UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LARISSA BRAGA FERNANDES

FUNÇÕES COMPLEXAS HOLOMORFAS E CAMPOS CONFORMES NO PLANO HIPERBÓLICO

REDENÇÃO - CE
2022

LARISSA BRAGA FERNANDES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

REDENÇÃO - CE

2022

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Fernandes, Larissa Braga.

F363f

Funções complexas holomorfas e campos conformes no plano hiperbólico / Larissa Braga Fernandes. - Redenção, 2022.
46f: il.

Monografia - Curso de Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2022.

Orientador: Porf. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. Funções complexas holomorfas. 2. Campos conformes. 3. Plano hiperbólico. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 510

LARISSA BRAGA FERNANDES

FUNÇÕES COMPLEXAS HOLOMORFAS E CAMPOS CONFORMES NO PLANO HIPERBÓLICO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Aprovado em: 28/07/2022

BANCA EXAMINADORA

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab)

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab)

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (Unilab)

Dedico este trabalho a minha familia e professores que foram essenciais nesse percurso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar força e sabedoria para persistir nessa jornada sem desanimar e me possibilitar viver esse momento.

À minha mãe (Iraide) e irmãos (Marina e Anazion) que sempre me apoiaram e me ajudaram para que até os momentos mais complexos fossem suavizados, além de serem minha inspiração para querer sempre mais.

Aos meus amigos da Unilab pelos momentos de descontração e estudo, em especial ao Luan, Fernando, Erika e Douglas, que sempre me ajudaram nos momentos de dificuldade, tanto nos conteúdos, quanto nas demais coisas.

Aos meus amigos (Raquel, Deivyd e Elanni) pelas conversas, descontrações e por acreditarem em mim, até nos momentos em que eu mesma não acreditava.

Ao Programa BICT da Funcap pelos anos de bolsa concedidos na iniciação científica, que foram cruciais no meu amadurecimento matemático.

Ao meu orientador Dr. João Francisco da Silva Filho pela paciência, orientação, empenho e pela oportunidade que me forneceu ao me ingressar na iniciação científica que foi de extrema importância na minha formação e no desenvolvimento desse trabalho.

Aos professores que tive a honra de conhecer ao decorrer da graduação e que foram essenciais nesse processo, em especial ao Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes pelas conversas enriquecedoras, que me nortearam e serviram de inspiração para prosseguir os estudos.

Aos membros da banca examinadora Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes e Joserlan Perote da Silva pelas correções e contribuições.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza - Uma beleza fria e austera, como a da escultura.”(Bertrand Russell)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo, apresentar uma maneira mais simples de se obter campos de vetores conformes (ou simplesmente, *campos conformes*) no plano hiperbólico, utilizando-se das funções complexas holomorfas. Para isso estudamos as referidas funções e a relação destas com os campos conformes no plano hiperbólico, utilizando a fórmula da derivada de Lie para mudança conforme de métrica para demonstrar que através das partes real e imaginária de uma função holomorfa, podemos construir exemplos de campos conformes no plano hiperbólico. Do mesmo modo, mostramos que a partir das funções componentes de um campo conforme no plano hiperbólico é possível obter uma função complexa holomorfa. Por fim, demonstramos alguns resultados, entre eles, que um campo é conforme no plano hiperbólico se, e somente se, o mesmo for conforme no semiplano superior do plano Euclidiano munido com a métrica canônica e que um campo homotético no plano hiperbólico será um campo de Killing.

Palavras-chave: Funções complexas holomorfas; Campos conformes; Plano hiperbólico.

ABSTRACT

The present work aims to present a simpler way to obtain conformal vector fields on the hyperbolic plane, using complex holomorphic functions. For this, we study these functions and their relationship with the conformal vector fields on the hyperbolic plane, using the Lie derivative formula for conformal change of metric to prove that through the real and imaginary parts of a holomorphic function, we can build examples of conformal vector fields on the hyperbolic plane. In the same way, we show that from the component functions of a conformal vector field on the hyperbolic plane it is possible to obtain a complex holomorphic function. Finally, we prove some results, among them, that a vector field is conformal on the hyperbolic plane if, and only if, it is conformal on the upper half-plane of the Euclidean plane and that a homothetic vector field on the hyperbolic plane must be a Killing vector field.
Keywords: Holomorphic complex functions; Conformal vector fields; Hyperbolic plane.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A falta de clareza do quinto postulado de Euclides (*postulado das paralelas*) instigou os matemáticos a buscarem por sua prova partindo apenas dos quatro primeiros postulados. Com o insucesso da tentativa, o matemático Friedrich Gauss (1777 - 1855) percebeu, através da negação desse quinto postulado, que estava de posse de uma nova geometria na qual os quatro primeiros postulados estavam bem definidos e o quinto postulado se mostrava independente. Relacionando a suas descobertas em Geometria Diferencial, percebeu que essas geometrias não euclidianas, ou seja, geometrias com curvaturas não nulas eram em si próprias inteiramente consequentes.

Desse modo, supor que a partir de uma reta e um ponto fora dela passam pelo menos duas retas paralelas, deu início à conhecida geometria hiperbólica ou geometria de Bolyai - Lobachevsky, visto que foi inicialmente descrita por János Bolyai (1802-1860) e Nikolai Lobachevsky (1792-1856). Do mesmo modo, supor que por um ponto fora desta reta não passa nenhuma paralela, deu início às geometrias elípticas onde a geometria esférica é um caso particular. Ao leitor interessado em se aprofundar nesse assunto, recomendamos a leitura de Carmo (1987), Andrade e Barros (2010) e Andrade (2013).

Neste trabalho, estamos interessados em estudar os campos conformes sobre o espaço hiperbólico, enfatizando o espaço hiperbólico de dimensão dois (ou simplesmente, *plano hiperbólico*), que corresponde a uma superfície geométrica de curvatura constante negativa, ou seja, uma variedade Riemanniana de dimensão dois (cf. CARMO, 2005a). Nessa perspectiva, estaremos explorando relações existentes entre os campos conformes definidos sobre o plano hiperbólico e as funções complexas holomorfas definidas sobre subconjuntos abertos do plano complexo.

Para isso, separamos este trabalho em cinco capítulos, sendo eles, a introdução, preliminares, campos de vetores, campos conformes no plano hiperbólico e conclusão. O primeiro capítulo corresponde à presente introdução, enquanto no segundo capítulo, apresentamos os números complexos e as noções de limite e continuidade de funções em uma variável complexa, que são funções cujo domínio e contradomínio são subconjuntos não vazios dos números complexos, objetivando tratar das funções holomorfas, sendo estas, funções complexas, cuja derivada existe em todos os pontos do domínio e que possuem uma interessante relação com os campos conformes.

No terceiro capítulo, apresentamos as definições de campos de vetores no espaço Euclidiano, em particular, a definição de campos conformes, que é uma generalização dos campos de Killing (campos de vetores com fator conforme nulo) e dos campos homotéticos (campos de vetores com fator conforme constante). Em seguida, usamos uma mudança conforme de métrica (cf. MUNIZ NETO, 2010) para estudar os referidos campos de vetores sobre o espaço hiperbólico n-dimensional, bem como importantes estruturas geométricas relacionadas a campos de vetores.

No quarto capítulo, apresentamos os resultados principais onde utilizamos a estreita relação entre os campos conformes no plano hiperbólico e as funções complexas holomorfas, para demonstrar um meio mais simples de se obter esses campos de vetores. Posteriormente, apresentamos algumas aplicações advindas desses resultados principais, por exemplo, provamos que no plano hiperbólico todo campo homotético é na verdade um campo de Killing. Por fim, no quinto capítulo, encerramos este trabalho com a conclusão a respeito do tema desenvolvido.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo encontram-se algumas preliminares que são necessárias no estudo sobre campos conformes. Nele definimos os números complexos e algumas noções de cálculo diferencial (limite, continuidade e derivada) sob um contexto diferente, abordando as funções complexas em uma variável complexa. Mais detalhes sobre o assunto podem ser consultados em Lins Neto (2012) e Soares (2014).

2.1 NÚMEROS COMPLEXOS

O conjunto numérico representado por $\mathbb{C}$ é chamado de conjunto dos números complexos e corresponde a uma extensão dos números reais. Um número $z \in \mathbb{C}$ pode ser descrito através das notações

$$z = (x, y), \qquad z = x + yi \qquad \text{ou} \qquad z = (Rez) + (Imz)i,$$

onde x e y são números reais que denotam as partes real e imaginária, respectivamente, enquanto "i" é a unidade imaginária ($i^2 = -1$).

Observação 2.1 Neste trabalho, usaremos mais comumente a forma algébrica

$$\mathbb{C} = \{x + yi; x, y \in \mathbb{R}\}$$

para representar os números complexos.

Nesse momento, apresentamos as primeiras definições relacionadas a números complexos.

Definição 2.1 Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, dizemos que z é igual a w se, e somente se,

$$Re\, z = Re\, w \qquad \text{e} \qquad Im\, z = Im\, w.$$

Definição 2.2 Seja $z = x + yi$ um número complexo, definimos o seu conjugado como sendo o complexo

$$\overline{z} = x - yi.$$

A soma e o produto entre dois números complexos é definida da seguinte maneira:

Definição 2.3 Sejam $z = x_1 + y_1 i, w = x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$, então:

(a) $z + w = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$;
(b) $z \cdot w = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$.

Apresentamos a seguir um resultado que nos fornece duas propriedades do conjugado.

Proposição 2.1 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, tem-se as igualdades:

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
(b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Demonstração: Sejam $z = x_1 + y_1 i$ e $w = x_2 + y_2 i$, temos

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ &= (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i) \\ &= \overline{z} + \overline{w},\end{aligned}$$

o que prova o item (a). De modo análogo, obtemos

$$\begin{aligned}\overline{z \cdot w} &= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + x_2y_1)i \\ &= x_1x_2 - x_1y_2 i - x_2y_1 i - y_1y_2 \\ &= (x_1 - y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i) = \overline{z} \cdot \overline{w},\end{aligned}$$

que conclui a demonstração. $\square$

Definimos abaixo a noção de valor absoluto estendido dos números reais aos números complexos.

Definição 2.4 Seja $z = x+yi$ um número complexo arbitrário, define-se o valor absoluto de z pela expressão

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Das propriedades e definições já vistas, é possível deduzir as igualdades constantes no próximo resultado.

Proposição 2.2 Seja $z = x + yi$ um número complexo arbitrário, então:

(a) $z + \overline{z} = 2Re\, z$;

(b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Demonstração: De maneira simplificada, vamos ter:

(a) $z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2Re\, z$;

(b) $z \cdot \overline{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$. $\square$

Tendo definido o valor absoluto a partir da noção usual de distância entre pontos, muitas das propriedades válidas nos reais permanecem no contexto complexo, permitindo deduzir o próximo resultado.

Proposição 2.3 Para $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrários, valem as relações:

(a) $|z \cdot w| = |z||w|$;

(b) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Demonstração:

(a) Utilizando o item (b) das Proposições 2.1 e 2.2, observe que

$$\begin{aligned}|z \cdot w|^2 &= (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} \\ &= (z \cdot \overline{z}) \cdot (w \cdot \overline{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2,\end{aligned}$$

o que resulta em

$$|z \cdot w| = |z||w|,$$

o que prova o item (a).

(b)Agora usando a Proposição 2.1(a) e a Proposição 2.2(b), vamos ter

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\cdot\overline{(z+w)} \\ &= (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\cdot\overline{z}+z\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{z}+w\cdot\overline{w}, \end{aligned}$$

mas segue da Proposição 2.1(b) que $\overline{z}\cdot w = \overline{z\cdot\overline{w}}$, logo

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2+z\cdot\overline{w}+\overline{z\cdot\overline{w}}+|w|^2 \\ &= |z|^2+2Re(z\cdot\overline{w})+|w|^2. \end{aligned}$$

Desde que $2Re(z\cdot\overline{w}) \leq 2|z\cdot\overline{w}| = 2|z||w|$, então

$$|z+w|^2 \leq |z|^2+2|z||w|+|w|^2 = (|z|+|w|)^2,$$

que resulta em

$$|z+w| \leq |z|+|w|.$$

concluindo a demonstração. $\square$

Utilizando as operações de soma e produto usuais de números complexos é possível definir os seguintes elementos e operações.

Definição 2.5 Sejam z e w números complexos arbitrários, define-se:

(a) $-z = (-Rez)+(-Imz)i$; (b) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ para $z \neq 0$;

(c) $z-w = z+(-w)$; (d) $\dfrac{z}{w} = z\cdot w^{-1}$ para $w \neq 0$.

Observação 2.2 Os itens (a), (b), (c) e (d) da Definição 2.5 correspondem ao inverso aditivo, ao inverso multiplicativo, à subtração e ao quociente de números complexos, respectivamente.

Podemos representar um número complexo $z \in \mathbb{C}^*$, adotando as seguintes expressões

$$x = |z|\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = |z|\text{sen}\,\theta$$

que resulta em

$$z = |z|(\cos\,\theta + i\,\text{sen}\,\theta),$$

que é chamada de forma trigonométrica (ou *forma polar*) e o número real que satisfaz $0 \leq \theta < 2\pi$ é o argumento principal de z (ou simplesmente, *argumento de* z).

Para concluir a seção, apresentamos expressões para produto e potência de números complexos na forma trigonométrica.

Proposição 2.4 Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $z, w \in \mathbb{C}$, com as formas trigonométricas

$$z = |z|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \quad \text{e} \quad w = |w|(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta),$$

então as igualdades abaixo são verificadas:

(a) $z\cdot w = |z||w|[\cos(\alpha+\beta)+i\,\text{sen}(\alpha+\beta)]$;
(b) $z^n = |z|^n[\cos(n\alpha)+i\,\text{sen}(n\alpha)]$.

Demonstração: Faremos a demonstração de cada item, conforme descrito a seguir:

(a) De forma direta, vamos ter

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z||w|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) \\ &= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta) \\ &= |z||w|[(\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta) + i(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\,\beta + \mathrm{sen}\,\beta\cos\,\alpha)], \end{aligned}$$

daí utilizando o seno e o cosseno da soma de arcos (cf. CARMO et al., 1992), obtemos

$$z \cdot w = |z||w|[\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)],$$

como desejado.

(b) Recorrendo ao primeiro principio de indução (cf. LIMA, 2013), tem-se para $n = 1$, a própria forma trigonométrica $z = |z|[\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)]$. Suponha que a igualdade enunciada vale para $n = k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$z^k = |z|^k[\cos(k\alpha) + i\,\mathrm{sen}(k\alpha)],$$

vamos verificar se vale para $n = k + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z \;=\; |z|^k|z|[\cos(k\alpha) + i\,\mathrm{sen}(k\alpha)][\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha] \\ &= |z|^{k+1}[\cos(k\alpha)\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos(k\alpha) + i\,\mathrm{sen}(k\alpha)\cos\alpha - \mathrm{sen}(k\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha] \\ &= |z|^{k+1}\{[\cos(k\alpha)\cos\alpha - \mathrm{sen}(k\alpha)\mathrm{sen}\,\alpha] + i[\mathrm{sen}\,\alpha\cos(k\alpha) + \mathrm{sen}(k\alpha)\cos\alpha]\}, \end{aligned}$$

então usamos o seno e o cosseno da soma de arcos (cf. CARMO et al., 1992) para obter

$$z^{k+1} = |z|^{k+1}\{\cos[(k+1)\alpha] + i\sin[(k+1)\alpha]\},$$

o que conclui a prova. $\square$

Observação 2.3 A igualdade do ítem (b) da Proposição 2.4 é conhecida como fórmula de De Moivre.

2.2 LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Nesse momento, apresentamos alguns conceitos e definições sobre limite e continuidade de funções complexas em uma variável complexa.

Definição 2.6 Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e a um real positivo, dizemos que:

(a) O conjunto $D(z_0, a) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < a\}$ é o disco aberto de raio a e centro z_0;

(b) O conjunto $D[z_0, a] = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq a\}$ é o disco fechado de raio a e centro z_0.

A seguir definimos subconjuntos aberto e fechado do plano complexo.

Definição 2.7 Seja U um subconjunto de $\mathbb{C}$, dizemos que:

(a) U é dito aberto, se dado $z \in U$ qualquer, existe $a > 0$ real, tal que $D(z, a) \subset U$;

(b) U é dito fechado, se seu complementar $\mathbb{C} - U$ é aberto.

Apresentamos a seguir outras definições como ponto de acumulação e funções complexas em uma variável complexa juntamente com exemplos.

Definição 2.8 Se U é um subconjunto não vazio de $\mathbb{C}$ e z_0 é um complexo qualquer, então z_0 é dito ponto de acumulação de U, quando todo disco aberto $D(z_0, a)$ contém pelo menos um ponto de U diferente de z_0.

Definição 2.9 Seja U um subconjunto não vazio dos números complexos $\mathbb{C}$, então uma função do tipo $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ será dita uma função complexa em uma variável complexa.

Exemplo 2.1 A seguir temos alguns exemplos de funções complexas:

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $f(z) = 2z$; (b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $g(z) = \overline{z}$;

(c) $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $h(z) = z^2 + 5$; (d) $j : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, tal que $j(z) = \dfrac{1}{z}$.

A seguir definimos limite de uma função complexa, que é similar ao limite aplicado a uma função real.

Definição 2.10 Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa e z_0 um ponto de acumulação de U. Dizemos que $w_0 \in \mathbb{C}$ é limite da função f (se existir) quando $z \in U$ tende a z_0, se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Nesse caso, usamos a notação $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

Observação 2.4 No mesmo contexto da Definição 2.10, verifica-se facilmente que quando existe, o limite deve ser único (cf. SOARES, 2014).

Agora vejamos algumas propriedades de limite de funções complexas em uma variável complexa, similares ao que acontece em funções reais em uma variável real.

Proposição 2.5 Seja $f, g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções complexas definidas em um subconjunto aberto e $z_0 \in U$, tais que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{z \to z_0} g(z) = w_2,$$

então:

(a) $\lim\limits_{z \to z_0} c \cdot f(z) = c \cdot w_1$, onde c é uma constante complexa;

(b) $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = w_1 + w_2$;

(c) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = w_1 \cdot w_2$;

Demonstração:

(a) No caso em que a constante c é nula, verifica-se diretamente a propriedade enunciada. Caso contrário, pela Definição 2.10, tem-se para cada $\varepsilon > 0$ que existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_1| < \frac{\varepsilon}{|c|},$$

onde $z \in U$. Assim,

$$|cf(z) - cw_1| = |c(f(z) - w_1)| = |c||f(z) - w_1| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,$$

logo $\lim\limits_{z \to z_0} c \cdot f(z) = c \cdot w_1$.

(b) Pela definição, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - w_1| < \frac{\varepsilon}{2},$$

do mesmo modo,

$$0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - w_2| < \frac{\varepsilon}{2},$$

onde $z \in U$.

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $z \in U$ que satisfaz

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

então

$$\begin{aligned} |(f(z) + g(z)) - (w_1 + w_2)| &= |f(z) - w_1 + g(z) - w_2| \\ &\leq |f(z) - w_1| + |g(z) - w_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos.

(c) Primeiro, note que

$$\begin{aligned} |f(z) \cdot g(z) - w_1 \cdot w_2| &= |f(z)g(z) - f(z)w_2 + f(z)w_2 - w_1 w_2| \\ &= |f(z)(g(z) - w_2) + w_2(f(z) - w_1)| \end{aligned}$$

e pela desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned} |f(z)(g(z) - w_2) + w_2(f(z) - w_1)| &\leq |f(z)||g(z) - w_2| + |w_2||f(z) - w_1| \\ &\leq |f(z)||g(z) - w_2| + (|w_2| + 1)|f(z) - w_1|, \end{aligned}$$

logo

$$|f(z) \cdot g(z) - w_1 \cdot w_2| \leq |f(z)||g(z) - w_2| + (|w_2| + 1)|f(z) - w_1|.$$

Pela definição de limite, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(z) - w_1| < 1,$$

em particular,

$$|f(z)| = |f(z) - w_1 + w_1| \leq |f(z) - w_1| + |w_1| < 1 + |w_1|.$$

Como $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$ e $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w_2$, existem $\delta_2, \delta_3 > 0$ que satisfazem

$$0 < |z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - w_1| < \frac{\varepsilon}{2(|w_2| + 1)},$$

do mesmo modo

$$0 < |z - z_0| < \delta_3 \Rightarrow |g(z) - w_2| < \frac{\varepsilon}{2(|w_1| + 1)}.$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ e utilizando as informações obtidas, segue que

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

implica em

$$|f(z) \cdot g(z) - w_1 \cdot w_2| < (|w_1| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|w_1| + 1)} + (|w_2| + 1)\frac{\varepsilon}{2|w_2| + 2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

logo $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = w_1 \cdot w_2$. $\square$

Definimos a seguir uma função complexa contínua em um ponto do domínio e descrevemos suas propriedades quanto as operações envolvendo escalares e outras funções complexas contínuas.

Definição 2.11 Seja $U \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto dos complexos e $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa. A função f é dita contínua no ponto $z_0 \in U$, quando

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Proposição 2.6 Considere $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ subconjuntos abertos, $f, g : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $h : U_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções complexas com $f(U_1) \subset U_2$. Se f e g são contínuas em $z_0 \in U_1$, h é contínua em $f(z_0)$ e $c \in \mathbb{C}$ é uma constante, então as seguintes afirmações são válidas:

(a) A função $cf : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0;

(b) A função $f + g : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0;

(c) A função $f \cdot g : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0;

(d) A composta $h \circ f : U_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0.

Demonstração: Decorre da definição de continuidade (cf. Definição 2.11) e das propriedades de limite (cf. Proposição 2.5).

2.3 DERIVADA DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Definimos a seguir a derivada de uma função complexa em um ponto arbitrário do seu domínio.

Definição 2.12 Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto e $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa, então f é dita diferenciável em um ponto $z_0 \in U$ quando existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

que designa a derivada de f no ponto z_0.

Observação 2.5 Fazendo $\Delta z = z - z_0$, o limite anterior pode ser reescrito como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Definimos abaixo função holomorfa que será de grande importância para os resultados desse trabalho.

Definição 2.13 (Função Holomorfa) Uma função complexa $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida em um subconjunto aberto é dita ser holomorfa, quando existe a derivada $f'(z)$ para todo ponto $z \in U$.

Assim como nas funções reais em uma variável real, uma função complexa em uma variável complexa diferenciável em um ponto, deve ser contínua nesse mesmo ponto. Mais precisamente, formalizamos a seguir:

Proposição 2.7 Se uma função complexa $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida num subconjunto aberto é diferenciável no ponto $z_0 \in U$, então f será contínua em z_0.

Demonstração: Se f é diferenciável em z_0, então o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existe. Além disso, segue da Proposição 2.5(c) que

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] \;\; = \;\; \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

logo $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, ou seja, f é contínua em z_0. $\square$

Abaixo apresentamos algumas propriedades básicas que decorrem da definição de derivada.

Proposição 2.8 Sejam U um subconjunto aberto dos complexos, $f, g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções complexas diferenciáveis em $z_0 \in U$ e $c \in \mathbb{C}$ uma constante, então as funções $cf, f + g, fg : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são deriváveis em z_0 e valem as igualdades:

(a) $(cf)'(z_0) = c \cdot f'(z_0)$;

(b) $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;

(c) $(fg)'(z_0) = f(z_0) \cdot g'(z_0) + g(z_0) \cdot f'(z_0)$.

Demonstração:

(a) Através da Definição 2.12, obtemos

$$(cf)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{cf(z) - cf(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} c \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

mas pela Proposição 2.5, temos que

$$\lim_{z \to z_0} c \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c \cdot f'(z_0),$$

logo $(cf)'(z_0) = c \cdot f'(z_0)$, como queríamos.

(b) De modo análogo,

$$\begin{aligned} (f + g)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{(f(z) + g(z)) - (f(z_0) + g(z_0))}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{(f(z) - f(z_0)) + (g(z) - g(z_0))}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}, \end{aligned}$$

portanto $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$, como queríamos.

(c) Finalmente, vamos ter

$$(fg)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0},$$

daí somando e subtraindo $f(z)g(z_0)$, temos

$$\begin{aligned}(fg)'(z_0) &= \lim_{z\to z_0}\frac{[f(z)g(z)-f(z)g(z_0)]+[f(z)g(z_0)-f(z_0)g(z_0)]}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)\cdot[g(z)-g(z_0)]+[f(z)-f(z_0)]\cdot g(z_0)}{z-z_0}\end{aligned}$$

mas pela Proposição 2.5, isso resulta em

$$\begin{aligned}(fg)'(z_0) &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)\cdot(g(z))-g(z_0))}{z-z_0}+\lim_{z\to z_0}\frac{(f(z)-(f(z_0))\cdot g(z_0))}{z-z_0}\\ &= f(z_0)\cdot g'(z_0)+g(z_0)\cdot f'(z_0),\end{aligned}$$

donde concluímos que $(fg)'(z_0)=f(z_0)\cdot g'(z_0)+g(z_0)\cdot f'(z_0)$, como desejado. $\square$

Apresentamos agora a versão da regra da cadeia para funções complexas em uma variável complexa.

Proposição 2.9 (Regra da Cadeia) Sejam $f: U_1\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ e $g: U_2\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ funções complexas definidas em subconjuntos abertos com $f(U_1)\subset U_2$. Se f é diferenciável em $z_0\in U_1$ e g é diferenciável em $f(z_0)\in U_2$, então $g\circ f: U_1\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ é diferenciável em z_0 e satisfaz

$$(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Demonstração:

Se f e g são diferenciáveis em z_0 e $w_0=f(z_0)$ respectivamente, então

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\quad \text{e} \quad g'(w_0)=\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0},$$

existem. Onde $z\in U_1$ e $w\in U_2$. Agora, seja $h: U_2\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ uma função definida por

$$h(w)=\begin{cases}\dfrac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}-g'(w_0), & \text{se} \quad w\neq w_0\\ 0, \quad \text{se} \quad w=w_0\end{cases}.$$

Observe que h contínua em w_0, visto que

$$\lim_{w\to w_0}h(w)=\lim_{w\to w_0}\frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}-g'(w_0)=g'(w_0)-g'(w_0)=0=h(w_0).$$

mas pelo item (d) da Proposição 2.6 e por f ser continua no ponto z_0, obtém-se

$$\lim_{z\to z_0}(h\circ f)(z)=h(f(z_0))=h(w_0)=0,$$

onde a composição $h\circ f$ justifica-se pela hipótese $f(U_1)\subset U_2$.

Usando definição de h, temos para $f(z)\neq w_0$ que

$$g(f(z))-g(f(z_0))=[h(f(z))+g'(f(z_0))][f(z)-f(z_0)],$$

dividindo ambos os membros por $z-z_0$ obtemos

$$\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0}=[h(f(z))+g'(f(z_0))]\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Calculando o limite na igualdade acima, segue-se que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} [h(f(z)) + g'(f(z_0))] \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

que implica em

$$(g \circ f)'(z_0) = [0 + g'(f(z_0))]f'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0),$$

como desejado. □

Apresentamos um resultado que estabelece relação entre funções complexas deriváveis e as *condições de Cauchy-Riemann*, que nos permite demonstrar alguns dos principais resultados do trabalho.

Proposição 2.10 Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função complexa definida num subconjunto aberto e escrita na forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Se f é diferenciável em $z = x + iy$, então as condições abaixo são satisfeitas

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Demonstração:

Seja f diferenciável em $z = x + iy$, existe o limite

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

daí note que:

a) Se $\Delta z = t$, sendo $t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(z + t) - f(z)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x + t, y) - u(x, y) + i \cdot [v(x + t, y) - v(x, y)]}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x + t, y) - u(x, y)}{t} + i \cdot \lim_{t\to 0} \frac{v(x + t, y) - v(x, y)}{t}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \tag{1}$$

b) Se $\Delta z = it$, sendo $t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(z + it) - f(z)}{it} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{it} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u(x, y + t) - u(x, y) + i \cdot [v(x, y + it) - v(x, y)]}{it} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{v(x, y + t) - v(x, y)}{t} - i \cdot \frac{u(x, y + t) - u(x, y)}{t}, \end{aligned}$$

logo

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \tag{2}$$

Sendo f diferenciável, tem-se por (1) e (2) as igualdades

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),$$

como desejado. □

Apresentamos abaixo a recíproca da Proposição 2.10, que trata-se de como identificar que uma função complexa é diferenciável em um ponto através das condições de Cauchy-Riemann.

Proposição 2.11 Seja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida num subconjunto aberto dos complexos e da forma

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

tal que as derivadas parciais em $z = x+iy \in U$ existem e são contínuas. Se são satisfeitas as condições de Cauchy-Riemann, então f é diferenciável em z_0.

Demonstração: Seja $V \subset U$ um subconjunto de U, definido por

$$V = \{z + \Delta z \in U; \Delta z = h = s + it \text{ e } |h| < \delta\},$$

temos que

$$f(z+\Delta z) - f(z) = u(x+s, y+t) - u(x,y) + i[v(x+s,y+t) - v(x,y)].$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} & u(x+s,y+t) - u(x,y) \\ = \; & u(x+s,y+t) - u(x+s,y) + u(x+s,y) - u(x,y), \end{aligned}$$

logo, pelo Teorema do Valor Médio (cf. LIMA, 2013), existem $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$, tais que

$$u(x+s,y) - u(x,y) = s\frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta_1 s, y)$$

e

$$u(x+s,y+t) - u(x+s,y) = t\frac{\partial u}{\partial y}(x+s, y+\theta_2 t).$$

Decorrente da continuidade das derivadas parciais, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta_1 s, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \delta_1$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x+s, y+\theta_2 t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \delta_2,$$

onde $\delta_1, \delta_2 \to 0$ para $h \to 0$.

Diante das expressões anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} u(x+s,y+t) - u(x,y) &= s\frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta_1 s, y) + t\frac{\partial u}{\partial y}(x+s, y+\theta_2 t) \\ &= s\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \delta_1\right] + t\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \delta_2\right] \\ &= s\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + s\delta_1 + t\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + t\delta_2, \end{aligned}$$

logo

$$u(x+s,y+t)-u(x,y)=s\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+t\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+s\delta_1+t\delta_2.$$

Analogamente, temos que

$$v(x+s,y+t)-v(x,y)=s\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)+t\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)+s\delta_3+t\delta_4,$$

onde $\delta_3,\delta_4\to 0$ para $h\to 0$.

Com isso, obtemos que

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$
$$=\frac{s\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)+t\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)+s\delta_1+t\delta_2+i\left[s\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)+t\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)+s\delta_3+t\delta_4\right]}{h},$$

ou ainda,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$
$$=\frac{s\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)+it\dfrac{\partial v}{\partial y}+i\left[s\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)-it\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right]}{h}+\frac{s}{h}(\delta_1+i\delta_3)+\frac{t}{h}(\delta_2+i\delta_4).$$

Como, por hipótese

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\quad \text{e}\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

então

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)+\frac{s}{h}(\delta_1+i\delta_3)+\frac{t}{h}(\delta_2+i\delta_4).$$

Para finalizar, observe que

$$\left|\frac{s}{h}\right|\leqslant 1\quad \text{e}\quad \left|\frac{t}{h}\right|\leqslant 1,$$

assim como $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ e $\delta_4\to 0$ para $h\to 0$, logo conclui-se que

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

e portanto f é diferenciável em $z=x+iy$. □

Na sequência, apresentamos um corolário que nos fornece expressões para a derivada de uma função complexa.

Corolário 2.1 Seja $f:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ uma função complexa definida num subconjunto aberto e escrita na forma $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, Se f é diferenciavel em $z=x+iy$, então sua derivada satisfaz

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Demonstração: Decorre da demonstração da Proposição 2.10.

Exemplo 2.2 A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = xy + iy$ tem derivada em um único ponto, logo f não é uma função complexa holomorfa.

Solução: Sendo $u(x,y) = xy$ e $v(x,y) = y$, por um cálculo direto

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x$$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

se, e somente se, $x = 0$ e $y = 1$, ou seja, no ponto $z_0 = i$, logo pela Proposição 2.11, f é diferenciável em um único ponto $z = z_0$ e portanto f não é uma função complexa holomorfa.

Corolário 2.2 Uma função complexa é holomorfa se, e somente se, satisfaz as condições de Cauchy-Riemann para todo ponto do domínio

Demonstração: Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa então existe a derivada $f'(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, mas usando a Proposição 2.10, segue ainda que as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas. Reciprocamente, se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas para todo ponto do domínio, decorre da Proposição 2.11 que a função complexa é holomorfa.

Exemplo 2.3 A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = e^x(\text{cos}y + i\text{sen}y)$ é uma função complexa holomorfa.

Solução: Por um cálculo direto, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x \text{cos}y = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \text{sen}y = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

visto que $u(x,y) = e^x\text{cos}y$ e $v(x,y) = e^x\text{sen}y$. Portanto, pela Proposição 2.11, f é diferenciável para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja, f é uma função holomorfa.

3 CAMPOS DE VETORES

Neste capítulo, apresentamos algumas definições sobre os campos de vetores, bem como suas propriedades no espaço Euclidiano e posteriormente, abrangendo campos de vetores no espaço hiperbólico, que é o foco central do trabalho. Estaremos admitindo alguns conhecimentos prévios sobre Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vetorial e Álgebra Linear, que podem ser consultados em Guidorizzi (2011) e Bueno (2006).

3.1 CAMPOS DE VETORES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Inicialmente temos as definições de campos de vetores e gradiente de uma função suave, bem como suas respectivas notações. Para mais detalhes e aprofundamento, sugere-se ao leitor consultar Carmo (2005b), Muniz Neto (2010) e Guidorizzi (2011).

Definição 3.1 Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, então um campo de vetores sobre U é uma aplicação suave

$$X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

que associa a cada ponto $p \in U$ um vetor $X(p) = v \in \mathbb{R}^n$.

Observação 3.1 Utilizamos $\mathfrak{X}(U)$ e $\mathrm{C}^\infty(U)$ para denotar os conjuntos dos campos de vetores e das funções reais suaves definidos sobre $U \subset \mathbb{R}^n$, respectivamente.

Observação 3.2 Utilizamos $E_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para denotar o campo de vetores que associa a cada p do domínio ao vetor $e_i \in \mathbb{R}^n$, onde a i-ésima coordenada é igual a um e as demais são nulas, ou seja,

$$E_i(p) = e_i,$$

para todo ponto $p \in U$.

Definição 3.2 Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave, dizemos que o campo de vetores, definido por

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i,$$

é o campo gradiente de f.

Abaixo definimos os campos de vetores gradiente e divergente, além disso, definimos também o laplaciano de funções suaves sobre $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.3 Seja $X \in \mathfrak{X}(U)$ um campo de vetores definido em um subconjunto aberto, dizemos que X é gradiente, quando existe uma função suave $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de tal maneira que

$$X = \nabla f,$$

onde f será chamada de *função potencial* de X.

Exemplo 3.1 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, um campo de vetores definido por

$$X = 2xE_1 + 2yE_2,$$

então X é gradiente com função potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Definição 3.4 Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ campos de vetores definidos num subconjunto aberto, definimos a função $\langle X, Y \rangle : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\langle X, Y \rangle(p) = \langle X(p), Y(p) \rangle,$$

para todo $p \in U$.

Exemplo 3.2 Seja $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ campos de vetores, definidos por

$$X = 3xyE_1 + 5xy^2E_2 \qquad \text{e} \qquad Y = (2x - xy)E_1 + 3xyE_2,$$

obtemos a função

$$\langle X, Y \rangle = 6x^2y - 3x^2y^2 + 15x^2y^3.$$

Definição 3.5 Seja $X \in \mathfrak{X}(U)$ um campo de vetores definido em um subconjunto aberto, então a função $\operatorname{div} X$, definida por

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_i}$$

é o divergente do campo X.

Exemplo 3.3 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, um campo de vetores definido por

$$X = (x^3 - 3y^2)E_1 + (x^3 - 3xy^2z)E_2 + (y^5 - 3xz^4)E_3,$$

então o divergente desse campo é dado por

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial \langle X, E_1 \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle X, E_2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle X, E_3 \rangle}{\partial z} = 3x^2 - 6xyz - 12xz^3.$$

Definição 3.6 Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave definida num subconjunto aberto, chamamos de laplaciano da f a aplicação definida por

$$\triangle f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Exemplo 3.4 Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, uma função suave definida por

$$f(x,y,z) = x^2y^6z^3,$$

então o laplaciano de f é dado por

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2y^6z^3 + 30x^2y^4z^3 + 6x^2y^6z.$$

Observação 3.3 Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave, então o divergente aplicado ao gradiente da f é igual ao laplaciano da função f. De fato, sendo o gradiente igual a

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i,$$

se aplicarmos o divervente, teremos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\nabla f &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\langle\nabla f, E_i\rangle}{\partial x_i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},\end{aligned}$$

que é justamente o laplaciano aplicado a função f, como desejado.

Definição 3.7 Uma função suave $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida em um subconjunto aberto é dita harmônica, quando seu laplaciano satisfaz $\triangle f \equiv 0$ em U.

Usando os campos de vetores aqui definidos, podemos introduzir novas notações e definir funções suaves especiais acompanhadas de exemplos.

Definição 3.8 Seja $X \in \mathfrak{X}(U)$ um campo de vetores e $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave, definidos num subconjunto aberto, então a função $X(f) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definida por

$$X(f) = \langle X, \nabla f\rangle.$$

Exemplo 3.5 Sendo $X \in \mathfrak{X}(U)$ um campo de vetores e $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função suave num subconjunto aberto, definidos por

$$X = (2x^2 - 2y^2)E_1 + 4xyE_2 \qquad \text{e} \qquad f(x, y) = x^4 - y^4,$$

então X aplicado em f resulta na função suave

$$X(f) = \langle X, \nabla f\rangle = 8x^5 - 8x^3y^2 - 16xy^4.$$

Definição 3.9 Sejam $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(U)$ campos de vetores definidos num subconjunto aberto, então a aplicação

$$V_1^\flat \otimes V_2^\flat : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathrm{C}^\infty(U)$$

é definida por $V_1^\flat \otimes V_2^\flat(X, Y) = \langle V_1, X\rangle\langle V_2, Y\rangle$.

Observação 3.4 Para simplificar algumas notações, temos que:
(a) As aplicações $E_i^\flat \otimes E_i^\flat$ e $E_i^\flat \otimes E_j^\flat$ serão denotadas por dx_i^2 e $dx_i dx_j$, respectivamente.
(b) Se $f_1, f_2 : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves, tais que $V_1 = \nabla f_1$ e/ou $V_2 = \nabla f_2$, então as aplicações $V_1^\flat \otimes V_2^\flat = \nabla f_1 \otimes \nabla f_2$ e $V_1^\flat \otimes V_2^\flat = \nabla f_1 \otimes V_2^\flat$ serão denotadas por $df_1 \otimes df_2$ e $df_1 \otimes V_2^\flat$ na devida ordem.

Exemplo 3.6 Seja X e Y campos de vetores suaves, definidos por

$$X = 3xyE_1 + 5xy^2E_2 \qquad \text{e} \qquad Y = (2x - xy)E_1 + 3xyE_2,$$

então o produto $X^\flat \otimes Y^\flat$ em termos de $E_1^\flat \otimes E_1^\flat$, $E_1^\flat \otimes E_2^\flat$, $E_2^\flat \otimes E_1^\flat$ e $E_2^\flat \otimes E_2^\flat$ será

$$\begin{aligned}X^\flat \otimes Y^\flat &= 3xy(2x - xy)E_1^\flat \otimes E_1^\flat + 9x^2y^2E_1^\flat \otimes E_2^\flat\\ &+ 5xy^2(2x - xy)E_2^\flat \otimes E_1^\flat + 15x^2y^3E_2^\flat \otimes E_2^\flat,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$X^\flat \otimes Y^\flat = 3xy(2x - xy)dx^2 + 9x^2y^2dxdy + 5xy^2(2x - xy)dydx + 15x^2y^3dy^2.$$

Abaixo definimos o hessiano de uma função suave e a derivada de Lie de campos de vetores.

Definição 3.10 Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave definida num subconjunto aberto, então chama-se hessiano de f a aplicação $\operatorname{Hess} f : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, definida por

$$\operatorname{Hess} f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Observação 3.5 Usando diretamente o Teorema de Schwarz (cf. LIMA, 2006), obtemos

$$\operatorname{Hess} f(E_j, E_i) = \operatorname{Hess} f(E_i, E_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

para todos índices $1 \leq i, j \leq n$.

Na sequência, definimos a derivada de Lie na direção de um campo de vetores no espaço Euclidiano.

Definição 3.11 Seja $X \in \mathfrak{X}(U)$ um campo de vetores definido num subconjunto aberto, então a derivada de Lie de X é a aplicação $\mathcal{L}_X : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathrm{C}^\infty(U)$, definida por

$$\mathcal{L}_X g_0 = \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle X, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j,$$

onde $g_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$.

Observação 3.6 A presença de $g_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$ na notação da derivada de Lie parece desnecessária, porém ficará mais clara na próxima seção.

Abaixo seguem algumas propriedades obtidas através da definição de derivada de Lie.

Proposição 3.1 Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ campos de vetores em um subconjunto aberto, $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ uma constante, então as seguintes propriedades são válidas:

(a) $\mathcal{L}_{(X+\lambda Y)} g_0 = \mathcal{L}_X g_0 + \lambda \mathcal{L}_Y g_0$;

(b) $\mathcal{L}_{\nabla f} g_0 = 2 \operatorname{Hess} f$.

Demonstração:

(a) Direto da definição de derivada de Lie, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(X+\lambda Y)} g_0 &= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle X + \lambda Y, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle X + \lambda Y, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle X, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \\ &+ \lambda \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle Y, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle Y, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \\ &= \mathcal{L}_X g_0 + \lambda \mathcal{L}_Y g_0, \end{aligned}$$

como queríamos.

(b) De maneira direta, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\nabla f} g_0 = & \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial \langle \nabla f, E_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle \nabla f, E_i \rangle}{\partial x_j} \right] dx_i dx_j \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right] dx_i dx_j \\
= & \; 2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = 2 \mathrm{Hess}\, f,
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Schwarz (cf. LIMA, 2006). □

Definimos abaixo a noção de campos conformes, que está diretamente relacionada com a derivada de Lie.

Definição 3.12 Seja X um campo de vetores definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, então X é dito um campo de vetores conforme, se sua derivada de Lie satisfaz

$$\mathcal{L}_X g_0 = 2\psi g_0,$$

onde $\psi \in C^\infty(U)$ é dito fator conforme (ou fator de conformidade) e $g_0 = \sum_{i=1}^n dx_i^2$.

Observação 3.7 Um campo conforme é *homotético* se o seu fator conforme é constante, em particular, se o fator conforme for constante igual a zero esse campo homotético passa a ser chamado de campo de *Killing.*

Seguem abaixo três exemplos de campos conformes definidos sobre o espaço Euclidiano.

Exemplo 3.7 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definido por

$$X = (2x^2 - 2y^2)E_1 + 4xyE_2$$

então X é um campo conforme não-homotético e seu fator de conformidade $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ assume a expressão $\psi(x, y) = 4x$.

Solução: De fato, calculando a derivada de Lie de X, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X g_0 \;=\; & \left[\frac{\partial \langle X, E_1 \rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial \langle X, E_1 \rangle}{\partial x_1} \right] dx_1^2 + \left[\frac{\partial \langle X, E_2 \rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial \langle X, E_1 \rangle}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 \\
+ \; & \left[\frac{\partial \langle X, E_1 \rangle}{\partial x_2} + \frac{\partial \langle X, E_2 \rangle}{\partial x_1} \right] dx_2 dx_1 + \left[\frac{\partial \langle X, E_2 \rangle}{\partial x_2} + \frac{\partial \langle X, E_2 \rangle}{\partial x_2} \right] dx_2^2 \\
= \; & 8x dx^2 + 0 dx dy + 0 dy dx + 8x dy^2 = 2 \cdot 4x(dx^2 + dy^2),
\end{aligned}$$

logo o campo X é conforme não-homotético e seu fator conforme é $\psi(x, y) = 4x$.

Exemplo 3.8 Sejam $\psi \in \mathbb{R}$ uma constante real e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}\psi |x|^2,$$

então $X = \nabla f$ é um campo homotético com fator conforme ψ.

Solução: De fato, visto que o gradiente da função f é dado por

$$\nabla f = \psi \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$$

implicando pela Proposição 3.1(b) que a derivada de Lie de X será dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X g_0 &= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right] dx_i dx_j \\ &= 2\psi(dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2)\end{aligned}$$

portanto X é homotético e possui o fator conforme igual a ψ.

Exemplo 3.9 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, um campo de vetores definido por

$$X = x^3 y E_1 + y^2 E_2,$$

então X não é um campo conforme.

Solução: De fato, calculando a derivada de Lie, verifica-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X g_0 &= \left[\frac{\partial\langle X, E_1\rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial\langle X, E_1\rangle}{\partial x_1}\right] dx_1^2 + \left[\frac{\partial\langle X, E_2\rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial\langle X, E_1\rangle}{\partial x_2}\right] dx_1 dx_2 \\ &+ \left[\frac{\partial\langle X, E_1\rangle}{\partial x_2} + \frac{\partial\langle X, E_2\rangle}{\partial x_1}\right] dx_2 dx_1 + \left[\frac{\partial\langle X, E_2\rangle}{\partial x_2} + \frac{\partial\langle X, E_2\rangle}{\partial x_2}\right] dx_2^2 \\ &= 6x^2 y dx^2 + x^3 dxdy + x^3 dydx + 4ydy^2\end{aligned}$$

logo esse campo não é conforme.

Abaixo apresentamos uma proposição que estabelece uma relação entre o divergente de um campo de vetores conforme com o seu fator conforme.

Proposição 3.2 Seja X um campo conforme, então

$$\psi = \frac{1}{n}\operatorname{div} X,$$

sendo ψ o fator conforme de X.

Demonstração: De maneira direta, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\mathcal{L}_X g_0(E_k, E_k) &= \sum_{i,j,k=1}^{n}\left[\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right] dx_i dx_j(E_k, E_k) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n}\left[\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right] \delta_{ik}\delta_{jk} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\langle X, E_k\rangle}{\partial x_k} = 2\mathrm{div}X,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n}\mathcal{L}_X g_0(E_k, E_k) = 2\mathrm{div}X. \tag{3}$$

Como X é conforme, obtém-se

$$\sum_{k=1}^{n}\mathcal{L}_X g_0(E_k, E_k) = 2\psi\sum_{k=1}^{n} dx_k^2(E_k, E_k) = 2n\psi, \tag{4}$$

então comparando (3) e (4), conclui-se que

$$\psi = \frac{1}{n}\mathrm{div}X,$$

como desejado. $\square$

3.2 CAMPOS DE VETORES NO ESPAÇO HIPERBÓLICO

Nesta seção, abordamos os campos de vetores definidos no espaço hiperbólico, onde serão apresentados alguns conceitos e resultados relacionados, destacando gradiente, divergente, laplaciano, hessiano e derivada de Lie no espaço hiperbólico. Estas estruturas geométricas estão relacionadas às suas estruturas correspondentes no espaço Euclidiano, cujas notações distinguem-se das notações das estruturas Euclidianas pela formatação.

Inicialmente, vamos introduzir o conceito de métrica Riemanniana sobre um subconjunto aberto do espaço Euclidiano.

Definição 3.13 Uma métrica Riemanniana em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ consiste de uma aplicação g que associa a cada ponto $p \in U$ um produto interno $\langle X, Y\rangle_p$ em $\mathbb{R}^n$, tal que a função

$$p \in U \qquad \longmapsto \qquad \langle X(p), Y(p)\rangle_p$$

é suave para quaisquer campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$.

Exemplo 3.10 A aplicação definida por $g_0 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$ associa cada ponto de $\mathbb{R}^n$ ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$ e corresponde a uma métrica Riemanniana, chamada de métrica Euclidiana canônica (ou simplesmente, métrica canônica de $\mathbb{R}^n$).

Exemplo 3.11 Dada uma função suave positiva $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida em uma aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, então a aplicação $g = \varphi^2 g_0$ é uma métrica Riemanniana em U.

Definição 3.14 Dizemos que o espaço hiperbólico n dimensional (ou n-espaço hiperbólico), denotado por $\mathbb{H}^n$, corresponde ao subconjunto

$$H^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

munido com a métrica Riemanniana $g = x_n^{-2} g_0$.

Observação 3.8 O espaço hiperbólico bidimensional (ou 2-espaço hiperbólico) pode ser chamado simplesmente de *plano hiperbólico.*

Definição 3.15 Um campo de vetores sobre $\mathbb{H}^n$ é uma aplicação suave

$$X : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^n$$

que associa a cada ponto $p \in \mathbb{H}^n$ um vetor $v \in \mathbb{R}^n$.

No espaço hiperbólico, podemos introduzir as noções de gradiente, divergente, laplaciano, hessiano e derivada de Lie, utilizando o conceito de métrica Riemanniana e fazendo analogia à construção desses conceitos no espaço Euclidiano. Por simplicidade, vamos deduzir as noções mencionadas das fórmulas de mudança conforme de métrica, encontradas em Muniz Neto (2010), Obata e Yano (1970) ou Obata e Sawaki (1970).

Proposição 3.3 Seja f uma função real suave definida no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, então o gradiente de f é o campo de vetores dado por

$$\nabla f = x_n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i$$

Demonstração: Decorre diretamente da fórmula para gradiente da mudança conforme de métrica que

$$\nabla f = x_n^2 \triangledown f,$$

implicando pela Definição 3.2 que

$$\nabla f = x_n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i,$$

concluindo a demonstração. □

Proposição 3.4 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, então o divergente de X no espaço hiperbólico será dado por

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_i} - \frac{n}{x_n} \langle X, E_n \rangle.$$

Demonstração: Primeiro, vamos definir uma função real $\pi_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ por $\pi_n(x) = x_n$, então usamos a Proposição 1.55 de Muniz Neto (2010) para obter

$$\begin{aligned} divX = \mathrm{div}X - nX(\ln \pi_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_i} - n \langle X,\ \triangledown(\ln \pi_n) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_i} - n \Big\langle X, \frac{1}{x_n} E_n \Big\rangle, \end{aligned}$$

logo,

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \langle X, E_i \rangle}{\partial x_i} - \frac{n}{x_n} \langle X, E_n \rangle,$$

como desejado. □

Proposição 3.5 Seja $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{H}^n)$ uma função suave, então o laplaciano de f no espaço hiperbólico é dado por

$$\Delta f = x_n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - (n-2) x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Demonstração: De maneira direta, combinamos a Definição 3.6 com o Corolário 1.56 de Muniz Neto (2010), obtendo

$$\begin{aligned} \Delta f &= x_n^2 \left[\triangle f - (n-2) \langle \triangledown f, \triangledown \pi_n \rangle \right] \\ &= x_n^2 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i} - \frac{n-2}{x_n} \langle \triangledown f, E_n \rangle \right], \end{aligned}$$

ou simplesmente,

$$\Delta f = x_n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - (n-2) x_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

conforme enunciado. □

Diante do laplaciano no espaço hiperbólico, podemos introduzir a noção de função harmônica no referido espaço.

Definição 3.16 Uma função suave $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ é dita harmônica no espaço hiperbólico, quando seu laplaciano satisfaz $\Delta f \equiv 0$.

Apresentamos agora a expressão do hessiano de uma função suave no espaço hiperbólico.

Proposição 3.6 Seja $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{H}^n)$ uma função suave, então o hessiano de f é a aplicação $Hess\, f : \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{H}^n)$ dada por

$$Hess f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j - \frac{1}{x_n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\sum_{i=1}^n dx_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(dx_n dx_i + dx_i dx_n)\right].$$

Demonstração: Utilizando a fórmula do hessiano para mudança conforme de métrica (cf. Yano e Obata, 1970), temos que

$$Hess f = \mathrm{Hess}\, f - \langle \nabla f, \nabla(\ln x_n)\rangle g_0 + d(\ln x_n) \otimes df + df \otimes d(\ln x_n),$$

onde g_0 denota a métrica canônica de $\mathbb{R}^n$ (cf. Exemplo 3.10).

Nestas condições, segue-se que

$$\begin{aligned} Hess f &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j - \frac{1}{x_n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\sum_{i=1}^n dx_i^2 + dx_n \otimes df + df \otimes dx_n\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j - \frac{1}{x_n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\sum_{i=1}^n d^2 x_i + \langle E_n, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle + \langle \nabla f, X\rangle\langle E_n, Y\rangle\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j - \frac{1}{x_n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\sum_{i=1}^n dx_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(dx_n dx_i + dx_i dx_n)\right], \end{aligned}$$

ou simplesmente,

$$Hess f \quad = \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j - \frac{1}{x_n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\sum_{i=1}^n dx_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(dx_n dx_i + dx_i dx_n)\right]$$

como queriamos mostrar. □

Neste momento, obtemos a derivada de Lie no espaço hiperbólico em termos de estruturas definidas no espaço Euclidiano.

Proposição 3.7 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, então a derivada de Lie na direção de X no espaço hiperbólico é a aplicação $\mathcal{L}_X g : \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{H}^n)$, dada por

$$\mathcal{L}_X g = \frac{1}{x_n^3}\left[x_n \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j - 2\langle X, E_n\rangle \sum_{i=1}^n dx_i^2\right].$$

Demonstração: Aplicando a fórmula da derivada de Lie para mudança conforme de métrica (cf. Muniz Neto, 2010, p. 47), vamos ter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g \quad &= \quad X\left(\frac{1}{x_n^2}\right) g_0 + \frac{1}{x_n^2}\mathcal{L}_X g_0 \\ &= \quad -\frac{2}{x_n^3}\langle X, E_n\rangle \sum_{i=1}^n dx_i^2 + \frac{1}{x_n^2}\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j \\ &= \quad \frac{1}{x_n^3}\left[-2\langle X, E_n\rangle \sum_{i=1}^n dx_i^2 + x_n \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j\right], \end{aligned}$$

rearranjando os termos, obtemos

$$\mathcal{L}_X g = \frac{1}{x_n^3}\left[x_n \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j - 2\langle X, E_n\rangle \sum_{i=1}^{n} dx_i^2\right],$$

como desejado. $\square$

Definimos campos conformes no espaço hiperbólico em analogia aos campos conformes no espaço Euclidiano, estando diretamente relacionado com a derivada de Lie.

Definição 3.17 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$ um campo de vetores, então X é dito um campo conforme, se sua derivada de Lie satisfaz

$$\mathcal{L}_X g = 2\psi g,$$

onde $\psi \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ é dito *fator conforme* (ou *fator de conformidade*) *e* $g = x_n^{-2} g_0$.

Observação 3.9 Se $\psi \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ é constante ou constante igual a zero, então o campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$ sera dito homotético ou de Killing respectivamente.

Exemplo 3.12 Seja $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ a função real, definida por

$$f(x) = \frac{1}{2x_n},$$

então $X = \nabla f$ é um campo conforme com fator conforme $\psi \equiv f$.

Solução: De fato, note que o gradiente dessa função é dado por

$$\nabla f = x_n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i = -\frac{1}{2} E_n$$

calculando a derivada de Lie na direção desse campo temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X g &= \frac{1}{x_n^3}\left[x_n \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\langle \nabla f, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle \nabla f, E_i\rangle}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j - 2\langle \nabla f, E_n\rangle \sum_{i=1}^{n} dx_i^2\right] \\ &= 2\left(\frac{1}{2x_n}\right) g = 2fg\end{aligned}$$

logo ∇f é conforme com fator de conformidade $\psi \equiv f$.

Exemplo 3.13 O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, definido por

$$X(p) = e_n,$$

é conforme com fator conforme dado por $\psi(x) = -\dfrac{1}{x_n}$.

Solução: De fato, aplicando a derivada de Lie, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X g &= \frac{1}{x_n^3}\left[x_n \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j - 2\langle X, E_n\rangle \sum_{i=1}^{n} dx_i^2\right] \\ &= 2\left(-\frac{1}{x_n}\right) g\end{aligned}$$

logo X é conforme com o fator de conformidade é $\psi = -\dfrac{1}{x_n}$.

De modo análogo à Proposição 3.2, apresentamos um resultado que estabelece uma relação entre o divergente de um campo conforme com o seu fator conforme.

Proposição 3.8 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$ um campo conforme, então

$$\psi = \frac{1}{n} div\, X,$$

onde ψ denota o fator conforme de X.

Demonstração: Decorre da Proposição 3.7 que

$$\mathcal{L}_X g = \frac{1}{x_n^3}\left[x_n \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j - 2\langle X, E_n\rangle \sum_{i=1}^{n} dx_i^2\right].$$

ou equivalentemente,

$$2\psi g_0 = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j - \frac{2}{x_n}\langle X, E_n\rangle \sum_{i=1}^{n} dx_i^2,$$

onde usamos a hipótese $\mathcal{L}_X g = 2\psi g = 2x_n^{-2}\psi g_0$ (X é conforme).

Considerando a expressão, dada por

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{\partial\langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_i} dx_i^2,$$

obtém-se da penúltima igualdade que

$$\psi = \frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{x_n}\langle X, E_n\rangle,$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Fazendo o somatório na última igualdade, obtemos

$$n\psi = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\langle X, E_i\rangle}{\partial x_i} - \frac{n}{x_n}\langle X, E_n\rangle,$$

implicando pela Proposição 3.4 que

$$\psi = \frac{1}{n} div\, X,$$

concluindo a demonstração. $\square$

4 CAMPOS CONFORMES NO PLANO HIPERBÓLICO

Verifica-se uma certa dificuldade ao tentar descrever um campo de vetores conforme no plano hiperbólico e um modo de contornar esse problema é através das funções complexas holomorfas. Neste capítulo, apresentamos resultados que permitem identificar funções complexas holomorfas e campos conformes no espaço hiperbólico e mostramos ainda a partir de importantes corolários, algumas aplicações. Convém salientar que o caráter conforme aparece nas funções complexas no contexto das aplicações conformes, podendo ser conferido em Lins Neto (2012) e Soares (2014), enquanto isso relações entre funções complexas holomorfas e campos conformes podem ser encontradas em contexto mais geral no trabalho de Manno e Metafune (2012).

4.1 RESULTADOS PRINCIPAIS

Os resultados aqui apresentados mostram uma importante relação entre os campos conformes no plano hiperbólico e as funções complexas holomorfas definidas no subconjunto aberto $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}; Im(z) > 0\}$, onde estaremos usando a identificação existente entre os planos Euclidiano e complexo.

Teorema 4.1 Seja $\varphi : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ uma função complexa holomorfa dada por $\varphi = u + iv$, então o campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$, definido por

$$X = uE_1 + vE_2,$$

é conforme com fator conforme $\psi : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$, expresso por $\psi = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{y}v = \dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{1}{y}v$.

Demonstração: Calculando a derivada de Lie de X (cf. Proposição 3.7), temos que

$$\mathcal{L}_X g = \frac{1}{y^3}\left[y \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial \langle X, E_j\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle X, E_i\rangle}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j - 2\langle X, E_2\rangle \sum_{i=1}^{2} dx_i^2 \right],$$

ou simplesmente,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X g &= \frac{1}{y^2}\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y} dy^2 \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dydx \right] \\ &- \frac{2}{y^3} v(dx^2 + dy^2).\end{aligned}$$

Como φ é uma função holomorfa, satisfaz as condições de Cauchy-Riemann (cf. Corolário 2.2) e assim

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),$$

logo

$$\mathcal{L}_X g = \frac{2}{y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y} v \right) \left(dx^2 + dy^2 \right),$$

onde usamos a expressão da derivada de Lie anteriormente obtida.

Lembrando que $g = y^{-2}(dx^2+dy^2)$, reescrevemos a igualdade anterior na forma

$$\mathcal{L}_X g = 2\psi g,$$

onde o fator conforme é dado por

$$\psi = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v$$

concluindo a demonstração. $\square$

A seguir, mostramos a recíproca do Teorema 4.1, ou seja, que a partir dos campos conformes no plano hiperbólico, conseguimos obter uma função complexa holomorfa.

Teorema 4.2 Se um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$, definido por

$$X = uE_1 + vE_2,$$

é conforme, então a função complexa $\varphi = u + iv : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ é holomorfa.

Demonstração: Pela Definição 3.17, se X é conforme, então sua derivada de Lie satisfaz

$$\mathcal{L}_X g = 2\psi g = 2\psi y^{-2} g_0 \tag{5}$$

mas por outro lado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g &= \frac{1}{y^2}\left[2\frac{\partial u}{\partial x}dx^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dydx + 2\frac{\partial v}{\partial y}dy^2\right] \\ &- \frac{2}{y^3}v(dx^2 + dy^2). \end{aligned}$$

onde usamos a Proposição 3.7.

Reorganizando os termos da última expressão, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g &= \frac{2}{y^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v\right)dx^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v\right)dy^2\right] \\ &+ \frac{1}{y^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dydx\right] \end{aligned}$$

então comparando com a igualdade (5), verifica-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

correspondendo às condições de Cauchy-Riemann e implicando pela Proposição 2.11 que a função complexa $\varphi = u + iv : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ é holomorfa. $\square$

4.2 ALGUMAS APLICAÇÕES

Nesta última seção, apresentamos como aplicações dos Teoremas 4.1 e 4.2, alguns corolários que tratam sobre campos conformes definidos sobre o plano hiperbólico, inclusive casos particulares de resultados sobre campos conformes já conhecidos na literatura.

Corolário 4.1 Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ um campo conforme, expresso por

$$X = uE_1 + vE_2,$$

valem as seguintes afirmações:

(a) O conjunto dos zeros de X é discreto;

(b) As funções u e v são harmônicas no sentido Euclidiano;

(c) As funções u e v são harmônicas no sentido hiperbólico.

Demonstração:

(a) Pelo Teorema 4.2, como X é conforme, então será holomorfa a função complexa

$$\varphi = u + iv : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+,$$

logo segue do Corolário 2.7 do Capítulo 5 de Soares (2014) que φ é analítica e o conjunto

$$\mathcal{Z}(\varphi) = \left\{z \in \mathbb{C}^+; \varphi(z) = 0\right\}$$

é discreto.

Observe que podemos reescrever o conjunto da seguinte maneira

$$\mathcal{Z}(\varphi) = \left\{(x, y) \in H^2; u(x, y) = v(x, y) = 0\right\},$$

em particular,

$$\mathcal{Z}(X) = \left\{p \in H^2; X(p) = 0\right\}$$

é discreto. $\square$

(b) e (c) Sendo $\varphi = u + vi$ uma função complexa holomorfa, então deve satisfazer as condições de Cauchy-Riemann (cf. Proposição 2.10), dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

mas devido a analiticidade de φ, podemos derivar a primeira igualdade em relação a x e a segunda em relação a y, obtendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

implicando pelo Teorema de Schwartz (cf. LIMA, 2014) que

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

De modo análogo, verifica-se a igualdade

$$\triangle v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

então segue da Proposição 3.5 e das duas últimas igualdades que

$$\Delta u = \Delta v = 0,$$

portanto segue das Definições 3.7 e 3.16 que u e v são funções harmônicas nos sentidos Euclidiano e hiperbólico. $\square$

O próximo resultado descreve explicitamente os campos conformes gradientes no plano hiperbólico, que corresponde a um caso particular da descrição dos campos conformes gradientes no espaço hiperbólico (cf. SILVA FILHO, 2013).

Corolário 4.2 Dado um $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ campo conforme gradiente, então sua função potencial $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{2y}[a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + 2d],$$

onde a, b, c e d são constantes reais.

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ um campo conforme gradiente, então

$$X = \nabla f$$

ou equivalentemente,

$$X = y^2\frac{\partial f}{\partial x}E_1 + y^2\frac{\partial f}{\partial y}E_2,$$

onde $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ é a função potencial do campo.

Agora considere $h : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $h(x, y) = yf(x, y)$, assim podemos reescrever X da seguinte maneira

$$X = \left(y\frac{\partial h}{\partial x}\right)E_1 + \left(-h + y\frac{\partial h}{\partial y}\right)E_2,$$

mas combinando a Proposição 2.10 e o Teorema 4.2, tem-se que

$$y\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} + y\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \tag{6}$$

bem como,

$$\frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - y\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \quad y\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = -y\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0.$$

Derivando a segunda igualdade de (6) em x e y e usando que as derivadas mistas de h são nulas, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) = 0$$

implicando que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = a,$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é constante.

Dessa forma, podemos escrever

$$h(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + bx + k(y) = \frac{a}{2}y^2 + cy + l(x),$$

que resulta na igualdade

$$\frac{a}{2}x^2 + bx - l(x) = \frac{a}{2}y^2 + cy - k(y),$$

onde $b, c \in \mathbb{R}$ e k e l são funções que não dependem de x e y, respectivamente.

Nessas condições, observa-se que os membros da última igualdade obtida serão constantes e com isso, obtemos

$$\frac{a}{2}y^2 + cy - k(y) = -d \qquad \Rightarrow \qquad k(y) = \frac{a}{2}y^2 + cy + d,$$

logo a expressão da função potencial h será dada por

$$h(x,y) = \frac{1}{2}[a(x^2+y^2) + 2bx + 2cy + 2d],$$

consequentemente f assume a expressão

$$f(x,y) = \frac{1}{2y}[a(x^2+y^2) + 2bx + 2cy + 2d],$$

onde $d \in \mathbb{R}$ denota uma constante. □

Na sequência descrevemos explícitamente os campos homotéticos definidos no plano hiperbólico. Deve-se ressaltar que a primeira parte do resultado pode ser deduzida diretamente de um resultado devido a Obata e Yano (1970).

Corolário 4.3 Todo campo homotético $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ é um campo de Killing, dado por

$$X = \left[a(x^2 - y^2) + bx + c\right] E_1 + y(2ax+b)E_2,$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ um campo homotético escrito na forma

$$X = uE_1 + vE_2,$$

então seu fator conforme é constante e dado por

$$\psi = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v\right),$$

onde usamos os Teoremas 4.1 e 4.2.

Derivando em y a primeira expressão de ψ, temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{1}{y^2}v - \frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v\right) = \frac{1}{y}\psi, \tag{7}$$

onde usamos o Teorema de Schwartz (cf. LIMA, 2014).

Por outro lado, observa-se que

$$\psi = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y}v\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\psi = \left(\frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{y^2}v\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{1}{y}\psi$$

consequentemente,

$$v(x,y) = \psi y \ln y + yk(x), \tag{8}$$

onde k denota uma função que não depende de y.

Agora derivando em x a expressão de v encontrada e usando a Proposição 2.10 junto com o Teorema 4.2, obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial k}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -y\frac{\partial k}{\partial x},$$

que nos permite deduzir que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -y\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}$$

e comparando com (7), vamos ter

$$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = -\frac{1}{y^2}\psi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} \equiv \psi \equiv 0,$$

logo X é um campo de Killing.

Note que, da expressão acima, obtemos

$$k(x) = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = y(2ax+b) \tag{9}$$

com a e b constantes reais. Derivando v em relação a y teremos

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + b \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = ax^2 + bx + l(y), \tag{10}$$

onde l é uma função que não depende de x.

Decorre da igualdade (9) que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2ay \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2ay \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = -ay^2 + m(x),$$

que comparada com (10) nos dá

$$ax^2 + bx - m(x) = -ay^2 - l(y) = -c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante e m uma função que não depende de y.

Da última igualdade, chegamos que

$$l(y) = -ay^2 + c \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = a(x^2 - y^2) + bx + c, \tag{11}$$

assim por (10) e (11), vemos que

$$X = \left[a(x^2 - y^2) + bx + c\right] E_1 + \left[y(2ax + b)\right] E_2,$$

o que conclui a demonstração. $\square$

No último resultado, mostramos que a relação de conformidade é preservada quando levamos em conta os planos Euclidiano e hiperbólico.

Corolário 4.4 Seja $X : H^2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo de vetores, então X será conforme no plano Euclidiano, se e somente se, for conforme no plano hiperbólico.

Demonstração: Primeiramente, escrevemos o campo de vetores X na forma

$$X = uE_1 + vE_2,$$

daí vamos separar a demonstração em duas partes:

1ª Parte: Admita que X é conforme no plano Euclidiano.

Se X é conforme no plano Euclidiano, então pela Proposição 3.7, temos que

$$\mathcal{L}_X g = -\frac{2}{y^3}\langle X, E_2\rangle g_0 + \frac{2}{y^2}\psi g_0,$$

ou ainda,

$$\mathcal{L}_X g = \frac{2}{y^2}\left(\psi - \frac{1}{y}v\right) g_0.$$

Decorre da expressão acima que

$$\mathcal{L}_X g = 2\left(\psi - \frac{1}{y}v\right) g$$

portanto X é um campo de vetores conforme no plano hiperbólico com fator conforme

$$\zeta = \psi - \frac{1}{y}v,$$

concluindo a primeira parte.

2ª Parte: Admita que X é conforme no plano hiperbólico.

Se X é conforme no plano hiperbólico, então pela Proposição 3.7 e pelos Teoremas 4.1 e 4.2 temos que

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v\right) g = -\frac{1}{y^3}\langle X, E_2\rangle g_0 + \frac{1}{y^2}\mathcal{L}_X g_0,$$

portanto isolando $\mathcal{L}_X g_0$ da expressão acima, obtemos

$$\mathcal{L}_X g_0 = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v\right) y^2 g + \frac{1}{y}v g_0.$$

Da igualdade anterior, deduzimos ainda que

$$\mathcal{L}_X g_0 = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{y}v\right) g_0 + \frac{1}{y}v g_0,$$

ou simplesmente,

$$\mathcal{L}_X g_0 = 2\frac{\partial u}{\partial x} g_0,$$

portanto X é conforme no plano Euclidiano com fator conforme $\psi = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. □

Observação 4.1 Este corolário corresponde a um caso particular de um resultado mais geral que afirma que o caráter conforme de um campo de vetores é invariante por mudança conforme de métrica (cf. MUNIZ NETO, 2010).

5 CONCLUSÃO

Este trabalho foi iniciado apresentando os conceitos relacionados às funções complexas holomorfas, os campos de vetores no espaço Euclidiano e estruturas geométricas relacionadas. Em seguida, foram abordados os campos conformes no espaço hiperbólico e através da mudança conforme de métrica Riemanniana, deduzimos as expressões de estruturas geométricas relacionadas a esses campos de vetores. Por fim, em virtude da complexidade de encontrar campos conformes, apresentamos uma maneira mais simples de obtê-los no plano hiperbólico, por meio da utilização de funções complexas holomorfas que são mais comuns de serem encontradas e possuem uma estreita relação com esses campos de vetores.

Pudemos ainda verificar de maneira semelhante, que a partir das funções componentes de campos conformes sobre o plano hiperbólico, é possível obter uma função complexa holomorfa. Esse resultado nos fornece um modo mais simples de verificar se um campo de vetores é ou não conforme, visto que aplicar a derivada de Lie é muito mais trabalhoso e menos intuitivo do que utilizar o conceito de derivada de funções complexas para identificar funções holomorfas.

Por fim, foi mostrado através dos resultados principais (cf. Teoremas 4.1 e 4.2) que é possível demonstrar alguns casos particulares de resultados sobre campos conformes no plano hiperbólico, previamente conhecidos na literatura. Dentre essas aplicações, podemos citar como exemplos: a caracterização dos campos conformes gradientes no plano hiperbólico, a caracterização dos campos homotéticos no plano hiperbólico e a invariância do caráter conforme relacionado aos planos Euclidiano e hiperbólico.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, P. **Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

ANDRADE, P.; BARROS, A. **Introdução à Geometria Projetiva**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

BUENO, H. P. **Álgebra Linear: Um Segundo Curso**. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

CARMO, M. P. do. Geometrias Não-Euclidiana. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, v. 6, p.25-48, 1987.

CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER E. **Trigonometria e Números Complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: SBM, 2005a.

CARMO, M. P. do **Geometria Riemanniana**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005b. (Projeto Euclides).

FERNANDES, L. B.; SILVA, M. B.; SILVA Filho, J. F. **Funções Complexas Holomorfas e Campos Conformes**. Redenção, 2022. Artigo (Submetido).

GUIDORIZZI, H. L. **Curso de Cálculo - Volume 3**. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.

LIMA, E. L. **Curso de Análise - Volume 1**. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. **Curso de Análise- Volume 2**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LINS NETO, A. **Funções de uma Variável Complexa**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

MANNO, G.; METAFUNE, G. On the extendability of conformal vector fields of 2-dimensional manifolds. **Differential Geometry and its Applications**, v. 30, p. 365-369, 2012.

MUNIZ Neto, A. C. **Notas de Geometria Diferencial**. Fortaleza, 2010. Notas de Aula.

OBATA, M.; SAWAKI, S. Notes on conformal changes of Riemannian metrics. **Kodai Mathematical Journal**. v. 22, p. 480-500, 1970.

OBATA, M.; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. **Journal of Differential Geometry**. v. 4, p. 53-72, 1970.

SILVA FILHO, J. F. **Solitons de Ricci e Métricas Quasi-Einstein em Variedades Homogêneas**. 2013, 82 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

SOARES, M. G. **Cálculo em uma Variável Complexa**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.