UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAMILA FRANÇA DOS SANTOS

RELAÇÕES MÉTRICAS ENTRE TRIÂNGULO E CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA

REDENÇÃO - CE

2021

CAMILA FRANÇA DOS SANTOS

RELAÇÕES MÉTRICAS ENTRE TRIÂNGULO E CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

REDENÇÃO - CE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Santos, Camila França Dos.

S233r

Relações métricas entre triângulo e circunferência circunscrita / Camila França Dos Santos. - Redenção, 2021.
41f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.

1. Trigonometria. 2. Triângulo. 3. Funções. I. Título

CE/UF/BSP CDD 516

CAMILA FRANÇA DOS SANTOS

RELAÇÕES MÉTRICAS ENTRE TRIÂNGULO E CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA

Monografia apresentada como requisito para a obtenção do título de Licenciada em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovado em: 14/04/2021

BANCA EXAMINADORA

João Fco da S. Filho
Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Rafael Jorge Pontes Diógenes
Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB

Janaína da Silva Arruda
Profa. Esp. Janaína da Silva Arruda
Secretaria de Educação do Estado do Ceará – SEDUC

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me abençoado, possibilitando assim, a realização de mais um passo em minha vida. Como já dizia Alvo Dumbledore “Não vale a pena mergulhar nos sonhos e esquecer de viver.” Porém hoje, vivo uma realidade que parece um sonho, mas foi preciso muito esforço, determinação, paciência, perseverança e ousadia para chegar aqui, e nada disso eu conseguiria sozinha.

Agradeço aos meus pais, Joselha França de Oliveira e João de Castro dos Santos, meus maiores exemplos. Obrigada por cada incentivo e orientação, pelas orações em meu favor, pela preocupação para que estivesse sempre andando pelo caminho correto. A minha irmã, Lara Franca dos Santos, por todo amor e carinho.

Aos meus avós maternos Francisca Maria de França de Oliveira e José Martins de Oliveira. Aos meus tios e tias em especial a Josely França de Oliveira Frota, por todo o apoio, e demais membros da família que sempre estiveram presente e entenderam a ausência e não mediram esforços para que esse sonho se tornasse realidade, sempre com muito carinho, amor e fé ainda que à distância.

A minha prima Alessandra Rogério Rabelo que sempre apoiou-me nos melhores e piores dias, porque mesmo quando distantes, estava presente em minha vida. Apoiando e incentivando em decisões tomada até aqui. A Fabilene Maria de Souza Pinto Mota (Baby) por todas as palavras de incentivo em momentos na qual eu não acreditava em mim mesma.

Ao meu amigo, orientador Professor Dr. João Francisco da Silva Filho pelos ensinamentos, paciência e atenção, dedicados do seu tempo e a confiança depositada em mim nos momentos mais difíceis da formação acadêmica. É um exemplo que levarei para a minha vida tanto pessoal como profissional.

Aos professores do curso de Licenciatura em Matemática, em especial Dra. Sinara Mota Neves de Almeida, Dr. Elcimar Simão Martins, Dra. Tatiana Skoraia, Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes, Dr. Joserlan Perote da Silva, Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral, Dra. Elisangela André da Silva Costa, Dra. Danila Fernandes Tavares, Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima, Dr. José Robério Rogério e à assistente de apoio a gestão Francisca Andreia Silva Lima. A todos minha gratidão pela contribuição na minha vida acadêmica e por tanta influência na minha vida profissional.

Dedico também espaço nesses agradecimentos, a cada um dos funcionários da Unilab, pessoal da limpeza, motoristas, segurança - pela sua contribuição na minha vida estudantil, assim como na vida de cada um dos discentes que cruzam os espaços da nossa universidade.

Aos meus amigos, Antonio Janderson de Almeida Sampaio (Toin, companheiro de graduação e das noites em claro), Francisco Lucas Ferreira da Silva, Aléssya Maria do Nascimento Barbosa e Talvane de Freitas da Silva por todos os momentos em que fomos estudiosos, brincalhões, atletas, músicos e cúmplices. Porque em vocês encontrei verdadeiros irmãos. Obrigada pela paciência, pelo sorriso, pelo abraço e pela mão que sempre se estendia quando eu precisava. Esta caminhada não seria a mesma sem vocês.

À turma de matemática da entrada 2015.1, em especial as amizades que construí nesse período, Bárbara Vitória Oliveira Jacó, Jhordana Ellen Simão Brasil Maia, Gilmar Dantas de Moura, Moisés Sousa Ferreira, Antonio Luan da Silva Pereira, Joyce Silva Sousa e Douglas Vieira Lima. Por todo apoio e cumplicidade pelos conhecimentos adquiridos e debatidos e palavras de apoio. Nem sempre é fácil encontrar força para persistir e chegar onde mais queremos. E vocês foram exímios. Foram anos inesquecíveis e por mais que passamos por momentos difíceis, nunca deixamos que os obstáculos que apareciam nos nossos caminhos nos desviassem do nosso maior objetivo.

Às pessoas que cruzaram meu caminho e que se tornaram grandes amigos: Luana Matheus de Sousa, Thais Fernanda Pereira Maia, Suellen Karla Fernandes Bezerra, Inara da Silva Borges, Aurilene Freitas de Oliveira, Rufino Barreto de Matos Neto, Francisco Benício Torres Brito, Maria do Socorro Lopes, Elânia Soares Sena, Francisco Lucas Santos Oliveira e Maria José de Souza Galvão. Gratidão por toda ajuda e sorrisos compartilhados. Obrigada pelo companheirismo e amizade incondicional.

Aos professores da Banca examinadora, Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes e Esp. Janaína da Silva Arruda pela tarefa e tempo dedicado a leitura nas correções e sugestões.

À Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira e aos programas Pibic-Unilab e Pibeac-Unilab deixo meus agradecimentos pelas experiências adquiridas durante toda minha graduação, pois foram de fundamental importância para meu aprendizado.

Concluo, sendo grata a todos aqueles já mecionados. Por medo de estar sendo prolixa, quero manifestar meu carinho e afeto a todos os que não pude mencionar, mas que de alguma maneira contribuíram nesse caminho.

"Tenho em mim todos os sonhos do mundo."
Fernando Pessoa

RESUMO

No presente trabalho, apresentamos interessantes relações entre o perímetro P de um triângulo ABC inscrito em uma circunferência S com raio $r > 0$. Mais precisamente, apresentamos estimativas para o valor de P em função de r, de acordo com a classificação relacionada às medidas dos ângulos internos do triângulo, isto é, se este é acutângulo, retângulo ou obtusângulo. Para isso, revisitamos alguns dos conceitos e resultados fundamentais da Geometria Euclidiana Plana, dentre eles o famoso Teorema de Pitágoras, bem como tópicos de Trigonometria e alguns conceitos elementares referentes a funções. Além disso, estudamos propriedades e resultados provindos de tais conceitos, o que nos permite demonstrar os resultados principais desse trabalho.

Palavras-chave: Trigonometria. Circunferência Circunscrita. Perímetro de Triângulos.

ABSTRACT

In this work, we present interesting relationships between the perimeter P of a triangle ABC inscribed on a circumference S with radius $r > 0$. More precisely, we present estimates for the value of P as a function of r, according to the classification related to the measures of the internal angles of the triangle, that is, whether it is acutangle, rectangle or obtusangle. For this, we revisit some of the fundamental concepts and results of the Plane Euclidean Geometry, among them the famous Pythagorean Theorem, as well as Trigonometric topics and some elementary concepts on functions. In addition, we study properties and results derived from such concepts, which allows us to prove the main results of this work.

Keywords: Trigonometry. Circumscribed Circumference. Perimeter of Triangles.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No cotidiano, frequentemente nos deparamos com diversas situações que nos remetem a definições, estruturas e fórmulas da Geometria. Em diferentes momentos do dia a dia podemos e precisamos fazer uso dessas noções, seja no cálculo de comprimentos, medidas de ângulos e de áreas, dentre outras situações. Nesse sentido, o saber que nos permite operacionalizar esses conceitos, se apresenta como fundamental, tendo em vista a aplicabilidade de tais noções.

O presente trabalho encontra-se organizado, conforme descrito na sequência. No segundo capítulo trazemos alguns conceitos básicos sobre a geometria de triângulos, chegando até o enunciado do teorema de Pitágoras, acompanhado de umas das suas diversas demonstrações. Posteriormente, fazemos uma breve revisão sobre Trigonometria e por fim, abordamos alguns conceitos elementares relacionados a funções, que serão ferramentas usadas no capítulo seguinte.

No terceiro capítulo, apresentamos os resultados principais desse trabalho, que estabelecem estimativas do perímetro de um triângulo em termos do raio da sua circunferência circunscrita, conforme sua classificação em relação às medidas dos ângulos internos. Essas estimativas nos permitem deduzir caracterizações de triângulos retângulos e acutângulos de área máxima inscritos em uma mesma circunferência, bem como triângulos acutângulos, obtusângulos e equiláteros. Por fim, concluímos o trabalho com as últimas considerações e discussões sobre os resultados principais.

2 PRELIMINARES

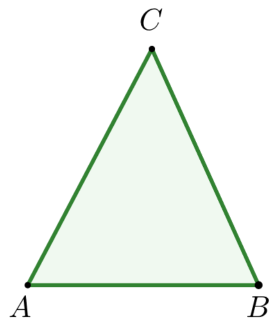
No presente capítulo, trabalhamos com noções fundamentais acerca do estudo da geometria de triângulos, na perspectiva de deduzir o Teorema de Pitágoras. Ademais, recapitulamos as principais razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) e alguns conceitos elementares sobre funções.

2.1 Elementos do Triângulo

Nesse momento, recordamos a definição de triângulo e a terminologia de alguns de seus elementos.

Definição 2.1. Um triângulo é uma figura plana formada por três pontos A, B e C não-colineares e pelos segmentos AB, AC e BC por eles determinados. Os pontos A, B e C são chamados de vértices, os segmentos AB, AC e BC são chamados de lados e os ângulos convexos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são chamados de ângulos internos do triângulo.

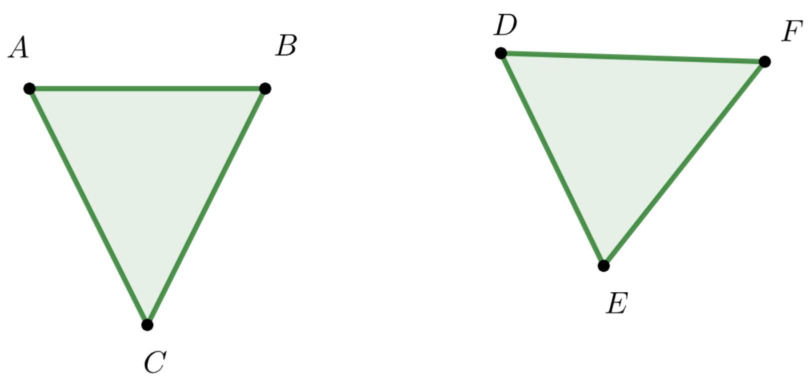
Figura 1: Triângulo ABC



Fonte: Autora, 2021.

Definição 2.2. Dizemos que os triângulos ABC e DEF são congruentes e escrevemos $ABC \equiv DEF$ se for possível corresponder os seus vértices de forma biunívoca, de modo que os lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Figura 2: Os triângulos ABC e DEF são congruentes



Fonte: Autora, 2021.

Podemos usar alguns critérios para classificar triângulos e dentre as classificações mais conhecidas, estão as classificações mediante as medidas dos lados e as medidas dos ângulos internos. A seguir, apresentamos a primeira dessas classificações:

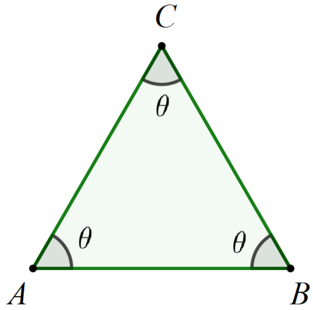
Definição 2.3. Classificamos os triângulos de acordo com as medidas dos seus lados em três categorias:

(a) Equilátero – Quando os seus lados são congruentes entre si (cf. Figura 3).

(b) Isósceles – Quando possui dois lados congruentes (cf. Figura 4).

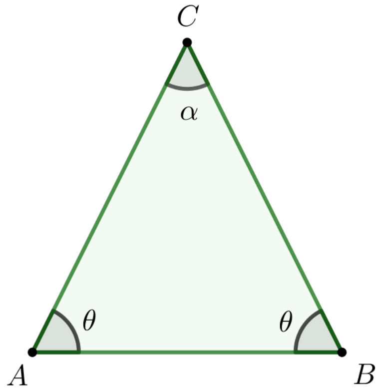
(c) Escaleno – Quando as medidas dos lados são distintas entre si (cf. Figura 5).

Figura 3: Triângulo Equilátero



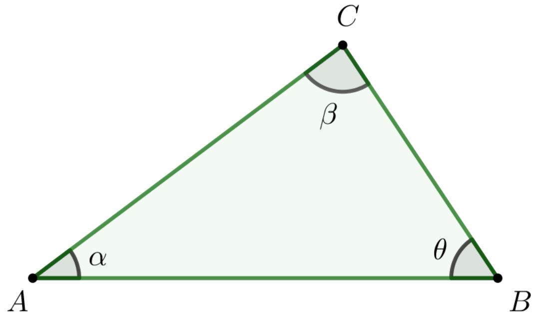
Fonte: Autora, 2021.

Figura 4: Triângulo Isósceles



Fonte: Autora, 2021.

Figura 5: Triângulo Escaleno



Fonte: Autora, 2021.

Observação 2.1. De acordo com a Definição 2.3, todo triângulo equilátero é isósceles, mas a recíproca não é verdadeira.

A partir de um vértice de um triângulo pode-se traçar segmentos especiais que ajudam a obter informações e propriedades do triângulo, conforme definidos a seguir.

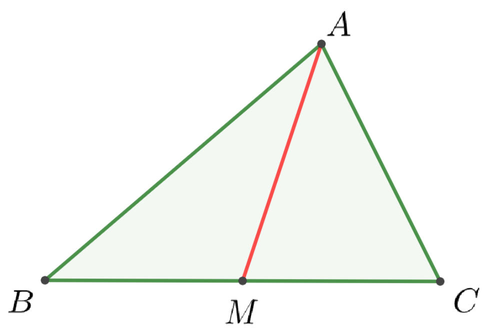
Definição 2.4. Dados um triângulo ABC e um ponto M pertencente à reta suporte $\overleftrightarrow{BC}$, então o segmento AM será chamado:

(a) Mediana relativa a BC – Se M for ponto médio de BC (cf. Figura 6).

(b) Bissetriz de $\widehat{A}$ – Se AM dividir $\widehat{A}$ em dois ângulos congruentes (cf. Figura 7).

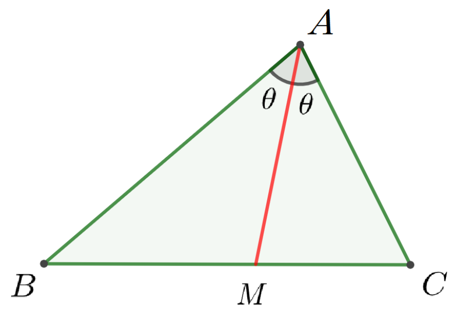
(c) Altura relativa a BC – Se AM for perpendicular a BC (cf. Figura 8).

Figura 6: Mediana relativa a BC



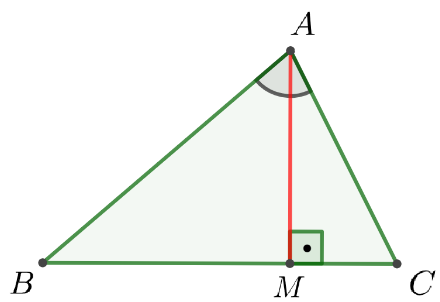
Fonte: Autora, 2021.

Figura 7: Bissetriz de $\widehat{A}$



Fonte: Autora, 2021.

Figura 8: Altura relativa a BC



Fonte: Autora, 2021.

O resultado a seguir estabelece uma condição para que três segmentos de reta formem um triângulo.

Proposição 2.1 (Desigualdade triangular)**.** Sejam A, B e C três pontos sobre o plano, então vale a desigualdade

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC},$$

ocorrendo a igualdade, se e somente se, B pertence ao segmento de reta AC.

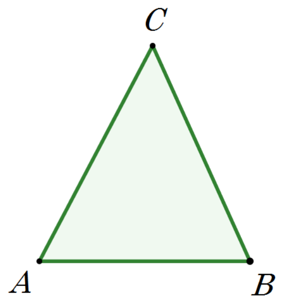
Demonstração: A prova do resultado pode ser encontrada em Barbosa (1997).

O próximo resultado mostra que a soma das medidas dos ângulos internos de triângulos é constante.

Proposição 2.2. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Demonstração: Considere um triângulo ABC arbitrário, como ilustrado na Figura 9:

Figura 9: Triângulo ABC

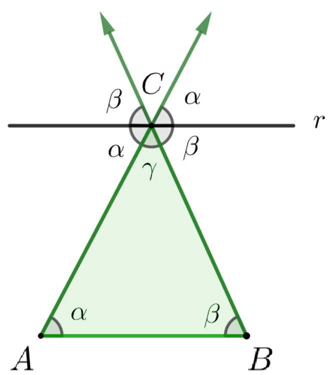


Fonte: Autora, 2021.

Denote por α, β e γ as medidas dos ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente, daí trace um segmento r paralelo a AB passando por C. Como ângulos correspondentes e ângulos opostos pelo vértice são congruentes (cf. Barbosa, 1997), temos que:

- Os ângulos agudos formados entre a semi-reta $\overrightarrow{AC}$ e o segmento r medem α;
- Os ângulos agudos formados entre a semi-reta $\overrightarrow{BC}$ e o segmento r medem β.

Figura 10: Soma dos ângulos internos



Fonte: Autora, 2021.

Por fim, observe que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ e portanto,

$$\text{med}(\widehat{A}) + \text{med}(\widehat{B}) + \text{med}(\widehat{C}) = \alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

concluindo a prova. □

Como comentamos anteriormente, é possível classificar os triângulos quanto às medidas dos seus ângulos internos.

Definição 2.5. Classificamos os triângulos de acordo com as medidas dos seus ângulos internos em três categorias:

(a) Acutângulo − Quando todos os seus ângulos internos têm medida inferior a 90°.

(b) Obtusângulo − Quando existe um ângulo interno com medida superior a 90°.

(c) Retângulo − Quando um de seus ângulos internos for reto, ou seja, medir 90°.

Dando continuidade, apresentamos uma definição mais geral que congruência de triângulos.

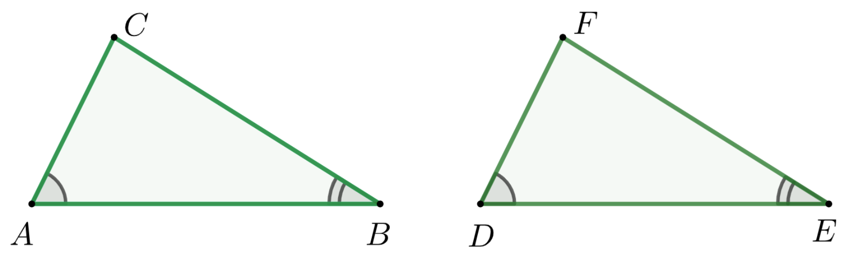
Definição 2.6. Dizemos que dois triângulos são semelhantes se for concebível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

Em Barbosa (1997), podem ser encontrados alguns critérios que nos permitem identificar triângulos semelhantes. Trazemos aqui um desses critérios e o provamos a seguir:

Proposição 2.3 (Caso Ângulo-Ângulo − A.A.)**.** Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$, então eles são semelhantes.

Demonstração: Considere os triângulos ABC e DEF, ilustrados na Figura 11.

Figura 11: Triângulos ABC e DEF



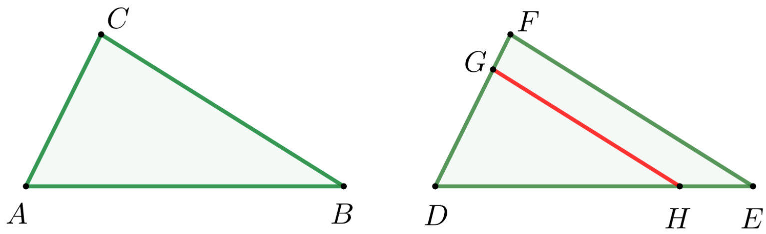
Fonte: Autora, 2021.

Sem perca de generalidade, assuma que

$$\overline{AB} \leq \overline{DE}$$

e tome $H \in DE$, tal que $DH \equiv AB$. Traçando a reta paralela a EF passando por H, obtemos o segmento de reta GH com G denotando o ponto de interseção entre essa paralela e o lado DF (cf. Figura 12).

Figura 12: Segmento de reta GH



Fonte: Autora, 2021

Diante da Figura 12 acima, temos então que

- $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ (por hipótese);
- $AB \equiv DH$ (por construção);
- $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$ (por hipótese) e $\widehat{E} \equiv \widehat{H}$ (ângulos correspondentes) $\implies$ $\widehat{B} \equiv \widehat{H}$,

portanto pelo caso de congruência $A.L.A.$ (cf. Barbosa, 1997), obtemos a congruência $ABC \equiv DHG$.

Por fim, segue do Teorema de Tales (cf. Barbosa, 1997) que

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}} \implies \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

e de forma análoga, conclui-se ainda

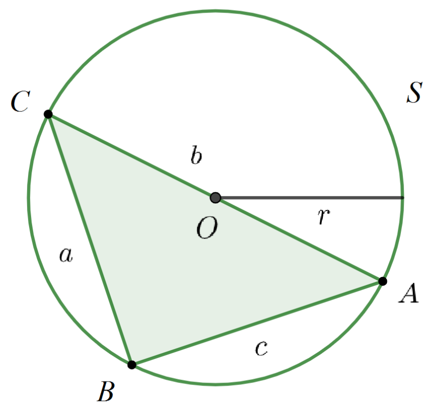
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}},$$

provando assim o resultado. □

Para encerrar essa seção, vamos definir triângulo inscrito em circunferência e circunferência circunscrita a um triângulo.

Definição 2.7. Sejam ABC um triângulo arbitrário e S uma circunferência de raio $r > 0$. Dizemos que ABC está inscrito em S quando os seus vértices A, B e C pertencem a S, que nesse contexto será chamada de *circunferência circunscrita* a ABC.

Figura 13: Triângulo ABC inscrito na circunferência S



Fonte: Autora, 2021.

Observação 2.2. Sabemos que sempre é possível construir triângulos inscritos em uma circunferência, no entanto o mais interessante é que sempre existe uma circunferência circunscrita a qualquer triângulo, como mostrado em Barbosa (1997, p. 113).

2.2 Teorema de Pitágoras

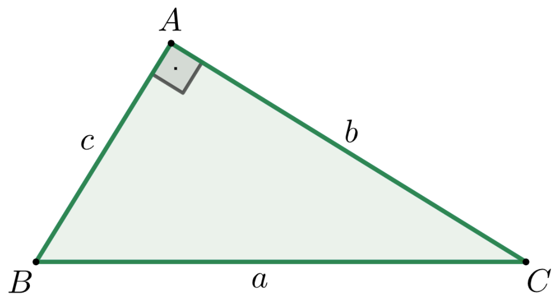
Nesse momento, apresentamos um dos mais famosos teoremas da Geometria e da Matemática em geral, conhecido como *Teorema de Pitágoras*. Esse resultado relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo através de uma equação quadrática.

Teorema 2.1 (Teorema de Pitágoras)**.** Seja ABC um triângulo retângulo em $\widehat{A}$ com $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Demonstração: Considere um triângulo retângulo ABC, como ilustrado na Figura 14 a seguir:

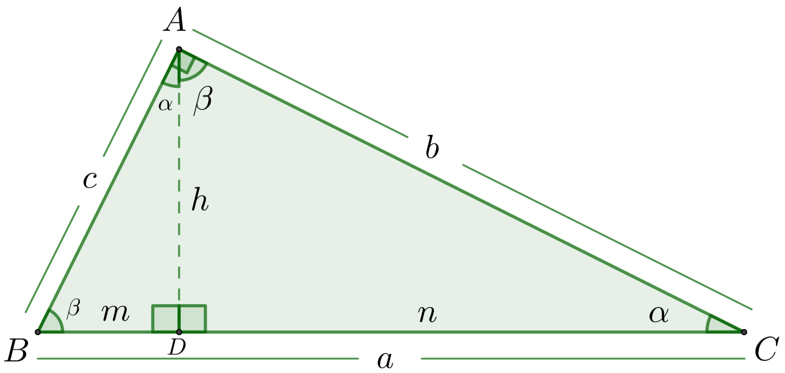
Figura 14: Triângulo retângulo ABC



Fonte: Autora, 2021.

Traçando a altura AD do triângulo ABC relativa ao lado BC, denotamos $h = \overline{AD}$, $m = \overline{BD}$ e $n = \overline{DC}$, consoante a Figura 15.

Figura 15: Demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: Autora, 2021.

Decorre da Proposição 2.3 que ABC, DBA e DAC são triângulos semelhantes, então

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m} \implies c^2 = am,$$

bem como

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h} \implies b^2 = an.$$

Combinando as duas igualdades obtidas acima, chegamos em

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= an + am \\ &= a \cdot (m+n) \\ &= a \cdot a, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

concluindo a prova. □

Observação 2.3. Um resultado que corresponde à recíproca do Teorema de Pitágoras pode ser encontrado em Barbosa (1997) ou Dolce e Pompeo (2005).

2.3 Razões Trigonométricas

Nessa seção, recordamos as principais razões trigonométricas, enfatizando as definições obtidas a partir de ângulos internos de triângulos, embora estaremos admitindo definições e resultados um pouco mais gerais, obtidos através do ciclo trigonométrico, conforme abordado em Carmo et al. (2005).

Diante do exposto, vamos iniciar introduzindo as noções mais elementares de seno, cosseno e tangente com as medidas dos ângulos expressas em radianos.

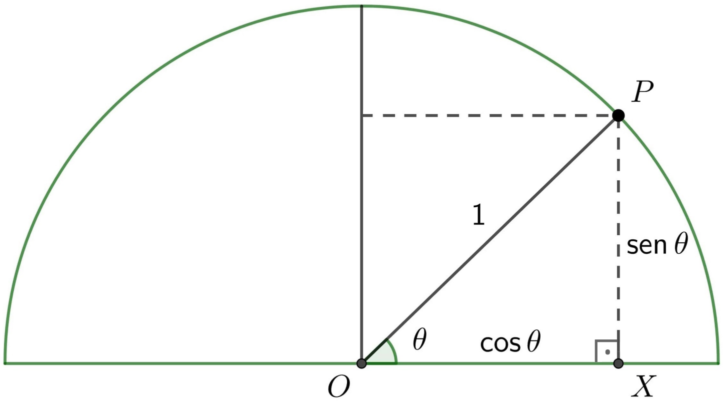
Definição 2.8. Considere um ponto P numa semi-circunferência de raio 1 e centro O, bem como um ponto X sobre seu diâmetro, tal que OXP é um triângulo retângulo em $\widehat{X}$ e θ denota a medida de $X\widehat{O}P$. Nesse sentido, definimos seno, cosseno e tangente de θ, respectivamente, por:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \overline{PX}, \qquad \cos(\theta) = \overline{OX} \qquad \text{e} \qquad \tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \text{(cf. Figura 16).}$$

Observação 2.4. Complementando a Definição 2.8, convencionamos ainda:

- $\operatorname{sen} 0 = \tan 0 = 0 \quad$ e $\quad \cos 0 = 1$;
- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad$ e $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Figura 16: Semi-circunferência de raio 1 e centro O



Fonte: Autora, 2021.

Observe que a Definição 2.8, a priori, refere-se apenas a medidas de ângulos agudos não-nulos. Na sequência, estendemos essas definições para números reais que correspondem a medidas de ângulos obtusos e rasos.

Definição 2.9. Seja $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ arbitrário, então definimos

$$\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\pi - \theta), \quad \cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta) \quad \text{e} \quad \tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Observação 2.5. De maneira alternativa, costuma-se definir seno, cosseno e tangente para ângulo, que equivale à definição do seno, cosseno e tangente da medida desse ângulo, respectivamente.

Como consequência das definições apresentadas, podemos deduzir a *identidade fundamental da trigonometria* para $\theta \in [0, \pi]$.

Proposição 2.4 (Identidade Fundamental da Trigonometria)**.** Seja $\theta \in [0, \pi]$ arbitrário, então vale a igualdade

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

Demonstração: Primeiro, convém destacar que para $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$ a conclusão segue diretamente da Observação 2.4, onde convencionamos os valores do seno e do cosseno para esses números reais. Nesse momento, passamos a analisar os seguintes casos:

1° Caso: $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Dada a construção feita na Definição 2.8, tem-se para esse caso que o resultado é consequência imediata do Teorema de Pitágoras.

2° Caso: $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Aplicando a Definição 2.9, obtemos

$$sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \operatorname{sen}^2(\pi - \theta) + [-\cos(\pi - \theta)]^2,$$

consequentemente,

$$sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \text{sen}^2(\pi - \theta) + \cos^2(\pi - \theta)] = 1,$$

onde usamos as conclusões anteriores para justificar a última igualdade. $\square$

Observação 2.6. Da forma como foram definidas nessa seção, nota-se que as razões seno, cosseno e tangente estabelecem relações entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, coincidindo com a abordagem elementar da trigonometria no triângulo retângulo (cf. Iezzi, 2013).

Como aplicação das relações métricas do triângulo retângulo, obtém-se duas relações métricas entre os lados e os ângulos de triângulos, chamadas de *lei dos senos* e *lei dos cossenos*, que serão apresentadas a seguir.

Proposição 2.5 (Lei dos senos)**.** Dado um triângulo ABC arbitrário, vale a igualdade

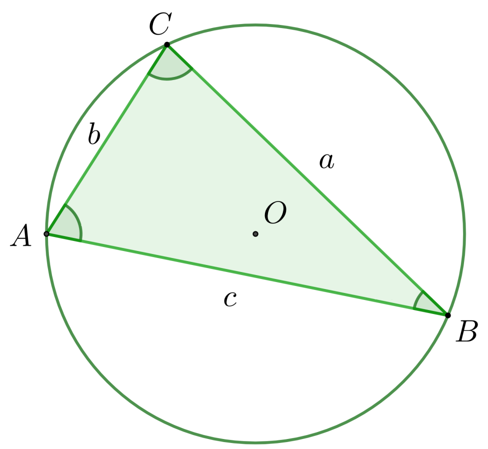
$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen}(\widehat{A})} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\widehat{C})} = 2r,$$

onde r denota o raio da circunferência circunscrita a ABC.

Demonstração:

Considere um triângulo ABC e sua circunferência circunscrita de raio $r > 0$, conforme a Figura 17.

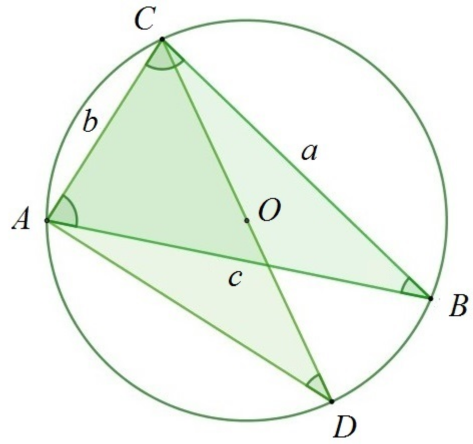
Figura 17: Triângulo ABC e sua circunferência circunscrita



Fonte: Autora, 2021.

A partir do segmento de reta AC construímos um triângulo ACD inscrito na mesma circunferência, onde o lado CD corresponde a um diâmetro dessa circunferência (cf. Figura 18).

Figura 18: Triângulos ABC e ACD



Fonte: Autora, 2021.

Usando o Corolário 8.6 de Barbosa (1997, p. 111), temos que

$$\mathrm{med}(C\widehat{A}D) = \frac{\pi}{2},$$

logo ACD é um triângulo retângulo, daí temos que

$$\mathrm{sen}(\widehat{D}) = \frac{b}{2r},$$

onde usamos a definição de seno.

Como $\widehat{D}$ e $\widehat{B}$ subtendem o mesmo arco, então possuem mesma medida e assim

$$\frac{b}{\mathrm{sen}(\widehat{B})} = \frac{b}{\mathrm{sen}(\widehat{D})} = 2r.$$

De modo análogo, obtemos as igualdades

$$\frac{a}{\mathrm{sen}(\widehat{A})} = \frac{c}{\mathrm{sen}(\widehat{C})} = 2r,$$

finalizando a demonstração do resultado. □

Observação 2.7. Decorre da lei dos senos que o perímetro P de um triângulo ABC é dado por

$$P = \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB} = 2r[\mathrm{sen}(\widehat{A}) + \mathrm{sen}(\widehat{B}) + \mathrm{sen}(\widehat{C})],$$

onde r denota o raio da circunferência circunscrita a ABC.

Agora mostraremos a lei dos cossenos, que corresponde a uma generalização do Teorema de Pitágoras.

Proposição 2.6 (Lei dos cossenos)**.** Dado um triângulo ABC arbitrário, vale a igualdade

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}\cos(\widehat{A}),$$

onde $\widehat{A}$ é o ângulo interno oposto ao lado BC.

Demonstração: Vamos dividir a prova em casos, provando para triângulos retângulos, obtusângulos e acutângulos.

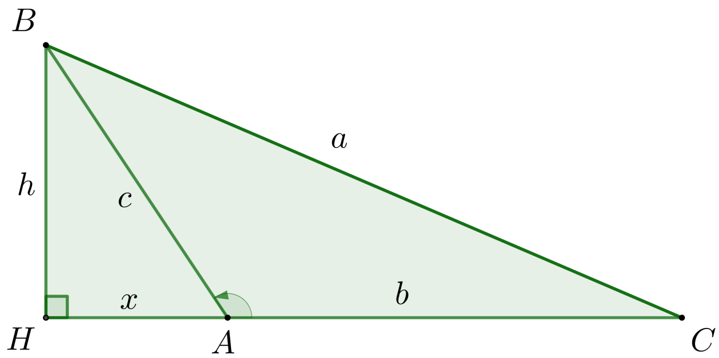
1º Caso: $\widehat{A}$ é reto.

Neste caso, a lei dos cossenos decorre do Teorema de Pitágoras, visto que $\widehat{A}$ é um ângulo reto.

2º Caso: $\widehat{A}$ obtuso.

Suponha que $\widehat{A}$ seja um ângulo obtuso e construa a altura BH relativa à AC, como mostra a Figura 19.

Figura 19: Lei dos cossenos I



Fonte: Autora, 2021.

Como BAH e BCH são triângulos retângulos, então pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$c^2 = x^2 + h^2 \quad \Longrightarrow \quad h^2 = c^2 - x^2,$$

bem como

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2 \quad \Longrightarrow \quad h^2 = a^2 - (b + x)^2.$$

Comparando os resultados obtidos acima, vamos ter

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b + x)^2 \implies c^2 = a^2 - b^2 - 2bx,$$

ou ainda,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx.$$

Do triângulo BAH, deduzimos que

$$\frac{x}{c} = \cos(B\widehat{A}H) = -\cos(\widehat{A}) \implies x = -c\cos(\widehat{A}),$$

segue então que

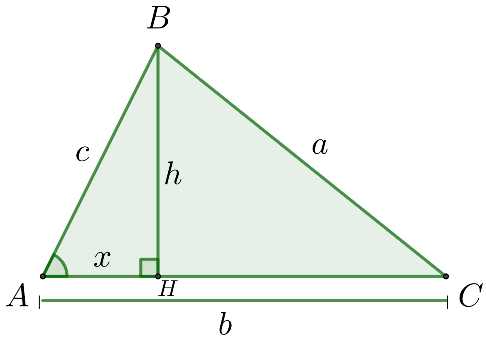
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}),$$

provando o resultado para esse caso.

3º Caso: $\widehat{A}$ agudo.

Construa a altura BH de ABC relativa à AC, como mostra a Figura 20 abaixo:

Figura 20: Lei dos cossenos II



Fonte: Autora, 2021.

Como BAH e BCH são triângulos retângulos, então pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$c^2 = x^2 + h^2 \quad \Longrightarrow \quad h^2 = c^2 - x^2,$$

bem como

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 \quad \Longrightarrow \quad h^2 = a^2 - (b - x)^2.$$

Comparando os resultados obtidos acima, vamos ter

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b - x)^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 + 2bx,$$

ou ainda,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx.$$

Do triângulo BAH, deduzimos que

$$\frac{x}{c} = \cos(\widehat{A}) \quad \Longrightarrow \quad x = c\cos(\widehat{A}),$$

segue então que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}),$$

concluindo a prova. □

Conforme já mencionado no início da seção, podemos definir seno e cosseno através do ciclo trigonométrico, obtendo uma abordagem mais geral que contempla qualquer número real (cf. Carmo et al, 2005). Nesse contexto, apresentamos um resultado que fornece identidades clássicas da Trigonometria, em geral, válidas para todo $x, y \in \mathbb{R}$, no entanto vamos nos restringir a um caso particular.

Proposição 2.7. Dados $x, y \in [0, \pi]$ arbitrários, tem-se que:

(a) $\text{sen}(x + y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$;
(b) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y)$;
(c) $\text{sen}(x - y) = \text{sen}(x)\cos(y) - \text{sen}(y)\cos(x)$;
(d) $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \text{sen}(x)\text{sen}(y)$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Carmo et al. (2005).

Na sequência, enunciamos mais algumas identidades conhecidas na literatura e que serão utilizadas na demonstração dos próximos resultados.

Corolário 2.1. Dados $x, y \in [0, \pi]$ arbitrários, tem-se que:

(a) $\text{sen}(x) + \text{sen}(y) = 2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$;
(b) $\text{sen}(x) - \text{sen}(y) = 2\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$;
(c) $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$;
(d) $\cos(x) - \cos(y) = -2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

Demonstração: Pode ser deduzida da Proposição 2.7 (cf. Carmo et al, 2005).

Observação 2.8. Note que as restrições impostas nos enunciados da Proposição 2.7 e do Corolário 2.1 são suficientes para os nossos propósitos, já que nas aplicações que faremos desses resultados, x e y denotarão medidas de ângulos internos de um triângulo.

2.4 Revisando Funções

Nessa seção, vamos revisitar a definição de função e alguns dos principais conceitos básicos relacionados a função. Mais detalhes sobre o assunto, juntamente com exemplos, podem ser encontrados em Lima (2014). Inicialmente, recordamos os conceitos de função, domínio e contradomínio de função.

Definição 2.10. Dados conjuntos não-vazios X e Y arbitrários, dizemos que uma função $f : X \to Y$ é uma relação de X em Y, que associa a cada $x \in X$ um único $y = f(x) \in Y$. Nesse contexto, os conjuntos X e Y são chamados de domínio e contradomínio de f, respectivamente.

Observação 2.9. Nas mesmas condições da Definição 2.10, o subconjunto definido por

$$f(X) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ e } x \in X\}$$

é chamado de conjunto imagem de f.

Definição 2.11. Duas funções $f_1 : X_1 \to Y_1$ e $f_2 : X_2 \to Y_2$ são ditas iguais se $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ e $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in X$.

Introduzimos a seguir um importante subconjunto do produto cartesiano do domínio e contradomínio de uma função.

Definição 2.12. Sendo $f : X \to Y$ uma função, define-se o gráfico de f por

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Na sequência, vamos recordar os conceitos de injetividade, sobrejetividade e bijetividade de uma função.

Definição 2.13. Uma função $f : X \to Y$ é dita injetiva se para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$, tem-se que $f(x_1) \neq f(x_2)$. De forma equivalente, f é dita injetiva se para todo $y \in f(X)$ existe um único $x \in X$, tal que $y = f(x)$.

Definição 2.14. Uma função $f : X \to Y$ é dita sobrejetiva se $f(X) = Y$, isto é, se para todo $y \in Y$ existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$.

Definição 2.15. Uma função $f : X \to Y$ é dita bijetiva se for injetiva e sobrejetiva, simultaneamente.

Destacamos a seguir, tipos especiais de funções cujos domínio e/ou contradomínio são subconjuntos dos números reais.

Definição 2.16. Dada uma função $f : X \to Y$, tem-se que:

(a) Se $X \subset \mathbb{R}$, então f é dita uma *função de uma variável real.*

(b) Se $Y \subset \mathbb{R}$, então f é dita uma *função real.*

Diante da última definição, podemos introduzir o conceito de raiz de uma função real.

Definição 2.17. Dados uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ e um elemento $r \in X$ com $f(r) = 0$, então dizemos que r é uma raiz de f.

Agora, passamos a introduzir os conceitos de funções crescente e decrescente, restrito às funções reais de uma variável real.

Definição 2.18. Dada uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tem-se que:

(a) Se $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 < x_2$ sempre implica que

$$f(x_1) < f(x_2),$$

então f é dita crescente.

(b) Se $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 < x_2$, sempre implica que

$$f(x_1) > f(x_2),$$

então f é dita decrescente.

Observação 2.10. Se uma função real $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente (resp. decrescente) quando restrita a um subconjunto não-vazio $Y \subset X$, dizemos que f é crescente (resp. decrescente) em Y.

Para ilustrar a Definição 2.18, segue um exemplo que pode ser encontrado em Carmo (2005) ou Iezzi (2013).

Exemplo 2.1. Considere as funções $f_1, f_2 : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f_1(t) = \text{sen}(t) \qquad \text{e} \qquad f_2(t) = \cos(t),$$

então:

(a) f_1 é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

(b) f_2 é decrescente em $[0, \pi]$.

Para concluir a seção, apresentamos dois importantes exemplos de funções, cujas informações serão usadas na prova do resultado principal.

Exemplo 2.2. Considerando a função $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(t) = 2\text{sen}(t) + \text{sen}(2t),$$

temos que:

(a) g é crescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

(b) g é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solução: Usando o primeiro item da Proposição 2.7, podemos reescrever a expressão de g na forma

$$g(t) = 2\text{sen}(t) + 2\text{sen}(t)\cos(t) = 2\text{sen}(t)[1 + \cos(t)],$$

então segue da Proposição 2.4 que

$$g(t) = 2[1 + \cos(t)]\sqrt{1 - \cos^2(t)} = 2\sqrt{[1 + \cos(t)]^2[1 - \cos^2(t)]}.$$

ou ainda,

$$g(t) = 2\sqrt{1 + 2\cos(t) - 2\cos^3(t) - \cos^4(t)}. \tag{1}$$

Nesse momento, passamos a resolver separadamente cada um dos dois itens enunciados:

a) Suponha por absurdo que g não seja crescente em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, então existem $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, tais que

$$x > y \qquad \text{e} \qquad g(x) \leq g(y),$$

logo segue da expressão (1) que

$$\sqrt{1 + 2\cos(x) - 2\cos^3(x) - \cos^4(x)} \leq \sqrt{1 + 2\cos(y) - 2\cos^3(y) - \cos^4(y)},$$

ou ainda,

$$2\cos(x) - 2\cos^3(x) - \cos^4(x) \leq 2\cos(y) - 2\cos^3(y) - \cos^4(y).$$

Da última desigualdade, obtemos

$$2[\cos(x) - \cos(y)] - 2[\cos^3(x) - \cos^3(y)] - [\cos^4(x) - \cos^4(y)] \leq 0,$$

então colocamos $\cos(x) - \cos(y)$ em evidência, resultando em

$$\begin{aligned} & [\cos(x) - \cos(y)]\{2 - 2[\cos^2(x) + \cos(x)\cos(y) + \cos^2(y)] \\ - & [\cos^3(x) + \cos^2(x)\cos(y) + \cos(x)\cos^2(y) + \cos^3(y)]\} \leq 0, \end{aligned}$$

mas $\cos(x) < \cos(y)$ (cf. Exemplo 2.1), logo

$$\begin{aligned} & 2[\cos^2(x) + \cos(x)\cos(y) + \cos^2(y)] \\ + & [\cos^3(x) + \cos^2(x)\cos(y) + \cos(x)\cos^2(y) + \cos^3(y)]\} \leq 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Por outro lado, observe que

$$\frac{1}{2} \leq \cos(x) < \cos(y),$$

implicando que

$$\begin{aligned} & 2[\cos^2(x) + \cos(x)\cos(y) + \cos^2(y)] \\ + & [\cos^3(x) + \cos^2(x)\cos(y) + \cos(x)\cos^2(y) + \cos^3(y)]\} > 2, \end{aligned}$$

contrariando a desigualdade (2).

b) De maneira análoga, vamos supor que g não seja decrescente no subintervalo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, então existem $x, y \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, tais que

$$x > y \qquad \text{e} \qquad g(x) \geq g(y),$$

portanto segue da expressão (1) que

$$\sqrt{1 + 2\cos(x) - 2\cos^3(x) - \cos^4(x)} \geq \sqrt{1 + 2\cos(y) - 2\cos^3(y) - \cos^4(y)},$$

ou ainda,

$$2\cos(x) - 2\cos^3(x) - \cos^4(x) \geq 2\cos(y) - 2\cos^3(y) - \cos^4(y).$$

Por cálculos similares ao item anterior, chegamos em

$$\begin{aligned} & 2[\cos^2(x) + \cos(x)\cos(y) + \cos^2(y)] \\ + & [\cos^3(x) + \cos^2(x)\cos(y) + \cos(x)\cos^2(y) + \cos^3(y)]\} \geq 2, \end{aligned} \tag{3}$$

no entanto,

$$\cos(x) < \cos(y) \leq \frac{1}{2} \quad \text{(cf. Exemplo 2.1)},$$

implicando que

$$\begin{aligned} & 2[\cos^2(x) + \cos(x)\cos(y) + \cos^2(y)] \\ + \quad & [\cos^3(x) + \cos^2(x)\cos(y) + \cos(x)\cos^2(y) + \cos^3(y)]\} < 2, \end{aligned}$$

contrariando a desigualdade (3).

Observação 2.11. Como consequência do Exemplo 2.2, pode-se concluir que

$$0 = g(0) \leq g(t) \leq g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

para todo $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemplo 2.3. Considerando a função $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(t) = 1 + \operatorname{sen}(t) - \cos(t),$$

temos que:

(a) h é crescente no intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$.

(b) h é decrescente no intervalo $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

Solução:

a) Suponha por absurdo que h não seja crescente em $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, então existem $x, y \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, tais que

$$x > y \qquad \text{e} \qquad h(x) \leq h(y),$$

logo segue que

$$1 + \operatorname{sen}(x) - \cos(x) \leq 1 + \operatorname{sen}(y) - \cos(y),$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) \leq \cos(x) - \cos(y).$$

Dos segundo e quarto itens do Corolário 2.1, obtemos

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

consequentemente,

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq -\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) < 0 \tag{4}$$

e assim

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Decorre da Proposição 2.4 e da desigualdade anterior que

$$\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2},$$

enquanto (4) nos permite obter

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

daí deduzimos que

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{3\pi}{4},$$

contrariando o fato de que $x, y \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ satisfazem $x > y$.

(b) Suponha por absurdo que h não é decrescente em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, então existem $x, y \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, tais que

$$x > y \qquad \text{e} \qquad h(x) \geq h(y),$$

então segue-se que

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) \geq \cos(x) - \cos(y),$$

onde usamos a expressão que define h.

Dos segundo e quarto itens do Corolário 2.1, obtemos

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

ou ainda,

$$0 > \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq -\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{5}$$

implicando que

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Decorre da Proposição 2.4 e da desigualdade anterior que

$$\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2},$$

então combinando com (5), vamos ter

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) < 0,$$

portanto

$$\frac{x+y}{2} \leq \frac{3\pi}{4},$$

contrariando o fato de que $x, y \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ satisfazem $x > y$.

Observação 2.12. Como consequência do Exemplo 2.3, pode-se concluir que

$$0 = h(0) \leq h(t) \leq h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2},$$

para todo $t \in [0, \pi]$.

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Finalmente, apresentamos nesse capítulo o principal resultado do trabalho, que estima o perímetro de triângulos em termos do raio da circunferência circunscrita, através de cotas inferior e superior. Como consequência, apresentamos resultados que caracterizam triângulos retângulos e acutângulos de área máxima inscritos em uma mesma circunferência, bem como triângulos acutângulos, obtusângulos e equiláteros.

3.1 Lemas Chave

Nessa seção, traremos alguns resultados que serão usados na demonstração dos resultados principais.

Lema 3.1. Dados $x, y \in [0, \pi]$ arbitrários, tem-se que

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) \leq 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Demonstração: Como consequência do primeiro item da Proposição 2.7, segue que

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right],$$

bem como

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$

logo

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{y}{2}\right)\right].$$

Sabendo que o seno e o cosseno são crescente e descrescente no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, respectivamente (cf. Exemplo 2.1), podemos concluir que o segundo membro da última desigualdade é não positivo, consequentemente

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) \leq 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

encerrando a demonstração. □

No próximo resultado, apresentamos informações que envolvem o perímetro de um triângulo e as medidas de quaisquer dois dos seus ângulos internos.

Lema 3.2. Considere um triângulo ABC com perímetro P e circunferência circunscrita com raio $r > 0$, tal que x e y denotam as medidas de dois dos seus ângulos internos. Nessas condições, tem-se que:

(a) $P = 2r[\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x+y)]$;

(b) $P \leq 2r\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \operatorname{sen}(x+y)\right]$.

Demonstração:

Decorre da lei dos senos (cf. Proposição 2.5) que

$$P = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 2r\left[\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(z)\right],$$

onde x, y e z denotam as medidas dos ângulos internos de ABC. Da Proposição 2.2, temos que

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(\pi - z) = \operatorname{sen}(z),$$

donde segue que

$$P = 2r\left[\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x+y)\right],$$

que corresponde ao primeiro item.

Por fim, aplicamos o Lema 3.1 à última igualdade, obtendo

$$P \leq 2r\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \operatorname{sen}(x+y)\right],$$

chegando à desigualdade do segundo item e concluindo a prova do resultado. □

No último resultado da seção, fazemos o estudo do crescimento e decrescimento de uma importante classe de funções.

Lema 3.3. Dada uma constante $c \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, defina a função $f_c : [0, 2c] \to \mathbb{R}$ por

$$f_c(t) = \operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(2c - t) + \operatorname{sen}(2c).$$

Nessas condições, temos que:

(a) f_c é crescente no intervalo $[0, c]$.

(b) f_c é decrescente no intervalo $[c, 2c]$.

(c) f_c satisfaz a desigualdade

$$2\operatorname{sen}(2c) \leq f_c(t) \leq 2\operatorname{sen}(c) + \operatorname{sen}(2c).$$

Demonstração:

(a) Suponha por absurdo que f_c não seja crescente em $[0, c]$, então existem $x, y \in [0, c]$, tais que

$$x > y \qquad \text{e} \qquad f_c(x) \leq f_c(y),$$

consequentemente,

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2c - x) \leq \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(2c - y),$$

ou ainda,

$$\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) \leq \operatorname{sen}(2c - y) - \operatorname{sen}(2c - x).$$

Usando o segundo item do Corolário 2.1, obtemos

$$2\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 2\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(2c-\frac{x+y}{2}\right),$$

ou ainda,

$$0 < \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \cos\left(2c-\frac{x+y}{2}\right),$$

implicando que

$$\frac{x+y}{2} \geq 2c - \frac{x+y}{2} \qquad \text{e} \qquad x+y \geq 2c,$$

contrariando o fato de que $x, y \in [0, c]$ satisfazem $x > y$.

(b) Suponha por absurdo que f_c não é decrescente em $[c, 2c]$, então existem $x, y \in [c, 2c]$, tais que

$$x > y \qquad \text{e} \qquad f_c(x) \geq f_c(y),$$

consequentemente,

$$\text{sen}(x) - \text{sen}(y) \geq \text{sen}(2c-y) - \text{sen}(2c-x).$$

Usando o segundo item do Corolário 2.1, obtemos

$$2\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 2\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(2c-\frac{x+y}{2}\right),$$

ou ainda,

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \cos\left(2c-\frac{x+y}{2}\right),$$

implicando que

$$\frac{x+y}{2} \leq 2c - \frac{x+y}{2} \qquad \text{e} \qquad x+y \leq 2c,$$

contrariando o fato de que $x, y \in [c, 2c]$ satisfazem $x > y$.

(c) Decorre dos itens (a) e (b) que f_c assume seu maior valor em c e seu menor valor em um dos extremos, portanto

$$min\{f_c(0), f_c(2c)\} \leq f_c(t) \leq f_c(c),$$

ou equivalentemente,

$$2\text{sen}(2c) \leq f_c(t) \leq 2\text{sen}(c) + \text{sen}(2c),$$

concluindo a demonstração. □

3.2 Estimativas de Perímetro

Apresentamos agora o resultado principal desse trabalho que estabelece relações métricas entre o perímetro de um triângulo e o raio da sua circunferência circunscrita. Mais precisamente, esse resultado fornece estimativas do perímetro de um triângulo em termos do raio da circunferência circunscrita, conforme ele seja acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Teorema 3.1. Dado um triângulo ABC com perímetro P e circunferência circunscrita de raio $r > 0$, valem as seguintes afirmações:

(a) Se ABC é acutângulo, então

$$4r < P \leq 3\sqrt{3}r.$$

(b) Se ABC é retângulo, então

$$4r < P \leq 2(\sqrt{2}+1)r.$$

(c) Se ABC é obtusângulo, então

$$0 < P < 2(\sqrt{2}+1)r.$$

Demonstração:

Denotando por x, y e z as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC, usamos o primeiro item do Lema 3.2 para obter

$$P = 2r\left[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)\right] > 2r\operatorname{sen}(x+y),$$

que combinado com o segundo item do Lema 3.2 nos fornece a desigualdade

$$2r\operatorname{sen}(x+y) < P \leq 2r\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \operatorname{sen}(x+y)\right], \tag{6}$$

onde $r > 0$ é o raio da circunferência circunscrita.

Nesse momento, passamos à demonstração de cada um dos itens enunciados separadamente:

a) Desde que ABC é acutângulo, podemos supor que

$$\frac{\pi}{3} \leq z < \frac{\pi}{2},$$

pois caso contrário, estaríamos contrariando a Proposição 2.2. Desse mesmo resultado, segue que

$$\frac{\pi}{2} < x + y \leq \frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{4} < \frac{x+y}{2} \leq \frac{\pi}{3}, \tag{7}$$

onde usamos a igualdade $x + y + z = \pi$.

Diante da desigualdade (7), podemos concluir de (6) e do Exemplo 2.2 que

$$P \leq 2r \left[2\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right],$$

ou simplesmente,

$$P \leq 3\sqrt{3}r,$$

que corresponde à estimativa superior.

Novamente, obtém-se do primeiro item do Lema 3.2 que

$$P = 2r \left[\text{sen}\, x + \text{sen}\, y + \text{sen}\,(x+y) \right],$$

então fixando $x + y = 2c$ (equivalente a fixar a medida de z), chegamos na expressão

$$P = 2r \left[\text{sen}\,(x) + \text{sen}\,(2c - x) + \text{sen}\,(2c) \right]. \tag{8}$$

Como ABC é acutângulo, tem-se que

$$0 < x, 2c - x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad 0 < 2c - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \tag{9}$$

então segue do Lema 3.3 que a função $f_c : [0, 2c] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_c(x) = \text{sen}(x) + \text{sen}(2c - x) + \text{sen}(2c),$$

restrita ao subintervalo $\left[2c - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ deve assumir seu valor mínimo em um dos extremos.

Nessas condições, deduzimos da expressão (8) que

$$P > 2r \left[1 + \text{sen}\left(2c - \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}(2c) \right],$$

que pode ser reescrito na forma

$$P > 2r[1 + \text{sen}(2c) - \cos(2c)], \tag{10}$$

onde usamos a Proposição 2.7 (c) e o fato de que

$$f_c\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_c\left(2c - \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \text{sen}\left(2c - \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}(2c).$$

Por fim, observa-se por (7) que

$$\frac{\pi}{2} < 2c \leq \frac{2\pi}{3},$$

enquanto o Exemplo 2.3 implica que a função $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por

$$h(t) = 1 + \text{sen}(t) - \cos(t),$$

restrita ao subintervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ deve assumir seu valor mínimo no extremo inferior.

Dessa forma, podemos deduzir que

$$h(2c) > h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2,$$

que combinado com (10) nos fornece a desigualdade

$$P > 4r,$$

correspondendo à estimativa inferior.

b) Sabendo que ABC é triângulo retângulo, podemos supor que $z = \dfrac{\pi}{2}$ e assim $x+y = \dfrac{\pi}{2}$, obtendo pela desigualdade (6) que

$$4r\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) < P \leq 2r\left[2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

ou simplesmente,

$$4r < P \leq 2(\sqrt{2}+1)r.$$

c) Como ABC é obtusângulo, podemos supor

$$\frac{\pi}{2} < z < \pi,$$

implicando que

$$0 < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{4}. \tag{11}$$

Usando a desigualdade (6), temos que

$$0 < P \leq 2rg\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{12}$$

onde a função $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ é definida por

$$g(t) = 2\text{sen}(t) + \text{sen}(2t) \quad \text{(cf. Exemplo 2.2).}$$

Sendo g crescente em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ (cf. Exemplo 2.2), deduzimos de (11) e (12) que

$$0 < P < 2r\left[2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

ou simplesmente,

$$0 < P < 2(\sqrt{2}+1)r,$$

concluindo o último item e a prova do teorema. □

Como consequência do Teorema 3.1, podemos deduzir caracterizações para triângulos acutângulos e obtusângulos, conforme descrito no primeiro corolário.

Corolário 3.1. Dado um triângulo ABC com perímetro P e circunferência circunscrita de raio $r > 0$, valem as afirmações:

(a) Se $P \leq 4r$, então ABC é obtusângulo.

(b) Se $P > 2(\sqrt{2}+1)r$, então ABC é acutângulo.

Demonstração: Decorre diretamente do Teorema 3.1.

O próximo corolário apresenta caracterizações para triângulos acutângulos e retângulos de área máxima inscritos em uma mesma circunferência.

Corolário 3.2. Dado um triângulo ABC com perímetro P e circunferência circunscrita de raio $r > 0$, valem as afirmações:

(a) Se ABC é acutângulo e o perímetro é dado por
$$P = 3\sqrt{3}r,$$
então ele será equilátero.

(b) Se ABC é retângulo e o perímetro é dado por
$$P = 2(\sqrt{2} + 1)r,$$
então ele será isósceles.

Demonstração:

a) Primeiro, observe que do segundo item do Lema 3.2, obtemos
$$P \leq 2r\left[2\,\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \text{sen}\,(x+y)\right],$$
que pode ser reescrito na forma
$$P \leq 2rg\left(\frac{x+y}{2}\right),$$
onde $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ é definida por $g(t) = 2\text{sen}(t) + \text{sen}(2t)$.

Desde que $P = 3\sqrt{3}r$, segue do Exemplo 2.2 e da Observação 2.11 que
$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
bem como
$$x + y = \frac{2\pi}{3}. \tag{13}$$

Nessas condições, usamos o primeiro item do Lema 3.2 para escrever
$$P = 2r\left[\text{sen}(x) + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right],$$
então pelo Lema 3.3, vamos ter
$$x = \frac{\pi}{3},$$
implicando por (13) e pela Proposição 2.2 que
$$y = z = \frac{\pi}{3},$$
portanto ABC é equilátero.

b) Observe que o primeiro item do Lema 3.2 nos fornece
$$P = 2r\left[\text{sen}\,x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

enquanto o Lema 3.3 permite concluir que

$$x = y = \frac{\pi}{4},$$

logo ABC é isósceles. $\square$

Para finalizar a seção, deduzimos uma interessante caracterização para os triângulos equiláteros.

Corolário 3.3. Dentre os triângulos inscritos em uma circunferência fixada, tem-se que o triângulo equilátero é o que possui maior perímetro.

Demonstração: Dado um triângulo ABC equilátero, obtemos a partir da lei dos senos (cf. Proposição 2.5) que

$$P = 2r\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

ou simplesmente,

$$P = 2r \cdot 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}r,$$

implicando pelo Teorema 3.1 que ABC possui perímetro máximo.

Reciprocamente, supondo que ABC seja um triângulo de perímetro máximo inscrito numa circunsferência de raio $r > 0$, segue do Teorema 3.1 que este é acutângulo e seu perímetro satisfaz

$$P = 3\sqrt{3}r,$$

portanto conclui-se pelo item (a) do Corolário 3.2 que ABC é equilátero. $\square$

Observação 3.1. Deve-se ressaltar que problemas de Geometria sobre máximos e mínimos são comuns na literatura, podemos indicar Figueiredo (1989), Hermes e Pereira (2013) e Moreira e Saldanha (1993) para maiores detalhes. Mais frequentemente, esses tipos de problemas são apresentados como aplicações de derivada no estudo de pontos críticos, porém os resultados apresentados nessa seção tiveram uma abordagem mais elementar.

4 CONCLUSÃO

No início do trabalho, comentamos sobre o quão importante é conhecer e saber aplicar conceitos e ferramentas geométricas que permitem resolver diversos problemas da Geometria Euclidiana, onde vários deles aparecem em situações do nosso cotidiano. Nesse sentido, justificamos a relevância do nosso trabalho, visto que abordamos interessantes relações métricas entre o perímetro de um triângulo e o raio da sua circunferência circunscrita.

Mais precisamente, apresentamos estimativas para o perímetro de triângulos aplicadas aos triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo, através de cotas inferior e superior, expressas apenas em termos do raio da circunferência circunscrita do triângulo. Essas estimativas permitiram deduzir caracterizações para os triângulos acutângulos e obtusângulos, bem como caracterizações para triângulos acutângulos e retângulos de área máxima inscritos em uma mesma circunferência e para triângulos equiláteros.

Por fim, convém reiterar que embora problemas de Geometria relacionados a máximos e mínimos apareçam na literatura com relativa frequência, diversas vezes eles são apresentados no contexto do Cálculo Diferencial, onde são usadas a noção de derivada e suas aplicações na determinação de pontos críticos, pontos de máximo e de mínimo. Diante do exposto, a abordagem desse trabalho utiliza ferramentas mais elementares, deixando assim o trabalho acessível a um público mais abrangente.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro: SBM, 1997.

CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria e Números complexos.* 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005 .

DOLCE, O. POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 9: Geometria Plana.* 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

FIGUEIREDO, D. G. Problemas de máximo e mínimo na Geometria Euclidiana. *Revista Matemática Universitária*, v. 9/10, p. 69-108, 1989.

HERMES, A. P.; PEREIRA, J. C. P.. Máximos e mínimos na Geometria Euclidiana: uma abordagem histórica. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 2, n. 1, p. 32-48, 2013.

IEZZI, G. Fundamentos da Matemática Elementar - Volume 3: Trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1.* 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

LIMA, E. L. *Curso de Análise - Volume 1.* 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MOREIRA, C. G. T. A; SALDANHA, N. C. A desigualdade isoperimétrica. *Revista Matemática Universitária*, no 15, p. 13-19, 1993.

MURAKAMI, C.; IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 1: Conjuntos, Funções.* 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

STEWART, J. *Cálculo - Volume I.* 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.