UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ITALO WEYNE SILVA DE LIMA

TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

REDENÇÃO - CE

2022

ITALO WEYNE SILVA DE LIMA

TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes

REDENÇÃO - CE

2022

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Lima, Italo Weyne Silva.

L732t

Teorema do ponto fixo de Banach e aplicações / Italo Weyne Silva de Lima. - Redenção, 2022.
55f: il.

Monografia - Curso de Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2022.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Amanda Angélica Feltrin Nunes.

1. Teorema do Ponto Fixo de Banach. 2. Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. 3. Espaços Métricos. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 516.24

ITALO WEYNE SILVA DE LIMA

TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 28 / 07 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

____

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

____

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedido este trabalho a todos que estiveram comigo em todos os momentos em especial irmão, pais e meus amigos. E especialmente a Deus, por ter me dado tantas oportunidades na vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido a paciência e foco para que pudesse concluir este trabalho. Ao meu irmão Paulo Igor Silva de Lima e aos meus pais Ivan Pinheiro de Lima e Maria Ivaneide da Costa Silva de Lima por sempre terem me apoiado e terem me ajudado a chegar até aqui.

Agradeço a todos os meus amigos, em especial a Erika Farias Silvestre, Larissa Braga Fernandes, Janaína Gomes Ferreira Sousa e Antonia Luciana Alves de Araújo por terem me ajudado e me apoiado desde o momento que nos conhecemos até hoje.

Agradeço aos meus melhores amigos Jonas da Silva Milhome e Carlos Anderson Andrade da Silva que nunca me abandonaram e sempre estiveram comigo em momentos bons e também em momentos ruins. Gostaria de agradecê-los também por toda paciência e todos os ensinamentos que me deram e que só me fortaleceram durante toda caminhada no curso.

Agradeço as oportunidades de participação como bolsita dos Programas Residência Pedagógica e do Pulsar, que foram oportunidades que me serviram de experiência para a minha carreira como profissional na área da educação. Agradeço ainda a CAPES e a UNILAB pelo apoio financeiro durante a vigência das bolsas do Residência Pedagógica e do Pulsar.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os Professores do curso de Licenciatura em Matemática da UNILAB, em especial a minha Orientadora Professora Amanda Angélica Feltrin Nunes por ter me orientado e me guiado durante todo o desenvolvimento deste trabalho e também aos Professores participantes da banca examinadora Rafael Jorge Pontes Diógenes e Joserlan Perote da Silva pelo tempo e pelas valiosas colaborações e sugestões.

"Bons matemáticos vêem analogias. Grandes matemáticos vêem analogias entre analogias"

– Stefan Banach

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns conceitos sobre espaços métricos que foram utilizados para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach e em seguida, apresentar algumas aplicações no qual o teorema é aplicado. A primeira aplicação trata-se da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. A segunda e a terceira são voltadas para o cálculo aproximado de raízes de funções e neste caso, mostraremos o Método do Ponto Fixo e o Método de Newton-Raphson. A quarta aplicação é voltada para as equações não lineares, mais precisamente, as equações integrais de Fredholm. Por fim, a última aplicação voltada para a computação, mais precisamente sobre o buscador do Google, onde mostraremos como funciona e como o Google apresenta resultados tão precisos a seus usuários.

Palavras-chave: Teorema do Ponto Fixo de Banach. Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Espaços Métricos.

ABSTRACT

The objective of this work is to present some concepts about metric spaces that were used for the proof of the Fixed Point Theorem of Banach and then to present some applications in which the theorem is applied. The first application deals with the existence and uniqueness of solutions of ordinary differential equations. The second and third are aimed at the approximate calculation of roots of functions and in this case, we will show the Fixed Point Method and the Newton-Raphson Method. The fourth application is aimed at nonlinear equations, more precisely, Fredholm's integral equations. Finally, the last application focused on computing, more precisely on the Google search engine, where we will show how it works and how Google presents such accurate results to its users.

Keywords: Banach's Fixed Point Theorem. Applications of Banach's Fixed Point Theorem. Metric Spaces.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama 1 46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados após cálculos da Iteração 0 46
Tabela 2 – Dados após cálculos da Iteração 1 48
Tabela 3 – Dados após cálculos da Iteração 2 49
Tabela 4 – Dados após cálculos da Iteração 3 50
Tabela 5 – Classificação Final 51

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12

2 PRELIMINARES 13

2.1 ESPAÇOS MÉTRICOS E SEQUÊNCIAS 13

2.2 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY E ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS . . . 24

2.3 ESPAÇOS DE BANACH 29

3 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH 31

3.1 UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DE STEFAN BANACH 31

3.2 PONTO FIXO, CONTRAÇÕES E O TEOREMA DE BANACH 32

4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH 37

4.1 TEOREMA DE PICARD 37

4.2 MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF) 39

4.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON 41

4.4 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE FREDHOLM 43

4.5 O BUSCADOR DO GOOGLE 44

5 CONCLUSÃO 53

REFERÊNCIAS 54

1 INTRODUÇÃO

Ano a ano os conceitos matemáticos estão avançando e dessa forma surgem novas demonstrações de resultados e também novos problemas. Diversos problemas em Matemática se resumem a encontrar pontos fixos de alguma aplicação, para tanto, se faz necessário resultados que garantem a existência desses pontos fixos. Sendo assim, apresentaremos neste trabalho o Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas aplicações, para isso, dividimos nosso trabalho em quatro capítulos, sendo o capítulo inicial a introdução.

O segundo capítulo constituí os preliminares, onde será abordado o conceito de espaços métricos, como as propriedades que satisfazem uma métrica, exemplo de métricas como a métrica zero-um e a métrica usual da reta, além de exemplos de espaços métricos como a reta munida de sua métrica usual. Será abordado ainda os conceitos de sequências e convergência de sequências que serão determinantes para compreendermos as definições relacionadas a sequências de Cauchy. Com isso, será possível definir espaços métricos completos que será um conceito determinante e fundamental para que seja possível definir e compreender o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Finalizaremos o capítulo apresentando os conceitos de espaços de Banach com definições e exemplos.

No terceiro capítulo começaremos abordando um pouco sobre a história de Stefan Banach que mudou de vida de uma hora para outra a partir da contrução de um contra exemplo de um problema na qual Steinhaus estava tentando resolver sem sucesso. Prosseguindo, será apresentado a definição de ponto fixo que nada mais é do que um ponto que não é alterado por uma aplicação, ou seja, dada uma função f encontrar um ponto x no domínio da função tal que $f(x) = x$. Em seguida, será apresentado o conceito de contração e este será determinante para que seja possível definir e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Por fim, será enunciado e demonstrado o Teorema do Ponto Fixo de Banach, também conhecido como Teorema da contração que garante a existência e a unicidade de um ponto fixo.

No quarto capítulo mostraremos algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach em áreas da Matemática e uma aplicação na qual permite compreender como funciona o buscador do Google. Veremos o Teorema de Picard que trata sobre a existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias, o método do ponto fixo e o método de Newton-Raphson que vai me garantir que a partir de uma certa quantidade de iterações iremos nos aproximar da raíz exata da função dada e para uma quantidade de iterações muito grande a aproximação da raíz não muda, as equações integrais de fredholm que nada mais é do que equações não lineares e para finalizar o capítulo falaremos sobre o buscador do Google e como o Teorema do Ponto Fixo de Banach auxilia na obtenção de resultados precisos aos usuários do Google.

Por fim, concluiremos o trabalho apresentando nossas considerações finais acerca do tema desenvolvido.

2 PRELIMINARES

O objetivo principal desse capítulo é apresentar as ferramentas básicas de espaços métricos que serão utilizadas para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Além disso, cada subseção terá aplicações sobre os principais resultados que foram expostos. Para a escrita deste capítulo utilizamos como referência (4).

2.1 ESPAÇOS MÉTRICOS E SEQUÊNCIAS

Em espaços métricos é possível calcular a distância entre seus elementos que podem ser de diferentes tipos como: pontos, números, vetores, matrizes, funções, conjuntos e etc. A seguir veremos alguns resultados que facilitaram a compreensão da noção de distância bem como exemplos que são possíveis utilizar tais resultados.

Definição 2.1 *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*
$d1)$ $d(x, x) = 0$;
$d2)$ *Se* $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;
$d3)$ $d(x, y) = d(y, x)$;
$d4)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A condição $d4)$ é chamada de desigualdade do triângulo e surgiu ao observar que o lado de um triângulo é menor ou igual a soma dos outros dois lados, no plano euclidiano. Já a condição $d3)$ é chamada de propriedade de simetria.

Definição 2.2 *Um espaço métrico é um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.*

Vejamos a seguir alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 2.1 *Seja M um conjunto não-vazio. Defina $d : M \times M \to \mathbb{R}$ por:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & se\ x = y \\ 1, & se\ x \neq y \end{cases}.$$

Verifique que d corresponde a uma métrica.

Solução: De fato, sejam $x, y, z \in M$. Iremos demonstrar que d corresponde a uma métrica. Por definição da aplicação temos que $d1), d2), d3)$ estão satisfeitas. Demonstraremos então $d4)$. Dividindo em casos:
1º Caso: $x = y \neq z$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$\Rightarrow 1 \leq 0 + 1 = 1$$

Os demais casos que são quando $x = z \neq y$, $y = z \neq x$, $x = y = z$ e $x \neq y \neq z$ seguem de modo análogo a este. Portanto, podemos concluir que d corresponde a uma métrica e a ela chamamos de *métrica* $zero - um$. ∎

Para resolver o próximo exemplo é necessário que seja definido antes o que chamamos de desigualdade triangular na reta.

Proposição 2.1 (Desigualdade Triangular) *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ vale a seguinte relação*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Demonstração: Seja $x, y \in \mathbb{R}$, sabemos então que

$$x \leq |x| \text{ e } y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y|,$$

da mesma forma tem-se que

$$-x \leq |x| \text{ e } -y \leq |y| \Rightarrow -x - y \leq |x| + |y|,$$

ou ainda,

$$-(x + y) \leq |x| + |y|,$$

o que implica

$$\max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x| + |y|,$$

ou seja,

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

o que finaliza a demonstração. ∎

Com isso, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2 *Considere $M = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e a função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Então d é uma métrica.

Solução: De fato, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer. Se $x = y$, é imediato que $|x - y| = 0$, o que implica em $d(x, y) = 0$, o que mostra $d1$). Além disso, se $x \neq y$, temos que $x - y \neq 0$ o que implica em $|x - y| > 0$, ou seja, $d(x, y) > 0$, satisfazendo a propriedade $d2$). Também temos que:

$$d(x, y) = |x - y| = | - (x - y)| = |y - x| = d(y, x),$$

mostrando assim $d3$). Por fim, temos que

$$d(x,z) = |x-z| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z),$$

o que satisfaz $d4$). Portanto, d é uma métrica a qual é chamada de métrica usual de $\mathbb{R}$. ∎

O exemplo a seguir traz uma relação entre funções e a noção de distância. Vejamos o exemplo.

Exemplo 2.3 *Considere $C([a,b],\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$. Prove que*

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

corresponde a uma métrica.

Solução: Considere $f, g, h \in C[a,b]$. Para mostrar verificarmos $d1$) suponha $f = g$, logo

$$d(f,g) = d(f,f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f(x)| = 0,$$

o que verifica $d1$). Seja agora $f \neq g$, daí temos que existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) \neq g(x)$ o que implica $|f(x) - g(x)| > 0$, daí

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Logo,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| > 0,$$

o que implica que $d(f,g) > 0$ e isso mostra $d2$). Para verificarmos a condição $d3$) note que dado $x \in [a,b]$ tem-se que

$$|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|,$$

o que implica

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |g(x) - f(x)| = d(g,f),$$

verificando assim a condição $d3$). Por fim, para mostrar a desigualdade do triângulo, tome $A, B, C \subset \mathbb{R}$ tal que

$$A = \{|f(x) - g(x)|; x \in [a,b]\};$$

$$B = \{|g(x) - h(x)|; x \in [a,b]\};$$

$$C = \{|f(x) - h(x)|; x \in [a,b]|\}.$$

Com isso, para mostrarmos a desigualdade do triângulo é necessário e suficiente que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B.$$

Seja $D = \{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|; x \in [a, b]\}$. Note que $D \subset A + B$, daí utilizando-se de propriedades do supremo segue que

$$\sup D \leq \sup A + \sup B. \tag{1}$$

No entanto, dado $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &= |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup D, \end{aligned}$$

logo,

$$\sup C \leq \sup D, \tag{2}$$

o que implica de (1) e (2) que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B,$$

como queríamos demonstrar. Portanto, segue que

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

é uma métrica. ■

Em espaços normados é possível somar e multiplicar seus elementos. Veremos a seguir a definição de espaços normados e um exemplo para ilustrar essa ideia.

Definição 2.3 *Uma norma sobre um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$ é uma função que associa a cada $x \in E$ um número real não negativo tal que $||.|| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ o que implica $x \rightarrow ||x||$ de maneira que:*
(N1) $||x|| = 0 \iff x = 0$;
(N2) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall x \in E$;
(N3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in E.$

Definição 2.4 *Um espaço vetorial normado é um par $(E, ||.||)$ onde E é um espaço vetorial real e $||.||$ é a norma de E.*

A seguir será enunciado um resultado na qual usaremos para demonstrar três métricas que são muitos importantes para o espaço $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$, onde $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, vale que*

$$|a_1 \cdot b_1 + ... + a_n \cdot b_n| \leq \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}\right)\left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}\right). \quad (3)$$

Demonstração: Para $a = 0$ note que o resultado é satisfeito. Agora para o caso não nulo, considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = ||a - tb||^2$ tal que $a, b \in \mathbb{R}^n$, $d(a, b) = ||a - b||$, o produto interno $\langle a, b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$ e norma $||a||^2 = \langle a, a\rangle$. Note que $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, com isso $||a - bt||^2 \geq 0$, implicando que

$$||a - bt||^2 = \langle a, a\rangle - 2t\langle a, b\rangle + t^2\langle b, b\rangle,$$

ou seja,

$$||a||^2 - 2t\langle a, b\rangle + t^2||b||^2 \geq 0.$$

No entanto, note que isso só ocorre quando esta função não possuir raízes, ou seja, $(-2\langle a, b\rangle)^2 - 4||a||^2 \cdot ||b||^2 \leq 0$, e daí segue que

$$|\langle a, b\rangle| \leq ||a|| \cdot ||b||.$$

Para este caso, podemos pensar sobre quais hipóteses a igualdade seria satisfeita? Note que isso só ocorre se a função possuir apenas uma raiz, ou seja,

$$\langle a - bt, a - tb\rangle = 0 \Rightarrow a = tb,$$

o que nos diz então que os vetores são linearmente dependentes. ■

A seguir veremos um exemplo sobre o espaço do $\mathbb{R}^n$ munido com três métricas muito importantes para este espaço. Vejamos o exemplo.

Exemplo 2.4 *Considere*

$$M = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R} \text{ e } i = 1, 2, ..., n\}$$

há três métricas importantes para $\mathbb{R}^n$. Para $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, consideremos:

(i) $d''(x, y) = \max\left\{\,|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_n - y_n|\,\right\}$.

(ii) $d'(x, y) = \ |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n|$.

(iii) $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$.

Solução: Vamos mostrar que de fato d, d' e d'' correspondem a uma métrica.

Provemos inicialmente que $d(x,y)$ é uma métrica. Para isso, considere $x,y,z \in \mathbb{R}^n$, então:

$$d(x,x) = \sqrt{(x_1-x_1)^2+(x_2-x_2)^2+...+(x_n-x_n)^2} = \sqrt{0^2+0^2+...+0^2} = 0.$$

Se $x \neq y$, então $x_i \neq y_i$ para algum $i \in \{1,2,...,n\}$. Assim, como $x_i - y_i \neq 0$, para algum $i \in \{1,2,...,n\}$, então $(x_i-y_i)^2 > 0$,para algum $i \in \{1,2,...,n\}$, logo:

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i-y_i)^2} > 0.$$

Para a propriedade de simetria, sabemos que $(x_i-y_i)^2 = (y_i-x_i)^2$, para todo $i \in \{1,2,...,n\}$. Daí, temos:

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+...+(x_n-y_n)^2} = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+...+(y_n-x_n)^2},$$

ou seja, temos que $d(x,y) = d(y,x)$.

Por fim, demonstraremos a desigualdade do triângulo:

$$\begin{aligned}
[d(x,z)]^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}[(x_i-y_i)+(y_i-z_i)]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(x_i-y_i)^2+2(x_i-y_i)(y_i-z_i)+(y_i-z_i)^2] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}[(x_i-y_i)^2+2|x_i-y_i||y_i-z_i|+(y_i-z_i)^2]
\end{aligned}$$

distribuindo o somatório, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+\sum_{i=1}^{n}2|x_i-y_i||y_i-z_i|+\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2 = [d(x,y)]^2+2\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i||y_i-z_i|+[d(y,z)]^2$$

usando a desigualdade mostrada em (3), temos que

$$[d(x,z)]^2 \leq [d(x,y)]^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2} + [d(y,z)]^2,$$

logo,

$$[d(x,z)]^2 \leq [d(x,y)]^2 + 2[d(x,y)][d(y,z)] + [d(y,z)]^2 = [d(x,y)+d(y,z)]^2,$$

donde podemos concluir $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$, o que prova a desigualdade triangular.

Para as funções $d', d'' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a demonstração segue de forma mais simples e a verificação das condições $d1), d2), d3)$ e $d4)$ são mais rápidas, para ver as demonstrações de d' e d'' consulte (4). Com isso, podemos concluir que as funções d, d', d''

são de fato métricas. ■

Veremos a seguir um resultado que mostra que tipo de relação essas métricas do $\mathbb{R}^n$ possuem.

Proposição 2.2 *Sejam d, d', d'' métricas definidas no exemplo anterior. Para quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ tem-se:*

$$d''(x,y) \leq d(x,y) \leq d'(x,y) \leq n \cdot d''(x,y).$$

Demonstração: Observe que para mostrar essas desigualdades basta verificarmos de forma separada as seguintes desigualdades:

(i) $d''(x,y) \leq d(x,y)$.

(ii) $d(x,y) \leq d'(x,y)$.

(iii) $d'(x,y) \leq n \cdot d''(x,y)$.

Com isso, verificamos inicialmente (iii). Sabemos que,

$$d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

e

$$d''(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}.$$

Observe que

$$|x_i - y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$$

então,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} + ... + \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$$

o que nos diz que,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq n \cdot \max\{|x_i - y_i|\}$$

$$\Rightarrow d'(x,y) \leq n \cdot d''(x,y).$$

Note que para mostrar a desigualdade (ii) basta observar que $[d(x,y)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$ enquanto que,

$$\begin{aligned} [d'(x,y)]^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i \neq j}^{n} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j| \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = [d(x,y)]^2. \end{aligned}$$

A desigualdade (i) é satisfeita, pois

$$d(x,y)^2 = (x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2.$$

Observe que existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $d''(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i - y_i|\} = |x_{i_0} - y_{i_0}|$, dessa forma

$$d''(x,y)^2 = |x_{i_0} - y_{i_0}|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = d(x,y)^2,$$

extraindo as raízes de ambos os lados tem-se que $|d''(x,y)| \leq |d(x,y)|$ e como as distâncias são sempre não negativas segue que $d''(x,y) \leq d(x,y)$. Sendo assim, conseguimos mostrar a proposição. ■

Exemplo 2.5 *Mostre que* $(\mathbb{R}^n, ||.||)$, *onde*

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *é um espaço vetorial normado.*

Solução: Com efeito, podemos notar que $||.||$ é uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ e ainda que $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \geq 0$, logo

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i^2 = 0, \forall i = 1, ..., n,$$

donde podemos concluir que $x_i = 0, \forall i = 1, ..., n \iff x = 0$, o que mostra $(N1)$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$||\alpha x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha^2(x_i)^2} = \sqrt{\alpha^2\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} = |\alpha|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} = |\alpha|||x||,$$

o que verifica $(N2)$. Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned}
||x+y||^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i)(y_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2} \right]^2 \\
&= (||x|| + ||y||)^2
\end{aligned}
$$

pela desigualdade de Cauchy Schwarz. Donde segue então que $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$. Assim, mostramos que $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ com $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$ é um espaço normado. ■

Exemplo 2.6 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}([0,1], \mathbb{R})$ *sendo o conjunto das funções polinomiais* $\mathcal{P} : [0,1] \to \mathbb{R}$*. Verifique que*

$$
||p|| = \sup_{t \in [0,1]} |p(t)|,
$$

define uma norma.

Solução: De fato, considere $p \in \mathcal{P}([0,1], \mathbb{R})$, logo

$$
||p|| = 0 \iff \sup_{t \in [0,1]} |p(t)| = 0 \iff |p(t)| = 0 \iff p(t) = 0,
$$

o que mostra $N1$). Para verificarmos $N2$), seja $\alpha \in \mathbb{R}$, daí

$$
||\alpha \cdot p|| = \sup_{t \in [0,1]} |\alpha \cdot p(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |\alpha| \cdot |p(t)| = |\alpha| \cdot \sup_{t \in [0,1]} |p(t)| = |\alpha| \cdot ||p||,
$$

mostrando assim $N2$). Por fim, para mostrar a última condição considere $p, q \in \mathcal{P}([0,1], \mathbb{R})$. Note que como $[0,1]$ é compacto, então todo elemento que está nesse espaço é contínuo e limitado, desta forma dados $t_1, t_2 \in [0,1]$ tem-se que

$$
p(t_1) \leq p(t) \leq p(t_2).
$$

Dessa forma, tome $t_3 \in [0,1]$ tal que

$$
\sup_{t \in [0,1]} |p(t) + q(t)| = |p(t_3) + q(t_3)|.
$$

Daí, utilizando a desigualdade triangular do módulo tem-se que

$$
\begin{aligned}
||p+q|| &= \sup_{t \in [0,1]} |p(t) + q(t)| = |p(t_3) + q(t_3)| \\
&\leq |p(t_3)| + |q(t_3)| \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} |p(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |q(t)| \\
&= ||p|| + ||q||,
\end{aligned}
$$

mostrando assim a última propriedade, provando que $||p|| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |p(t)|$ caracteriza uma norma. ■

As definições e exemplos que virão a seguir irão apresentar noções para os conceitos de sequências. Estes resultados serão extremamente importantes para quando formos falar sobre sequências de Cauchy.

Definição 2.5 *Uma sequência num conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to M$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$. O valor que a sequência x assume no número $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n, em vez de $x(n)$, e neste caso será chamado como o n-ésimo termo da sequência.*

Definição 2.6 *Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$. A subsequência é indicada pelas notações $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...), (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente, (x_{n_k}).*

Definição 2.7 *Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c, \forall m, n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 2.7 *Considere $M = \mathbb{R}$ munido da métrica usual. Seja $x_n = (-1)^n$, mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ a sequência (x_n) é limitada.*

Solução: De fato, dados $m, n \in \mathbb{N}$, temos que

$$d(x_m, x_n) = |(-1)^m - (-1)^n| \leq |(-1)^m| + |-(-1)^n| \leq 1 + 1 = 2,$$

donde segue então que a sequência (x_n) é limitada. ■

Observação 2.1 *Toda subsequência de uma sequência limitada é também limitada.*

A seguir apresentaremos a definição de convergência de uma sequência bem como algumas propriedades e exemplos.

Definição 2.8 *Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Diz-se que o ponto $a \in M$ é limite da sequência (x_n) quando, para todo número $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $d(x_n, a) < \varepsilon$. Quando tal limite existe dizemos que a sequência converge em M, ou seja, que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e se ele não existir então a sequência diverge em M.*

O resultado a seguir garante que uma sequência convergente não pode convergir para limites diferentes.

Proposição 2.3 *Uma sequência não pode convergir para limites diferentes.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência no espaço métrico M. Tomemos $a, b \in M$ tais que $a = \lim x_n$ e $b = \lim x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n >$

n_0 então $d(x_n, a) < \varepsilon$ e se $n > n_1$ então $d(x_n, b) < \varepsilon$. Agora, tome $n > \max\{n_0, n_1\}$, logo

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon,$$

então segue que $0 \leq d(a, b) < 2\varepsilon$. Isto implica que $d(a, b) = 0$, e, portanto, $a = b$. ∎

Proposição 2.4 *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* (x_n) *converge para* a.

Demonstração: De fato, dado $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Tome qualquer $\varepsilon > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$. Existe ainda $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$ então

$$k > k_0 \Rightarrow n_k > n_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \lim_{n \to \infty} x_n = a,$$

o que mostra a proposição. ∎

Veremos a seguir uma definição chamada bola aberta, na qual relaciona o conceito de distância com seu centro e o seu raio.

Definição 2.9 *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Uma bola aberta de centro* a *e raio* r *é o conjunto* $B(a; r)$ *dos pontos de* M *cuja a distância ao ponto* a *é menor do que* r*, ou seja,*

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x; a) < r\}.$$

Note que ao afirmarmos que uma sequência (x_n) converge para um espaço métrico M é equivalente a dizer que toda bola de centro a contém (x_n) para todo n com excessão de um número finito deles.

A seguir veremos o conceito de bola fechada que será muito importante para compreender o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Definição 2.10 *Seja* (M, d) *um espaço métrico. A bola fechada de centro* a *e raio* r *é o conjunto* $B[a; r]$ *dos pontos de* M *que estão a uma distância menor ou igual a* r *do ponto* a*. Ou seja,*

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

Pensamos agora sobre quais condições o produto cartesiano de dois conjuntos determinam um espaço métrico. Vejamos a seguinte Proposição.

Proposição 2.5 *Uma sequência de pontos* $z_n = (x_n, y_n)$*, no produto cartesiano* $M \times N$ *de espaços métricos, converge para* $c = (a, b) \in M \times N$ *se, e somente se,* $\lim x_n = a$ *em* M *e o* $\lim y_n = b$ *em* N.

Demonstração: Para detalhes sobre a demonstração ver (4). ∎

Exemplo 2.8 *Toda sequência constante* $x_n = a$ *no espaço métrico* $M = \mathbb{R}$ *é convergente e* $\lim x_n = a$*.*

Solução: De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, logo

$$d(x_n, a) = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

neste caso, tome $n = 1 \in \mathbb{N}$ que será suficiente para mostrar o desejado. ■

Exemplo 2.9 *Dada a sequência de números reais* $x_n = \frac{1}{n}$*, temos que* $\lim x_n = 0$*.*

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, logo

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

o que mostra que de fato $\lim x_n = 0$. ■

Exemplo 2.10 *Se uma sequência* (x_n) *possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então ela é divergente.*

Solução: Dada uma sequência (x_n) convergente então $a = \lim x_n$. Com isso, pela Proposição 2.4 toda subsequência de (x_n) converge para a, o que implica que ela não possui duas subsequências que convergem para limites distintos. Quando isso ocorre, então a sequência é divergente. ■

2.2 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY E ESPAÇOS MÉTRICOS COMPLETOS

Nessa subseção veremos o que são sequências de Cauchy, bem como alguns exemplos e conceitos relacionados a espaços métricos completos.

Definição 2.11 *Dizemos que uma sequência* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *em um espaço métrico* M *é uma sequência de Cauchy se dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Proposição 2.6 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$ no espaço métrico M. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2},$$

então, se $m, n > n_0$,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. ■

A seguir veremos o conceito de métrica induzida, que utilizaremos para verificar se a recíproca da Proposição anterior é verdadeira.

Definição 2.12 *Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural como espaço métrico, basta usar os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M. Quando isso é feito dizemos que a métrica de S é induzida pela de M.*

O exemplo a seguir vai mostrar que a recíproca da Proposição 2.6 não é verdadeira.

Exemplo 2.11 *No espaço métrico $X = (0, 1]$, a sequência $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, mas não é convergente.*

Solução: De fato, como $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathbb{R}$, então é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Assim, munindo X da métrica induzida pela de $\mathbb{R}$, é também de Cauchy em X, pois ser de Cauchy é uma propriedade intríseca da sequência, ou seja, se temos uma sequência com respeito a uma certa métrica é de Cauchy, então ela continuará sendo de Cauchy independente do espaço, desde que a métrica seja a mesma. Contudo, veja que $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente em X, pois se o limite existisse ele seria igual a zero, contudo zero não pertence a X. ■

A definição a seguir mostra sobre quais condições um subconjunto de um espaço métrico é limitado.

Definição 2.13 *Dizemos que um subconjunto X de um espaço métrico M é limitado se existe $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$, para todo $x, y \in X$. Quando X for limitado, chamaremos de diâmetro de X ao número:*

$$diam(X) = \sup\{d(x, y); x, y \in X\}.$$

Proposição 2.7 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: De fato, tomando $\varepsilon = 1$ na definição, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \in \mathbb{N}, \text{ com } n, m > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < 1,$$

logo o conjunto $\{x_n; n \geq n_0\}$ é limitado e tem $diam \leq 1$ e assim $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0}\} \cup \{x_n; n \geq n_0\}$ é limitado, pois a união de dois conjuntos limitados resulta em um conjunto limitado. ■

Observação 2.2 *A recíproca da Proposição* 2.7 *é falsa. Considere a sequência* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demonstração: Veja que essa sequência terá somente dois elementos $\{-1, 1\}$ e portanto limitada, no entanto, tomando $0 < \varepsilon < 1$, tem-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$; e para $m, n \in \mathbb{N}$, com $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) = 2 > \varepsilon$ e isso contraria a ideia de sequência de Cauchy. ■

A seguir veremos o conceito de Espaços Métricos Completos e alguns exemplos.

Definição 2.14 *Diz-se que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

A fim de mostrar que a reta é um espaço métrico completo, é necessário que mostremos que toda subsequência de uma sequência de Cauchy converge para o mesmo limite da sequência. Veja a proposição a seguir.

Proposição 2.8 *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente e neste caso possui o mesmo limite que a subsequência.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência convergente de (x_n) tal que $\lim x_{n_k} = a$. Dado $\varepsilon > 0$ implica que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que se $n_k > p \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Existe ainda um $q \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Defina $n_0 = \max\{p, q\}$, logo para todo $n > n_0$ existe $n_k > n_0$ e então

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que implica que $\lim x_n = a$. ■

A proposição a seguir vai mostrar que a reta é um espaço métrico completo.

Proposição 2.9 *A reta é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. A Proposição 2.7 garante que toda sequência de Cauchy é limitada. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass, toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência que converge, com isso combinando os dois resultados podemos afirmar que a reta é um espaço métrico completo. ■

Para que seja possível entender a Proposição 2.10 e a sua demonstração que vem a seguir se faz necessário que seja feita a definição de conjunto fechado em um subespaço. Vejamos as definições que vem a seguir.

Definição 2.15 *Dizemos que um conjunto F é fechado se $\lim x_k = a$ com $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $a \in X$.*

Definição 2.16 *Seja Y um subespaço de X, diremos que o conjunto A é fechado em Y se A for um subconjunto de Y e se A for fechado na topologia do subespaço Y.*

Veremos a seguir um resultado muito importante que será utilizado na aplicação de Equações Integrais de Fredholm. Ele garante que um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Vejamos a Proposição.

Proposição 2.10 *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo. Reciprocamente, um subespaço completo de qualquer espaço métrico é fechado.*

Demonstração: Seja $F \subset M$ fechado e M um espaço métrico completo. Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em F, existe $\lim x_n = a \in M$. Como F é fechado em M, tem-se que $a \in F$, logo F é completo. Por outro lado, se $M \subset N$ é um subespaço completo, dada a sequência de pontos $x_n \in M$, com $\lim x_n = a \in N$, a sequência (x_n) é de Cauchy em M. Logo existe $b \in M$ tal que $\lim x_n = b$. Pela unicidade do limite tem-se que $a = b$ e portanto M é fechado em N. ■

A seguir veremos um resultado que permite verificar que o produto cartesiano de espaços métricos completos é completo.

Proposição 2.11 *O produto cartesiano $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M e (y_n) uma sequência de Cauchy em N. Então, utilizando a Proposição 2.5 e sabendo que toda sequência convergente é de Cauchy, então $(x_n, y_n) = z_n$ é de Cauchy em $M \times N$. Por hipótese $M \times N$ é completo, logo $z_n = (x_n, y_n)$ converge para $w = (a, b) \in M \times N$. Utilizando ainda a Proposição 2.5, (x_n) converge para $a \in M$ e (y_n) converge para $b \in N$. Logo, M e N são completos.

Reciprocamente, seja $z_n = (x_n, y_n) \in M \times N$ uma sequência de Cauchy. Então, utilizando da Proposição 2.5 e do fato de que sequências convergentes são de Cauchy, (x_n) é de Cauchy em M e (y_n) é de Cauchy em N. Por hipótese, M e N são completos, logo (x_n) converge para $a \in M$ e (y_n) converge para $b \in N$. Então, pela Proposição 2.5, $z_n = (x_n, y_n)$ converge para $(a, b) \in M \times N$, logo $M \times N$ é completo. ■

Corolário 2.1 *$M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ é completo se, e somente se, $M_1, M_2, ..., M_n$ são completos.*

Demonstração: Para demonstrar esse corolário é necessário e suficiente aplicar a Proposição 2.11 $n - 1$ vezes. ■

Observação 2.3 *O Corolário 2.1 nos garante que o produto finito de espaços métricos completos é completo. No entanto, se pensarmos no produto infinito de espaços métricos o resultado também é satisfeito e a demonstração segue de modo análogo ao do Corolário 2.1.*

O exemplo a seguir é uma aplicação direta da combinação da Proposição 2.9 com o Corolário 2.1. Vejamos o exemplo.

Exemplo 2.12 *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo.*

Solução: A Proposição 2.9 garante que $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo, com isso utilizando-se do Corolário 2.1 garantimos que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo. ■

A seguir veremos uma definição que vai nos permitir garantir que o espaço das funções contínuas em um intervalo $[a, b]$ é um espaço métrico completo.

Definição 2.17 *Uma sequência de funções $f_n : M \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : M \to \mathbb{R}$ quando, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in M$.*

A partir desta definição e da unicidade do limite mostrada na Proposição 2.3, mostraremos que o espaço das funções contínuas munido com a métrica do supremo é completo.

Exemplo 2.13 *Mostre que o espaço das funções contínuas $C([a, b], \mathbb{R})$ é completo com a métrica*

$$d(f, g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Solução: Vimos no exemplo 2.3 que de fato d define uma métrica. Com isso, seja (f_n) uma sequência de Cauchy em $C([a, b], \mathbb{R})$. Com isso, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n > n_0$ tem-se

$$d(f_m, f_n) = \sup_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon \tag{4}$$

dessa forma, para todo $t \in [a, b]$,

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon; \quad m, n > n_0$$

Assim, para todo $t \in [a, b]$ tem-se que $(f_1(t), f_2(t), ...)$ é uma sequência de Cauchy de números reais e neste caso converge para algum $\alpha(t) \in \mathbb{R}$. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = \alpha(t)$. Note que, se $t \in [a, b]$ e $m, n > n_0$ então

$$\begin{aligned}
|f_m(t) - f(t)| &\leq |f_m(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| \\
&< \varepsilon + |f_n(t) - f(t)|
\end{aligned}$$

logo fazendo $n \to \infty$ tem-se que para todo $t \in [a, b]$

$$|f_m(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Dessa forma,

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon \quad se\ n > n_0. \tag{5}$$

Devemos mostrar agora que f está em $C([a, b], \mathbb{R})$, isto é, que f é contínua. Sejam $x_0 \in [a, b]$ e $\varepsilon > 0$. Usando (5) com $\frac{\varepsilon}{3}$, obtemos m fixo tal que $|f_m(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, para qualquer $t \in [a, b]$. Como f_m está em $[a, b]$ então existe uma vizinhança V contendo

x_0 tal que $|f_m(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dessa forma, para cada $t \in V$ temos que

$$|f(t) - f(x_0)| \leq |f(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

o que mostra que f é contínua. Note que como $[a, b]$ é um intervalo compacto, então já podemos concluir que f é limitada. Com isso, conseguimos observar por (5) que (f_m) converge para f em $C[a, b]$ e isso completa a demonstração. ∎

2.3 ESPAÇOS DE BANACH

Vimos que um espaço induzido por uma norma é chamado de espaço vetorial normado e a partir daí podemos pensar o seguinte: Existem espaços vetoriais normados que são completos? E se existirem, eles tem um nome específico? Nesse tópico trabalharemos o conceito de espaços de Banach, algumas definições, propriedades e exemplos.

Definição 2.18 *Um espaço vetorial normado completo chama-se um espaço de Banach.*

Exemplo 2.14 $\mathbb{R}^n$ *é um espaço de Banach com a norma usual.*

Solução: De fato, foi mostrado no Exemplo 2.12 que o $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo e munido da norma usual da reta define um espaço vetorial normado, o que caracteriza assim um espaço de Banach. ∎

Exemplo 2.15 *O conjunto das funções polinomiais* $\mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$ *é um espaço vetorial. Podemos considerar em* $\mathcal{P}[0, 1]$ *a norma* $||p|| = \sup_{t \in [0,1]} |p(t)|$*, por exemplo. Em relação a esta norma, o espaço* $\mathcal{P}[0, 1]$ *não é Banach.*

Solução: Mostramos no exemplo 2.6 que de fato $||p||$ define uma norma, com isso, sabe-se do cálculo que a sequência de polinômios

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

converge uniformemente em $[0, 1]$ para a função e^x, que não é um polinômio. Logo, $p_n(x)$ é uma sequência de Cauchy que não converge em $\mathcal{P}[0, 1]$. ∎

Veremos a seguir o conceito de espaços de Hilbert. Para tanto, se faz necessário inicialmente que seja definido o conceito de produto interno.

Definição 2.19 *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$. *Uma aplicação* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ *que associa a cada par de elementos* u *e* v *em* V *um número real* $\langle u, v \rangle$*, e para quaisquer elementos* $u, v, w \in V$ *satisfaz as propriedades:*

(1) **Simetria:** $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;

(2) **Positividade:** $\langle v, v \rangle \geq 0$, *com* $\langle v, v \rangle = 0$ *se, e somente se,* v *for o vetor nulo;*

(3) **Distributividade:** $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;

(4) **Homogeneidade:** $\langle \lambda \cdot u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

O conceito que veremos a seguir é o de espaços de Hilbert na qual relaciona produto interno e norma. Sabe-se da Álgebra Linear que todo produto interno define uma norma, com isso a partir desta definição será possível observar se existe uma relação entre espaços de Hilbert e espaços de Banach.

Definição 2.20 *Seja H um espaço vetorial sobre um corpo K e $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \to K$ um produto interno, então H é um espaço de Hilbert se for completo com a norma induzida pelo produto interno, isto é,*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Será que os espaços de Hilbert possuem alguma relação com os espaços de Banach?

Observação 2.4 *Todo espaço de Hilbert é também um espaço de Banach.*

Note que a Observação anterior só é possível pois os espaços de Hilbert são definidos a partir de um produto interno que define uma norma que será possível garantir que este espaço é completo. Assim, como estaremos em um espaço com norma que é completo, então estaremos nas hipóteses dos espaços de Banach. A seguir veremos o exemplo mais comum quando se trata de espaços de Hilbert.

Exemplo 2.16 *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Hilbert com a norma*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2},$$

onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

A demonstração deste exemplo segue da combinação dos resultados do exemplo 2.12 com o exemplo 2.5.

3 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Neste capítulo veremos um pouco sobre a história de Stefan Banach bem como alguns conceitos que serão fundamentais para que possamos enunciar e provar o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

3.1 UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DE STEFAN BANACH

Stefan Banach foi um matemático nascido em 30 de março de 1892 na cidade de Cracóvia, na Polonia. Seu primeiro nome é oriundo de seu pai, Stefan Greczek, enquanto que seu segundo nome vem de sua mãe, Katarzyna Banach. Durante o ginásio, Banach teve excelentes notas se destacando especificamente em Matemática e Ciências Naturais, no entanto, ao se aproximar do fim de seus estudos suas notas começaram a decair, mas ainda assim conseguiu a aprovação em seu exame final em 1910.

O pai de Banach não o apoiava em seus estudos então ele resolveu deixar a cidade de Cracóvia e foi para Lviv, Ucrânia, onde se matriculou na Faculdade de Engenharia na Universidade Técnica de Lviv. Por não ter um aporte financeiro, Banach ministrava aulas particulares para conseguir se manter na Faculdade e veio a se formar em 1914.

Em 1916 um evento casual teria um impacto muito grande na vida de Banach, ele encontrou com Steinhaus, que estava na cidade para assumir um cargo na Universidade Jan Kazimierz, que lhe falou sobre um problema que estava trabalhando sem sucesso. Depois de alguns dias Banach teve uma ideia principal para um contra exemplo e juntamente com Steinhaus escreveram um artigo que apresentaram a Zaremba para publicação, que fora publicado tempos depois e apareceu no Boletim da Academia de Cracóvia em 1918.

A partir do momento que produziu esse artigo com Steinhaus, Banach começou a produzir diversos outros trabalhos, onde lançou as bases para a criação da Análise funcional moderna e fez grandes contribuições para a teoria dos espaços vetoriais topológicos. Além disso, contribuiu para a teoria dos conjuntos e séries ortogonais. Em sua dissertação, escrita em 1920, ele definiu axiomaticamente o que hoje é chamado de espaço de Banach. A ideia foi introduzida por outros na mesma época, por exemplo, Wiener introduziu a noção, mas não desenvolveu a teoria. O nome espaço Banach foi cunhado por Fréchet. As Álgebras de Banach também foram nomeadas em sua homenagem.

Banach provou uma série de resultados fundamentais em espaços vetoriais normados, e muitos teoremas importantes são hoje nomeados em sua homenagem. Existe o teorema de Hahn - Banach sobre a extensão de funcionais lineares contínuos, o teorema de Banach - Steinhaus sobre famílias de operadores limitados, o Teorema de Banach - Alaoglu, o Teorema de Banach do ponto fixo e o Teorema de Banach- Tarski decomposição paradoxal de uma bola. Em 31 de agosto de 1945, Banach faleceu com um câncer no pulmão, na cidade de Lviv na Ucrânia.

3.2 PONTO FIXO, CONTRAÇÕES E O TEOREMA DE BANACH

Um dos diversos resultados desenvolvidos por Stefan Banach foi sobre o Teorema do Ponto Fixo de Banach, a seguir veremos algumas definições e enunciaremos e demonstraremos este Teorema.

Definição 3.1 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um ponto fixo de uma aplicação $f : M \to M$ é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.*

Exemplo 3.1 *Determine o(s) ponto(s) fixo(s) da aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x$*

Solução: Usando a definição de ponto fixo, temos que

$$f(x) = x \iff -x = x \iff 2x = 0 \iff x = 0.$$

Logo, podemos concluir que 0 é o único ponto fixo da aplicação. ■

Exemplo 3.2 *A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ tem dois pontos fixos, a saber 0 e 1.*

Solução: De fato, queremos encontrar os pontos fixos da aplicação $f(x) = x^2$, logo usando a definição de ponto fixo, temos que para $f(x) = x$ implica que $x^2 = x$, ou ainda, $x(x - 1) = 0$. Note que essa afirmação é válida desde que $x = 0$ ou que $x = 1$, desta forma, 0 e 1 são os únicos pontos fixos da aplicação $f(x) = x^2$. ■

Exemplo 3.3 *Seja B a bola unitária fechada no espaço $\mathbb{R}^n$ e $F : B \to B$ uma aplicação contínua. Então existe um ponto fixo $x \in B$, ou seja, $f(x) = x$. Este exemplo é um famoso resultado de Topologia, ele é muito conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.*

Solução: Vamos demonstrar para o caso $n = 1$, ou seja, para um intervalo fechado $[0, 1]$ da reta.

O intuito da nossa demonstração é provar que toda função contínua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ possui um ponto fixo. De início, considere a função $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(x) = f(x) - x$. Note que $\psi(x)$ é contínua, pois $f(x)$ e x são funções contínuas e a soma de funções contínuas também é contínua. Como $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in [0, 1]$ então $\psi(0) = f(0) \geq 0$ e $\psi(1) = f(1) - 1 \leq 0$, veja que para o caso em que $\psi(0) = 0$ e $\psi(1) = 0$ já determina um ponto fixo. Considerando neste caso somente a desigualdade, ou seja, quando $\psi(0) > 0$ e $\psi(1) < 0$, então pelo Teorema do Valor Intermediário segue-se que deve existir $c \in (0, 1)$ tal que $\psi(c) = 0$, ou seja, $f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$, o que decorre da demonstração que existe um ponto fixo $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$. Para o caso em que $n > 1$ consulte (6). ■

A seguir veremos uma definição que será fundamental para a demonstração do

Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Definição 3.2 *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ chama-se uma contração quando existe uma constante c, com $0 \leq c < 1$, tal que $d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$, tal que d_N representa a distância dos pontos que pertencem a N e d_M representa a distância dos pontos de M. Para o caso em que $M = N$ a notação para contração será reduzida apenas a $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, para quaisquer $x, y \in M$.*

Para compreender a observação que vem a seguir é necessário que seja definido inicialmente sobre quais condições uma aplicação é uniformemente contínua.

Definição 3.3 *Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ diz-se uniformemente contínua quando, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ tem-se $d_M(x, y) < \delta$ o que implica $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Vejamos a Observação a seguir.

Observação 3.1 *Dada uma aplicação $f : M \to N$ contração então ela é uniformemente contínua.*

De fato, dado $\varepsilon > 0$ basta considerar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c+1}$. Assim, se $d_M(x, y) < \delta$ para $x, y \in M$, então

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x, y) < (c+1) \cdot d_M(x, y) < (c+1) \cdot \delta \leq (c+1) \cdot \frac{\varepsilon}{(c+1)} = \varepsilon,$$

o que mostra que toda contração é uniformemente contínua.

A seguir veremos um exemplo que nada mais é do que uma aplicação dos conceitos de contração.

Exemplo 3.4 *Considere $M = \mathbb{R}$ com a métrica usual. A função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ é uma contração.*

Solução: De fato,

$$d(f(x), (f(y)) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left|(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}\right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot |x - y|.$$

Como $x, y \geq 1$, temos que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$, ou ainda, $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \dfrac{1}{2}$, tem-se que,

$$d(f(x), (f(y)) \leq \frac{1}{2}|x - y|,$$

o que finaliza a solução. ∎

Observação 3.2 *Observe que o fato de uma aplicação não ser contração não implica* *nela não possuir ponto fixo, pois dada a aplicação $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \psi(t) = 2t$, não é uma contração em qualquer aberto da reta, mas possui um único ponto fixo.*

Demonstração: De fato, observe que

$$|\psi(t) - \psi(s)| = |2t - 2s| = |2(t - s)| = |2||t - s| \leq 2 \cdot |t - s|,$$

o que mostra que de fato essa aplicação não é contração, pois $c = 2$. No entanto, observe ainda que ψ possui um único ponto fixo, pois

$$\psi(t) = t \Rightarrow 2t = t \Rightarrow t = 0$$

e neste caso 0 é o único ponto fixo de ψ. ■

Teorema 3.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M. Mais Precisamente, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e pusermos $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...$ a sequência (x_n) converge em M e $a = \lim x_n$ é o único ponto fixo de f.*

Demonstração: Dividiremos a demonstração em duas partes, existência e unicidade. Provaremos inicialmente a existência, e neste caso basta verificarmos que dada uma sequência (x_n) ela é de Cauchy em M. De fato, como f é uma contração, então vale as seguintes desigualdades

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1).$$

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2) \leq c^2 \cdot d(x_0, x_1).$$

$$d(x_3, x_4) = d(f(x_2), f(x_3)) \leq c \cdot d(x_2, x_3) \leq c^2 \cdot d(x_1, x_2) \leq c^3 \cdot d(x_0, x_1),$$

ou seja, de modo geral tem-se que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, dados $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer e utilizando da desigualdade triangular, tem-se

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [c^n + c^{n+1} + ... + c^{n+p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\ &= c^n[1 + c + ... + c^{p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\ &= c^n \cdot \sum_{i=0}^{p-1} c^i \cdot d(x_0, x_1) = c^n \left(1 + \sum_{i=1}^{p-1} c^i\right) \cdot d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; c^n\left(1+\sum_{i=1}^{\infty} c^i\right)\cdot d(x_0,x_1)\\
&= \; c^n\cdot\left(1+\frac{c}{1-c}\right)\cdot d(x_0,x_1)\\
&= \; \frac{c^n}{1-c}\cdot d(x_0,x_1).
\end{aligned}
$$

Como $0 \leq c < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$. Com isso, dado $\dfrac{\varepsilon}{d(x_0,x_1)+1}(1-c) > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|c^n - 0| = |c^n| < \dfrac{\varepsilon}{d(x_0,x_1)+1}(1-c)$. Logo,

$$
d(x_n,x_{n+p}) \leq \frac{\dfrac{\varepsilon\cdot(1-c)}{d(x_0,x_1)+1}}{1-c}\cdot d(x_0,x_1) = \frac{\varepsilon\cdot(1-c)}{1-c}\cdot\frac{d(x_0,x_1)}{d(x_0,x_1)+1} < \varepsilon,
$$

portanto segue que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M, ou seja, existe $\lim x_n = p$. Com isso, p é ponto fixo de f, pois

$$
f(p) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = p.
$$

Mostraremos agora a unicidade do ponto fixo, neste caso considere p e q pontos fixos de f. Com isso, veja que

$$
0 \leq d(p,q) = d(f(p),f(q)) \leq c\cdot d(p,q),
$$

daí

$$
d(p,q) - c\cdot d(p,q) \leq 0,
$$

ou seja,

$$
(1-c)\cdot d(p,q) \leq 0,
$$

como $(1-c) > 0$ e $d(p,q) \geq 0$ então

$$
(1-c)\cdot d(p,q) = 0,
$$

o que nos diz que $(1-c) = 0$ ou $d(p,q) = 0$. No entanto, $1-c=0$ se $c=1$, contudo $0 \leq c < 1$ e neste caso c não pode ser 1, logo $d(p,q) = 0$ e assim $p = q$, o que finaliza a demonstração do Teorema. ■

Note que o Teorema foi enunciado para o caso em que M é um espaço métrico completo, no entanto, o Teorema pode ser enunciado para um espaço vetorial normado. A seguir, segue o um novo enunciado para o Teorema do Ponto Fixo de Banach e a demonstração segue de modo análogo para o caso em que M é espaço métrico completo.

Teorema 3.2 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Se M é um espaço vetorial normado completo, ou seja, M é um espaço de Banach, então toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M.*

4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações que envolvem o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Uma das mais importantes é sobre a existência e unicidade de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias, conhecido como Teorema de Picard, em seguida será apresentada aplicações na área de Cálculo Numérico e sobre as Equações Integrais de Fredlhom. Por fim, será apresentado uma aplicação na área de Engenharia da Computação sobre como funciona o Buscador do Google.

4.1 TEOREMA DE PICARD

Uma das mais conhecidas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach é o Teorema de Picard que estabelece a existência e unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias. Nesta seção traremos alguns resultados que serão suficientes e necessários para que possamos demonstrar o Teorema de Picard.

Lembre-se que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se contém todos os seus pontos interiores, ou seja, para todo $a \in S$ existe $r > 0$ tal que $B(a; r)$ está inteiramente contida em S.

Definição 4.1 *Dada uma função contínua $f : U \to \mathbb{R}^n$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $(t_0, x_0) \in U$, a equação diferencial de primeira ordem, com valor inicial, definida por f é escrita como:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{6}$$

Uma solução do sistema (6) é uma função diferenciável $X : I \to \mathbb{R}^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ onde I é um intervalo tal que $t_0 \in I$ e $x(t_0) = x_0$ e que satisfaz a equação $x' = f(t, c)$.

Definição 4.2 *Uma função $f : U \to \mathbb{R}^n$, onde U é aberto contido em $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e $(t_0, x_0) \in U$, é dita Lipschitziana com respeito à segunda variável se existir $c > 0$ tal que*

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq c||x_1 - x_2||,$$

para quaisquer (t, x_1) e $(t, x_2) \in U$.

A seguir, apresentaremos o enunciado e em seguida a demonstração do Teorema de Picard.

Teorema 4.1 (de Picard) *Seja f contínua e lipschitziana na segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{\ t; |t - t_0| \leq a\ \}$, $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω, existe uma única solução de*

$$x' = f(x, y), x(t_0) = x_0$$

em I_α, *onde* $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Demonstração: Seja $X = C(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\psi : I_\alpha \to B_b$, com a métrica uniforme

$$d(\psi_1, \psi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\psi_1(t) - \psi_2(t)|.$$

No exemplo 2.13 verificamos que de fato esse espaço é completo. Para $\psi \in X$, seja $F(\psi) : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$F(\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s, \psi(s))ds; \quad t \in I_\alpha.$$

Note, que a partir desta F podemos destacar as seguintes propriedades:
(1) $F(X) \subseteq X$
(2) F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

Veja que, se mostrarmos que essas duas propriedades são verdadeiras, então o Teorema do Ponto Fixo de Banach vai garantir a existência de uma única solução. Começamos inicialmente mostrando (1), então para todo $t \in I_\alpha$

$$|F(\psi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi(s))|ds \leq \int_{t_0}^{t} Mds \leq M|t_0 - t| \leq M\alpha \leq b.$$

Veja que isso é suficiente para mostrar (1). O que nos resta agora é mostrar que o operador a seguir é uma contração,ou seja, devemos mostrar a condição (2), então para todo par $\psi_1, \psi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$

$$|F^n(\psi_1)(t) - F^n(\psi_2)(t)| \leq \frac{K^n(t - t_0)^n}{n!} \cdot d(\psi_1, \psi_2), \ t \in I_\alpha,$$

onde K é a constante de lipschitz de f. Para mostrar essa desigualdade faremos uma verificação por indução sobre n. Note que para $n = 0$ não é difícil de ver. Suponhamos que é válida para $n = k$, então provemos para $n = k + 1$. Observe que

$$\begin{aligned} |F^{k+1}(\psi_1)(t) - F^{k+1}(\psi_2)(t)| &= |F(F^k(\psi_1))(t) - F(F^k(\psi_2))(t)| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |(f(s, F^k(\psi_1(s)) - (f(s, F^k(\psi_2(s))|ds. \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} |f(s, F^k(\psi_1(s))) - f(s, F^k(\psi_2(s)))| ds &\leq K \left| \int_{t_0}^{t} \frac{K^k (t_0 - s)^k}{k!} \cdot d(\psi_1, \psi_2) ds \right| \\
&\leq \frac{K^{k+1}}{k!} \cdot \int_{t_0}^{t} |(t_0 - s)^k \cdot d(\psi_1, \psi_2) ds| \\
&= \frac{K^{k+1}}{k!} \cdot \frac{|t - t_0|^{k+1}}{k+1} \cdot d(\psi_1, \psi_2) \\
&= \frac{K^{k+1}}{(k+1)!} \cdot |t - t_0|^{k+1} \cdot d(\psi_1, \psi_2).
\end{aligned}$$

Portanto, $|F^n(\psi_1)(t) - F^n(\psi_2)(t)| \leq \frac{K^n \cdot (t - t_0)^n}{n!} \cdot d(\psi_1, \psi_2)$ e, para n grande, $\frac{K^n \cdot (t - t_0)^n}{n!} < 1$, donde F^n é uma contração de X. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma única ψ tal que $F(\psi) = \psi$, e isto prova o Teorema de Picard. ∎

4.2 MÉTODO DO PONTO FIXO (MPF)

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, intervalo que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$. O MPF consiste em transformar esta equação em uma equação equivalente $x = \psi(x)$ e a partir de uma aproximação inicial x_0 gerar a sequência $\{x_k\}$ de aproximação para ξ pela relação $x_{k+1} = \psi(x_k)$, pois a função $\psi(x)$ tal que $f(\xi) = 0$ se, e somente se, $\psi(\xi) = \xi$. Transformamos assim o problema de encontrar um zero de $f(x)$ no problema de encontrar um ponto fixo de $\psi(x)$.

Definição 4.3 *Uma função $\psi(x)$ que satisfaz a condição acima é chamada de função de iteração para a equação $f(x) = 0$.*

Observação 4.1 *Dada uma função f, é possível obter várias funções de iteração.*

Exemplo 4.1 *A equação $x^2 + x - 6 = 0$ tem várias funções de interação. Determine 4 delas.*

Solução: Para determinar as funções de iteração basta encontrarmos $\psi(x) = x$. Encontraremos a função de iteração (i) e as demais o cálculo segue de forma análoga. Para encontrar $\psi_1(x)$, basta isolar x na equação $x^2 + x - 6 = 0$, obtendo $x = 6 - x^2$, logo $\psi_1(x) = 6 - x^2$. Sendo assim, temos as seguintes funções de iteração

(i) $\psi_1(x) = 6 - x^2$.
(ii) $\psi_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$.
(iii) $\psi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$.
(iv) $\psi_4(x) = \frac{6}{x + 1}$.

∎

A forma geral da funções de interação $\psi(x)$ é $\psi(x) = x + A(x)f(x)$, com a condição que em ξ, ponto fixo de $\psi(x)$, se tenha $A(\xi) \neq 0$.

Proposição 4.1 *A função $f(\xi) = 0$ se, e somente se, $\psi(\xi) = \xi$.*

Demonstração: Sabemos que $f(\xi) = 0$, logo

$$\psi(\xi) = \xi + A(\xi).0 \quad \Rightarrow \ \psi(\xi) = \xi.$$

Reciprocamente, temos que

$$\psi(\xi) = \xi,$$

logo

$$\xi = \xi + A(\xi)f(\xi) \quad \Rightarrow A(\xi)f(\xi) = 0.$$

No entanto sabemos que $A(\xi) \neq 0$, então $f(\xi) = 0$, o que completa a demonstração. ∎

Com isso vemos que, dada uma equação $f(x) = 0$, existem infinitas funções de interação $\psi(x)$ para a equação $f(x) = 0$.

A seguir, veremos um Algoritmo que utilizaremos para encontrar as raízes aproximadas das funções.

Algoritmo 4.1 *Considere a equação $f(x) = 0$ e a equação equivalente $x = \psi(x)$. Suponha que $\psi(x)$ e $\psi'(x)$ são contínuas em um intervalo I, $|\psi'(x)| \leq M$, para todo $x \in I$ e $x_0 \in I$. Então, temos os seguintes passos:*
(1) Dados iniciais
(a) x_0: aproximação inicial
(b) ϵ_1 e ϵ_2: precisões
(2) Se $|f(x)| \leq \epsilon_1$, faça $x' = x_0$. (FIM)
(3) Considere $x_k = \psi(x_{k-1})$ e faça $k = 1$
(4) $x_1 = \psi(x_0)$
(5) Se $|f(x_1)| < \epsilon_1$ ou $|x_1 - x_0| < \epsilon_2$ então faça $x' = x_1$. (FIM)
(6) $x_0 = x_1$
(7) Considere $x_k = \psi(x_{k-1})$ e substitua k por $k + 1$.

O exemplo a seguir é uma aplicação direta do algoritmo mostrado anteriormente. Vejamos o exemplo.

Exemplo 4.2 *Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$ e considere a função interação $\psi(x) = \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{1}{3}$ tal que $x_0 = 0,5$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}; \epsilon \in (0,1)$. Encontre x' que será a raiz aproximada para f, em seguida, determine $f(x')$.*

Solução: Vamos utilizar o algoritmo apresentado para responder a essa questão. Observe que $f(x_0) = -1,375$, logo $|f(x_0)| > \epsilon_1$. Com isso, passamos para o passo 3 e 4. Veja que, $x_1 = 0,3472$, logo $f(x_1) = -0,0829$ e $|f(x_1)| > \epsilon_1$. Então voltamos para o passo 4.

$$x_2 = \psi(x_2) = \frac{(0,3379)^3}{9} + \frac{1}{3} = 0,3379.$$

Disto percebemos que $f(x_2) = 0,0025$ e $|f(x_2)| > \epsilon_1$ e novamente voltamos ao passo 4.

$$x_3 = \psi(x_2) = \frac{(0,3379)^3}{9} + \frac{1}{3} = 0,3376.$$

Desta forma, percebemos que $f(x_3) = -0,00009$ e $|f(x_3)| < \epsilon_1$. Com isso, $x' = 0,3376$ e $f(x') = -0,00009$. ■

4.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Nesta seção, estudaremos o Método de Newton-Raphson que nada mais é do que uma forma para se encontrar aproximações de raízes de uma função. O que o método de Newton faz, na tentativa de garantir e acelerar a convergência do MPF, é escolher para a função iteração a função $\psi(x)$ tal que $\psi'(\xi) = 0$.

Proposição 4.2 *Dada a equação $f(x) = 0$ e partindo da forma geral para $\psi(x)$, queremos obter a função $A(x)$ tal que $\psi'(\xi) = 0$.*

Demonstração: Vimos no Método do Ponto Fixo que a forma geral para as funções de iteração é dada por

$$\psi(x) = x + A(x)f(x),$$

derivando $\psi(x)$ temos que

$$\psi'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x),$$

como $f(x) = 0$ então $\psi'(x) = 1 + A(x)f'(x)$, dessa forma calculando $\psi'(\xi)$ temos

$$\Rightarrow \psi'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi).$$

Assim, $\psi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0$

$$\Rightarrow A(\xi) = \frac{-1}{f'(\xi)}$$

donde tomamos

$$A(x) = \frac{-1}{f'(x)}.$$

■

Então, dada $f(x)$, a função de iteração $\psi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ será tal que $\psi'(\xi) = 0$, pois como podemos verificar:

$$\psi'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

e como $f(\xi) = 0, \psi'(\xi) = 0$ (desde que $f'(\xi) \neq 0$).

Exemplo 4.3 *Consideremos* $f(x) = x^2 + x - 6, \xi_2 = 2$ *e* $x_0 = 1,5$. *Determine* x' *que será a raiz aproximada da* f.

Solução: Para encontrar x', vamos usar

$$\psi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{7}$$

Para tanto, vamos de início encontrar $f'(x)$, e neste caso faz sentido pensarmos em derivada pois estamos trabalhando com uma função polinomial, logo

$$f'(x) = 2x + 1. \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7) e as informações dadas na questão, temos

$$\psi(x) = x - \frac{x^2 + x - 6}{2x + 1.}$$

Agora, vamos encontrar x' a partir de $x_0 = 1,5$

$$\Rightarrow x_1 = \psi(x_0) = 1,5 - \frac{2,25 + 1,5 - 6}{3 + 1} = 2,0625.$$

$$\Rightarrow x_2 = \psi(x_1) = 2,0625 - \frac{4,2539 + 2,0625 - 6}{4,125 + 1} = 2,00076.$$

$$\Rightarrow x_3 = \psi(x_2) = 2,00076 - \frac{4,0030 + 2,00076 - 6}{4,00152 + 1} = 2,00000.$$

Com isso, trabalhando com cinco casas decimais $x' = x_3 = \xi_2$. ■

Observação 4.2 *Em geral, afirma-se que o método de Newton converge desde que* x_0 *seja escolhido suficientemente próximo da raiz* ξ.

A seguir, veremos um Algoritmo que será usado para encontrar as raízes aproximadas das funções.

Algoritmo 4.2 *Seja a equação* $f(x) = 0$. *Suponha que* $f(x), f'(x)$ *e* $f''(x)$ *sejam contínuas num intervalo* I *que contém a raiz* $x = \xi$ *de* $f(x) = 0$. *Suponha ainda que* $f'(\xi) \neq 0$.

(1) Dados iniciais:

(a) x_0*: aproximação inicial.*

(b) ϵ_1 *e* ϵ_2*: precisões.*

(2) Se $|f(x)| < \epsilon_1$, *faça* $x' = x_0$

(3) Considere $x_k = \psi(x_{k-1})$ *e faça* $k = 1$

(4) $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
(5) Se $|f(x_1) < \epsilon_1$ *ou se* $|x_1 - x_0| < \epsilon_2$ *faça* $x' = x_1$
(6) $x_0 = x_1$
(7) Considere $x_k = \psi(x_{k-1})$ *e substitua* k *por* $k+1$.

O exemplo a seguir é uma aplicação direta do algoritmo apresentado anteriormente. Vejamos o exemplo.

Exemplo 4.4 *Encontre* x' *e* $f(x')$*, tal que* $f(x) = x^3 - 9x + 3, x_0 = 0,5, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1 \cdot 10^{-4}$.

Solução: Vamos utilizar o algoritmo apresentado anteriormente para responder a esta questão. Observe que $f'(x) = 3x^2 - 9$, $f(x_0) = -1,375$, logo $|f(x_0)| > \epsilon_1$ com isso, passamos para o passo 3 e 4. Veja que,

$$x_1 = 0,5 - \frac{-1,375}{-8,25} = 0,5 - 0,16 = 0,34.$$

Com isso, percebemos que $f(x_1) = -0,0206$, logo $|f(x_1)| > \epsilon_1$, então voltamos para o passo 3 e 4.

$$x_2 = 0,34 - \frac{-0,0206}{-8,6532} = 0,34 - 0,0023 = 0,3377.$$

Desta forma, percebemos que $f(x_2) = -0,007$, logo $|f(x_2)| > \epsilon_1$. Novamente voltamos ao passo 3 e 4.

$$x_3 = 0,3377 - \frac{-0,0007}{-8,6578} = 0,3377 - 0,00008 = 0,33762.$$

Então, $f(x_3) = -0,00009$ e $|f(x_3)| < \epsilon_1$. Com isso, $x' = 0,33762$ e $f(x') \approx -0,00009$. ■

4.4 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE FREDHOLM

Nesta seção será apresentada uma equação não-linear, muita conhecida como Equação Integral de Fredholm.

Proposição 4.3 *Seja* $K : Q \to \mathbb{R}$ *uma função contínua dada na região* $Q = [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}$ *que satisfaz a condição de Lipschitz.*

$$|K(t,s,u) - K(t,s,v)| \leq L|u - v|; \quad (t,s,u),(t,s,v) \in Q,$$

sendo $L > 0$*. Se* $\varphi \in C[a,b]$ *a equação integral não-linear de Fredholm*

$$\psi(t) = \int_a^b K(t,s,\psi(s))ds + \varphi(t), \quad t \in [a,b].$$

Possui uma única solução $\psi \in C[a,b]$ *se* $L(b-a) < 1$.

Demonstração: Inicialmente observe que Q é um espaço métrico completo tendo em vista que ele é formado pelo produto cartesiano de espaços métricos completos. Basta verificar sob tais condições o operador

$$S : C[a,b] \to C[a,b];\ (S\psi)(t) = \int_a^b K(t,s,\psi(s))ds + \varphi(t)$$

é uma contração em $C[a,b]$, pois o Teorema do Ponto Fixo de Banach vai garantir que possui uma única solução $\psi \in C[a,b]$ com $L(b-a) < 1$. Seja $\psi, \xi \in C[a,b]$, $\forall t \in [a,b]$, então

$$\begin{aligned}
|(S\psi)(t) - (S\xi)(t)| &\leq \left| \int_a^b K(t,s,\psi(s))ds + \varphi(t) - \int_a^b K(t,s,\xi(s))ds - \varphi(t) \right| \\
&\leq \int_a^b |K(t,s,\psi(s)) - K(t,s,\xi(s))| ds \\
&\leq L \int_a^b |\psi(s) - \xi(s)| ds \\
&\leq L \int_a^b \sup |\psi - \xi| ds \\
&\leq L \cdot \sup |\psi - \xi| \int_a^b ds \leq L(b-a) \cdot \sup |\psi - \xi|
\end{aligned}$$

de forma que $||S\psi - S\xi|| \leq L(b-a) \cdot ||\psi - \xi||$, mostrando que S é uma contração pois $L(b-a) < 1$. Com isso, o Teorema do Ponto Fixo de Banach garante que possui uma única solução $\psi \in C[a,b]$ com $L(b-a) < 1$. ■

4.5 O BUSCADOR DO GOOGLE

A primeira rede mundial de computadores, também conhecida como internet, surgiu em meados da guerra fria com o objetivo de garantir que as comunicações norte americanas fossem mantidas mesmo em caso de ataques de inimigos que destruíssem os meios convencionais de telecomunicações. A primeira versão da internet, conhecida como ARPANET, funcionava através de um sistema conhecido como chaveamento de pacotes, que é um sistema de transmissão de dados em rede de computadores no qual as informações são divididas em pequenos pacotes.

Em 1990 a internet começou a alcançar toda a população mundial, quando o engenheiro inglês Tim Bernes-Lee desenvolveu a World Wide Web, o famoso padrão www, e possibilitando a utilização de uma interface gráfica e a criação de sites mais dinâmicos e visualmente interessantes. A partir de então a Internet cresceria em ritmo acelerado. Em 1993 começaram a surgir os primeiros buscadores, dentre os mais famosos da época estavam o Lycos e o Alta vista (que já não existe mais).

Mas o que seria exatamente um buscador? Todo buscador desempenha dois passos muito importantes: o primeiro é o Matching que faz com que seu algoritmo busque entre todas as páginas as palavras ou frases que foram digitadas. O segundo passo é o ranking onde o algoritmo ordena entre as páginas que foram encontradas no passo anterior as que são mais importantes.

Em 1997 e 1998 surgiu um novo buscador, o Google que foi criado pelos doutorandos em ciências da computação, em Stanford, Larryn Page e Sergey Brin. No entanto, esse novo buscador tinha algo de diferente, pois pouco depois de seu lançamento a revista PC Magazine o elegeu como um dos 100 melhores sites da época e comentou que o Google possuía "uma habilidade incrível para retornar resultados extremamente relevantes". Mas o que fazia o Google ter tanto sucesso em tão pouco tempo? Justamente as inovações que foram desenvolvidas no seu Ranking, o PageRanke. O que Page e Brin perceberam era que a partir da estrutura da web era possível determinar a relevância das páginas, pois elas são conectadas por links e desse modo, as páginas poderiam ser vistas como nós de um grafo direcionado e os links como as arestas.

Enquanto muitos buscadores classificam as páginas de acordo com a quantidade de conteúdo, a proposta do Google é de considerar a importância de cada página como a soma das importâncias das páginas que "apontam" para ela, dividida pelo número de links que saem dela. Mas será que a ordenação das páginas obedece a democracia da Web? Será que existem outras formas de ocorrer tal ordenação ou ela é única? Neste caso, o Teorema do Ponto Fixo de Banach se encaixa perfeitamente, pois vai garantir que o propósito dos criadores do Google é possível.

Seja G um grafo direcionado, ou seja, quando associamos sentido às arestas deste grafo, com nós de $1, 2, ..., n$. Nosso objetivo é para cada nó i, atribuir um valor real x_i que traduza a relevância do nó i. Quando j é um nó que aponta para i, chamaremos de link de i para j e denotaremos por $j \to i$ e denotaremos ainda por l_j o número de links saindo de j. Assim definiremos,

$$x_i = \sum_{j \to i} \frac{x_j}{l_j}$$

com isso, temos o seguinte sistema linear,

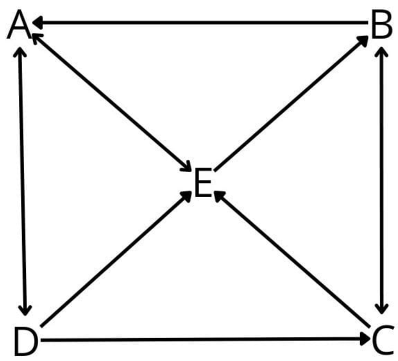
$$\begin{cases} x_1 = \frac{m_{11}}{l_1} x_1 + ... + \frac{m_{1n}}{l_n} x_n \\ x_2 = \frac{m_{21}}{l_1} x_1 + ... + \frac{m_{2n}}{l_n} x_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n = \frac{m_{n1}}{l_1} x_1 + ... + \frac{m_{nn}}{l_n} x_n \end{cases}$$

onde x_i é o número de links de $j \to i$, que pode inclusive ser zero. Dessa forma, se $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = \frac{m_{ij}}{l_j}$, então podemos ver $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ como uma transformação linear e a relevância $x = [x_1, x_2, ..., x_n]$ um autovetor de autovalor unitário.

O exemplo a seguir foi inspirado em (9).

Exemplo 4.5 *Júlia é estudante do curso de Engenharia da Computação de uma Universidade Federal. Em uma de suas aulas o professor começou a falar sobre como funcionava o buscador do Google e propôs um desafio a turma. Ele apresentou a turma às páginas A, B, C, D e E que tinham uma receita de pudim e mostrou a relação que essas páginas tinham uma com as outras e que as páginas sempre tinham um link que ligavam uma com as outras, ou seja, um internauta sempre encontrará a melhor receita de pudim sem desistir de sua pesquisa. Veja figura abaixo.*

Figura 1 – Diagrama 1



Fonte: O autor.

Em seguida, solicitou que a turma descobrisse qual página tinha a melhor receita de pudim, enfatizando que a página mais relevante tinha tal receita. Qual página Júlia encontrará a melhor receita de pudim?

Solução: Inicialmente, podemos observar que todas as páginas tem a mesma chance de ser acessada. Vamos chamar esse processo de Iteração 0, veja tabela.

Tabela 1 – Dados após cálculos da Iteração 0

Página	**Iteração 0**	**Iteração 1**	**Iteração 2**	**Iteração 3**	**Iteração 4**	**PageRank**	**Classificação**
A	$\frac{1}{5}$						
B	$\frac{1}{5}$						
C	$\frac{1}{5}$						
D	$\frac{1}{5}$						
E	$\frac{1}{5}$						

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao observar o diagrama podemos perceber que as páginas indicam umas as outras. Dessa forma, podemos calcular a relevância de cada página, que é dada pela relevância das outras páginas que indicam a primeira, chamaremos esse processo de Iteração 1. Seja $R_i(A), R_i(B), R_i(C), R_i(D)$ e $R_i(E)$ a relevância das páginas A, B, C, D e E, respectivamente, nesta iteração i.

Relevância 1 *da página A* : Analisando a página A, podemos observar que as páginas B, D e E a indicam diretamente. Sendo assim, a $R(A)$ é dada pela soma da relevância inicial das páginas B, D e E dividida pelo número de links que saem dela, portanto,

$$R_1(A) = \frac{R_0(B)}{2} + \frac{R_0(D)}{3} + \frac{R_0(E)}{2} = \frac{\frac{1}{5}}{2} + \frac{\frac{1}{5}}{3} + \frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{4}{15}.$$

Relevância 1 *da página B* : Analisando a página B, percebemos que as páginas C e E a indicam diretamente, dessa forma,

$$R_1(B) = \frac{R_0(C)}{2} + \frac{R_0(E)}{2} = \frac{\frac{1}{5}}{2} + \frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{1}{5}.$$

Relevância 1 *da página C* : Observando a página C, percebemos que B e D são as páginas que indicam C diretamente, logo

$$R_1(C) = \frac{R_0(B)}{2} + \frac{R_0(D)}{3} = \frac{\frac{1}{5}}{2} + \frac{\frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{6}.$$

Relevância 1 *da página D* : É possível notar que apenas a página A indica a página D diretamente, logo

$$R_1(D) = \frac{R_0(A)}{2} = \frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{1}{10}.$$

Relevância 1 *da página E* : Percebemos que as páginas A, C e D indicam a página E diretamente, logo

$$R_1(E) = \frac{R_0(A)}{2} + \frac{R_0(C)}{2} + \frac{R_0(D)}{3} = \frac{\frac{1}{5}}{2} + \frac{\frac{1}{5}}{2} + \frac{\frac{1}{5}}{3} = \frac{4}{15}.$$

A tabela abaixo apresenta os valores com as frações equivalentes para facilitar a comparação.

Tabela 2 – Dados após cálculos da Iteração 1

Página	**Iteração 0**	**Iteração 1**	**Iteração 2**	**Iteração 3**	**Iteração 4**	**PageRank**	**Classificação**
A	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{30}$					
B	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{30}$					
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{30}$					
D	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{30}$					
E	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{30}$					

Fonte: Elaborada pelo autor.

Seguindo a mesma ideia é possível agora calcularmos a Iteração 2, porém agora levando em consideração a relevância das páginas obtidas na Iteração 1, obtemos:
Relevância 2 da página A :

$$R_2(A) = \frac{R_1(B)}{2} + \frac{R_1(D)}{3} + \frac{R_1(E)}{2} = \frac{6}{60} + \frac{3}{90} + \frac{8}{60} = \frac{48}{180}.$$

Relevância 2 da página B :

$$R_2(B) = \frac{R_1(C)}{2} + \frac{R_1(E)}{2} = \frac{5}{60} + \frac{8}{60} = \frac{13}{60}.$$

Relevância 2 da página C :

$$R_2(C) = \frac{R_1(B)}{2} + \frac{R_1(D)}{3} = \frac{6}{60} + \frac{3}{90} = \frac{24}{180}.$$

Relevância 2 da página D :

$$R_2(D) = \frac{R_1(A)}{2} = \frac{2}{15}.$$

Relevância 2 da página E :

$$R_2(E) = \frac{R_1(A)}{2} + \frac{R_1(C)}{2} + \frac{R_1(D)}{3} = \frac{8}{60} + \frac{5}{60} + \frac{3}{90} = \frac{1}{4}.$$

Com isso, a tabela abaixo apresenta os valores para facilitar a comparação.

Tabela 3 – Dados após cálculos da Iteração 2

Página	**Iteração 0**	**Iteração 1**	**Iteração 2**	**Iteração 3**	**Iteração 4**	**PageRank**	**Classificação**
A	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{48}{180}$				
B	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{39}{180}$				
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{24}{180}$				
D	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{24}{180}$				
E	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{45}{180}$				

Fonte: Elaborada pelo autor.

Seguindo essa linha, podemos agora calcular a Iteração 3, levando em consideração agora a relevância das páginas obtidas na Iteração 2.
Relevância 3 *da página* A :

$$R_3(A) = \frac{R_2(B)}{2} + \frac{R_2(D)}{3} + \frac{R_2(E)}{2} = \frac{39}{360} + \frac{24}{540} + \frac{45}{360} = \frac{300}{1080} = \frac{100}{360}.$$

Relevância 3 *da página* B :

$$R_3(B) = \frac{R_2(C)}{2} + \frac{R_2(E)}{2} = \frac{24}{360} + \frac{45}{360} = \frac{69}{360}.$$

Relevância 3 *da página* C :

$$R_3(C) = \frac{R_2(B)}{2} + \frac{R_2(D)}{3} = \frac{39}{360} + \frac{24}{540} = \frac{165}{1080} = \frac{55}{360}.$$

Relevância 3 *da página* D :

$$R_3(D) = \frac{R_2(A)}{2} = \frac{48}{360}.$$

Relevância 3 *da página* E :

$$R_3(E) = \frac{R_2(A)}{2} + \frac{R_2(C)}{2} + \frac{R_2(D)}{3} = \frac{48}{360} + \frac{24}{360} + \frac{24}{540} = \frac{264}{1080} = \frac{88}{360}.$$

Assim obtemos os seguintes valores da Iteração 3. Veja tabela abaixo.

Tabela 4 – Dados após cálculos da Iteração 3

Página	**Iteração 0**	**Iteração 1**	**Iteração 2**	**Iteração 3**	**Iteração 4**	**PageRank**	**Classificação**
A	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{48}{180}$	$\frac{100}{360}$			
B	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{39}{180}$	$\frac{69}{360}$			
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{24}{180}$	$\frac{55}{360}$			
D	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{24}{180}$	$\frac{48}{360}$			
E	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{45}{180}$	$\frac{88}{360}$			

Fonte: Elaborada pelo autor.

Seguindo a mesma lógica podemos calcular a Iteração 4, considerando a relevância das páginas obtidas na Iteração 3.
Relevância 4 *da página* A :

$$R_4(A) = \frac{R_3(B)}{2} + \frac{R_3(D)}{3} + \frac{R_3(E)}{2} = \frac{69}{720} + \frac{48}{1080} + \frac{88}{720} = \frac{567}{2160} = \frac{189}{720}.$$

Relevância 4 *da página* B :

$$R_4(B) = \frac{R_3(C)}{2} + \frac{R_3(E)}{2} = \frac{55}{720} + \frac{88}{720} = \frac{143}{720}.$$

Relevância 4 *da página* C :

$$R_4(C) = \frac{R_3(B)}{2} + \frac{R_3(D)}{3} = \frac{69}{720} + \frac{48}{1080} = \frac{303}{2160} = \frac{101}{720}.$$

Relevância 4 *da página* D :

$$R_4(D) = \frac{R_3(A)}{2} = \frac{100}{720}.$$

Relevância 4 *da página* E :

$$R_4(E) = \frac{R_3(A)}{2} + \frac{R_3(C)}{2} + \frac{R_3(D)}{3} = \frac{100}{720} + \frac{55}{720} + \frac{48}{1080} = \frac{561}{2160} = \frac{187}{720}.$$

A tabela a seguir apresentará os resultados obtidos em todas as iterações bem como o PageRank final de cada página, com isso será possível determinar qual página é a mais relevante.

Tabela 5 – Classificação Final

Página	**Iteração 0**	**Iteração 1**	**Iteração 2**	**Iteração 3**	**Iteração 4**	**PageRank**	**Classificação**
A	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{48}{180}$	$\frac{100}{360}$	$\frac{189}{720}$	0,2625	1°
B	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{39}{180}$	$\frac{69}{360}$	$\frac{143}{720}$	0,198611	3°
C	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{24}{180}$	$\frac{55}{360}$	$\frac{101}{720}$	0,140278	4°
D	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{24}{180}$	$\frac{48}{360}$	$\frac{100}{720}$	0,138889	5°
E	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{45}{180}$	$\frac{88}{360}$	$\frac{187}{720}$	0,259722	2°

Fonte: Elaborada pelo autor.

Comparando as notas de PageRank podemos concluir que Júlia irá encontrar a melhor receita de pudim na página A. ■

Note que o exemplo anterior Júlia mostrou que um certo internauta sempre iria encontrar a melhor receita de pudim, pois as páginas possuíam links que ligavam umas as outras e ainda que o internauta não desistiria de sua pesquisa. No entanto, isso nem sempre ocorre, pois existem situações em que o internauta pode desistir da pesquisa ou simplesmente pelas páginas não possuírem links que as conectam. Pensando nisso, Page e Brin resolveram contornar este problema e daí introduziram um fator probabilístico p de recomeçar a pesquisa e $1-p$ de continuar nos links. Dessa forma, a aplicação que sintetiza o percurso do internauta é dada por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \to p \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} + (1-p) \cdot \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{l_1} & \frac{m_{12}}{l_2} & \cdots & \frac{m_{1n}}{l_n} \\ \frac{m_{21}}{l_1} & \frac{m_{22}}{l_2} & \cdots & \frac{m_{2n}}{l_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{m_{n1}}{l_1} & \frac{m_{n2}}{l_2} & \cdots & \frac{m_{nn}}{l_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Afim de demonstrar a proposição que vem a seguir, enunciaremos a definição de matriz estocástica.

Definição 4.4 *Uma matriz quadrada é chamada de matriz estocástica quando todos os seus elementos são números reais não negativos e a soma dos elementos em cada coluna são sempre iguais a* 1.

A seguir, enunciaremos uma proposição na qual nos permitirá concluir em como o Teorema do Ponto Fixo de Banach auxilia o buscador do Google.

Proposição 4.4 *Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz estocástica e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação* *definida por*

$$T(y) = p\varepsilon + (1-p)Ay$$

onde

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{l_1} & \frac{m_{12}}{l_2} & \cdots & \frac{m_{1n}}{l_n} \\ \frac{m_{21}}{l_1} & \frac{m_{22}}{l_2} & \cdots & \frac{m_{2n}}{l_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{m_{n1}}{l_1} & \frac{m_{n2}}{l_2} & \cdots & \frac{m_{nn}}{l_n} \end{pmatrix}$$

com uma constante $p \in (0,1]$. *Então a aplicação* T *é uma contração com* $c = 1-p < 1$. *Por consequência, ela admite um único ponto fixo* $T(x) = x$ *e , para qualquer vetor inicial* v_0 *a iteração* $x_{n+1} = T(x_n)$ *converge para o ponto fixo* x.

Demonstração: Dado $y, z \in \mathbb{R}^n$ e, sabendo que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1,$$

pois A é uma matriz estocástica, ou seja, suas entradas são positivas e a soma dos elementos de cada coluna são iguais a 1. Logo, temos

$$\begin{aligned} ||T(y) - T(z)||_{\mathbb{R}^n} &= ||(1-p)A(y-z)||_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq (1-p)\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|y_j - z_j|\right) \\ &= (1-p)\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)|y_j - z_j| \\ &= (1-p)\sum_{j=1}^{n}|y_j - z_j| = (1-p)||y-z||_{\mathbb{R}^n}, \end{aligned}$$

como $1-p$ é menor que 1, temos que T é uma contração. Finalmente, como a aplicação possui um único ponto fixo, o Teorema do Ponto Fixo de Banach garante que existe um único x tal que $T(x) = x$ o que garante então que independente da iteração a classificação das páginas de acordo com a sua relevância será a mesma, ou seja, tudo isso funciona e que a relevância das páginas está bem definida. ∎

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos conceitos que foram fundamentais para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach como a definição de espaços métricos completos na qual diz um conjunto é um espaço métrico completo se ele for um espaço métrico e se dada uma sequência de Cauchy nesse espaço ela convergir para um elemento do espaço. Outro conceito muito importante foi a de ponto fixo e de contrações na qual foram determinantes para a compreensão e a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Além disso, mostramos aplicações em diferentes áreas no qual o teorema mencionado acima se aplica perfeitamente. Vimos que o Teorema do Ponto Fixo de Banach foi peça chave na garantia de mostrar a existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias e nas equações integrais de Fredholm.

Outra aplicação que trouxemos foi na área de Cálculo Numérico, na qual abordamos conceitos para o cálculo de raízes aproximadas de funções, no qual o Teorema do Ponto Fixo de Banach garante que a partir de um número de iterações muito grandes a raíz se torna a mesma independente da iteração que está sendo calculada, ou seja, ela possui um ponto fixo.

Uma outra aplicação bem interessante que foi abordado é sobre o buscador do Google, mostramos que apesar do Google ter um buscador ainda novo no ramo comparado a outros ele possui resultados muito precisos que garantem aos seus usuários a obtenção de sucesso em suas pesquisas. Com essa aplicação foi possível perceber que os criadores do Google precisaram desenvolver um algoritmo capaz de contornar eventuais problemas que poderiam surgir e a partir disso verificamos como o Teorema do Ponto Fixo de Banach foi peça fundamental para garantir que os usuários chegarão nos resultados desejados e que o algoritmo desenvolvido funciona perfeitamente.

Dessa forma, esperamos que a partir deste trabalho seja possível despertar o interesse e o conhecimento sobre o Teorema do Ponto Fixo de Banach e assim, que possa surgir novos pesquisadores na área que consigam apresentar mais aplicações relacionadas ao Teorema e que de certa forma consigam despertar o interesse em alunos de áreas similares a Matemática.

REFERÊNCIAS

[1] BARROS, Cícero Demétrio Vieira de. O **Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

[2] EISERMANN, Michael. **Comment Fonctionne Google?**. Universidade Joseph Fourier, Maio, 2006. Disponível em: `https://www.apprendre-en-ligne.net/info/bibliotheque/google.pdf`. Acesso em: 19 de Maio de 2022.

[3] KATÉTOV, Miroslav. **Banach, Stefan**. Encyclopedia, 2018. Disponível em: `https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/stefan-banach#2830900250`. Acesso em: 15 de Junho de 2022.

[4] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. 4ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[5] LOPES, Vera Lúcia da Rocha; RUGGIERO, Márcia Gomes. **Cálculo numérico: Aspectos teóricos e computacionais**. 2ª edição. São Paulo: Makron Books, 1996.

[6] MARTINS, Patricia Reis; VASCONCELLOS, Carlos Frederico. **Teorema do ponto fixo de Brouwer**. Cadernos do IME-Série Matemática, v. 8, 2014.

[7] MUNKRES, James R. **Topología**. 2ª edição. Madrid: Prentice Hall, 2002.

[8] OLIVEIRA, César R. de. **Introdução à Análise Funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[9] RIBEIRO, Franciane Prestes Ferreira. **Teoremas de Ponto Fixo e aplicações para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2020.

[10] SILVA, Leonardo Werner. **Internet foi criada em 1969 com o nome de "Arpanet"nos EUA**. Folha de S.Paulo, 2001. Disponível em: `https://www1.folha.uol.com.br/paywall/login.shtml?https://www1.folha.uol.com.br/folha/cotidiano/ult95u34809.shtml`. Acesso em: 08 de Junho de 2022.

[11] SOTOMAYOR, Jorge. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.