f(x_0)}{z_m-x_0} = S_1' + S_2' &= \eta_2\frac{\pi(ab)^m}{ab-1} - (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\eta_2\frac{2}{3} \\ &= -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m\eta_2\left(\frac{2}{3} - (-1)^{\alpha_m}\frac{\epsilon_2}{\eta_2}\frac{\pi}{ab-1}\right).\end{aligned}$$

Assim como antes temos

$$\frac{2}{3} - (-1)^{\alpha_m}\frac{\epsilon_2}{\eta_2}\frac{\pi}{ab-1} > \frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} > 0,$$

de modo que $\dfrac{f(z_m)-f(x_0)}{z_m-x_0}$ tem sinal completamente determinado por $-(-1)^{\alpha_m}$. Também,

$$\left|\frac{f(z_m)-f(x_0)}{z_m-x_0}\right| > (ab)^m\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) \overset{m\to\infty}{\to} +\infty$$

Portanto, o mesmo comportamento ocorre à direita de x_0. Em outras palavras, como $\lim\limits_{m\to\infty} z_m = x_0$ e $z_m > x_0$ temos que:

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{f(z_m)-f(x_0)}{z_m-x_0}$$

não existe, ou seja,

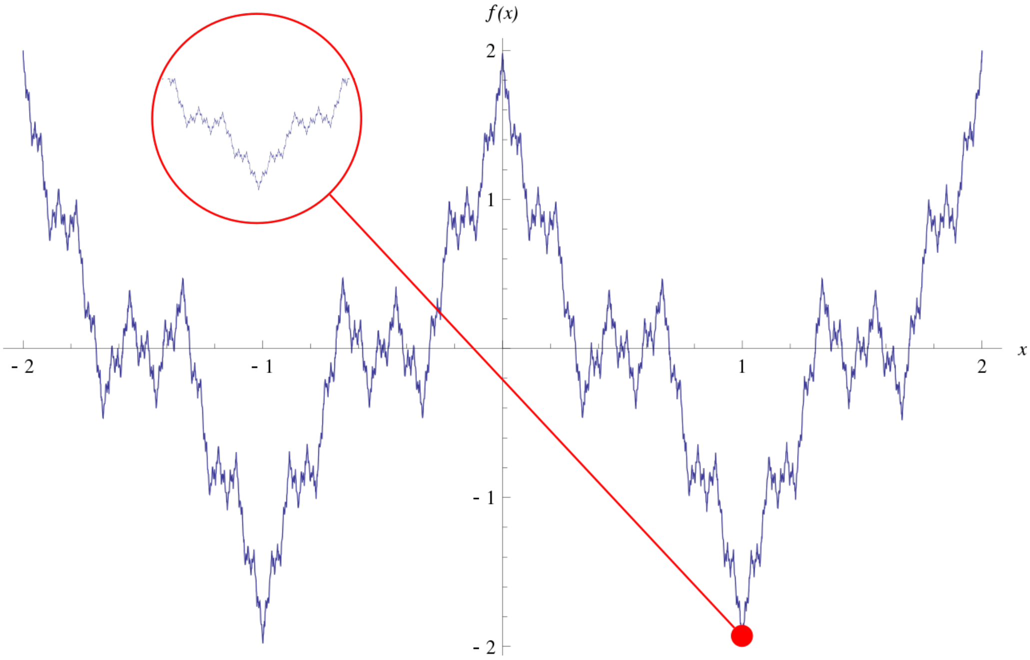
$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_+'(x_0)$$

não existe.

Recapitulando, contruímos duas sequências $y_m < x_0$ e $z_m > x_0$, convergindo para x_0, pela esquerda e pela direita respectivamente, e mostramos também que não existem as derivadas laterais. Logo, concluímos que a função de Weierstrass não admite derivada em nenhuma ponto de $\mathbb{R}$.

A seguir apresentamos o gráfico da função.

Figura 1 – Função de Weierstrass



Fonte: Nelson, 2019.

A forma aproximada do gráfico é determinada pelo termo $cos(\pi x)$, obtido quando $n = 0$ na série da função de Weierstrass. Os termos de ordem superior criam as oscilações menores. Com o b escolhido cuidadosamente como no teorema, o gráfico torna-se tão irregular que não há escolha razoável para uma reta tangente em qualquer ponto; ou seja, a função não é derivável em nenhum lugar.

$\blacksquare$

4 CONCLUSÃO

Apesar de ser relativamente comum uma função ser contínua e não ser derivável, em geral isso acontece quando a função é derivável apenas em alguns pontos, no entanto, apresentamos uma função que é contínua e não derivável em toda a reta. As características aqui apresentadas sobre a função de Weierstrass constituem um contra exemplo muito relevante para a recíproca de um dos teoremas mais importantes do cálculo diferencial a saber: "se uma função é derivável, então ela é contínua", assim, o estudo e a construção feita neste trabalho é uma maneira de mostrar ao leitor a existência de tal tipo de função, ou seja, contínua, mas não derivável. Curiosamente, os estudos matemáticos mostram que existem muito mais funções com essa mesma patologia da função de Weierstrass do que as demais funções, no entanto, como essas funções não são tão simples de serem construídas, não é comum vermos exemplos.

Outro ponto a se observar ao longo do desenvolvimento deste trabalho, é o uso de poucas noções avançadas para um curso superior de matemática, assim, possivelmente, um aluno de graduação não terá ou não deve ter muitos problemas para entender o conteúdo aqui mostrado. Dito isto, espera-se que a investigação da função de Weierstrass apresentada aqui, seja útil para o leitor, em especial para discentes de cursos de licenciatura em matemática, tanto como incentivo para investigações do tipo, como também no sentido de aprimorar seus conhecimentos a respeito do tema. Caso o leitor tenha curiosidade sobre os critérios para a construção função de Weierstrass, é recomendado que consulte (LIMA, 1983).

REFERÊNCIAS

APOSTOL, Tom M. **Cálculo com funções de uma variável com uma introdução à Álgebra Linear**. *Editora Reverié, Rio de Janeiro*, 1988.

FIGUEIREDO, Djairo G. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 1974.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. Vol 1. 5ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**, v. 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. 15. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2019.

NELSON, B. The weierstrass function. **Retrieved December**, v. 31, 2019.

SOARES, M. **Cálculo em uma variável complexa.** 1ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

STEWART, James. **Cálculo**, v. 2. 6ª. ed. Editora Pioneira Thomson Learning, 2009.

WEIERSTRASS, Karl. Uber continuirliche functionen eines reellen arguments, die fur keinen worth des letzteren einen bestimmten differentailqutienten besitzen, Akademievortrag. **Math. Werke**, p. 71–74, 1872.