UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AGOSTINHO CÁ

CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS FINITAS DE LEIBNIZ

REDENÇÃO
2021

AGOSTINHO CÁ

CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS FINITAS DE LEIBNIZ

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Skoraia

REDENÇÃO - CE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Cá, Agostinho.

C11c

CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS FINITAS DE LEIBNIZ / Agostinho cá. - Redenção, 2021.
56f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientador: Profa. Tatiana Skoraya.

1. Álgebras de Lie. 2. Álgebras de Leibniz. 3. Álgebras de dimensão finita. I. Título

CE/UF/Dsibiuni CDD 512.55

AGOSTINHO CÁ

CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS FINITAS DE LEIBNIZ

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovado em: 13 / 08 / 2021.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Tatiana Skoraia (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Profª. Dra. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. Alekandr Kornev
Universidade Federal do ABC (UFABC)

Dedico este trabalho a Deus, o único que merece toda honra e toda glória, e que me cobriu com a sua graça e misericórdia. E, dedico-o a todos os meus familiares, amigos, colegas e professores que contribuíram para esse feito. Por fim, dedico especialmente a minha orientadora e sua família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sua misericórdia e graça sobre minha vida, a qual por meio D'Ele vivencio essa realização. Agradeço aos meus pais que sempre se dedicaram, não medindo esforços para que eu juntamente com meus irmãos tivéssemos uma boa educação.

Agradeço a todos os meus familiares, amigos e colegas que contribuíram nesta jornada, em particular aos que sempre acreditaram em mim e me inspiraram a seguir em frente, firme e forte em busca dos meus objetivos.

Agradeço ao governo BRASILEIRO pelos recursos que me proporcionou durante os cinco anos de estudos, sou e serei eternamente grato por isso, a UNILAB e todos os seus servidores, em especial a todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática que contribuíram de maneira direta e indireta na minha formação acadêmica.

Agradeço a minha excelente e incansável orientadora Profa. Dra. Tatiana Skoraia por ter aceito este desafio de ser minha orientadora, que sempre se mostrou disponível, me auxiliando sempre que era preciso e nunca deixou de me encorajar a seguir em frente nos estudos.

Agradeço aos professores que comporam essa linda banca examinadora, na pessoa da Profa. Dra. Tatiana Skoraia, a Profa. Dra. Danila que contribuiu para o desenvolvimento da minha formação, logo nos meus primeiros anos da universidade, e o Prof. Dr. Alexandr Kornev por ter aceito nosso convite para compor a banca.

“Porque d’Ele, e por meio d’Ele, e para Ele são todas as coisas. A Ele, pois, a glória eternamente. Amém!”

Romanos 11:36

RESUMO

Objetivo principal desta monografia é estudar as álgebras de Leibniz de dimensão finita, não seguindo a metodologia usual: definição, exemplos, proposições, teoremas; vamos definir, efetuar os cálculos e trazer alguns exemplos das álgebras. Para o desenvolvimento do trabalho recorremos a uma pesquisa quantitativa, utilizando como estratégia de aproximação com a realidade as referências bibliográficas, que permitem conhecer de maneira breve a história do estudo da álgebra, a definição da álgebra de Lie e de Leibniz, suas relações e os seus respectivos exemplos clássicos. Completou-se o estudo com a concretização detalhada dos cálculos de cada uma das transformações e cada tabela de multiplicação. O papel importante da anticomutatividade, da identidade de Jacobi e a identidade de Leibniz das álgebras finitas e introdução de uma nova transformação da base para além das encontradas no artigo escolhido como referência para este estudo.

Palavras-chave: Álgebras de Lie. Álgebras de Leibniz. Álgebras de dimensão finita.

ABSTRACT

Main objective of this monograph is to study Leibniz algebras of finite dimension, not following the usual methodology: definition, examples, propositions, theorems; let's define, perform the calculations and bring some examples of algebras. For the development of the work, we resorted to quantitative research, using as a strategy of approximation with reality the bibliographic references, which allow us to know briefly the history of the study of algebra, the definition of Lie and Leibniz algebra, its relationships and its respective classical examples. The study was completed with the detailed realization of the calculations of each of the transformations and each multiplication table. The important role of anticommutativity, Jacobi's identity and Leibniz's identity of finite algebras and introduction of a new transformation of the base beyond those found in the article chosen as a reference for this study.

Keywords: Lie´s Algebras. Leibniz´s Algebras. Finite-sized Algebras.

SUMÁRIO

1 Conceitos básicos da teoria de álgebras e de álgebras de Lie **10**

1.1 **Introdução** 10

1.2 **Breve história da álgebra de Leibniz** 11

1.3 **As álgebras** 11

1.4 **Álgebras de Lie** 13

2 Álgebras de Leibniz **17**

2.1 **Introdução à teoria de álgebras de Leibniz** 17

2.2 **Exemplos de álgebra de dimensão infinita** 17

2.3 **Álgebras de Leibniz bidimensionais** 21

3 Álgebras de Leibniz de dimensão três **25**

3.1 **Conceitos iniciais** 25

3.2 **As álgebras obtidas quando dim** $Ann_r\mathbb{L} = 2$ 26

3.3 **As álgebras obtidas quando dim** $Ann_r\mathbb{L} = 1$ 38

Conclusão **53**

Bibliography **54**

Capítulo 1

Conceitos básicos da teoria de álgebras e de álgebras de Lie

1.1 Introdução

As álgebras de Leibniz são análogas não anti-comutativas das álgebras de Lie. Nos últimos vinte anos, vários pesquisadores estudaram ativamente a teoria dessas álgebras e muitos resultados nas álgebras de Lie foram estendidos para álgebras de Leibniz (7), (14; 15; 16).

A classificação até o isomorfismo de qualquer classe de álgebra é um problema difícil. Isso é basicamente o que é encontrado pela primeira vez ao tentar compreender a estrutura dos elementos desta classe de álgebras. Geralmente, a abordagem básica usada para obter as classificações até isomorfismo de álgebras era essencialmente para fixar uma base do espaço vetorial, então resolva algum sistema de equações em relação ao constantes de estrutura que uma classe específica de álgebras concorda com a identidade. Os resultados de (1; 5; 8; 17) fornecem classificações completas até isomorfismos de álgebras de Leibniz tridimensionais sobre corpos complexos e p-ádicos.

Nesse trabalho, expomos alguns cálculos e as explicações de algoritmo para a classificação de álgebras tridimensionais de Leibniz sobre um corpo arbitrário K que foi apresentado por I.S. Rakhimov, I.M. Rikhsiboev e M.A. Mohammed em (13) e depois repetido no livro Ayupov, S., Omirov, B. e Rakhimov, I.: Leibniz algebras, structure and classification (2).

Nossa pretensão nessa monografia é classificar as álgebras finitas de Leibniz. Assim sendo, iremos seguir a metodologia usual: definição, exemplos, proposições, teoremas; entretanto vamos definir, efetuar os cálculos e trazer alguns exemplos. O principal resultado que pretendemos expor nesse trabalho são as álgebras $\mathbb{L}_1(\mathbb{F}) - \mathbb{L}_{15}(\mathbb{F})$.

Para a materialização deste trabalho de estudo das álgebras finitas de Leibniz, seguiremos basicamente a abordagem do livro Leibniz Algebras: Structure and Classification escrito pelos autores Ayupov S., Omirov B. e Rakhimov I., no qual consta como referência (2). A medida que caminhamos neste trabalho vamos citar outros autores/artigos que falaram sobre a temática.

1.2 Breve história da álgebra de Leibniz

A palavra álgebra é de origem árabe, al-jabr (as vezes transliterada al-jebr), usada no título de um livro, Hisab al-jabr w'al-muqabalah, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al Khowarizmi. Tradução literal do título completo do livro a palavra álgebra significa "ciência da restauração", extraido de (18). A álgebra faz parte do desenvolvimento humano e, como tal, surge inicialmente para resolver necessidades práticas, estando bastante presente em nosso cotidiano de várias formas. Ao se olhar para a história da Álgebra, desde os primórdios quando o objeto de estudo eram equações algébricas específicas até o estabelecimento de uma área de pesquisa que hoje é essencialmente abstrata (se levarmos em conta muitos dos problemas considerados atualmente pelos pesquisadores), percebe-se um longo caminho de busca de padrões e sedimentação teórica (19).

Uma álgebra de Lie é uma estrutura algébrica cujo principal uso está no estudo dos grupos de Lie e das variedades diferenciáveis. As álgebras de Lie foram introduzidas como ferramenta para o estudo das rotações infinitesimais. Atualmente, a teoria de álgebras de Lie achou várias aplicações em diferentes ramos da ciência.

A álgebra de Leibniz é uma generalização das álgebras de Lie e essas álgebras preservam uma propriedade única das álgebras de Lie que os operadores de multiplicação corretos são derivações. Elas foram chamadas pela primeira vez de D-álgebras em artigos (3) e (4) de A.M. Blokh publicado na década de 1960 para indicar suas estreitas relações com as derivações. A teoria das D-álgebras não recebeu grande atenção imediatamente após sua introdução. Mais tarde, as mesmas álgebras foram introduzidas por J.-L. Loday em 1993 (9), (10) e (11), que as chamou de álgebras de Leibniz devido à identidade que eles satisfazem. A principal motivação para a introdução das álgebras de Leibniz foi para estudar a periodicidade de fenômenos na K-teoria algébrica. Hoje em dia, a teoria das álgebras de Leibniz é uma das áreas de desenvolvimento ativo da álgebra moderna. Juntos com os resultados cohomológicos, estruturais e de classificações dessas álgebras também aparecem alguns papéis com suas diversas aplicações.

1.3 As álgebras

Definição 1.3.1 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, ou seja, em $\mathbb{V}$ existe três operações, isto é, a soma dos vetores que é comutativa, associativa, tem o elemento nulo e os opostos; a multiplicação por coeficientes (elemento do corpo $\mathbb{K}$), distributiva na soma dos vetores, associativa na multiplicação, a multiplicação do vetor por unidade do* *corpo* $\mathbb{K}$, *que deixa o elemento sem modificações.*

O espaço vetorial $\mathbb{V}$ *se torna uma álgebra sobre* $\mathbb{K}$, *se for definida a operação de multiplicações dos elementos de* $\mathbb{V}$ *(que não precisa ser comutativa, associativa, ter unidade ou inversos)* $u, v \in \mathbb{V} \Rightarrow u \cdot v \in \mathbb{V}$.

Observação 1.3.1 *O espaço vetorial* $\mathbb{V}$ *é chamado espaço vetorial subjacente de álgebra* $\mathbb{V}$.

Exemplo 1.3.1 *Álgebra dos vetores em* $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle \qquad e \qquad \mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Com as operações

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \quad e \quad \alpha(a,b,c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$$

Assim, $\mathbb{R}^3$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.
Definimos a multiplicação dos vetores pelo produto vetorial

$$(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = (b_1c_2 - c_1b_2, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - b_1a_2)$$

Com essa operação $\mathbb{R}^3$ *é uma álgebra. Além disso, ela é uma álgebra linear, pois temos que* $\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v)$, *então, sejam* u, v *vetores e* λ *uma constante qualquer.*

$$u = (a_1, b_1, c_1) \qquad e \qquad v = (a_2, b_2, c_2)$$

Vamos mostrar por exemplo que $\lambda(uv) = u(\lambda v)$.

$$\lambda[(a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)] = (a_1, b_1, c_1) \times (\lambda a_2, \lambda b_2, \lambda c_2)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \end{bmatrix}$$

Portanto $\mathbb{R}^3$ *é uma álgebra linear sobre* $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.3.2 *Veja que*

- Qualquer corpo é uma álgebra sobre si mesmo e sobre seu subcorpo. Particularmente, os corpos numéricos $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são exemplos de álgebras.
- O conjunto de matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$.
- O conjunto de endomorfismos $End_{\mathbb{F}}(V)$ de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$.

- O conjunto de polinômios $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$ com coeficientes de um corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$.

1.4 Álgebras de Lie

Nesta seção, vamos definir e trazer alguns exemplos sobre as álgebras de Lie.
Definição 1.4.1 *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma álgebra em que a multiplicação (denotada por $[a, b]$ em vez de $a \cdot b$) satisfaz para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:*

$$[X, X] \equiv 0 \qquad e \qquad [[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] \equiv 0$$

Observação 1.4.1 *A primeira das duas condições acima é chamada anti-simetria. A outra é conhecida como a identidade de Jacobi. O operador da definição acima é denominado de colchete de Lie. O vetor $[X, Y]$ é o colchete dos vetores X e Y. Observemos que a primeira condição acima é equivalente a*

$$[Y, X] \equiv -[X, Y], \quad quando \quad Char\mathbb{F} \neq 2$$

Para qualquer álgebra associativa $\mathbb{A}$ com multiplicação, pode-se construir uma álgebra de Lie $L(\mathbb{A})$. Como espaço vetorial, $L(\mathbb{A})$ coincide com $(\mathbb{A})$. O colchete de Lie de $L(\mathbb{A})$ é definido como sendo o seu comutador em $(\mathbb{A})$:

$$[a, b] = ab - ba$$

Exemplo 1.4.1 *Seja $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ uma álgebra linear associativa dos vetores tridimensionais, defina-se o colchete de Lie $[X, Y]$ dos vetores X e Y em $\mathfrak{g}$ por*

$$[X, Y] = XY - YX$$

onde xy indica o produto vetorial da álgebra $\mathfrak{g}$. Vamos demonstrar a anticomutatividade e o Jacobiano, sabendo que $X \in [\mathfrak{g}]$ então, seja

$$X = (x_1, x_2, x_3), \qquad Y = (y_1, y_2, y_3) \qquad e \qquad Z = (z_1, z_2, z_3)$$

Assim,

$$X^2 = X \times X = (x_1, x_2, x_3) \times (x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = 0$$

e

$$X \times Y = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = -Y \times X.$$

Até aqui demonstramos que o produto de $X^2 = X \times X = 0$ *e que produto* $X \times Y = -Y \times X$. *Agora vamos demonstrar que a identidade*

$$X \times (Y \times Z) + Y \times (Z \times X) + Z \times (X \times Y) \equiv 0$$

Nomeamos as parcelas da identidade de (i), (ii) e (iii), respectivamente

$$X \times (Y \times Z); \qquad Y \times (Z \times X); \qquad Z \times (X \times Y).$$

Vamos resolver os produtos vetoriais da nossa identidade de Jacobi de maneira isolado, e só depois somar ambos os resultados. Seguiremos o seguinte raciocínio para o cálculo de cada item, primeiro resolver o produto vetorial de Y e Z, ou seja, o que estiver dentro de parenteses e de seguida o produto vetorial de X com o resultado do produto entre parenteses.

i) $X \times (Y \times Z)$:

$$\begin{aligned} X \times (Y \times Z) &= X \times \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \\ &= (x_1, x_2, x_3) \times (y_2z_3 - y_3z_2, y_3z_1 - y_1z_3, y_1z_2 - y_2z_1) \\ &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_2z_3 - y_3z_2 & y_1z_3 - y_3z_1 & y_1z_2 - y_2z_1 \end{bmatrix} \\ &= [x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_1z_3 - y_3z_1, x_1(y_1z_2 - y_2z_1) \\ &\quad -x_3(y_2z_3 - y_3z_2), x_1(y_1z_3 - y_3z_1) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2)] \\ &= \underline{(x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1 - x_3y_1z_3 + x_3y_3z_1}, \underline{\underline{x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1}} \\ &\quad \underline{\underline{-x_3y_2z_3 + x_3y_3z_2}}, x_1y_1z_3 - x_1y_3z_1 - x_2y_2z_3 + x_2y_3z_2) \end{aligned}$$

Assim, concluímos o cálculo de $X \times (Y \times Z)$ *e de modo análogo, iremos calcular o produto de* $Y \times (Z \times X)$ *e o produto de* $Z \times (X \times Y)$

ii) $Y \times (Z \times X)$

$$
\begin{aligned}
Y \times (Z \times X) &= Y \times \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \\
&= (y_1, y_2, y_3) \times (z_2x_3 - z_3x_2, z_1x_3 - z_3x_1, z_1x_2 - z_2x_1) \\
&= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_2x_3 - z_3x_2 & z_1x_3 - z_3x_1 & z_1x_2 - z_2x_1 \end{bmatrix} \\
&= [y_2(z_1x_2 - z_2x_1) - y_3(z_1z_3 - z_3x_1, y_1(z_1x_2 - z_2x_1) \\
&\quad -y_3(z_2x_3 - z_3x_2), y_1(z_1x_3 - z_3x_1) - y_2(z_2x_3 - z_3x_2)] \\
&= \underline{(y_2z_1x_2 - y_2z_2x_1 - y_3z_1x_3 + y_3z_3x_1}, \underline{\underline{y_1z_1x_2 - y_1z_2x_1}} \\
&\quad \underline{\underline{-y_3z_2x_3 + y_3z_3x_2}}, y_1z_1x_3 - y_1z_3x_1 - y_2z_2x_3 + y_2z_3x_2)
\end{aligned}
$$

E por último, temos

iii) $Z \times (X \times Y)$

$$
\begin{aligned}
Z \times (X \times Y) &= Z \times \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \\
&= (z_1, z_2, z_3) \times (x_2y_3 - x_3y_2, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1) \\
&= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ x_2y_3 - x_3y_2 & x_1y_3 - x_3y_1 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} \\
&= [z_2(x_1y_2 - x_2y_1) - z_3(x_1y_3 - x_3y_1, z_1(x_1y_2 - x_2y_1) \\
&\quad -z_3(x_2y_3 - x_3y_2), z_1(x_1y_3 - x_3y_1) - z_2(x_2y_3 - x_3y_2)] \\
&= \underline{(z_2x_1y_2 - z_2x_2y_1 - z_3x_1y_3 + z_3x_3y_1}, \underline{\underline{z_1x_1y_2 - z_1x_2y_1}} \\
&\quad \underline{\underline{-z_3x_2y_3 + z_3x_3y_2}}, z_1x_1y_3 - z_1x_3y_1 - z_2x_2y_3 + z_2x_3y_2)
\end{aligned}
$$

Então, somando os resultados obtidos em cada uma das parcelas e lembre-se que vale a associatividade da multiplicação, obteremos que $X \times (Y \times Z) + Y \times (Z \times X) + Z \times (X \times Y) \equiv 0$, portanto, a identidade de Jacobi está satisfeita.

Exemplo 1.4.2 *O conjunto de todas as derivações de uma álgebra $\mathfrak{A}$ definidas como $\delta(x, y) = \delta(x) \cdot y + x \cdot \delta(y)$ denotada por Der($\mathfrak{A}$), uma álgebra de Lie em relação à operação de colchetes*

$$[\delta_1, \delta_2] = \delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$$

É óbvio que $[\delta_1, \delta_2]$ é uma transformação linear, ou seja, $[\delta_1, \delta_2](\alpha x + \beta y) = \alpha[\delta_1, \delta_2](x) + \beta[\delta_1, \delta_2](y)$, para todo $x, y \in \mathfrak{A}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Vamos mostrar que $[\delta_1, \delta_2]$ *é uma derivação de* $\mathfrak{A}$. *De fato,*

$$\begin{array}{rcl}
[\delta_1, \delta_2]\lambda(x+y) & = & (\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)(\lambda(x,y)) = (\delta_1 \circ \delta_2)(\lambda(x,y)) - (\delta_2 \circ \delta_1)(\lambda(x,y)) \\
& = & \delta_1(\lambda(\delta_2(x), y) + \lambda(x, \delta_2(y)) - \delta_2(\lambda(\delta_1(x), y) + \lambda(x, \delta_1(y)) \\
& = & \lambda((\delta_1 \circ \delta_2)(x), y) + \underline{\lambda(\delta_2(x), \delta_1(y))} + \underline{\lambda(\delta_1(x), \delta_2(y))} + \lambda(x, (\delta_1 \circ \delta_2)(y)) \\
& - & \lambda((\delta_2 \circ \delta_1)(x), y) - \underline{\lambda(\delta_1(x), \delta_2(y))} - \underline{\lambda(\delta_2(x), \delta_1(y))} + \lambda(x, (\delta_2 \circ \delta_1)(y)) \\
& = & \lambda((\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)(x), y) + \lambda(x, (\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1)(y)) \\
& = & \lambda([\delta_1, \delta_2](x), y) + \lambda(x, [\delta_1, \delta_2](y)).
\end{array}$$

A identidade de Leibniz é uma consequência da identidade de Jacobi com a condição de anti-comutatividade. A identidade de Jacobi é $[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] \equiv 0$ e se isolarmos $[[X,Y],Z]$, obteremos a seguinte expressão

$$[[X,Y],Z] \equiv -[[Z,X],Y] - [[Y,Z],X]$$

daí aplicando a anti-comutatividade no comutante $[Z,X]$ e no comutante $[[Y,Z],X]$ tem-se que

$$[[X,Y],Z] \equiv [[X,Z],Y] + [X,[Y,Z]]$$

Fatos

- Toda álgebra de Lie é uma álgebra de Leibniz.
- Uma álgebra de Leibniz $\mathfrak{A}$ é de Lie se $x^2 = 0$ para todo $x \in \mathfrak{A}$.
- O comutador em $\mathfrak{A}$ é a função bilinear.

Capítulo 2

Álgebras de Leibniz

2.1 Introdução à teoria de álgebras de Leibniz

O conceito de álgebra de Leibniz foi introduzido por Loday no estudo da (co)homologia de Leibniz como um não comutativo de álgebras de Lie (co)homólogo, ou seja, as álgebras de Leibniz são as generalizações das álgebras de Lie.

Definição 2.1.1 *Uma álgebra de Leibniz sobre um corpo $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, equipado com uma aplicação $\mathbb{F}-bilinear$ $[\cdot,\cdot] : \mathbb{L}\times\mathbb{L}\to\mathbb{L}$ satisfazendo a identidade*

$$(xy)z = (xz)y + x(yz)$$

2.2 Exemplos de álgebra de dimensão infinita

Definição 2.2.1 *Um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{F}$ dotado de uma ação $\mathbb{L}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ (denotado por $x\cdot y$ para $x\in\mathbb{L}$ e $v\in\mathbb{V}$) é chamado de módulo $\mathbb{L}$ se*

- $(\alpha x+\beta y)\cdot v = \alpha(x\cdot v)+\beta(y\cdot v)$ para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{F}, x,y\in\mathbb{L}$ e $v\in\mathbb{V}$;
- $x\cdot(\alpha v+\beta w) = \alpha(x\cdot v)+\beta(x\cdot w)$ para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{F}, x\in\mathbb{L}$ e $v,w\in\mathbb{V}$;
- $[x,y]\cdot v = x\cdot(y\cdot v)-y\cdot(x\cdot v)$ para todo $x,y\in\mathbb{L}$ e $v\in\mathbb{V}$

Exemplo 2.2.1 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathbb{M}$ um $\mathfrak{g}$-módulo.*
Seja $f:\mathbb{M}\to\mathfrak{g}$ uma aplicação linear para todo $m\in\mathbb{M}$ e $x\in\mathfrak{g}$.
O colchete $[\cdot,\cdot]_{\mathbb{M}}$ definido por $[m,n]_{\mathbb{M}} := mf(n)$ fornece uma estrutura de álgebra de

Leibniz em $\mathbb{M}$*. De fato, para todo* m, n *e* $h \in \mathbb{M}$*, temos*

$$\begin{aligned}
<< m, n >_{\mathbb{M}}, h >_{\mathbb{M}} &= << m, h >_{\mathbb{M}}, n >_{\mathbb{M}} + < m, < n, h >_{\mathbb{M}}>_{\mathbb{M}} \\
< m \cdot f(n), h >_{\mathbb{M}} &= < m \cdot f(h), n >_{\mathbb{M}} + < m, n \cdot f(h) >_{\mathbb{M}} \\
(m \cdot f(n))f(h) &= (m \cdot f(h))f(n) + m(f(n \cdot f(h) \\
(m \cdot f(n))f(h) &= (m \cdot f(h))f(n) + m \cdot [f(n), f(h)] \\
(m \cdot f(n))f(h) &= (m \cdot f(h))f(n) + m \cdot (f(n)f(h) - f(h)f(n)) \\
m \cdot f(n)f(h) &= \underline{m \cdot f(h)f(n)} + m \cdot f(n)f(h) - \underline{m \cdot f(h)f(n)} \\
\therefore m \cdot f(n)f(h) &= m \cdot f(n)f(h)
\end{aligned}$$

Portanto, é uma álgebra de Leibniz.

Exemplo 2.2.2 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathbb{M}$ *um* $\mathfrak{g}$*-módulo.*

O espaço vetorial $\mathbb{Q} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{M}$ *com a multiplicação* $< x+m, y+n >= [x, y]+m \cdot y$*, onde* $m, n, h \in \mathbb{M}$*,* $x, y, z \in \mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Leibniz.*

Vamos verificar a identidade de Leibniz para o produto. Assim, teremos que

$$\begin{aligned}
<< x + m, y + n >_{\mathbb{Q}}, z + h >_{\mathbb{Q}} &\equiv << x + m, z + h >_{\mathbb{Q}}, y + n >_{\mathbb{Q}} \\
&\quad + < x + m, < y + n, z + h >_{\mathbb{Q}}>_{\mathbb{Q}} \\
< [x, y] + my, z + h >_{\mathbb{Q}} &= < [x, z] + mz, y + n >_{\mathbb{Q}} \\
&\quad + < x + m, [y, z] + nz >_{\mathbb{Q}} \\
[[x, y], z] + (my)z &= [[x, z], y] + (mz)y + [x, [y, z]] + m[y, z]
\end{aligned}$$

se aplicarmos a anticomutatividade na expressão $[[x, z], y]+[x, [y, z]]$ *obteremos* $-[[z, x], y]-[[y, z], x]$*, o que pela identidade de Jacobi, resulta em*

$$[[x, y], z] = -[[z, x], y] - [[y, z], x].$$

Então,

$$\begin{aligned}
[[x, y], z] + (my)z &= -[[z, x], y] + (mz)y - [[y, z], x] + m[y, z] \\
&= [[x, y], z] + \underline{(mz)y} + (my)z - \underline{(mz)y} \\
&= [[x, y], z] + (my)z
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.3 *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. O espaço vetorial* $\mathbb{L} = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Leibniz com a multiplicação.*

$$< x \otimes y, a \otimes b >\equiv [x, [a, b]] \otimes y + x \otimes [y, [a, b]]$$

é uma álgebra de Leibniz, isto é

$$<< x \otimes y, a \otimes b >, s \otimes t > \equiv << x \otimes y, s \otimes t >, a \otimes b > + < x \otimes y, < a \otimes b, s \otimes t >>$$

Para provarmos que $\mathbb{L} = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Leibniz com a multiplicação, vamos resolver em partes a identidade começando do lado esquerdo, em seguida a primeira e segunda parcela do lado direito, respectivamente e depois comparar os resultados, assim temos*

$$\begin{aligned} << x \otimes y, a \otimes b >, s \otimes t > &= < [x,[a,b]] \otimes y + x \otimes [y,[a,b]], s \otimes t > \\ &= [[x,[a,b]],[s,t]] \otimes y + \underline{[x,[a,b]] \otimes [y,[s,t]]} \\ &\quad + \underbrace{[x,[s,t]] \otimes [y,[a,b]]} + x \otimes [[y,[a,b]],[s,t]] \end{aligned}$$

para a primeira parcela do lado direito tem-se

$$\begin{aligned} << x \otimes y, s \otimes t >, a \otimes b > &= < [x,[s,t]] \otimes y + x \otimes [y,[s,t]], a \otimes b > \\ &= [[x,[s,t]],[a,b]] \otimes y + \underbrace{[x,[s,t]] \otimes [y,[a,b]]} \\ &\quad + \underline{[x,[a,b]] \otimes [y,[s,t]]} + x \otimes [[y,[s,t]],[a,b]] \end{aligned}$$

e por fim vamos trabalhar a última parcela do lado direito, segue que

$$\begin{aligned} < x \otimes y, < a \otimes b, s \otimes t >> &= < x \otimes y, [a,[s,t]] \otimes b + a \otimes [b,[s,t]] > \\ &= [x,[[a,[s,t]],b]] \otimes y + x \otimes [y,[[a,[s,t]],b]] \\ &\quad + [x,[a,[b,[s,t]]]] \otimes y + x \otimes [y,[a,[b,[s,t]]]] \,. \end{aligned}$$

Se compararmos a igualdade, veremos que os termos destacados vão se cancelar, assim comparando os termos que contêm y *depois da multiplicação, obtemos*

$$\begin{aligned} [[x,[a,b]],[s,t]] \otimes y &= [[x,[s,t]],[a,b]] \otimes y + [x,[[a,[s,t]],b]] \otimes y \\ &\quad + [x,[a,[b,[s,t]]]] \otimes y \end{aligned}$$

daí, podemos aplicar a anticomutatividade na primeira parcela à direita, é fácil de ver que

$$[x,[[a,b],[s,t]]] \otimes y \equiv [x,[[a,[s,t]],b]] \otimes y + [x,[a,[b,[s,t]]]] \otimes y$$

aplicando de novo duas vezes a anticomutatividade no lado direito

$$[[x,[a,b]],[s,t]] \otimes y = [[[a,b],[s,t]],x] \otimes y + [[[s,t],x],[a,b]] \otimes y$$

pela identidade de Jacobi, obtemos

$$[[x,[a,b]],[s,t]]\otimes y+[[[a,b],[s,t]],x]\otimes y+[[[s,t],x],[a,b]]\otimes y\equiv 0$$

assim, concluímos a demonstração dos termos que contêm y depois da multiplicação e agora, de maneira análoga, vamos agrupar os termos que contém x antes da multiplicação,

$$\begin{aligned} x\otimes\left[[y,[a,b]],[s,t]\right] &= x\otimes\left[[y,[s,t]],[a,b]\right]+x\otimes\left[y,\left[[a,[s,t]],b\right]\right] \\ &\quad +x\otimes[y,[a,[b,[s,t]]]] \end{aligned}$$

Veja que se aplicarmos a anticomutatividade na primeira parcela do lado direito, obteremos

$$x\otimes\left[[y,[s,t]],[a,b]\right]=x\otimes\left[y,\left[[a,[s,t]],b\right]\right]+x\otimes[y,[a,[b,[s,t]]]]$$

aplicando duas vezes a anticomutatividade no lado direito

$$x\otimes\left[[y,[s,t]],[a,b]\right]=-x\otimes[[[a,b],[s,t]],y]-x\otimes[[[s,t],y],[a,b]]$$

pela identidade de Jacobi, também obtemos

$$x\otimes\left[[y,[s,t]],[a,b]\right]+x\otimes[[[a,b],[s,t]],y]+x\otimes[[[s,t],y],[a,b]]\equiv 0$$

Assim, concluímos que toda a identidade foi satisfeita, portanto, a nossa álgebra $\mathbb{L}=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ com a multiplicação. $< x\otimes y, a\otimes b >\equiv [x,[a,b]]\otimes y+x\otimes[y,[a,b]]$, resulta em álgebra de Leibniz.

Exemplo 2.2.4 *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra associativa e $\mathbb{D}$ uma aplicação linear $\mathbb{D}:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ que satisfaz a condição:*

$$\mathbb{D}(a\mathbb{D}(b))=\mathbb{D}(a)\cdot\mathbb{D}(a)=\mathbb{D}(\mathbb{D}(a)b),\forall a,b\in\mathbb{A}$$

então $\mathbb{A}$ com a multiplicação $< a,b >_{\mathbb{D}}= a\mathbb{D}(b)-\mathbb{D}(a)b$ é uma álgebra de Leibniz $\mathbb{A}_{\mathbb{D}}$.

Assim, seja $< x,< y,z >>=<< x,y >,z > - << x,z >,y >$, resolveremos de forma separada aigualdade começando do lado esquerdo e no final comparar os resultados,

$$\begin{aligned} < x,< y,z >> &= < x, y\mathbb{D}(z)-\mathbb{D}(z)y > \\ &= x\mathbb{D}(y\mathbb{D}(z)-\mathbb{D}(z)y)-\mathbb{D}(y\mathbb{D}(z)-\mathbb{D}(z)y)x \\ &= \underline{x\mathbb{D}(y)\mathbb{D}(z)}-\underline{\underline{x\mathbb{D}(z)\mathbb{D}(y)}}-\underline{\underline{\underline{\mathbb{D}(y)\mathbb{D}(z)x}}}+\underbrace{\mathbb{D}(z)\mathbb{D}(y)x.} \end{aligned}$$

Do lado direito, temos duas parcelas, da primeira, tem-se

$$\begin{aligned} << x, y >, z > &= < x\mathbb{D}(y) - \mathbb{D}(y)x, z > \\ &= (x\mathbb{D}(y) - \mathbb{D}(y)x)\mathbb{D}(z) - \mathbb{D}(z)(x\mathbb{D}(y) - \mathbb{D}(y)x) \\ &= \underline{x\mathbb{D}(y)\mathbb{D}(z)} - \underline{\underbrace{\mathbb{D}(y)x\mathbb{D}(z)}} - \underbrace{\underline{\mathbb{D}(z)x\mathbb{D}(y)}} + \underbrace{\mathbb{D}(z)\mathbb{D}(y)x} \end{aligned}$$

finalmente, temos que a última parcela é

$$\begin{aligned} << x, z >, y > &= < x\mathbb{D}(z) - \mathbb{D}(z)x, z > \\ &= -(x\mathbb{D}(z) - \mathbb{D}(z)x)\mathbb{D}(y) + \mathbb{D}(y)(x\mathbb{D}(z) - \mathbb{D}(z)x) \\ &= -\underline{\underline{x\mathbb{D}(z)\mathbb{D}(y)}} + \underbrace{\underline{\mathbb{D}(z)x\mathbb{D}(y)}} + \underline{\underbrace{\mathbb{D}(y)x\mathbb{D}(z)}} - \underline{\underline{\underline{\mathbb{D}(y)\mathbb{D}(z)x}}} \end{aligned}$$

Comparando os resultados, veremos que o lado esquerdo é igual ao lado direito, e assim obteremos que $< x, < y, z >> \equiv 0$, portanto, é uma álgebra de Leibniz $\mathbb{A}_{\mathbb{D}}$.

2.3 Álgebras de Leibniz bidimensionais

Álgebras de Leibniz bidimensionais foram classificadas por Cuvier (6). Seja $\mathbb{F}$ um corpo, $\mathbb{L}$ uma álgebra de Leibniz $dim_{\mathbb{F}}\mathbb{L} = 2$, ou seja, $\mathbb{F}e_1 + \mathbb{F}e_2$ dimensão $\mathbb{L} = 2$ significa que existem dois vetores linearmente independente que formam a base dessa álgebra. Deste modo, para qualquer que seja $\mathbb{L}$ da álgebra de Leibniz podemos escrevê-la como a combinação linear dos vetores da base $\mathbb{L} = \alpha e_1 + \beta e_2$ em que α e β são coeficientes, ou seja, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Para definirmos a álgebra de Leibniz bidimensional, basta definir os resultados de produtos

$$e_1e_1, \qquad e_1e_2, \qquad e_2e_1, \qquad e_2e_2.$$

Existem infinitas álgebras de Leibniz de dimensão 2 ($dim2$) que são isomorfos aos quatro, como veremos nos exemplos abaixo. Vamos classificá-las em duas partes, álgebras de Lie e álgebras sem a condição de anti-comutatividade.

Exemplo 2.3.1 *Álgebra abeliana.*

A álgebra abeliana é uma álgebra Lie, isso significa que ela é comutativa e anticomutativa, então $xy = yx$ *e* $xy = -yx$ *os dois juntos implica* $xy = 0$*, ou seja, o produto de quaisquer dois elementos de uma álgebra abeliana é igual a zero. Portanto, usando a definição, tem-se*

$$e_1e_1 = e_1e_2 = e_2e_1 = e_2e_2 = 0$$

Definição 2.3.1 *Uma álgebra de Lie é solúvel, se sua série derivada termina na subálgebra zero, ou seja,*

$$g \geq [g,g] \geq [[g,g],[g,g]] \geq \cdots \geq 0$$

Exemplo 2.3.2 *Álgebra de Lie solúvel com a multiplicação*

$$e_1e_2 = -e_2e_1 = e_2 \qquad e \qquad e_1e_1 = e_2e_2 = 0$$

é uma álgebra de Leibniz. Para verificar a identidade de Leibniz $x(yz) \equiv (xy)z - (xz)y$ *vamos tomar todas as possíveis combinações de* e_1 *e* e_2*, então seja,* $x = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2$*,* $y = \beta_1e_1 + \beta_2e_2$ *e* $z = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2$*, assim, iremos resolver o primeiro membro da igualdade e em seguida resolver o de lado direito e comparar os resultados*

$$\begin{aligned}(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2)[(\beta_1e_1+\beta_2e_2)(\gamma_1e_1+\gamma_2e_2)] &= (\alpha_1e_1+\alpha_2e_2)(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)e_2 \\ &= \alpha_1(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)e_2\end{aligned}$$

agora, resolvendo a primeira parcela do lado direito, obtém-se

$$\begin{aligned}[(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2)(\beta_1e_1+\beta_2e_2)](\gamma_1e_1+\gamma_2e_2) &= (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)e_2(\gamma_1e_1-\gamma_2e_2) \\ &= -\gamma_1\alpha_1\beta_2e_2 + \underline{\gamma_1\alpha_2\beta_1e_2}\end{aligned}$$

e a última parcela será

$$\begin{aligned}-[(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2)(\gamma_1e_1+\gamma_2e_2)](\alpha_1e_1+\alpha_2e_2) &= (\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)e_2(\beta_1e_1+\beta_2e_2) \\ &= \beta_1\alpha_1\gamma_2e_2 - \underline{\beta_1\alpha_2\gamma_1e_2}\end{aligned}$$

se adicionarmos as duas parcelas obteremos

$$\alpha_1(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)e_2$$

que é igual ao do lado esquerdo, e assim demonstramos que a álgebra com essa multiplicação é uma álgebra de Leibniz. Exemplo extraído de (12).

Definição 2.3.2 *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ é dita nilpotente se $\mathfrak{g}^k = 0$ para algum $k \geq 1$, ou seja, se sua série central descendente se anula em algum momento.

Exemplo 2.3.3 *Álgebra de Leibniz nilpotente com multiplicação*

$$e_2e_2 = e_1 \qquad e_1e_1 = e_1e_2 = e_2e_1 = 0$$

a álgebra com essa multiplicação é nilpotente, pois

$$e_1^2 = 0, \qquad e_2^3 = e_2^2 e_2 = e_1 e_2 = 0,$$

logo $\mathfrak{g}^3 = 0$. *Agora vamos verificar que satisfaz a identidade de Leibniz* $x(yz) \equiv (xy)z - (xz)y$. *Seja* $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ *e* $z = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$. *Vamos considerar a identidade de Leibniz por partes, primeiramente comecemos pela parte esquerda da igualdade*

$$\begin{aligned}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)[(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2)] &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)\beta_2 e_2 \gamma_2 e_2 \\ &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)\beta_2 \gamma_2 e_1 = 0\end{aligned}$$

agora vamos resolver a primeira parcela do lado direito da identidade

$$\begin{aligned}[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)](\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) &= \alpha_2 e_2 \beta_2 e_2 (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) \\ &= \alpha_2 \beta_2 e_1 (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) = 0\end{aligned}$$

e a última parcela será

$$\begin{aligned}-[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2)](\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) &= -\alpha_2 e_2 \gamma_2 e_2 (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) \\ &= -\alpha_2 \gamma_2 e_1 (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = 0\end{aligned}$$

juntando o resultado de cada parte, pode-se concluir que a identidade de Leibniz está satisfeita.

Exemplo 2.3.4 *Álgebra de Leibniz solúvel com a multiplicação*

$$e_1 e_2 = e_1 \qquad e_2 e_2 = e_1 \qquad e_1 e_1 = e_2 e_1 = 0$$

De novo, vamos usar a identidade $x(yz) \equiv (xy)z - (xz)y$. *para provar que esta é uma álgebra de Leibniz solúvel, tomando* $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ *e* $z = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$. *Vamos começar pelo lado esquerdo da igualdade, temos que*

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)[(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2)] = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 \gamma_2 e_1 + \beta_2 \gamma_2 e_1) = 0$$

o lado esquerdo da igualdade se anulou, agora veremos as duas parcelas do lado direito separadamente e depois iremos comparar os resultados

$$\begin{aligned}[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)](\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) &= (\alpha_1 \beta_2 e_1 + \alpha_2 \beta_2 e_1)(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2) \\ &= \underline{\alpha_1 \beta_2 \gamma_2 e_1} + \underline{\underline{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 e_1}}\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
-[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2)](\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) &= (\alpha_1 \gamma_2 e_1 - \alpha_2 \gamma_2 e_1)(\beta_1 e_1 - \beta_2 e_2) \\
&= -\underline{\alpha_1 \beta_2 \gamma_2 e_1} - \underline{\underline{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 e_1}}
\end{aligned}
$$

se compararmos o lado direito, percebe-se que os resultados das parcelas vão se anular, daí comparando com o lado esquerdo, obteremos que $x(yz) - (xy)z + (xz)y \equiv 0$. Com isso, a gente encerra os exemplos de álgebras de Leibniz bidimensionais.

Capítulo 3

Álgebras de Leibniz de dimensão três

3.1 Conceitos iniciais

Neste capítulo, iremos considerar a classificação das álgebras de Leibniz de dimensão 3 sobre qualquer corpo dado em (1; 5), com a característica $Char\mathbb{F} \neq 2$, veja (13), ou seja, $\forall a \in \mathbb{F}, 2 \cdot a = 0$. Consideremos $dim\mathbb{L} = 3$, isso significa que existe uma base $\{e_1, e_2, e_3\}$ tal que para todo $a \in \mathbb{L}, a = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_1$ onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$. Os cálculos de produtos de transformações da base e a os da identidade de Leibniz neste capítulo foram desenvolvidas por nós para facilitar a compreensão do leitor, pois o livro texto não as desenvolve.

Vamos usar a identidade de Leibniz na combinação da base, ou seja,

$$e_1(e_1e_2) \equiv (e_1e_1)e_2 - (e_1e_2)e_1.$$

Assim, para dar a lista fazemos uso de uma consideração caso a caso no que diz respeito ao isomorfismo invariantes.

Definição 3.1.1 *Para uma dada álgebra de Leibniz recorremos aos seguintes subespaços:*

1. $Ann_r\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{L}; < y, x >= 0, \forall y \in \mathbb{L}\}$ *é chamado de aniquilador à direita de uma álgebra de Leibniz.*
2. $\mathbb{L}^k =< \mathbb{L}^{k-1}, \mathbb{L} >$ *é chamado de grau de álgebra* $\mathbb{L}$, *onde* $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.1.1 *Seja* $\mathbb{L}$ *uma álgebra com a base* $\{e_1, e_2, e_3\}; Ann_r\mathbb{L} = \{e_1\}$.

$$< e_1, e_1 >= 0, \qquad < e_2, e_1 >= 0, \qquad < e_3, e_1 >= 0$$

Proposição 3.1.1 $Ann_r\mathbb{L}$ *é um ideal à direita em* $\mathbb{L}$. *Para todo* $x \in \mathbb{L}$ *e para todo* $y \in \mathbb{L}$.

$$< y, x >\in Ann_r\mathbb{L}$$

$$< a, < y, x >> = < a, 0 > = 0; \qquad \forall a \in \mathbb{L}.$$

A tabela que se segue é o resultado da multiplicação definida nos elementos da base

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	$\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3$	$\alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 e_3$	$\alpha_3 e_1 + \beta_3 e_2 + \gamma_3 e_3$
$\mathbf{e_2}$	$\alpha_4 e_1 + \beta_4 e_2 + \gamma_4 e_3$	$\alpha_5 e_1 + \beta_5 e_2 + \gamma_5 e_3$	$\alpha_6 e_1 + \beta_6 e_2 + \gamma_6 e_3$
$\mathbf{e_3}$	$\alpha_7 e_1 + \beta_7 e_2 + \gamma_7 e_3$	$\alpha_8 e_1 + \beta_8 e_2 + \gamma_8 e_3$	$\alpha_9 e_1 + \beta_9 e_2 + \gamma_9 e_3$

O nosso objetivo nas duas próximas seções obter as álgebras de Leibniz de dimensão três. Se a dim $Ann_r\mathbb{L} = 3$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ seja sua base, estaremos perante uma álgebra abeliana e se a dim $Ann_r\mathbb{L} = 0$ encontraremos ou uma álgebra de Leibniz solúvel ou a álgebra de Leibniz nilpotente foram vistas no capítulo 2. Iniciaremos agora os estudos destas álgebras considerando a dim $Ann_r\mathbb{L} = 2$.

3.2 As álgebras obtidas quando dim $Ann_r\mathbb{L} = 2$

Suponha que dim $Ann_r\mathbb{L} = 2$ e $\{e_1, e_2\}$ seja sua base. A nossa tabela de multiplicação reduz-se como se segue abaixo:

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$
$\mathbf{e_2}$	0	0	$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$

O uso dos aniquiladores à direita reduziu bastante os cálculos para encontrar os coeficientes, mas vamos também recorrer a identidade de Leibniz de modo a simplificar ainda mais a nossa tabela de multiplicação, primeiramente segue que os produtos de

$$\begin{aligned} < e_1, < e_1, e_3 >> &= < e_1, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 > = \alpha_1 < e_1, e_1 > + \alpha_2 < e_1, e_2 > \\ &+ \alpha_3 < e_1, e_3 > = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 < e_1, e_3 > = \alpha_3 < e_1, e_3 > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < e_2, < e_1, e_3 >> &= < e_2, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 > = \alpha_1 < e_2, e_1 > + \alpha_2 < e_2, e_2 > \\ &+ \alpha_3 < e_2, e_3 > = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 < e_2, e_3 > = \alpha_3 < e_2, e_3 > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < e_3, < e_1, e_3 >> &= < e_3, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 >= \alpha_1 < e_3, e_1 > + \alpha_2 < e_3, e_2 > \\ &\quad + \alpha_3 < e_3, e_3 >= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 < e_1, e_3 >= \alpha_3 < e_3, e_3 > \end{aligned}$$

Pela identidade de Leibniz, podemos verificar respectivamente que

$$\begin{aligned} < e_1, < e_1, e_3 >> &\equiv << e_1, e_1 >, e_3 > - << e_1, e_3 >, e_1 > \\ &\equiv < 0, e_3 > -0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < e_2, < e_1, e_3 >> &\equiv << e_2, e_1 >, e_3 > - << e_2, e_3 >, e_1 > \\ &\equiv < 0, e_3 > -0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < e_3, < e_1, e_3 >> &\equiv << e_3, e_1 >, e_3 > - << e_3, e_3 >, e_1 > \\ &\equiv < 0, e_3 > -0 = 0 \end{aligned}$$

Perceba que nas igualdades acima, obtemos que $< e_1, < e_1, e_3 >>= \alpha_3 < e_1, e_3 >$ e $< e_1, < e_1, e_3 >>= 0$ as duas igualdades nos dão que $\alpha_3 < e_1, e_3 >= 0$, portanto

$$\alpha_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad < e_1, e_3 >= 0.$$

Perceba que o mesmo ocorre com $< e_2, < e_1, e_3 >>= \alpha_3 < e_2, e_3 >$ e $< e_2, < e_1, e_3 >>= 0$ as duas igualdades nos dão que $\alpha_3 < e_2, e_3 >= 0$, portanto

$$\alpha_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad < e_2, e_3 >= 0.$$

E por fim, ocorre com $< e_3, < e_1, e_3 >>= \alpha_3 < e_3, e_3 >$ e $< e_3, < e_1, e_3 >>= 0$ as duas igualdades nos dão que $\alpha_3 < e_3, e_3 >= 0$, portanto

$$\alpha_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad < e_3, e_3 >= 0.$$

Daí, que se considerarmos o caso em $< e_1, e_3 >=< e_2, e_3 >=< e_3, e_3 >= 0$ obteremos uma álgebra abeliana. Sendo assim, vamos considerar que $\alpha_3 = 0$.
E para os produtos

$$\begin{aligned} < e_1, < e_2, e_3 >> &= < e_1, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 >= \beta_1 < e_1, e_1 > + \beta_2 < e_1, e_2 > \\ &\quad + \beta_3 < e_1, e_3 >= \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 < e_1, e_3 >= \beta_3 < e_1, e_3 > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < e_2, < e_2, e_3 >> &= < e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 >= \beta_1 < e_2, e_1 > + \beta_2 < e_2, e_2 > \\ &\quad + \beta_3 < e_2, e_3 >= \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 < e_2, e_3 >= \beta_3 < e_2, e_3 > \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
< e_3, < e_2, e_3 >> &= < e_3, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 >= \beta_1 < e_3, e_1 > +\beta_2 < e_3, e_2 > \\
&\quad +\beta_3 < e_3, e_3 >= \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 0 + \beta_3 < e_1, e_3 >= \beta_3 < e_3, e_3 >
\end{aligned}
$$

Pela identidade de Leibniz, podemos verificar respectivamente que

$$
\begin{aligned}
< e_1, < e_2, e_3 >> &\equiv << e_1, e_2 >, e_3 > - << e_1, e_3 >, e_2 > \\
&\equiv < 0, e_3 > -0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< e_2, < e_2, e_3 >> &\equiv << e_2, e_2 >, e_3 > - << e_2, e_3 >, e_2 > \\
&\equiv < 0, e_3 > -0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< e_3, < e_2, e_3 >> &\equiv << e_3, e_2 >, e_3 > - << e_3, e_3 >, e_2 > \\
&\equiv < 0, e_3 > -0 = 0
\end{aligned}
$$

Perceba que nas igualdades acima, obtemos que $< e_1, < e_2, e_3 >>= \beta_3 < e_2, e_3 >$ e $< e_1, < e_2, e_3 >>= 0$ as duas igualdades nos dão que $\beta_3 < e_1, e_3 >= 0$, portanto

$$\beta_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad < e_1, e_3 >= 0.$$

Perceba que o mesmo ocorre com $< e_2, < e_2, e_3 >>= \beta_3 < e_2, e_3 >$ e $< e_2, < e_2, e_3 >>= 0$ as duas igualdades nos dão que $\beta_3 < e_2, e_3 >= 0$, portanto

$$\beta_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad < e_2, e_3 >= 0.$$

E por fim, ocorre com $< e_3, < e_2, e_3 >>= \beta_3 < e_3, e_3 >$ e $< e_3, < e_2, e_3 >>= 0$ as duas igualdades nos dão que $\beta_3 < e_3, e_3 >= 0$, portanto

$$\beta_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad < e_3, e_3 >= 0.$$

Daí, que se considerarmos o caso em $< e_1, e_3 >=< e_2, e_3 >=< e_3, e_3 >= 0$ obteremos uma álgebra abeliana. Sendo assim, vamos considerar que $\beta_3 = 0$.
De modo análogo, calcula-se o caso para $\gamma = 0$.

Caso 1: Sendo a dim $Ann_r\mathbb{L} = 2$ e $\{e_1, e_2\}$ seja sua base. Deixe que $\{e_1, e_2, e_3\}$ seja a base de $\mathbb{L}$, do produto e da identidade de Leibniz acima obtemos que $\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0$.

assim pode ocorrer a seguinte tabela de multiplicação:

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$
$\mathbf{e_2}$	0	0	$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$

(3.1)

Caso 1.1: Seja $\dim \mathbb{L}^2 = 1$, ou seja, $\{e_1\}$ é a base de $\mathbb{L}$. Com isso, a nossa tabela 3.1 de multiplicação reduz-se como segue-se:

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$\alpha_1 e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	0	$\beta_1 e_1$
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\gamma_1 e_1$

(3.2)

Se $\beta_1 = 0$, vamos obter uma álgebra abeliana. Portanto, vamos considerar que $\beta_1 \neq 0$.
Transformação 3.2.1 *Segue a seguinte transformação da base* $e_1' = \beta_1 e_1$, $e_2' = e_2$, $e_3' = e_3 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} e_2$ *segue o produto de*

$$\left\langle e_1', e_3' \right\rangle = \left\langle \beta_1 e_1, e_3 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} e_2 \right\rangle = \beta_1 \langle e_1, e_3 \rangle - \gamma_1 \langle e_1, e_2 \rangle = \beta_1 \alpha_1 e_1 \Rightarrow \beta_1 = 1,$$

$$\left\langle e_2', e_3' \right\rangle = \left\langle e_2, e_3 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} e_2 \right\rangle = \langle e_2, e_3 \rangle - \frac{\gamma_1}{\beta_1} \langle e_2, e_2 \rangle = \beta_1 e_1 = e_1$$

e

$$\left\langle e_3', e_3' \right\rangle = \left\langle e_3 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} e_2, e_3 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} e_2 \right\rangle = \langle e_3, e_3 \rangle - \frac{\gamma_1}{\beta_1} \langle e_2, e_3 \rangle = \gamma_1 e_1 - \gamma_1 e_1$$

Da transformação, obtemos que $\beta_1 = 1$ *e* $\left\langle e_3', e_3' \right\rangle = 0$, *daí temos a seguinte tabela de multiplicação*

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$\alpha_1 e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	0	e_1
$\mathbf{e_3}$	0	0	0

(3.3)

Caso 1.1.1: Se $\alpha_1 = 0$, então da tabela 3.3 obtém-se a seguinte álgebra:

$\mathbb{L}_8(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	0	e_1
$\mathbf{e_3}$	0	0	0

Caso 1.1.2: Se $\alpha_1 \neq 0$.
Transformação 3.2.2 *A transformação da base é dado por* $e_1^{'} = e_1$, $e_2^{'} = e_2 - e_1$ *e* $e_3^{'} = e_3$ *resolvendo o produto encontra-se uma álgebra com divisão.*

Caso 1.2: Voltemos ao caso em que a $\dim\mathbb{L}^2 = 2$, isto é, $\{e_1, e_2\}$ é a base de $\mathbb{L}$, dá-nos a seguinte tabela de multiplicação:

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$
$\mathbf{e_2}$	0	0	$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$

(3.4)

A matriz dos coeficientes da tabela 3.4 será dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

e cuja quantidade das linhas independentes da matriz $\mathbf{A}$, denotada como $rank(\mathbf{A}) = 2$, então

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

Caso 1.2.1: Suponha que $det(\mathbf{A_1}) \neq 0$, é equivalentemente definido como

$$\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0 \tag{3.5}$$

Caso 1.2.1.1: Suponha que $\alpha_2 \neq 0$. Como $det(\mathbf{A_1})$ não é degenerado, ele produz $\beta_1 \neq 0$.
Transformação 3.2.3 *A transformação da base é dada por*

$$e_1^{'} = e_1, \qquad e_2^{'} = e_2 \qquad \text{e} \qquad e_3^{'} = \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)e_1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1}e_2 + e_3$$

Agora, vamos calcular os seguintes produtos de $\left\langle e_1^{'}, e_3^{'}\right\rangle$, $\left\langle e_2^{'}, e_3^{'}\right\rangle$ e $\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle$, *temos*

$$\begin{aligned}\left\langle e_1^{'}, e_3^{'}\right\rangle &= \left\langle e_1, \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right) e_1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} e_2 + e_3\right\rangle \\ &= \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)\langle e_1, e_1\rangle - \frac{\gamma_1}{\beta_1}\langle e_1, e_2\rangle + \langle e_1, e_3\rangle\end{aligned}$$

Como $\{e_1, e_2\}$ *são os aniquiladores à direita, então* $\left\langle e_1^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$
Analogamente, temos

$$\begin{aligned}\left\langle e_2^{'}, e_3^{'}\right\rangle &= \left\langle e_2, \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right) e_1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} e_2 + e_3\right\rangle \\ &= \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)\langle e_2, e_1\rangle - \frac{\gamma_1}{\beta_1}\langle e_2, e_2\rangle + \langle e_2, e_3\rangle\end{aligned}$$

e pelos aniquiladores à direita, tem-se $\left\langle e_2^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$
E finalmente,

$$\begin{aligned}\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right) e_1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} e_2 + e_3, \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right) e_1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} e_2 + e_3\right\rangle \\ &= \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)^2\langle e_1, e_1\rangle - \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)\frac{\gamma_1}{\beta_1}\langle e_1, e_2\rangle + \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)\langle e_2, e_3\rangle \\ &\quad -\frac{\gamma_1}{\beta_1}\left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)\langle e_2, e_1\rangle + \frac{\gamma_1^2}{\beta_1^2}\langle e_2, e_2\rangle - \frac{\gamma_1}{\beta_1}\langle e_2, e_3\rangle \\ &\quad + \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)\langle e_3, e_1\rangle - \frac{\gamma_1}{\beta_1}\langle e_3, e_2\rangle + \langle e_3, e_3\rangle\end{aligned}$$

aplicando os aniquiladores tem-se

$$\begin{aligned}\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle &= \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)\langle e_1, e_3\rangle - \frac{\gamma_1}{\beta_1}\langle e_2, e_3\rangle + \langle e_3, e_3\rangle \\ &= \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) - \frac{\gamma_1}{\beta_1}(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 \\ &= \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)\alpha_1 e_1 + \left(\frac{\gamma_1\beta_2\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2(\alpha_2 - 1) - \frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right) \\ &= \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)\alpha_1 e_1 + \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)(\alpha_2 - 1)e_2 \\ &= \left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)[\alpha_1 e_1 + (\alpha_2 - 1)e_2]\end{aligned}$$

Se $\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle = 0$ *isso significa que* $\left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right)[\alpha_1 e_1 + (\alpha_2 - 1)e_2] = 0$, *então* $\left(\frac{\gamma_1\beta_2}{\beta_1} - \gamma_2\right) = 0$ *ou* $\alpha_1 e_1 + (\alpha_2 - 1)e_2 = 0$. *Mas, note que* $(\gamma_1\beta_2 - \beta_1\gamma_2) \neq 0$, *pois é um dos determinantes da matriz* **A** *que não pode ser zero. Portanto,* $\alpha_1 e_1 + (\alpha_2 - 1)e_2 = 0$ *e sendo* e_1 *e* e_2 *vetores da base, então são linearmente independentes daí que a combinação linear é trivial* $\alpha_1 = 0$

e $\alpha_2 = 1$ *o que reduz a nossa tabela 3.4 para*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \hline \mathbf{e_1} & 0 & 0 & e_2 \\ \hline \mathbf{e_2} & 0 & 0 & \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \\ \hline \mathbf{e_3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad , \quad \beta_1 \neq 0 \tag{3.6}$$

E suponhamos que $\beta_2 = 0$, *tem-se que o produto de* $\beta_2 e_1 = 0$, *portanto a nossa tabela de multiplicação 3.6 se reduz em*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \hline \mathbf{e_1} & 0 & 0 & e_2 \\ \hline \mathbf{e_2} & 0 & 0 & \beta_1 e_1 \\ \hline \mathbf{e_3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad , \quad \beta_1 \neq 0 \tag{3.7}$$

Vamos considerar alguns casos na tabela 3.7:

Caso 1.2.1.1.A: Suponha que $\mathbb{F}^2 = \mathbb{F}$. Vamos presumir que a equação $x^2 = \beta_1$ tem solução em $\mathbb{F}$.

Transformação 3.2.4 *Aplicando a transformação* $e_1^{'} = \sqrt{\beta_1} e_1$, $e_2^{'} = e_2$ *e* $e_3^{'} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} e_3$, *verificando os produtos de*

$$\left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \left\langle \sqrt{\beta_1} e_1, \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} e_3 \right\rangle = \sqrt{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \langle e_1, e_3 \rangle = e_2$$

e

$$\left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \left\langle e_2, \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} e_3 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \langle e_2, e_3 \rangle = \sqrt{\beta_1} e_1$$

tomando $\beta_1 = 1$, *da equação 3.7 vamos ter que* $\beta_1 e_1 = e_1$, *o que nos dá a seguinte álgebra:*

$$\mathbb{L}_9(\mathbb{F}) \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \hline \mathbf{e_1} & 0 & 0 & e_2 \\ \hline \mathbf{e_2} & 0 & 0 & e_1 \\ \hline \mathbf{e_3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Caso 1.2.1.1.B: Suponha agora que $\mathbb{F}^2 \neq \mathbb{F}$. Consideremos $x^2 = \beta_1$ sem nenhuma solução em $\mathbb{F}$. Então, vamos considerar os seguintes subcasos:

i) Considere que $x^2 = -\beta_1$ tem uma solução em $\mathbb{F}$.

Transformação 3.2.5 *Aplicando como a transformação da base* $e_1^{'} = \sqrt{-\beta_1} e_1$,

$e_2^{'} = e_2$ *e* $e_3^{'} = \frac{1}{\sqrt{-\beta_1}} e_3$, *daí segue que que o produto de*

$$\left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \left\langle \sqrt{-\beta_1} e_1, \frac{1}{\sqrt{-\beta_1}} e_3 \right\rangle = \sqrt{-\beta_1} \frac{1}{\sqrt{-\beta_1}} \langle e_1, e_3 \rangle = e_2$$

e

$$\left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \left\langle e_1, \frac{1}{\sqrt{-\beta_1}} e_3 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{-\beta_1}} \langle e_2, e_3 \rangle = \sqrt{-\beta_1} e_1$$

tomando $\beta_1 = -1$, *na tabela 3.7 temos a seguinte álgebra*

$\mathbb{L}_{10}(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	e_2
$\mathbf{e_2}$	0	0	$-e_1$
$\mathbf{e_3}$	0	0	0

ii) Considere que $x^2 = -\beta_1$ *não tem nenhuma solução em* $\mathbb{F}$. *Obtém-se a seguinte álgebra*

$\mathbb{L}_{11}(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	e_2
$\mathbf{e_2}$	0	0	$\beta_1 e_1$
$\mathbf{e_3}$	0	0	0

, $\beta_1 \neq 0$

Observação 3.2.1 *As álgebras* $\mathbb{L}_9(\mathbb{F})$ *à* $\mathbb{L}_{11}(\mathbb{F})$ *são isomorfas, pois álgebras em* $\mathbb{L}_{11}(\mathbb{F})$ *podem ser reduzidas a* $\mathbb{L}_9(\mathbb{F})$ *por meio de transformação da base* $e_1^{'} = \beta_1 e_1$, $e_2^{'} = \beta_1 e_2$ e $e_3^{'} = e_3$.

Suponha que $\beta_2 \neq 0$.

Transformação 3.2.6 [1] *Seja a transformação da base* $e_1^{'} = \sqrt{\beta_1} e_1$, $e_2^{'} = (e_1 - e_2)\sqrt{\beta_1}$ *e* $e_3^{'} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} e_3$, *segue que os produtos de*

$$\left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \left\langle \sqrt{\beta_1} e_1, \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} e_3 \right\rangle = \sqrt{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \langle e_1, e_3 \rangle = e_2$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \left\langle (e_1 - e_2)\sqrt{\beta_1}, \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} e_3 \right\rangle = \frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta_1}} \langle e_2, e_3 \rangle - \frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\beta_1}} \langle e_1, e_3 \rangle \\ &= \langle e_2, e_3 \rangle - \langle e_1, e_3 \rangle = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 - e_2 = \beta_1 e_1 + (\beta_2 - 1) e_2 \end{aligned}$$

[1] Os cálculos feitos de forma independente

o que nos resulta em $\beta_2 = 1$ e como $\beta_1 \neq 0$, então a tabela 3.6 produz a seguinte álgebra

$\mathbb{L}_{12}(\mathbb{F})$, $\beta_1 \neq 0$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	e_2
$\mathbf{e_2}$	0	0	$\beta_1 e_1 + e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	0	0

Caso 1.2.1.2: Seja $\alpha_2 = 0$. Definimos:
Transformação 3.2.7 *A transformação da base como $e_1^{'} = e_1$, $e_2^{'} = e_2$ e $e_3^{'} = \frac{1}{\alpha_1} e_3$, o produto de $e_1^{'}$ e $e_3^{'}$ será igual a e_1, isso significa que $\alpha_1 = 1$ pois definimos o $\alpha_2 = 0$. Assim, a nossa tabela de multiplicação se reduz como segue*

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	e_1
$\mathbf{e_2}$	0	0	$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$

De 3.5 supomos que $\beta_2 = 0$, agora vamos supor que $\beta_2 \neq 0$.
Transformação 3.2.8 *Aplicando a transformação da base*

$$e_1^{'} = e_1, \qquad e_2^{'} = e_2 \qquad \text{e} \qquad e_3^{'} = \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) e_1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} e_2 + e_3$$

então, o produto de

$$\begin{aligned} \left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \left\langle e_1, \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) e_1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} e_2 + e_3 \right\rangle \\ &= \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) \langle e_1, e_1 \rangle - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_1, e_3 \rangle \end{aligned}$$

Como $\{e_1, e_2\}$ são os aniquiladores à direita, então $\left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = e_1$.
De maneira análoga, temos

$$\begin{aligned} \left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \left\langle e_2, \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) e_1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} e_2 + e_3 \right\rangle \\ &= \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) \langle e_2, e_1 \rangle - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \langle e_2, e_2 \rangle + \langle e_2, e_3 \rangle \end{aligned}$$

e pelos aniquiladores à direita, tem-se

$$\left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

E por fim, tem-se que o produto de

$$\begin{aligned}
\left\langle e_3^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) e_1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} e_2 + e_3, \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) e_1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} e_2 + e_3 \right\rangle \\
&= \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right)^2 \langle e_1, e_1\rangle - \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) \frac{\gamma_2}{\beta_2} \langle e_1, e_2\rangle + \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) \langle e_2, e_3\rangle \\
&\quad - \frac{\gamma_2}{\beta_2}\left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) \langle e_2, e_1\rangle + \left(\frac{\gamma_2}{\beta_2}\right)^2 \langle e_2, e_2\rangle - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \langle e_2, e_3\rangle \\
&\quad + \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) \langle e_3, e_1\rangle - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \langle e_3, e_2\rangle + \langle e_3, e_3\rangle
\end{aligned}$$

aplicando os aniquiladores obtemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle e_3^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) \langle e_1, e_3\rangle - \frac{\gamma_2}{\beta_2} \langle e_2, e_3\rangle + \langle e_3, e_3\rangle \\
&= \left(\frac{\gamma_1\beta_1}{\beta_2} - \gamma_1\right) e_1 - \frac{\gamma_2}{\beta_2} (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 \\
&= \frac{\gamma_1\beta_1 e_1}{\beta_2} - \gamma_1 e_1 - \frac{\gamma_2\beta_1 e_1}{\beta_2} - \gamma_2 e_2 + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 \\
&= \frac{\beta_1}{\beta_2}(\gamma_1 - \gamma_2) e_1
\end{aligned}$$

Se $\left\langle e_3^{'}, e_3^{'} \right\rangle = 0$ *isso significa que* $\frac{\beta_1}{\beta_2}(\gamma_1 - \gamma_2)e_1 = 0$, *então* $\frac{\beta_1}{\beta_2} = 0$, *ou* $(\gamma_1 - \gamma_2)e_1 = 0$. *Lembre que* β_1 *e* β_2 *são diferentes de zero, como definimos acima. Portanto,* $(\gamma_1 - \gamma_2)e_1 = 0$ *e sendo* e_1 *vetor da base, então é linearmente independente, a combinação linear é trivial* $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ *o que reduz a nossa tabela 3.4 para*

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	e_1
$\mathbf{e_2}$	0	0	$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	0	0

$$, \quad \beta_2 \neq 0 \tag{3.8}$$

Então, agora temos dois casos a considerar $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 1)$ *e* $(\beta_1, \beta_2) = (0, 1)$. *Se* $(\beta_1, \beta_2) \neq (0, 1)$ *então existem números* $A, B \in \mathbb{F}$ *tais que*

$$AB(\beta_2 - 1) - B^2\beta_1 \neq 0$$

Transformação 3.2.9 *A composição da transformação da base* $e_1^{'} = Ae_1 + Be_2$, $e_2^{'} = e_2$ *e* $e_3^{'} = e_3$ *segue os produtos*

$$\begin{aligned}
\left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \langle Ae_1 + Be_2, e_3\rangle = A\langle e_1, e_3\rangle + B\langle e_2, e_3\rangle \\
&= Ae_1 + B\beta_1 e_1 + B\beta_2 e_2 = (A + B\beta_1) e_1 + B\beta_2 e_2
\end{aligned}$$

Os produtos são iguais a da tabela 3.8, então prosseguimos com

Transformação 3.2.10 *A transformação* $e_1^{''} = e_1^{'}$, $e_2^{''} = \left(1 + \frac{B}{A}\beta_1\right) e_1^{'} + \left[B\beta_2 - \left(B + \frac{B^2}{A}\beta_1\right)\right] e_2^{'}$ *e* $e_3^{''} = e_3^{'}$. *Daí, temos que o produto de*

$$\left\langle e_1^{''}, e_3^{''} \right\rangle = \left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle = (A + B\beta_1)\, e_1 + B\beta_2 e_2$$

e

$$\begin{aligned}
\left\langle e_2^{''}, e_3^{''} \right\rangle &= \left\langle \left(1 + \frac{B}{A}\beta_1\right) e_1^{'} + \left[B\beta_2 - \left(B + \frac{B^2}{A}\beta_1\right)\right] e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle \\
&= \left(1 + \frac{B}{A}\beta_1\right) \left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle + \left[B\beta_2 - \left(B + \frac{B^2}{A}\beta_1\right)\right] \left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle \\
&= \left(1 + \frac{B}{A}\beta_1\right) (A + B\beta_1)\, e_1 + \left(1 + \frac{B}{A}\beta_1\right) B\beta_2 e_2 \\
&\quad + \left(B\beta_2 - B - \frac{B^2}{A}\beta_1\right) (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) \\
&= \left(A + B\beta_1 + B\beta_1 + \frac{B^2}{A}\beta_1^2 + B\beta_1\beta_2 - B\beta_1 + \frac{B^2}{A}\beta_1^2\right) e_1 \\
&\quad + \left(B\beta_2 + \frac{B^2}{A}\beta_1\beta_2 + B\beta_2^2 - B\beta_2 + \frac{B^2}{A}\beta_1\beta_2\right) e_2 \\
&= (A + B\beta_1 + B\beta_1\beta_2)\, e_1 + B\beta_2^2 e_2
\end{aligned}$$

Para que $\left\langle e_2^{''}, e_3^{''} \right\rangle$ *seja igual a* $\langle e_2, e_3 \rangle$, *devemos ter* $A + B\beta_1 = 0$ *e* $B\beta_2 = 1$ *percebe-se que essas duas condições resulta em* $\left\langle e_2^{''}, e_3^{''} \right\rangle = (A + B\beta_1)\, e_1 + B\beta_2 e_2 = e_2$ *o que nos leva à nossa tabela 3.8, onde não pode ocorrer outra álgebra, pois já foi considerado. Além disso,* $(\beta_1, \beta_2) = (0, 1)$ *produz a seguinte álgebra*

$\mathbb{L}_{13}(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	e_1
$\mathbf{e_2}$	0	0	e_2
$\mathbf{e_3}$	0	0	0

Caso 1.2.2: Agora, vamos considerar que $det(\mathbf{A_1}) = 0$. Neste caso, teremos a seguinte tabela de multplicação:

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$t_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)$
$\mathbf{e_2}$	0	0	$t_2(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)$
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$

(3.9)

Na tabela 3.9, os vetores e_1 e e_2 são simétricos podemos assumir $t_1 \neq 0$.

Transformação 3.2.11 *Seja* $e_1^{'} = e_1$, $e_2^{'} = \frac{t_2}{t_1} e_1 - e_2$ *e* $e_3^{'} = e_3$ *a transformação da base* *e segue os produtos das transformações da base*

$$\left\langle e_1^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = t_1\left(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\right)$$

$$\begin{aligned}\left\langle e_2^{'}, e_3^{'}\right\rangle &= \left\langle \frac{t_2}{t_1}e_1 - e_2, e_3\right\rangle = \frac{t_2}{t_1}\langle e_1, e_3\rangle - \langle e_1, e_3\rangle = t_2\left(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\right) - t_2\left(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2\right)\\ &= t_2\left[\left(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\right) - \left(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2\right)\right] = t_2\left[\left(\alpha_1 - \beta_1\right)e_1 + \left(\alpha_2 - \beta_2\right)e_2\right] = 0.\end{aligned}$$

Veja que $\left\langle e_2^{'}, e_3^{'}\right\rangle = 0$, pois as linhas são simétricas e o nosso determinante é igual a zero. Enquanto que o produto de $\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle$ permanece o mesmo, a nossa tabela reduz-se a seguinte tabela de multiplicação:

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$t_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)$
$\mathbf{e_2}$	0	0	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$

(3.10)

Transformação 3.2.12 *Aplicando* $e_1^{'} = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$, $e_2^{'} = e_2$ *e* $e_3^{'} = e_3$ *como a transformação da base, cujo produtos*

$$\left\langle e_1^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \langle \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2, e_3\rangle = \gamma_1\langle e_1, e_3\rangle + \gamma_2\langle e_2, e_3\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = \gamma_1 t_1\left(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\right)$$

que deve ser igual a $t_1\left(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\right)$ *então* $\gamma_1 = 1$. *E* $\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 = e_1$ *veja que* $\gamma_1 = 1$ *e* $\gamma_2 = 0$. *Assim, da tabela 3.9 obtemos, seguinte da tabela da multiplicação:*

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$t_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)$
$\mathbf{e_2}$	0	0	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	e_1

(3.11)

Transformação 3.2.13 *Seja* $e_1^{'} = e_1$, $e_2^{'} = \alpha_2 e_2$ *e* $e_3^{'} = e_3$ *a transformação da base e o produto de*

$$\left\langle e_1^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = t_1\left(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\right) = t_1\alpha_1 e_1 + t_1\alpha_2 e_2$$

o produto de $\left\langle e_2^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \alpha_2\langle e_2, e_3\rangle$, *mas se percebe que* $\langle e_2, e_3\rangle = 0$, *portanto, pelo isomorfismo posso tomar* $\alpha_2 = 1$ *e veja também que* $\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle = e_1$ *o que reduz a tabela 3.11 para* *a seguinte tabela da multiplicação:*

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$t_1(\alpha_1 e_1 + e_2)$
$\mathbf{e_2}$	0	0	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	e_1

(3.12)

Na tabela 3.12 vamos considerar dois casos:
Caso 1.2.2.1: Considere que $\alpha_1 = 0$, obteremos a seguinte álgebra:

$\mathbb{L}_{14}(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	e_2
$\mathbf{e_2}$	0	0	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	e_1

(3.13)

Caso 1.2.2.2: Considere agora que $\alpha_1 \neq 0$.

Transformação 3.2.14 *Tome* $e_1^{'} = \frac{1}{\alpha_1^2}e_1$, $e_2^{'} = \frac{1}{\alpha_1^3}e_2$, $e_3^{'} = \frac{1}{\alpha_1}e_3$ *a transformação da base e cujo produto é*

$$\left\langle e_3^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\alpha_1}e_3, \frac{1}{\alpha_1}e_3 \right\rangle = \frac{1}{\alpha_1^3}\left\langle e_3, e_3 \right\rangle = \frac{1}{\alpha_1^3}e_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1.$$

Obtém-se de 3.12 a seguinte álgebra

$\mathbb{L}_{15}(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$e_1 + e_2$
$\mathbf{e_2}$	0	0	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	e_1

Concluímos que para o caso em que a $\dim Ann_r\mathbb{L} = 2$ encontramos as álgebras de $\mathbb{L}_8(\mathbb{F})$ à $\mathbb{L}_{15}(\mathbb{F})$. A álgebra $\mathbb{L}_8(\mathbb{F})$ é encontrada quando a $\dim\mathbb{L}^2 = 1$, ou seja, $\{e_1\}$ é a base de $\mathbb{L}$, enquanto demais, $\mathbb{L}_9(\mathbb{F})$ à $\mathbb{L}_{15}(\mathbb{F})$ foram encontradas com a dimensão do $\dim\mathbb{L}^2 = 2$, isto é, $\{e_1, e_2\}$ são a base de $\mathbb{L}$.

3.3 As álgebras obtidas quando dim $Ann_r\mathbb{L} = 1$

Caso 2: Suponha que $\dim Ann_r\mathbb{L} = 1$ e $\{e_1\}$ sua base. Se $\{e_1, e_2, e_3\}$ for a base de $\mathbb{L}$ ocorre a seguinte tabela de multiplicação:

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$	$\alpha_4 e_1 + \alpha_5 e_2 + \alpha_6 e_3$
$\mathbf{e_2}$	0	$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$	$\beta_4 e_1 + \beta_5 e_2 + \beta_6 e_3$
$\mathbf{e_3}$	0	$\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$	$\gamma_4 e_1 + \gamma_5 e_2 + \gamma_6 e_3$

Aplicando a identidade de Leibniz, pois ele anula várias produtos, com isso vamos simplificar a nossa tabela acima. Considerando alguns passos:

$$\langle e_1, \langle e_1, e_2\rangle\rangle = \langle\langle e_1, e_1\rangle, e_2\rangle - \langle\langle e_1, e_2\rangle, e_1\rangle$$

Perceba que, pelo aniquilador o lado direito se anula, daí

$$\begin{aligned}
\langle e_1, \langle e_1, e_2\rangle\rangle &= \langle e_1, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3\rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1\rangle + \alpha_2 \langle e_1, e_2\rangle + \alpha_3 \langle e_1, e_3\rangle \\
&= \alpha_2(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) + \alpha_3(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \\
&= (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4)e_1 + (\alpha_2^2 + \alpha_3\alpha_5)e_2 + (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_5)e_3 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2^2 + \alpha_3\alpha_5 = 0 \\ \alpha_3(\alpha_2 + \alpha_5) = 0 \end{cases}$$

A resolução do sistema acima, está definida quando $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, então $\langle e_1, e_2\rangle = \alpha_1 e_1$.

$$\begin{aligned}
\langle e_1, \langle e_1, e_3\rangle\rangle &= \langle e_1, \alpha_4 e_1 + \alpha_5 e_2 + \alpha_6 e_3\rangle = \alpha_4 \langle e_1, e_1\rangle + \alpha_5 \langle e_1, e_2\rangle + \alpha_6 \langle e_1, e_3\rangle \\
&= \alpha_5\alpha_1 e_1 + \alpha_6(\alpha_4 e_1 + \alpha_5 e_2 + \alpha_6 e_3) \\
&= (\alpha_5\alpha_1 + \alpha_6\alpha_4)e_1 + \alpha_6\alpha_5 e_2 + \alpha_6^2 e_3 = 0
\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{cases} \alpha_5\alpha_1 + \alpha_6\alpha_4 = 0 \\ \alpha_6\alpha_5 = 0 \\ \alpha_6^2 = 0 \end{cases}$$

A resolução do sistema acima, está definida quando $\alpha_5 = \alpha_6 = 0$, então $\langle e_1, e_3\rangle = \alpha_4 e_1$. Vamos pular os passos (iii) e (iv), pois a maneira de calcular $\langle e_2, \langle e_2, e_2\rangle\rangle$ e $\langle e_3, \langle e_3, e_3\rangle\rangle$ é a mesma dos itens (i) e (ii), daí obtém-se respectivamente, que $\beta_2 = \beta_3 = 0$, e $\gamma_5 = \gamma_6 = 0$, portanto, $\langle e_2, e_2\rangle = \beta_1 e_1$ e $\langle e_3, e_3\rangle = \gamma_1 e_1$.

$$\langle e_2, \langle e_2, e_3\rangle\rangle = \langle\langle e_2, e_2\rangle, e_3\rangle - \langle\langle e_2, e_3\rangle, e_2\rangle$$

Vamos resolver a identidade em partes começando do lado esquerdo e depois comparar os resultados

$$\begin{aligned}\langle e_2, \langle e_2, e_3\rangle\rangle &= \langle e_2, \beta_4 e_1 + \beta_5 e_2 + \beta_6 e_3\rangle = \beta_4\langle e_2, e_1\rangle + \beta_5\langle e_2, e_2\rangle + \beta_6\langle e_2, e_3\rangle \\ &= \beta_5\beta_1 e_1 + \beta_6(\beta_4 e_1 + \beta_5 e_2 + \beta_6 e_3) \\ &= (\beta_5\beta_1 + \beta_6\beta_4)e_1 + \beta_6\beta_5 e_2 + \beta_6^2 e_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\langle e_2, e_2\rangle, e_3\rangle - \langle\langle e_2, e_3\rangle, e_2\rangle &= \langle\beta_1 e_1, e_3\rangle - \langle\beta_4 e_1 + \beta_5 e_2 + \beta_6 e_3, e_2\rangle \\ &= \beta_1\langle e_1, e_3\rangle - \beta_4\langle e_1, e_2\rangle - \beta_5\langle e_2, e_2\rangle - \beta_6\langle e_3, e_2\rangle \\ &= (\beta_1\alpha_1 - \beta_4\alpha_1 - \beta_6\gamma_1)e_1 - \beta_6\gamma_2 e_2 - \beta_6\gamma_3 e_3\end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{cases} \beta_5\beta_1 + \beta_6\beta_4 = \beta_1\alpha_4 - \beta_4\alpha_1 - \beta_5\beta_1 - \beta_6\gamma_1 \\ \beta_6\beta_5 = -\beta_6\gamma_2 \Rightarrow \beta_5 = -\gamma_2 \\ \beta_6^2 = -\beta_6\gamma_3 \Rightarrow \beta_6 = -\gamma_3 \end{cases}$$

A resolução do sistema acima, está definida quando $\beta_5 = -\gamma_2$ e $\beta_6 = -\gamma_3$ então $\langle e_2, e_3\rangle = \beta_4 e_1 - \gamma_2 e_2 - \gamma_3 e_3$.
Desde que $Ann_r\mathbb{L}$ é um ideal de $\mathbb{L}$, as seguintes multiplicações podem ocorrer:

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	$\alpha_1 e_1$	$\alpha_3 e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	$\alpha_2 e_1$	$\gamma_1 e_1 - \beta_2 e_2 - \beta_3 e_3$
$\mathbf{e_3}$	0	$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$	$\alpha_4 e_1$

Caso 2.1: Deixe $\dim\mathbb{L}^2 = 2$. Então $(\beta_2, \beta_3) \neq (0,0)$, caso contrário $\dim\mathbb{L}^2 = 1$. Uma vez que e_1 e e_2 são simétricos pode-se definir $\beta_2 \neq 0$.
Transformação 3.3.1 [2] *Desse modo, definimos* $e_1' = e_1$, $e_2' = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ *e* $e_3' = \frac{1}{\beta_2}e_3$, *como transformação da base. Daí temos que o produto de*

$$\begin{aligned}\left\langle e_1', e_2'\right\rangle &= \langle e_1, \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3\rangle = \beta_2\langle e_1, e_2\rangle + \beta_3\langle e_1, e_3\rangle \\ &= \beta_2\alpha_1 e_1 + \beta_3\alpha_3 e_1 = (\beta_2\alpha_1 + \beta_3\alpha_3)e_1\end{aligned}$$

Tomando $(\beta_2\alpha_1 + \beta_3\alpha_3)e_1 = \alpha_1 e_1$, *então teremos que* $\beta_2 = 1$ *e tomando* $\beta_3 = 0$, *portanto,*

[2] Os cálculos feitos de forma independente

ocorrem as seguintes multiplicações:

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	$\alpha_1 e_1$	$\alpha_3 e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	$\alpha_2 e_1$	$\gamma_1 e_1 - e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	$\beta_1 e_1 + e_2$	$\alpha_4 e_1$

(3.14)

Vamos utilizar a identidade de Leibniz, a fim de encontrar algumas igualdades que nos ajudam a simplificar a nossa tabela de multiplicação[3]

$$\begin{aligned}
\langle\langle e_1, e_3\rangle, e_2\rangle &= \langle\langle e_1, e_2\rangle, e_3\rangle + \langle e_1, \langle e_3, e_2\rangle\rangle \\
\langle \alpha_3 e_1, e_2\rangle &= \langle \alpha_1 e_1, e_3\rangle + \langle e_1, \beta_1 e_1 + e_2\rangle \\
\alpha_1\alpha_3 e_1 &= \alpha_1\alpha_3 e_1 + \alpha_1 e_1 \\
0 &= \alpha_1 e_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\langle e_2, e_3\rangle, e_2\rangle &= \langle\langle e_2, e_2\rangle, e_3\rangle + \langle e_2, \langle e_3, e_2\rangle\rangle \\
\langle \gamma_1 e_1 - e_2, e_2\rangle &= \langle \alpha_2 e_1, e_3\rangle + \langle e_2, \beta_1 e_1 + e_2\rangle \\
\gamma_1\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_1 &= \alpha_2\alpha_3 e_1 + \alpha_2 e_1 \\
\gamma_1\alpha_1 e_1 - 2\alpha_2 e_1 - \alpha_2\alpha_3 e_1 &= 0 \\
(\gamma_1\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3) e_1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\langle e_3, e_2\rangle, e_3\rangle &= \langle\langle e_3, e_3\rangle, e_2\rangle + \langle e_3, \langle e_2, e_3\rangle\rangle \\
\langle \beta_1 e_1 + e_2, e_3\rangle &= \langle \alpha_4 e_1, e_2\rangle + \langle e_3, \gamma_1 e_1 - e_2\rangle \\
\beta_1\alpha_3 e_1 + \gamma_1 e_1 - e_2 &= \alpha_4\alpha_1 e_1 - \beta_1 e_1 - e_2 \\
\beta_1\alpha_3 e_1 + \gamma_1 e_1 - \alpha_4\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_1 &= 0 \\
(\beta_1\alpha_3 + \gamma_1 + \beta_1) e_1 &= 0
\end{aligned}$$

As três identidades acima nos dão o seguinte resultado

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2(2 + \alpha_3) = 0 \\ \beta_1\alpha_3 + \beta_1 + \gamma_1 = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

Caso 2.1.1: Vamos supor que em 3.14 $\alpha_2 \neq 0$.

[3] Os cálculos feitos de forma independente

Transformação 3.3.2 [4] *Seja* $e_1^{'} = \alpha_2 e_1, e_2^{'} = e_2$ *e* $e_3^{'} = \frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2} e_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2} e_2 + e_3$.

$$\begin{aligned}
\left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \left\langle \alpha_2 e_1, \frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2} e_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2} e_2 + e_3 \right\rangle = \beta_1 \langle e_1, e_2 \rangle - \alpha_2 \langle e_1, e_3 \rangle \\
&= \beta_1 \alpha_1 e_1 + \alpha_2 \alpha_3 e_1 = \alpha_2 \alpha_3 e_1, \qquad \text{pois} \qquad \alpha_1 = 0
\end{aligned}$$

Veja que se $\left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \alpha_3 e_1$ *então temos que* $\alpha_2\alpha_3 e_1 = \alpha_3 e_1$ *vamos ter* $\alpha_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \left\langle e_2, \frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2} e_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2} e_2 + e_3 \right\rangle = -\frac{\beta_1}{\alpha_2} \langle e_2, e_2 \rangle + \langle e_2, e_3 \rangle \\
&= \beta_1 e_1 + \gamma_1 e_1 - e_2 = (\beta_1 + \gamma_1) e_1 - e_2
\end{aligned}$$

De modo análogo, se tomarmos $\left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \gamma_1 e_1 - e_2$ *então tem-se que* $(\beta_1 + \gamma_1)e_1 - e_2 = \gamma_1 e_1 - e_2$ *vamos ter* $\beta_1 = 0$.

$$\begin{aligned}
\left\langle e_3^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \left\langle \frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2} e_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2} e_2 + e_3, \frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2} e_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2} e_2 + e_3 \right\rangle \\
&= -\left(\frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2} \right) \frac{\beta_1}{\alpha_2} \langle e_1, e_2 \rangle + \left(\frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2} \right) \langle e_1, e_3 \rangle + \left(\frac{\beta_1}{\alpha_2} \right)^2 \langle e_2, e_2 \rangle \\
&\quad -\frac{\beta_1}{\alpha_2} \langle e_2, e_3 \rangle + \frac{\beta_1}{\alpha_2} \langle e_3, e_2 \rangle + \langle e_3, e_3 \rangle \\
&= -\left(\frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2} \right) \frac{\beta_1}{\alpha_2} \alpha_1 e_1 + \left(\frac{\alpha_2\alpha_4 - \beta_1^2}{2\alpha_2} \right) \alpha_3 e_1 + \left(\frac{\beta_1}{\alpha_2} \right)^2 \alpha_2 e_1 \\
&\quad -\frac{\beta_1}{\alpha_2} (\gamma_1 e_1 - e_2) + \frac{\beta_1}{\alpha_2} (\beta_1 e_1 + e_2) + \alpha_4 e_1 \\
&= 0 + \left(\frac{\alpha_2\alpha_4}{2\alpha_2} \right) (-2) e_1 + \alpha_4 e_1 \\
&= -\alpha_4 e_1 + \alpha_4 e_1 = 0
\end{aligned}$$

Em 3.15 e nos produtos da transformação das bases obtemos $\alpha_1 = \gamma_1 = \beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$ esses resultados produzem a seguinte álgebra:

$\mathbb{L}_1(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$-2e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	e_1	$-e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	e_2	0

Caso 2.1.2: Vamos assumir agora que $\alpha_2 = 0$ então teremos a seguinte tabela de multi-

[4] Os cálculos feitos de forma independente

plicação

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	$\alpha_1 e_1$	$\alpha_3 e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	0	$-\beta_1(1+\alpha_3)e_1 - e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	$\beta_1 e_1 + e_2$	$\alpha_4 e_1$

Perceba que de 3.14, se $(\alpha_3, \alpha_4) = (0,0)$ obteremos a álgebra de Lie. Portanto, vamos assumir que $(\alpha_3, \alpha_4) \neq (0,0)$.

Transformação 3.3.3 *Dada a seguinte transformação da base* $e_1^{'} = e_1, e_2^{'} = \beta_1 e_1 + e_2$ *e* $e_3^{'} = e_3$*, o produto de*

$$\left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \alpha_3 e_1 \qquad e \qquad \left\langle e_3^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = \alpha_4 e_1$$

$$\left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \langle \beta_1 e_1 + e_2, e_3 \rangle = \beta_1 \alpha_3 e_1 - \beta_1(1+\alpha_3)e_1 - e_2$$

se $\beta_1 \alpha_3 e_1 - \beta_1(1+\alpha_3)e_1 - e_2 = -\beta_1(1+\alpha_3)e_1 - e_2$*, então* $\beta_1 = 0$.

$$\left\langle e_3^{'}, e_2^{'} \right\rangle = \langle e_3, \beta_1 e_1 + e_2 \rangle = \langle e_3, e_2 \rangle = e_2$$

como $\beta_1 = 0$*. Temos* $\left\langle e_3^{'}, e_2^{'} \right\rangle = e_2$*, o que resulta na seguinte tabela de multiplicação*

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$\alpha_3 e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	0	$-e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	e_2	$\alpha_4 e_1$

Transformação 3.3.4 [5] *Seja* $e_1^{'} = e_1, e_2^{'} = e_2$ *e* $e_3^{'} = e_3 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} e_1$ *a transformção da base, se* $\alpha_3 \neq 0$*, segue o produto de*

$$\left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \left\langle e_1, e_3 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} e_1 \right\rangle = \langle e_1, e_3 \rangle - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \langle e_1, e_1 \rangle = \alpha_3 e_1$$

$$\left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \left\langle e_2, e_3 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} e_1 \right\rangle = \langle e_2, e_3 \rangle - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \langle e_2, e_1 \rangle = -e_2$$

$$\left\langle e_3^{'}, e_2^{'} \right\rangle = \left\langle e_3 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} e_1, e_2 \right\rangle = \langle e_3, e_2 \rangle - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \langle e_3, e_1 \rangle = e_2$$

[5] Os cálculos feitos de forma independente

$$\begin{aligned}
\left\langle e_3^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \left\langle e_3 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3}e_1, e_3 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3}e_1 \right\rangle = \langle e_3, e_3 \rangle - \frac{\alpha_4}{\alpha_3}\langle e_1, e_3 \rangle \\
&= \alpha_4 e_1 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3}\alpha_3 e_1 = \alpha_4 e_1 - \alpha_4 e_1 = 0
\end{aligned}$$

Daí, obtemos a seguinte álgebra

$\mathbb{L}_2(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$\alpha_3 e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	0	$-e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	e_2	0

, $\alpha_3 \neq 0$

Se $\alpha_3 = 0$, então $\alpha_4 \neq 0$ segue:

Transformação 3.3.5 *Seja* $e_1^{'} = \alpha_4 e_1, \quad e_2^{'} = e_2 \quad e \quad e_3^{'} = e_3$ *a transformção da base*

$$\left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = -e_1 \quad \left\langle e_3^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = e_2 \quad e \quad \left\langle e_3^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = \alpha_4 e_2$$

$$\left\langle e_1^{'}, e_3^{'} \right\rangle = \langle \alpha_4 e_1, e_3 \rangle = \alpha_4 \alpha_3 e_1$$

pois, veja que se compararmos $\alpha_3 e_1 = \alpha_4 \alpha_3 e_1$ *portanto* $\alpha_4 = 1$. *Obtemos a seguinte álgebra:*

$\mathbb{L}_3(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	0	$-e_2$
$\mathbf{e_3}$	0	e_2	e_1

Caso 2.2: Deixe $\dim\mathbb{L}^2 = 1$. Assim, temos a seguinte tabela de multiplicação

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	$\alpha_1 e_1$	$\alpha_3 e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	$\alpha_2 e_1$	$\gamma_1 e_1$
$\mathbf{e_3}$	0	$\beta_1 e_1$	$\alpha_4 e_1$

(3.16)

Aplicando a identidade Leibniz

$$\begin{aligned}
\langle \langle e_2, e_2 \rangle, e_3 \rangle &= \langle \langle e_2, e_3 \rangle, e_2 \rangle + \langle e_2, \langle e_2, e_3 \rangle \rangle \\
\langle \alpha_2 e_1, e_3 \rangle &= \langle \gamma_1 e_1, e_2 \rangle + \langle e_1, \gamma_1 e_1 \rangle \\
\alpha_2 \langle e_1, e_3 \rangle &= \gamma_1 \langle e_1, e_2 \rangle + \gamma_1 \langle e_1, e_1 \rangle \\
\alpha_2 \alpha_3 e_1 &= \gamma_1 \alpha_3 e_1
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\langle\langle e_3, e_2\rangle, e_3\rangle &= \langle\langle e_3, e_3\rangle, e_2\rangle + \langle e_3, \langle e_2, e_3\rangle\rangle \\
\langle \beta_1 e_1, e_3\rangle &= \langle \alpha_4 e_1, e_2\rangle + \langle e_3, \gamma_1 e_1\rangle \\
\beta_1 \langle e_1, e_3\rangle &= \alpha_4 \langle e_1, e_2\rangle + \gamma_1 \langle e_1, e_1\rangle \\
\beta_1 \alpha_3 e_1 &= \alpha_4 \alpha_1 e_1
\end{aligned}
$$

$$
Ou\, seja, obtemos \quad \begin{cases} \alpha_2\alpha_3 = \gamma_1\alpha_3 \\ \beta_1\alpha_3 = \alpha_4\alpha_1 \end{cases} \tag{3.17}
$$

Caso 2.2.1: Tome $(\alpha_1, \alpha_3) = (0, 0)$. Então de 3.17 teremos a seguinte tabela de multiplicação

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	$\alpha_2 e_1$	$\gamma_1 e_1$
$\mathbf{e_3}$	0	$\beta_1 e_1$	$\alpha_4 e_1$

(3.18)

Se $(\alpha_2, \alpha_4, \beta_1 + \gamma_1) = (0, 0, 0)$, então $\mathbb{L}$ é uma álgebra de Lie. Portanto, vamos assumir que $(\alpha_2, \alpha_4, \beta_1 + \gamma_1) \neq (0, 0, 0)$.

Transformação 3.3.6 *Seja* $e_1' = e_1, \quad e_2' = Ae_2 + Be_3 \quad e \quad e_3' = e_3$ *a transformação da base, com* $A \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
\left\langle e_2', e_2' \right\rangle &= \langle Ae_2 + Be_3, Ae_2 + Be_3\rangle \\
&= A^2 \langle e_2, e_2\rangle + AB \langle e_2, e_3\rangle + BA \langle e_3, e_2\rangle + B^2 \langle e_3, e_3\rangle \\
&= A^2\alpha_2 e_1 + AB\gamma_1 e_1 + BA\beta_1 e_1 + B^2\alpha_4 e_1 \\
&= \left[A^2\alpha_2 + AB(\gamma_1 + \beta_1) + B^2\alpha_4\right] e_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle e_2', e_3' \right\rangle &= \langle Ae_2 + Be_3, e_3\rangle = A\langle e_2, e_3\rangle + B\langle e_3, e_3\rangle = A\gamma_1 e_1 + B\alpha_4 e_1 \\
&= (A\gamma_1 + B\alpha_4) e_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle e_3', e_2' \right\rangle &= \langle e_3, Ae_2 + Be_3\rangle = A\langle e_3, e_2\rangle + B\langle e_3, e_3\rangle = A\beta_1 e_1 + B\alpha_4 e_1 \\
&= (A\beta_1 + B\alpha_4) e_1
\end{aligned}
$$

$$
\left\langle e_3', e_3' \right\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = \alpha_4 e_1
$$

daí temos a seguinte tabela de multiplicação

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	$[A^2\alpha_2 + AB(\gamma_1+\beta_1) + B^2\alpha_4]\, e_1$	$(A\gamma_1 + B\alpha_4)e_1$
$\mathbf{e_3}$	0	$(A\beta_1 + B\alpha_4)e_1$	$\alpha_4 e_1$

A condição $(\alpha_2, \alpha_4, \beta_1+\gamma_1) \neq (0,0,0)$ implica que existem dois números $A, B \in \mathbb{F}$ tais que

$$A^2\alpha_2 + B^2\alpha_4 + AB(\gamma_1+\beta_1) \neq 0.$$

Suponhamos que $\alpha_2 \neq 0$ em 3.17.

Transformação 3.3.7 *Dada* $e_1^{'} = \alpha_2 e_1, \quad e_2^{'} = e_2 \quad e \quad e_3^{'} = e_3 - \dfrac{\beta_1}{\alpha_2} e_2$ *como sendo a transformação da base*

$$\left\langle e_2^{'}, e_2^{'} \right\rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \left[A^2\alpha_2 + AB(\gamma_1+\beta_1) + B^2\alpha_4\right] e_1$$

$$\begin{aligned}
\left\langle e_2^{'}, e_3^{'} \right\rangle &= \left\langle e_2, e_3 - \frac{\beta_1}{\alpha_2} e_2 \right\rangle = \langle e_2, e_3 \rangle - \frac{\beta_1}{\alpha_2} \langle e_2, e_2 \rangle \\
&= (A\gamma_1 + B\alpha_4)e_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}\left[A^2\alpha_2 + AB(\gamma_1+\beta_1) + B^2\alpha_4\right] e_1 \\
&= \left(A\gamma_1 + B\alpha_4 - A^2\beta_1 - \frac{AB(\gamma_1+\beta_1)\beta_1}{\alpha_2} - \frac{B^2\alpha_4\beta_1}{\alpha_2} \right) e_1
\end{aligned}$$

temos que $\left(A\gamma_1 + B\alpha_4 - A^2\beta_1 - \frac{AB(\gamma_1+\beta_1)\beta_1}{\alpha_2} - \frac{B^2\alpha_4\beta_1}{\alpha_2} \right) e_1 = (A\gamma_1 + B\alpha_4)e_1$, *então* $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$ *e* $\alpha_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
\left\langle e_3^{'}, e_2^{'} \right\rangle &= \left\langle e_3 - \frac{\beta_1}{\alpha_2} e_2, e_2 \right\rangle = \langle e_3, e_2 \rangle - \frac{\beta_1}{\alpha_2} \langle e_2, e_2 \rangle \\
&= (A\beta_1 + B\alpha_4)e_1 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}\left[A^2\alpha_2 + AB(\gamma_1+\beta_1) + B^2\alpha_4\right] e_1 \\
&= \left(A\beta_1 + B\alpha_4 - A^2\beta_1 - \frac{AB(\gamma_1+\beta_1)\beta_1}{\alpha_2} - \frac{B^2\alpha_4\beta_1}{\alpha_2} \right) e_1 \\
&= B\alpha_4 e_1
\end{aligned}$$

Comparação com a tabela, tem-se que $(A\beta_1 + B\alpha_4)e_1 = 0$ *nos dá que* $\beta_1 = B = 0$ *pois* *definimos* $\alpha_4 \neq 0$

$$\begin{aligned}\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle &= \left\langle e_3 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2, e_3 - \frac{\beta_1}{\alpha_2}e_2\right\rangle \\ &= \langle e_3, e_3\rangle - \frac{\beta_1}{\alpha_2}\langle e_3, e_2\rangle - \frac{\beta_1}{\alpha_2}\langle e_2, e_3\rangle + \frac{\beta_1^2}{\alpha_2^2}\langle e_2, e_2\rangle \\ &= \alpha_4 e_1 - \frac{\beta_1^2}{\alpha_2}e_1 - \frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_2}e_1 + \frac{\beta_1^2}{\alpha_2}e_1 = (\alpha_4 - \frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_2})e_1\end{aligned}$$

assim, $\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \alpha_4 e_1$*, pois vimos em* $\left\langle e_2^{'}, e_3^{'}\right\rangle$ *que* $\beta_1 = 0$ *e em* $\left\langle e_2^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \gamma_1 e_1$ *e daí segue a seguinte tabela de multiplicação:*

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	e_1	$\gamma_1 e_1$
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\alpha_4 e_1$

(3.19)

Quando $(\alpha_4, \gamma_1) \neq (0,0)$ teremos uma álgebra com divisão. Se $\alpha_4 = 0$ em 3.18, então $e_2 - \frac{1}{\gamma_1}e_3 \in Ann_r(\mathbb{L})$ o que seria um absurdo, pois contrária a dim$Ann_r(\mathbb{L}) = 1$. Portanto, vamso assumir $\alpha_4 \neq 0$. O que nos leva a considerar os seguintes casos:

Caso 2.2.1.1: Vamos supor $\gamma_1 = 0$. Resulta na seguinte tabela de multiplicação

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	e_1	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\alpha_4 e_1$

, $\alpha_4 \neq 0$ (3.20)

Caso 2.2.1.1.A: Suponha $\mathbb{F}^2 = \mathbb{F}$. Então a equação $x^2 = \alpha_4$ tem solução em $\mathbb{F}$.

Transformação 3.3.8 [6] *Seja* $e_1^{'} = \alpha_1 e_1$, $e_2^{'} = e_1 + e_3$ *e* $e_3^{'} = e_1 + \sqrt{\alpha_4}e_2$ *a transformação da base e o produto de*

$$\left\langle e_2^{'}, e_2^{'}\right\rangle = \langle e_1 + e_3, e_1 + e_3\rangle = \langle e_1, e_1\rangle + \langle e_1, e_3\rangle + \langle e_3, e_1\rangle + \langle e_3, e_3\rangle = \alpha_4 e_1 \Rightarrow \alpha_4 = 1$$

e

$$\begin{aligned}\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle &= \langle e_1 + \sqrt{\alpha_4}e_2, e_1 + \sqrt{\alpha_4}e_2\rangle \\ &= \langle e_1, e_1\rangle + \sqrt{\alpha_4}\langle e_1, e_2\rangle + \sqrt{\alpha_4}\langle e_2, e_1\rangle + \alpha_4\langle e_2, e_2\rangle \\ &= 0 + \sqrt{\alpha_4}\cdot 0 + \sqrt{\alpha_4}\cdot 0 + \alpha_4 e_1 = \alpha_4 e_1 = e_1 \Rightarrow \alpha_4 = 1\end{aligned}$$

[6]Os cálculos feitos de forma independente

aplicando em 3.19 obtemos a seguinte álgebra:

$\mathbb{L}_4(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	e_1	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	e_1

Caso 2.2.1.1.B: Suponha $\mathbb{F}^2 \neq \mathbb{F}$. E deixe que a equação $x^2 = \alpha_4$ esteja sem nehuma solução em $\mathbb{F}$. Daí, vamos considerar seguintes subcasos:

Caso 2.2.1.1.B.1: A equação $x^2 = -\alpha_4$, também tem uma solução em $\mathbb{F}$.

Transformação 3.3.9 *Seja a transformação da base* $e_1' = \alpha_1 e_1, \quad e_2' = e_1 + e_3 \quad e \quad e_3' = e_1 + \sqrt{-\alpha_4} e_2$ *e o produto de*

$$\left\langle e_2', e_2' \right\rangle = \langle e_1 + e_3, e_1 + e_3 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle + \langle e_1, e_3 \rangle + \langle e_3, e_1 \rangle + \langle e_3, e_3 \rangle = e_1 \Rightarrow \alpha_4 = -1$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle e_3', e_3' \right\rangle &= \left\langle e_1 + \sqrt{-\alpha_4} e_2, e_1 + \sqrt{-\alpha_4} e_2 \right\rangle \\ &= \langle e_1, e_1 \rangle + \sqrt{-\alpha_4} \langle e_1, e_2 \rangle + \sqrt{-\alpha_4} \langle e_2, e_1 \rangle - \alpha_4 \langle e_2, e_2 \rangle \\ &= 0 + \sqrt{-\alpha_4} \cdot 0 + \sqrt{-\alpha_4} \cdot 0 - \alpha_4 e_1 = -\alpha_4 e_1 = -e_1 \end{aligned}$$

obtemos a seguinte álgebra:

$\mathbb{L}_5(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	e_1	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	$-e_1$

Caso 2.2.1.1.B.2: Agora, vamos assumir que a equação $x^2 = -\alpha_4$, não tem solução em $\mathbb{F}$. Nós obtemos a álgebra seguinte:

$\mathbb{L}_6(\mathbb{F})$, $\alpha_4 \neq 0$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	e_1	0
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\alpha_4 e_1$

Transformação 3.3.10 *Seja* $e_1' = \alpha_4 e_1, \quad e_2' = \sqrt{-\alpha_4} e_2 \quad e \quad e_3' = e_1 + \sqrt{-\alpha_4} e_3$ *a trans-*

formação da base

$$\begin{aligned}\left\langle e_2^{'}, e_2^{'}\right\rangle &= \langle\sqrt{-\alpha_4}e_2, \sqrt{-\alpha_4}e_2\rangle\\ &= \sqrt{-\alpha_4}\langle e_1, e_2\rangle + \sqrt{-\alpha_4}\langle e_2, e_1\rangle - \alpha_4\langle e_2, e_2\rangle\\ &= 0 + \sqrt{-\alpha_4}\cdot 0 + \sqrt{-\alpha_4}\cdot 0 - \alpha_4 e_1 = -\alpha_4 e_1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle &= \langle\sqrt{-\alpha_4}e_2, \sqrt{-\alpha_4}e_2\rangle\\ &= \langle e_1, e_1\rangle + \sqrt{-\alpha_4}\langle e_1, e_2\rangle + \sqrt{-\alpha_4}\langle e_2, e_1\rangle - \alpha_4\langle e_2, e_2\rangle\\ &= 0 + \sqrt{-\alpha_4}\cdot 0 + \sqrt{-\alpha_4}\cdot 0 - \alpha_4 e_1 = -\alpha_4 e_1\end{aligned}$$

O que reduz a álgebra $\mathbb{L}_6(\mathbb{F})$ para $\mathbb{L}_4(\mathbb{F})$. Portanto, as duas álgebras são isomorfos.

Caso 2.2.1.2: Vamos considerar $\gamma_1 \neq 0$ em 3.18.

Transformação 3.3.11 *Seja* $e_1^{'} = e_1, \quad e_2^{'} = e_2 \quad e \quad e_3^{'} = e_1 + \frac{1}{\gamma_1}e_3$ *a transformação da base, cujos produtos segue abaixo:*

$$\left\langle e_2^{'}, e_2^{'}\right\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = e_1 \quad e \quad \left\langle e_2^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \left\langle e_2, \frac{1}{\gamma_1}e_3\right\rangle = \frac{1}{\gamma_1}\langle e_2, e_3\rangle = \frac{\gamma_1}{\gamma_1}e_1 = e_1$$

$$\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \left\langle \frac{1}{\gamma_1}e_3, \frac{1}{\gamma_1}e_3\right\rangle = \frac{1}{\gamma_1}\langle e_3, e_3\rangle = \frac{\alpha_4}{\gamma_1}e_1$$

perceba que $\gamma_1 = 1$, *pois* $\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle = \alpha_4 e_1$ *e substituindo* α_4 *o que resulta na seguinte tabela de multiplicação*

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	e_1	e_1
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\alpha_4 e_1$

(3.21)

Caso 2.2.1.2.A:[7] Suponha $\mathbb{F}^2 = \mathbb{F}$. Então a equação $x^2 = \alpha_4$ tem solução em $\mathbb{F}$.

Transformação 3.3.12 *Seja* $e_1^{'} = \alpha_1 e_1, \quad e_2^{'} = e_1 + e_3 \quad e \quad e_3^{'} = e_1 + \sqrt{\alpha_4}e_2$ *a transformação da base e o produto de*

$$\begin{aligned}\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle &= \langle e_1 + \sqrt{\alpha_4}e_2, e_1 + \sqrt{\alpha_4}e_2\rangle\\ &= \langle e_1, e_1\rangle + \sqrt{\alpha_4}\langle e_1, e_2\rangle + \sqrt{\alpha_4}\langle e_2, e_1\rangle + \alpha_4\langle e_2, e_2\rangle\\ &= 0 + \sqrt{\alpha_4}\cdot 0 + \sqrt{\alpha_4}\cdot 0 + \alpha_4 e_1 = \alpha_4 e_1 = e_1 \Rightarrow \alpha_4 = 1\end{aligned}$$

[7] Os cálculos feitos de forma independente

aplicando em 3.21 obtemos a seguinte álgebra:

$\mathbb{L}_7^*(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	e_1	e_1
$\mathbf{e_3}$	0	0	e_1

Caso 2.2.1.2.B:[8] Suponha $\mathbb{F}^2 \neq \mathbb{F}$. E deixe que a equação $x^2 = \alpha_4$ esteja sem nehuma solução em $\mathbb{F}$. Daí, vamos considerar seguintes subcasos:
Caso 2.2.1.2.B.1: A equação $x^2 = -\alpha_4$, também tem uma solução em $\mathbb{F}$.
Transformação 3.3.13 *Seja a transformação da base* $e_1^{'} = \alpha_1 e_1$, $e_2^{'} = e_1 + e_3$ *e* $e_3^{'} = e_1 + \sqrt{-\alpha_4} e_2$ *e o produto de*

$$\begin{aligned}\left\langle e_3^{'}, e_3^{'}\right\rangle &= \langle e_1 + \sqrt{-\alpha_4} e_2, e_1 + \sqrt{-\alpha_4} e_2\rangle\\ &= \langle e_1, e_1\rangle + \sqrt{-\alpha_4}\langle e_1, e_2\rangle + \sqrt{-\alpha_4}\langle e_2, e_1\rangle - \alpha_4 \langle e_2, e_2\rangle\\ &= 0 + \sqrt{-\alpha_4}\cdot 0 + \sqrt{-\alpha_4}\cdot 0 - \alpha_4 e_1 = -\alpha_4 e_1 = -e_1\end{aligned}$$

obtemos a seguinte álgebra:

$\mathbb{L}_7^{**}(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	e_1	e_1
$\mathbf{e_3}$	0	0	$-e_1$

Caso 2.2.1.2.B.2: Agora, vamos assumir que a equação $x^2 = -\alpha_4$, não tem solução em $\mathbb{F}$. Nós obtemos a álgebra seguinte:

$\mathbb{L}_7(\mathbb{F})$

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	0
$\mathbf{e_2}$	0	e_1	e_1
$\mathbf{e_3}$	0	0	e_1

, $\alpha_4 \neq 0$

Com isso concluímos que as álgebras $\mathbb{L}_7^*(\mathbb{F})$ a $\mathbb{L}_7(\mathbb{F})$ são isomorfos entre si, pois as transformações de bases apresentadas resultam na mesma tabela de multiplicação.

[8] Os cálculos feitos de forma independente

Caso 2.2.2: Deixe que $(\alpha_1, \alpha_3) \neq (0,0)$. Se $\alpha_1 = 0$ teremos a seguinte tabela de multiplicação

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	0	$\alpha_3 e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	0	$\gamma_1 e_1$
$\mathbf{e_3}$	0	0	$\alpha_4 e_1$

(3.22)

Mas em 3.20 $e_2 \in Ann_r(\mathbb{L})$ o que é um absurdo, pois contradiz a afirmamção que $\dim Ann_r(\mathbb{L}) = 1$.

Desde que $\alpha_1 \neq 0$, então em 3.15 nós temos $\gamma_1 = \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}$ e $\alpha_4 = \frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1}$ que resulta na tabela seguinte

	$\mathbf{e_1}$	$\mathbf{e_2}$	$\mathbf{e_3}$
$\mathbf{e_1}$	0	$\alpha_1 e_1$	$\alpha_3 e_1$
$\mathbf{e_2}$	0	$\alpha_1 e_2$	$\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} e_1$
$\mathbf{e_3}$	0	$\beta_1 e_1$	$\frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1} e_1$

Veja que se fizermos o produto de

$$\left\langle e_1, e_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} e_2 \right\rangle = \langle e_1, e_3 \rangle - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \langle e_1, e_2 \rangle = \alpha_3 e_1 - \alpha_3 e_1 = 0$$

$$\left\langle e_2, e_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} e_2 \right\rangle = \langle e_2, e_3 \rangle - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \langle e_2, e_2 \rangle = \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} e_1 - \frac{\alpha_3\alpha_2}{\alpha_1} e_1 = 0$$

$$\left\langle e_3, e_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} e_2 \right\rangle = \langle e_3, e_3 \rangle - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \langle e_3, e_2 \rangle = \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1} e_1 - \frac{\alpha_3\alpha_2}{\alpha_1} e_1 = 0$$

De modo similar, percebe-se que $e_3 - \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} e_2 \in Ann_r(\mathbb{L})$ o que é um absurdo, pois contradiz a afirmamção que $\dim Ann_r(\mathbb{L}) = 1$. Assim, concluímos a descrição de todas álgebras possíveis.

Todos os nossos resultados podemos unir no seguinte

Teorema 3.3.1 *Seja $\mathbb{L}$ uma álgebra de Leibniz (e não de Lie) de dimensão 3 com base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Até o isomorfismo, existem 17 álgebras possíveis:*

1. $\mathbb{L}_{ab}: \quad e_i e_j = 0$
2. $\mathbb{L}_{sol}: \quad e_1 e_2 = e_1,\ e_2 e_2 = e_1,\ e_1 e_1 = e_2 e_1 = 0$
3. $\mathbb{L}_{nilp}: \quad e_2 e_2 = e_1,\ e_1 e_1 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$
4. $\mathbb{L}_1: \quad e_1 e_3 = -2e_1,\ e_2 e_2 = e_1,\ e_2 e_3 = -e_2,\ e_3 e_2 = e_2$
5. $\mathbb{L}_2: \quad e_1 e_3 = \alpha e_1,\ e_2 e_3 = -e_2,\ e_3 e_2 = e_2$
6. $\mathbb{L}_3: \quad e_2 e_3 = -e_2,\ e_3 e_2 = e_2,\ e_3 e_3 = e_1$
7. $\mathbb{L}_4: \quad e_2 e_2 = e_1,\ e_3 e_3 = e_1$
8. $\mathbb{L}_5: \quad e_2 e_2 = e_1,\ e_3 e_3 = -e_1$
9. $\mathbb{L}_{7^*}: \quad e_2 e_2 = e_1,\ e_2 e_3 = e_1,\ e_3 e_3 = e_1$
10. $\mathbb{L}_{7^*}: \quad e_2 e_2 = e_1,\ e_2 e_3 = e_1,\ e_3 e_3 = -e_1$

11. $\mathbb{L}_8: \quad e_2e_3 = e_1$
12. $\mathbb{L}_9: \quad e_1e_3 = e_2, \ e_2e_3 = e_1$
13. $\mathbb{L}_{10}: \quad e_1e_3 = e_2, \ e_2e_3 = -e_1$
14. $\mathbb{L}_{12}: \quad e_1e_3 = e_2, \ e_2e_3 = \beta e_1 + e_2$
15. $\mathbb{L}_{13}: \quad e_1e_3 = e_1, \ e_2e_3 = e_2$
16. $\mathbb{L}_{14}: \quad e_1e_3 = e_2, \ e_3e_3 = e_1$
17. $\mathbb{L}_{15}: \quad e_1e_3 = e_1 + e_2, \ e_3e_3 = e_1$

Os produtos que não foram citados na lista são nulos.

O objetivo principal deste trabalho foi o estudo de classificação de álgebras finitas de Leibniz seguindo o artigo (13). Para isso foi feito o estudo de conceitos básicos da teoria de álgebras de maneira geral, as álgebras de Lie e as de Leibniz em particular. Para as álgebras de Lie e de Leibniz de dimensão infinita foram expostos os exemplos clássicos com a demonstração completa de todas as identidades. Em seguida foram apresentadas as classificações das álgebras de Leibniz de dimensões 2 e 3 continuando o estudo apresentado no artigo (13) e no livro (2) completando a matéria citada com a concretização detalhada dos cálculos de cada transformação e cada tabela de multiplicação. Alguns casos de produtos de transformações da base como transformação (3.3.1) para encontrar a tabela 3.14, (3.3.2), (3.3.4), (3.3.8) essas três para encontrar as álgebras $\mathbb{L}_1(\mathbb{F}), \mathbb{L}_2(\mathbb{F})$ e $\mathbb{L}_4(\mathbb{F})$, respectivamente, e algumas tabelas de multiplicações, as identidades Leibniz para encontrar a equação 3.15, que simplificou bastante o trabalho de encontrar as álgebras, introduzindo uma nova transformação da base para além das encontradas no artigo em referência.Também, conseguimos encontrar a álgebra $\mathbb{L}_{12}(\mathbb{F})$, foram desenvolvidos sem ajuda da orientadora. Além disso, foi feita a apuração da situação da álgebra do caso 2.2.1.2 ao caso 2.2.1.2.B.2 onde, seguindo o raciocínio do estudo de álgebras $\mathbb{L}_4(\mathbb{F})$ a $\mathbb{L}_6(\mathbb{F})$ onde a álgebra $\mathbb{L}_7(\mathbb{F})$ do artigo foi especificada para álgebras $\mathbb{L}_7^*(\mathbb{F})$, $\mathbb{L}_7^{**}(\mathbb{F})$ e $\mathbb{L}_7(\mathbb{F})$.

Referências Bibliográficas

[1] Ayupov Sh.A., Omirov B.A., On 3-dimensional Leibniz algebras, Uzbek Math. Journal, 1999, 9–14.

[2] Ayupov Sh.H, Omirov B.A, Rhakimov I.S., Leibniz Algebras: structure and classification, Chapman and Hall/CRC, 2019.

[3] Blokh A.M., On a generalization of the concept of Lie algebra, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165, 1965, 471–473 (in Russian).

[4] Blokh A.M., Cartan-Eilenberg homology theory for a generalized class of Lie algebras, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 175, 1967, 824–826 (in Russian).

[5] Casas J.M., Insua M.A., Ladra M., Ladra S., An algorithm for the classification of 3-dimensional complex Leibniz algebras, Linear Algebra and its Applications, 2012, 436(9), 3747–3756.

[6] Cuvier C., Algebres de Leibnitz: définitions, propriétés, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4ª série, 1994, 27, 1–45

[7] Jacobson N., Lie Algebras. Interscience, New York, 1962.

[8] Khudoyberdiyev A.Kh., Kurbanbaev T.K. and Omirov B.A., Classification of three-dimensional solvable p-adic Leibniz algebras. p-adic numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2(3) (2010), 207-221.

[9] Loday J.-L., Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, L'Ens. Math., 1993, 39, 269–293.

[10] Loday J.-L., Pirashvili T., Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology, Math. Ann., 1993, 296, 139–158.

[11] Loday J.-L., Cup product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras, Math. Scand., 1995, 77, 189–196.

[12] Malcev A.I., On semisimple subgroups of Lie groups, Izvestiya AN SSSR, Ser. Matem., 1944, 8(4), 143–174 (in Russian).

[13] Rakhimov I.S., Rikhsiboev I.M., Mohammed M.A., An algorithm for classifications of three-dimensional Leibniz algebras over arbitrary fields, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 2018, 40(2), 181–198.

[14] Rakhimov I.S. and Bekbaev U.D., On isomorphisms and invariants of finite dimensional complex filiform Leibniz algebras, Communications in Algebra 38(12) (2010), 4705-4738.

[15] Rakhimov I.S and Said Husain S.K., On isomorphism classes and invariants of a subclass of low-dimensional complex filiform Leibniz algebras, Linear and Multilinear Algebra 59(2) (2011), 205-220.

[16] Rakhimov I.S. and Said Husain S.K., Classification of a subclass of lowdimensional complex filiform Leibniz algebras, Linear and Multilinear Algebra 59(3) (2011), 339-354.

[17] I. M. Rikhsiboev and I. S. Rakhimov, Classification of three dimensional complex Leibniz algebras, AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics, 1450(1) (2012), 358-362.

[18] https://www.somatematica.com.br/algebra.php: :text=

[19] https://www.scielo.br/j/ea/a/6KryLd3HngCnBwJtWFHxSHj/?lang=pt

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática

UNILAB
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

ATA ______ / ______

ATA DE APRESENTAÇÃO DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (TCC) DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

No dia 13 do mês de agosto do ano de 2021, em consonância com o que determinou a Resolução Consepe nº 42/2020, que reeditou o Calendário Acadêmico do Período Letivo de 2020 e, em decorrência das medidas preventivas à COVID-19, permitiu a realização das atividades de modo virtual e/ou híbrido, reuniu-se na sala virtual link: https://meet.google.com/msm-uwjk-gkj, no âmbito das dependências da **Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)** no estado do Ceará, a banca examinadora de Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), sendo ela composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. Tatiana Skoraia (UNILAB), Professor Orientador e os Professores Examinadores: Prof. Dr. Alexandr Kornev (UFABC) e Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares (UNILAB).

Nessa oportunidade, foi avaliado o trabalho do estudante Agostinho Cá, intitulado: "Classificação das álgebras finitas de Leibniz".

Os trabalhos de apresentação e arguição foram iniciados às 14h08 e encerrados às 15h40. Após a avaliação e deliberações por parte da banca examinadora, o trabalho foi considerado aprovado, com conceito satisfatório com ressalva de corrigir as sugestões propostas pela banca. Segue em anexo gravação desta sessão de defesa.

Eu, Profa. Tatiana Skoraia, lavrei a presente ata, que assino ao final juntamente com os membros efetivos.

PARECER JUSTIFICADO

O discente Agostinho Cá realizou sua apresentação dentro do tempo estabelecido, mostrando segurança, conhecimento e domínio sobre o assunto apresentado. Após a apresentação o referido discente foi arguido pela banca examinadora, tendo respondido satisfatoriamente aos questionamentos que lhes foram feitos pelos membros da banca. A banca, ainda, sugeriu algumas correções na redação do texto do trabalho de conclusão de curso, culminando com a deliberação que resultou na aprovação do discente.

Professor(a) Orientador(a): ____________________

Professor(a) Examinador(a): ____________________

Professor(a) Examinador(a): ____________________