UNIVERSIDADE DA INTEGRAO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANILDO JOSÉ NHAGA

REGULARIDADE LIPSCHITZ LOCAL DAS SUPERFÍCIES DESCRITAS POR EQUAÇÃO $X^P + Y^P = Z^P$ EM $\mathbb{R}^3$

REDENÇÃO
2021

DANILDO JOSÉ NHAGA

REGULARIDADE LIPSCHITZ LOCAL DAS SUPERFÍCIES DESCRITAS POR EQUAÇÃO $X^P + Y^P = Z^P$ EM $\mathbb{R}^3$

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciada em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira

REDENÇÃO

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Nhaga, Danildo José.

N479r

REGULARIDADE LIPSCHITZ LOCAL DAS SUPERFÍCIES DESCRITAS POR EQUAÇÃO X^P + Y^P = Z^P EM R^3 / Danildo José Nhaga. - Redenção, 2021.
30f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientador: Prof. Rodrigo Mendes Pereira.

1. Matemática - Equação - Estudos métricos. 2. Lipschitz. 3. Superfícies. I. Título

CE/UF/Dsibiuni   CDD 510

DANILDO JOSÉ NHAGA

REGULARIDADE LIPSCHITZ LOCAL DAS SUPERFÍCIES DESCRITAS POR EQUAÇÃO $X^p + Y^p = Z^p$ EM $\mathbb{R}^3$

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 14 / 04 / 2021

BANCA EXAMINADORA

Rodrigo Mendes Pereira

Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Renato Oliveira Targino

Prof. Dr. Renato Oliveira Targino
Instituto de Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente, os meus familiares em geral e especialmente para Silvino Queni, Catarina Sami e aos meus falecidos pais, a minha mãe Paulina Antônio Quadé e o meu pai José Nhaga, grato a vocês por tudo que fizeram na minha vida, e agradeço também o senhor Deus pela vida e pelo homem que tornei hoje.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio, e também a UNILAB, pela oportunidade que me deu ao longo dessa trajetória e da nova face da carreira que me fez adquirir agradeço bastante.

Ao Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira, pela excelente orientação, que tivemos durante este tempo e agradeço de fundo de coração foi um dos professores dessa universidade que mais admiro pelo seu caráter e a forma que ele ensina me agrada confessor o senhor é a minha referência, por isso agradeço bastante pelo orientação e tudo que aprendi com o senhor.

Aos professores participantes da banca examinadora Joserlan Perote da Silva pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões, agradeço muito ao senhor pelo o que vem aprendendo com o senhor ao longo desses anos do estudo o senhor foi também a pessoa que sempre tenho respeito e admiração nas disciplinas que fizemos e nas orientações.

Agradeço bastante o professor Renato Oliveira Targino, pelo convite que aceitou de fazer parte da minha banca examinadora, pelo esforço e tempo para ler o meu trabalho de fundo de coração agradeço ao senhor.

Aos professores da licenciatura em matemática, agradeço pelo ensinamento ao longo desta etapa vocês são demais e agradeço tanto.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões, e momento dos estudos e compartilhamento dos conhecimento.

"Estudo métrico das superfícies ou Topologia de superfície"

RESUMO

O presente trabalho apresenta um exemplo de abordagem métrico para superfícies homogêneas. O estudo é feito na vizinhança dos pontos onde não vale o Teorema da função implícita. Existe uma obstrução de suavidade, mas no final, obtemos que o comportamento métrico local é o mesmo do plano $\mathbb{R}^2$. O objetivo é provar que os conjuntos descritos pela equação $x^{2m} + y^{2m} = z^{2m};\ z \geq 0$, são Lipschitz. forneci um critério para qual, uma função de duas variáveis ser Lipschitz. E provei duas proposições importantes, e assim como o Teorema que fala qualquer superfície $S \subseteq \mathbb{R}^3$ dado pela equação $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^{2m} + y^{2m} = z^{2m};\ z \geq 0\}$ é uma superfície Lipschitz. E conclui que os conjuntos descritos pela essa equação acima são Lipschitz para os casos pares, em modo geral recomendo os leitores que sejam atentos na ilustrações dos exemplo que é muito importante na percepção dos estudo métricos.

Palavras-chave: Função. Lipschitz. Superfície. Métrico.

ABSTRACT

The present work presents an example of a metric approach for homogeneous surfaces. The study is done in the vicinity of points where the implicit function theorem is not valid. There is a smoothness obstruction, but in the end, we find that the local metric behavior is the same as for the $\mathbb{R}^2$ plane. The objective is to prove that the sets described by the equation $x^{2m} + y^{2m} = z^{2m};\ z \geq 0$, are Lipschitz. I provided a criterion for which, a function of two variables is Lipschitz. And I proved two important propositions, as well as the Theorem that speaks any surface $S \subseteq \mathbb{R}^3$ given by the equation $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^{2m} + y^{2m} = z^{2m};\ z \geq 0\}$ is a Lipschitz surface. And concludes that the sets described by this equation above are Lipschitz for even cases, in general I recommend readers to be attentive in the illustrations of the examples that is very important in the perception of the metrics studies.

Keywords: Function. Lipschitz. Surfaces. Metric.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	Pertence
$\subset$	Contido
$\subseteq$	Contido igual à
$\cap$	Interseção
$=$	Igual à
$\neq$	Deferente
$>$	Maior
$\geq$	Maior igual à
$<$	Menor
$\leq$	Menor igual à
$\Rightarrow$	Implica que
$\Leftrightarrow$	Se então
$\forall$	Qual quer que seja
$\therefore$	Logo ou Portanto
δ	Delta
γ	Gama minúsculo
λ	Lambda minúsculo
π	Pi minúsculo
Π	Pi maiúsculo
ψ	Psi minúsculo
f'	Derivada primeira ordem
$\lim$	Limite
$\pm\infty$	Mais ou Menos Infinito
$\langle\rangle$	Produto interno
∇	Gradiente
∂	Derivada parcial
$\| \ \|$	Modulo de um número
$\|\ \|\ \ \|\ \|$	Norma de um vetor
$\int$	Integral

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta apresenta um exemplo de abordagem métrico para superfícies homogêneas. O estudo é feito na vizinhança dos pontos onde não vale o Teorema da função implícita. Existe uma observação de suavidade, mas no final, obtemos que o comportamento métrico local é o mesmo do plano $\mathbb{R}^2$.

Os requisitos para a leitura do texto são mínimo. Aqui, o texto está auto-contido em quase sua totalidade.

No capitulo 2, apresentamos a definição de função Lipschitz que é clássica e pode ser encontrados nos livros introdutórios de cálculo e análise. Nesse capitulo, é fornecido um critério para uma função de duas variáveis ser Lipschitz mesmo que não possuem derivadas parciais num dado ponto.

No capitulo 3, definimos a noção da superfície Lipschitz. Tal noção se situa entre a topologia (superfícies definidas por homeomorfismos) e suaves (superfícies de classe C^k, $k \geq 1$). Para referência podes ver livro de Análise real do professor Elon Lages Lima Lima (1995).

No capitulo 4, provamos que os conjuntos descritos pela equação $x^{2m} + y^{2m} = z^{2m}$; $z \geq 0$, são Lipschitz, com o uso de uma parametrização local junto com explicito controle de sua derivadas.

2 FUNÇÕES LIPSCHITZ

Definição 2.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Dizemos que f é Lipschitz se existe uma constante $C > 0$ tal que:*

$$||f(x) - f(y)|| \leq C||x - y||, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

onde

$$||(u_1, u_2, ..., u_n)|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}. \tag{2}$$

Definição 2.2 *Dados os conjuntos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, um homeomorfismo entre X e Y é uma bijeção contínua $f : X \to Y$, cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua. Diz-se então que X e Y são conjuntos homeomorfos.*

Exemplo 2.1 *Seja aplicação $f : [0, 2\pi) \to S^1$, do intervalo semi-aberto $[0, 2\pi)$ sobre o círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$, definida por $f(t) = (cost, sent)$. veja que f é contínua. Além disso, f é evidentemente bijetiva. Mas a sua inversa $f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi)$ é descontinua no ponto $p = (1, 0)$. Com efeito, para cada $k \in \mathbb{N}$ sejam $t_k = 2\pi(\frac{1}{k})$ e $z_k = f(t_k)$. Então $\lim_{k\to\infty} z_k = p$, mas não é verdade que $\lim_{k\to\infty} f^{-1}(z_k) = \lim_{k\to\infty} t_k$ seja igual a $f^{-1}(p) = 0$.*

Para o caso das funções Lipschitz $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, temos a inequação $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq C$, onde C é o constante Lipschitz, tal que $x \neq y$. Note que se $x = y$ então a inequação já é verdade pois:

$$0 = |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| = 0.$$

Exemplo 2.2 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ f é bi-Lipschitz.*

De fato, Pois $|x - y| = |f(x) - f(y)| = 1|x - y|$ é Lipschitz com o constante Lipschitz $C = 1$.

Exemplo 2.3 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$ não é Lipschitz.*

De fato, Dada $f(x) = x^2$ temos que:

$$|x^2 - y^2| \leq C|x - y| \Leftrightarrow \frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} \leq C \Leftrightarrow \frac{|x - y||x + y|}{|x - y|} \leq C \Leftrightarrow |x + y| \leq C.$$

Então note que:

$$\text{se} \quad x = a \quad e \quad y \to \pm\infty \quad \text{então} \quad |x + y| \to \pm\infty$$

ou

$$\text{se } \ x \to \pm\infty \ e \ y = b \ \text{ então } \ |x + y| \to \pm\infty.$$

Conclusão: f não é Lipschitz porque não existe constante $C > 0$ tal que $|x + y| \leq C$ dada por $f(x) = x^2$.

Agora, se restringimos f ao intervalo, $I = (a, b)$ dada por $f(x) = x^2$ então f será Lipschitz. Pois $|x + y| \leq |x| + |y| \leq 2max\{|x|, |y|\}$ (Desiqualdade Triangular), onde $a < x < b$.

Exemplo 2.4 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, *a função* f *é Lipschitz.*

De fato, Sabemos que f é Lipschitz quando $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, logo substituindo a função temos:

$$|y^n - x^n| \leq C|y - x| \Leftrightarrow \frac{|y^n - x^n|}{|y - x|} \leq C.$$

Daí, temos: $\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} = \frac{|y^n - x^n|}{|y-x|}$, veja que quando $x = y$, temos seguintes caso:

$$0 = |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(x)| = |y - x| = |x - x| = 0.$$

Então vamos ver o caso em que $\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} \leq C, \ y \neq x,$ daí teremos em particular para $n = 2$,

$$y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) = y^2 + yx - xy - x^2.$$

Para o caso em que $n = 3$, note que o grau do polinômio é maior que 2, daí a fatoração não é tão visível. Portanto precisamos achar a raiz do polinômio, e depois façamos a divisão dele. Mas no nosso caso precisamos dividir pelo próprio $(y - x)$, então temos:

$$(y^3 - x^3) = (y - x)(y^2 + xy + x^2).$$

Generalizando a equação:

$$(a^n - 1) = (a - 1)(1 + a + ... + a^{n-1}) = (a + a^2 + ... + a^{n-1} + a^n - 1 - a - a^2 - ... - a^{n-1}),$$

Vamos usar a equação acima para conhecer o valor da constante C. Assim temos:

$$y^n - x^n = \frac{y^n - x^n}{x^n} x^n, \ x \neq 0$$

$$\Rightarrow y^n - x^n = \left(\frac{y^n}{x^n} - \frac{x^n}{x^n}\right) x^n = \left(\left(\frac{y}{x}\right)^n - 1\right) x^n = \left(\frac{y}{x} - 1\right)\left(1 + \frac{y}{x} + ... + \frac{y}{x}^{n-1}\right) x^n.$$

Para $x, y \in [a, b]$ temos que:

$$\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{x}\right)\left(x^n + yx^{n-1} + y^2x^{n-2} + ... + xy^{n-1}\right) = \frac{\left(y - x\right)}{x}\left(x^n + yx^{n-1} + y^2x^{n-2} + ... + xy^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \left(y - x\right)\frac{\left(x^n + yx^{n-1} + y^2x^{n-2} + ... + xy^{n-1}\right)}{x}$$
$$= \left(y - x\right)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1}\right).$$

Então como queremos encontrar um fator da expressão inicial. Logo teremos:

$$\left|\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)\right| = \frac{\left|\left(y - x\right)\right|\left|\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)\right|}{\left|\left(y - x\right)\right|}$$

Logo queremos ainda mostrar que: $\left|\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)\right| \leq C$; (note que para alguns casos $C > 0$). A desigualdade triangular temos que modulo da soma é a soma dos módulos por isso teremos:

$$\left|x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}\right| \leq \left|x^{n-1}\right| + \left|x^{n-2}y\right| + \left|x^{n-3}y^2\right| + ... + \left|xy^{n-2}\right| + \left|y^{n-1}\right|$$

$$= \left|x\right|^{n-1} + \left|x^{n-2}y\right| + \left|x^{n-3}y^2\right| + ... + \left|xy^{n-2}\right| + \left|y\right|^{n-1}$$
$$= \left|x\right|^{n-1} + \left|x\right|^{n-2}\left|y\right| + \left|x\right|^{n-3}\left|y\right|^2 + ... + \left|x\right|\left|y\right|^{n-2} + \left|y\right|^{n-1}.$$

Para $x, y \in [a, b] \iff a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq b, \quad |x| \leq max\{|x|, |y|\} = d$ e $|y| \leq max\{|x|, |y|\} = d,$ onde temos:

$$\left|x\right|^{n-1} \leq d^{n-1}$$

$$\left|x\right|^{n-2}\left|y\right| \leq d^{n-2}d$$

$$\left|x\right|^{n-3}\left|y\right|^2 \leq d^{n-3}d^2$$

$$\vdots$$

$$\left|x\right|\left|y\right|^{n-2} \leq dd^{n-2}$$

$$\left|y\right|^{n-1} \leq d^{n-1}.$$

Portanto temos: $\left|x\right|^{n-1}+\left|x\right|^{n-2}\left|y\right|+\left|x\right|^{n-3}\left|y\right|^{2}+...+\left|x\right|\left|y\right|^{n-2}+\left|y\right|^{n-1}\leq nd^{n-1}=C$. Daí o valor de constante C que encontramos é:

$$\left(nd^{n-1}\right)=C.$$

Logo, a inequação é:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}=\frac{|x^n-y^n|}{|x-y|}\leq nd^{n-1}=C.$$

Exemplo 2.5 *Seja* $f:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$. *A função* f *não é Lipschitz?*

De fato, Pela inequação de $\left|f(x)-f(y)\right|\leq C\left|x-y\right|$. Do mesmo modo teremos:

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\leq C\left|x-y\right|\Rightarrow\frac{\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|}{\left|x-y\right|}\leq C.$$

Para fatoramos essa expressão precisamos fazer algumas manipulações considere que:

$$u^2-v^2=(u-v)(u+v), \tag{3}$$

onde temos que:

$$u^2=x\Rightarrow\sqrt{u^2}=\sqrt{x}\Rightarrow u=\sqrt{x}$$

$$v^2=y\Rightarrow\sqrt{v^2}=\sqrt{y}\Rightarrow v=\sqrt{y}.$$

Então, através da equação 3 temos:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$$

e

$$\left(x-y\right)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \tag{4}$$

Note que se usamos modulo nos dois lados da equação 3, vamos ter:

$$|x-y|=|\sqrt{x}-\sqrt{y}||\sqrt{x}+\sqrt{y}|.$$

Então, voltamos para a nossa equação de cima onde vamos ter:

$$\frac{\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|}{\left|x-y\right|}=\frac{\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|}{\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|}=\frac{1}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|}.$$

Para $x,y\in[a,b]\leftrightarrow 0\leq x\leq 1$ e $0\leq y\leq 1$. Veja que se tomamos um x próximo do zero e fixamos y então $\frac{1}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|} \to \infty$. Então C não pode limitar a função $\frac{1}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|}$. Portanto a função f não é Lipschitz.

Agora vamos considerar os estudos das aplicações Lipschitz, e nos casos que ela for uma bijeção, verificar se ela é bi-Lipschitz, ou seja, caso em que a inversa é Lipschitz.

Seja
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
dada por
$$F(x,y) = \Big(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\Big).$$

Exemplo 2.6 *Seja* $\mathbb{B}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 < 1\}$. *Seja* $F : \mathbb{B}(0,1) \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$. *Então* $F|_{B(0,1)}$ *é bi-Lipschitz sobre a imagem* $F(\mathbb{B}^2(0,\delta))$.

De fato, Primeiro passo: Seja uma aplicação $F|_{\mathbb{B}(0,1)}$. Uma bola aberta é uma conjunto convexo, ou seja, se $x, y \in \mathbb{B}(0,1)$, então o segmento $[x,y] \subset \mathbb{B}(0,1)$. Implica que $x^2+y^2 < 1$. A função
$$F(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2}).$$
Considere $|u| = \sqrt{x^2+y^2}$ e $u = (x,y), \in \mathbb{B}(1,0)$. Então temos $F(u) = (u, |u|)$. Por outro lado, temos:
$$0 \leq |u| < 1, \quad 0 \leq |v| < 1 \ \to |u| - |v| < 1,$$
onde $u, v \in \mathbb{B}$. Usando a desigualdade triangular teremos seguinte:
$$|u| - |v| \leq |u - v|. \tag{5}$$

Prova da inequação 5: Seja $|u| = |v + (u-v)| \leq |v| + |u-v| \Rightarrow |u| \leq |v| + |u-v| \Rightarrow |u| - |v| \leq |u-v|$. Pela inequação 5 temos que:
$$|F(u) - F(v)| = |(u,|u|) - (v,|v|)|$$
$$= |(u-v, |u|-|v|)|$$
$$\leq |(u-v, |u-v|)|$$
$$= |(u-v, 0) + (0, |u-v|)|$$
$$\leq |(u-v,0)| + |(0,|u-v|)|$$
$$= |u-v| + |u-v| = 2|u-v|.$$

Agora vamos ver a volta onde a restrição é aplicado ao plano $F^{-1}|_{F(B(0,1))}$, e podemos escrever assim:

$$F^{-1}(x, y, \sqrt{x^2+y^2}) = (x, y).$$

Então pela norma teremos seguinte:

$$\| \ F^{-1}(x_1, y_1, \sqrt{x_1^2+y_1^2}) \ - \ F^{-1}(x_2, y_2, \sqrt{x_2^2+y_2^2}) \ \| = \| \ (x_1, y_1) - (x_2, y_2) \ \|$$

$$= \| \ (x_1 - x_2, \ y_1 - y_2) \ \|$$

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \leq \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (\sqrt{x_1^2+y_1^2}) - \sqrt{x_2^2+y_2^2})^2}$$

$$= \| \ (x_1 - x_2, \ y_1 - y_2, \ \sqrt{x_1^2+y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2}) \ \|$$

$$= \| \ (x_1, y_1, \sqrt{x_1^2+y_1^2}) - (x_2, y_2, \sqrt{x_2^2+y_2^2}) \ \|$$

$$\therefore \| \ F^{-1}(x_1, y_1, \sqrt{x_1^2+y_1^2}) \ - \ F^{-1}(x_2, y_2, \sqrt{x_2^2+y_2^2}) \ \|$$

$$\leq 1 \ \| \ (x_1, y_1, \sqrt{x_1^2+y_1^2}) - (x_2, y_2, \sqrt{x_2^2+y_2^2}) \ \|$$

Conclusão: Pelo soluções do exemplos, vimos que a restrição $F|_{B(0,1)}$ é Lipschitz com a inversa Lipschitz $F^{-1}|_{F(B(0,1))}$. Portanto $F|_{B(0,1)}$ é bi-Lipschitz.

Exemplo 2.7 $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Pi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$ *é Lipschitz com constante* $C \geq 1$.

De fato, Seja a projeção Π de superfície para o plano então teremos:

$$||\Pi(x_1, y_1, z_1) - \Pi(x_2, y_2, z_2)|| = ||(x_1, y_1, 0) - (x_2, y_2)|| = ||(x_1 - x_2, y_1 - y_2, 0||$$

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \leq \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

$$||(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)|| = ||(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)||.$$

$$\therefore ||\Pi(x_1, y_1, z_1) - \Pi(x_2, y_2, z_2)|| \leq 1||(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)||.$$

Temos que o constante Lipschitz $C = 1$ logo podemos dizer que a projeção é Lipschitz.

Nota: Veja no exemplo 2.6 F^{-1} é a projeção $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ restrito a $F(\mathbb{B}^2(0,1))$.

Observação 2.1 *Seja* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma aplicação Lipschitz, seja* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. *Aplicação* $F : Y \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *(restrição de* F *a* Y*) é também Lipschitz.*

Proposição 2.1 *Seja* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma aplicação contínua dada por*

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2, f_3(x_1, x_2)),$$

onde $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *então* F *é uma aplicação Lipschitz se e somente se* $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *é uma função Lipschitz.*

Demonstração: Primeiramente vamos provar que F é Lipschitz com constante $C > 0$ tal que

$$||F(x_1, x_2) - F(y_1, y_2)|| \leq C||(x_1, x_2) - (y_1, y_2)||.$$

Logo

$$||(x_1, x_2, f_3(x_1, x_2)) - (y_1, y_2, f_3(y_1, y_2))|| \leq C||(x_1 - y_1, x_2 - y_2)||$$

$$\Rightarrow ||(x_1 - y_1, x_2 - y_2, f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))|| \leq C||(x_1 - y_1), (x_2 - y_2)||$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))^2} \leq C\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))^2}\right)^2 \leq \left(C\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))^2 \leq C^2\big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\big)$$

$$\Rightarrow (f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))^2 \leq C^2\big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\big) - \big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\big)$$

$$\Rightarrow (f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))^2 \leq (C^2 - 1)\big[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\big]$$

$$\Rightarrow \sqrt{(f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))^2} \leq \sqrt{(C^2 - 1)\big[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\big]}$$

$$\Rightarrow |(f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))| \leq \sqrt{(C^2 - 1)}||(x_1 - y_1), (x_2 - y_2)||.$$

A constante Lipschitz é $\sqrt{(C^2 - 1)}$ mas qualquer constante Lipschitz que pegarmos, maior que esse vai ser também constante Lipschitz. Portanto vamos tomar $C > 1$, se $C = 2$ teremos $\sqrt{((2)^2 - 1)} = \sqrt{(4 - 1)} = \sqrt{(3)}$ logo,

$$|(f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))| \leq \sqrt{3}||(x_1, x_2) - (y_1, y_2)||.$$

portanto o constante Lipschitz é $C = \sqrt{3}$.
Reciprocamente: suponhamos que $f_3 : Y \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é um função Lipschitz. Então existe $C > 0$ tal que

$$|f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2)| \leq C||(x_1, x_2) - (y_1, y_2)||, \quad \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in Y.$$

Queremos mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$||F(x_1, x_2) - F(y_1, y_2)|| \leq C||(x_1, x_2) - (y_1, y_2)||,$$

então. Vamos ter:

$$|(f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))| \leq C||(x_1, x_2) - (y_1, y_2)||.$$

$$\Rightarrow |(f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))| \leq C||(x_1 - y_1, x_2 - y_2)||$$

$$\Rightarrow (f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))^2 \leq C^2\big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\big)$$

$$\Rightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (f_3(x_1, x_2) - f_3(y_1, y_2))^2$$

$$\leq C^2\big((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\big) + (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

$$\Rightarrow (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(f_3(x_1,x_2)-f_3(y_1,y_2))^2 \leq (C^2+1)\big[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big]$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(f_3(x_1,x_2)-f_3(y_1,y_2))^2}$$

$$\leq \sqrt{(C^2+1)\big[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\big]}$$

$$\Rightarrow ||(x_1-y_1)+(x_2-y_2)+(f_3(x_1,x_2)-f_3(y_1,y_2))|| \leq \sqrt{(C^2+1)}||(x_1-y_1)+(x_2-y_2)||$$

$$\Rightarrow ||(x_1,x_2,f_3(x_1,x_2))-(y_1,y_2,f_3(y_1,y_2))|| \leq \sqrt{(C^2+1)}||(x_1,x_2)-(y_1,y_2)||.$$

Isto demonstra que F Lipschitz.

$\blacksquare$

Agora, vamos considerar um critério para uma função ser Lipschitz em termos da limitação das derivadas. Seja $\mathbb{B}^2(0,\delta)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2+z^2<\delta\}$.

Teorema 2.1 *Seja* $f:\mathbb{B}^2(0,\delta)\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, *função continua e diferenciável fora de* $(0,0)$, *se as derivadas parciais* $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são limitadas em* $\mathbb{B}^2(0,\delta)-\{(0,0)\}$, *então* f *equação é Lipschitz.*

Demonstração: admitimos que as derivadas parciais existe fora de $(0,0)$ pode ser que não conseguimos calcular derivadas no $(0,0)$ mas sabemos que ela não vai para o infinito, como ela não vai para o infinito afirmação está dizendo que é suficiente para garantir que a função é Lipschitz.

Dada a curva $C=\big[(x_1,x_2)+t\big((y_1,y_2)-(x_1,x_2)\big), f(x_1,x_2)+t\big((y_1,y_2)-(x_1,x_2)\big)\big]$.

$$C=\big[(X)+t\big((Y-X)\big), f(X)+t\big((Y-X)\big)\big],$$

onde $X=(x_1,x_2), Y=(y_1,y_2)\in\mathbb{B}^2(0,\delta)$ são vetores coordenadas. E se conetamos a curva com $t=0$ temos $C=(X,f(X))$ e para $t=1$ temos $C=(Y,f(Y))$.
Em particular, temos $g(t)=f(X+t(Y-X))$ tal que:
Se $t=0, g(0)=f(X)$
Se $t=1, g(1)=f(Y)$

Note que

$$|f(X)-f(Y)|\leq comprimento\big(g|_{[0,1]}\big).$$

Daí precisamos calcular o comprimento de arco para poder controlar o modulo,

$$comprimento\big(g|_{[0,1]}\big)=\int_0^1 |g'(t)|dt.$$

Sabemos que: $f : \mathbb{B}^2(0,\delta) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathbb{B}^2(0,\delta)$–$\{(0,0)\}$. Seja $\gamma \subseteq \mathbb{B}^2(0,\delta)$–$\{(0,0)\}$, $\gamma = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ isso significa que cada função coordenada é diferenciável isso também pode ser encontrada no livro de Guidorizzi (1986) e no Bortolossi (2002) também.

Seja $g(t) = f(\gamma(t))$, então $g'(t) = (f(\gamma(t)))' = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)$

$$= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Vamos dividir em dois casos:

1: vamos calcular o comprimento de segmento $[X, Y]$ fora do $(0,0)$, e temos:
$|f(X) - f(Y)| \leq \textit{comprimento}\big(g|_{[0,1]}\big)$, que justamente conetando $f(X), f(Y)$ pois temos: $g(t) = f(X + t(Y - X))$, $g(0) = f(X)$ e $g(1) = f(Y)$.

$$|f(X) - f(Y)| \leq \int_0^1 \langle \nabla f((X) + t(Y - X)), (Y - X) \rangle dt$$

$$\Rightarrow |f(X) - f(Y)| \leq \int_0^1 ||\nabla f((X) + t(Y - X))|| \cdot ||Y - X|| dt.$$

Como as derivadas parciais são limitadas $\exists\ C > 0$ tal que

$$||\nabla f((X) + t(Y - X))|| \leq C.$$

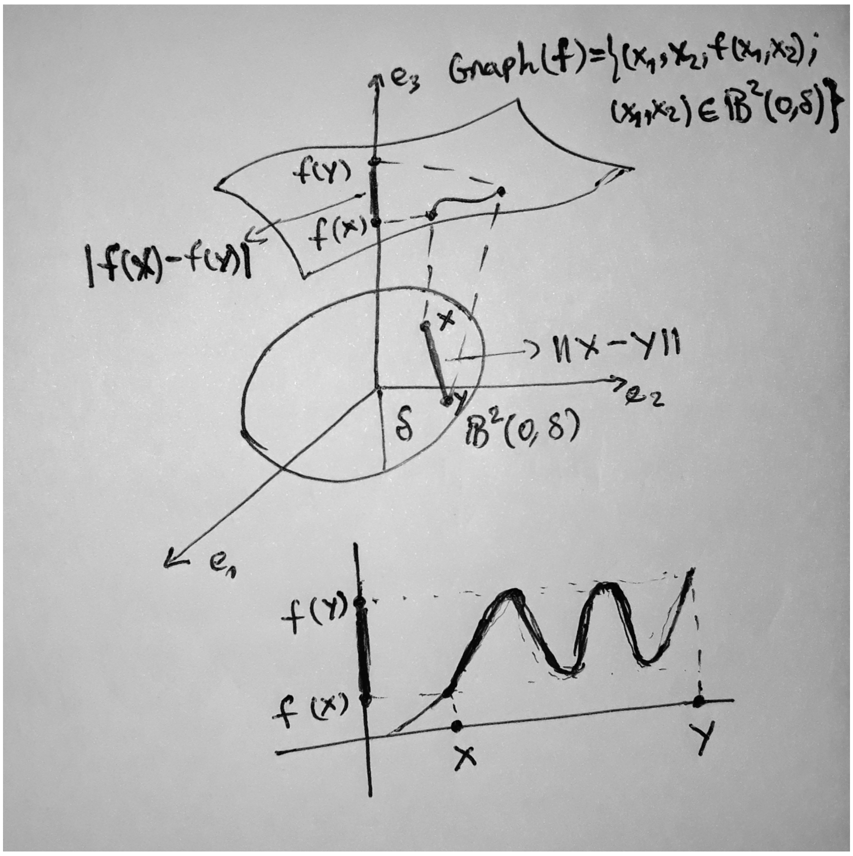

Figura 1: Segmento da reta que passa fora de origem.

Nesta condição, isso não depende do X, Y e nem do t, porque a hipótese é que a derivadas parciais em todos os pontos da bola fora de $(0,0)$ ou seja $\mathbb{B}^2(0,\delta)-\{(0,0)\}$. Recorde agente considerou o caso em que esse segmento não passa pela origem.
Logo

$$|f(X)-f(Y)| \leq \int_0^1 ||\nabla f((X)+t(Y-X))|| \cdot ||Y-X||dt$$

$$\leq C\int_0^1 ||Y-X||dt = C||Y-X|| \int_0^1 dt = C||Y-X||$$

$$|f(X)-f(Y)| \leq C||Y-X||.$$

Já provamos que vale a desigualdade quando o segmento que conecta $[X,Y]$ não passa pelo $(0,0)$. Para terminar falta provar o segundo caso.
2: Aqui precisamos calcular o comprimento de segmento $[X,Y]$ passando pelo $(0,0)$. Temos que a equação da reta $[X,Y]$, é $Y = \lambda \cdot X,\ \lambda \neq 0$ na $\mathbb{B}^2(0,\delta)$. Daí vamos calcular a integral em todo segmento, mas não no $(0,0)$ e depois vamos concluir com argumento do limite que funciona.
Se mostramos que vale a condição lipschitz para $X \neq 0$ e $Y = 0$, então vale a condição Lipschitz para $X \neq 0$ e $Y = \lambda \cdot X$, $\lambda < 0$, (vamos assumir que $f(0,0) = 0$).

Então se tiver

$$|f(X) - f(0,0)| \leq C||X - (0,0)||.$$

Daí queremos mostrar que se a desigualdade vale para $(X, 0)$ então vale também para (X, Y) e como Y é simétrico então temos essa equação também $Y = -\lambda \cdot X$.
Logo temos:

$$||f(X) - f(0) + f(0) - f(\lambda \cdot X)||$$

$$\leq ||f(x) - f(0)|| + ||f(0) - f(\lambda \cdot X)|| \leq C||X - 0|| + C||0 - \lambda \cdot X|| = C||X - \lambda \cdot X||.$$

Então temos

$$||f(X)|| = ||f(X) - f(0,0)|| \leq \textit{comprimento}\big(g(t \cdot X);\ t \in [0,1]\big)$$

o g é o mesmo do segmento da reta que passa fora de $(0,0)$.
Mas note esse é o caso particular da outra que tem $(X + t(Y - X))$ Mas agora o nosso $Y = 0$. Veja que não podemos calcular a integral até o zero pois a função não é diferencial até o zero.
Daí, vamos considerar o $\textit{comprimento}\big(g(t \cdot X);\ t \in [\lambda, 1]\big)$, agora vamos poder considerar um λ perto do zero, porque não pode calcular integral no zero. Assim:

$$\int_\lambda^1 |g'(t \cdot X)| dt \leq \int_\lambda^1 ||\nabla f((t \cdot X))|| \cdot ||X|| dt$$

$$\leq C \int_\lambda^1 ||X|| dt \quad \leq C||X|| \int_\lambda^1 dt \quad = C||X||(1 - \lambda).$$

$$\therefore ||f(x) - f(\lambda \cdot X)|| \leq C||X||(1 - \lambda)$$

Quando $\lambda \to 0$ fica $||f(X)|| \leq C||X||$.

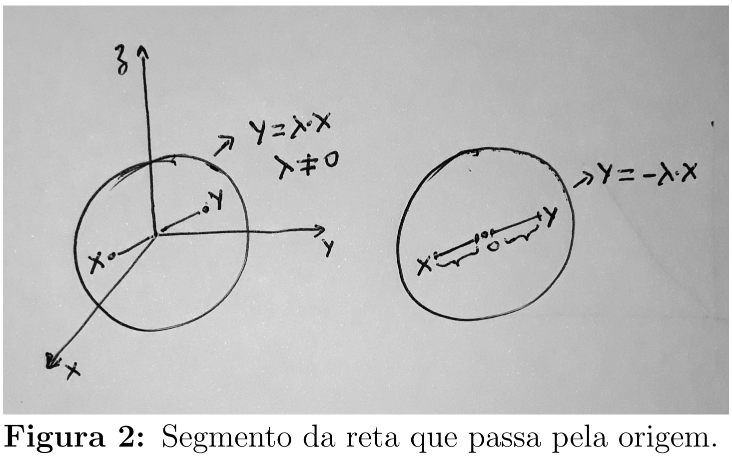

Figura 2: Segmento da reta que passa pela origem.

Nota: *o* $\textit{comprimento}\big(g(t \cdot X);\ t \in [0,1]\big)$ dessa curva para todo λ próximo de zero, o comprimento é limitado, então quando chegar no zero o comprimento também vai ficar limitado pela mesma constante.

■

Este capítulo é muito fundamental no estudo dos próximos capítulos, onde consolidarmos alguns critérios importantes para podemos ter uma superfície Lipschitz, da equações que podemos utilizar no estudo dos casos do tipo $x^m + y^m = z^m$.

3 SUPERFÍCIES LIPSCHITZ

Definição 3.1 *Seja* $S \subseteq \mathbb{R}^3$, $(0,0,0) \in S$ *é dita superfície próximo de* $(0,0,0)$ *quando existe uma aplicação* $F : \mathbb{B}^2(0,\delta) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *que é homeomorfismo sobre* $F(\mathbb{B}^2(0,\delta))$, $F(0,0) = (0,0,0)$ *e* $F(\mathbb{B}^2(0,\delta)) = S \cap U$, *onde* U *é uma aberto conexo de* $\mathbb{R}^3$ *contendo* $(0,0,0)$.

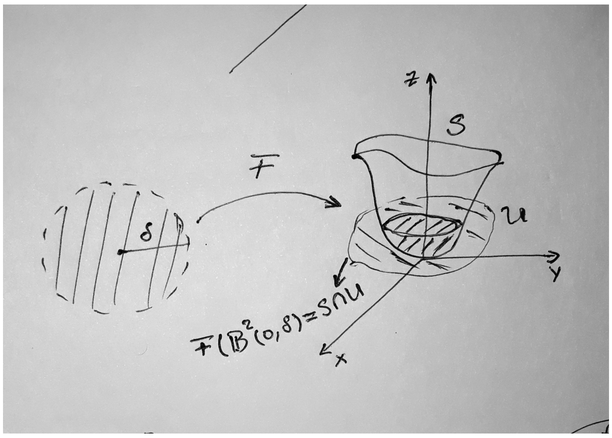

Figura 3: Imagem de superfície.

Definição 3.2 *Dizemos que* S *será dita superfície Lipschitz próximo de* $(0,0,0)$ *quando homeomorfismo* F *for Lipschitz e sua inversa* F^{-1} *também for Lipschitz.*

Trabalharemos sobre o domínio,

$$\mathbb{B}^2(0,\delta) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < \delta\}.$$

Proposição 3.1 *Seja* $S \subseteq \mathbb{R}^3$, $(0,0,0) \in S$, *e existe* $F : \mathbb{B}^2(0,\delta) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *onde* $F(x,y) = (x, y, f_3(x,y))$ *e* $F(\mathbb{B}^2(0,\delta)) = S \cap U$, *onde* U *é algum vizinhança em* $\mathbb{R}^3$ *de* $(0,0,0) \in S$. *Se* f_3 *é um função Lipschitz então* S *é uma superfície Lipschitz próximo de* $(0,0,0)$.

Demonstração: Precisamos mostrar que essa aplicação é bi-Lipschitz, mas vimos que a f_3 é Lipschitz no exemplo 2.1, então precisamos provar a volta que é a inversa $F^{-1} : F(\mathbb{B}^2(0,\delta)) \to \mathbb{B}^2(0,\delta)$, $F(\mathbb{B}^2(0,\delta)) = \{(x, y, f_3(x,y));\ (x,y) \in \mathbb{B}^2(0,\delta)\}$.
Daí vamos verificar se a função é injetiva: e sabemos que para uma função ser injetiva os elementos do conjunto domínio deve ter só uma correspondência no conjunto imagem, então temos:

$$F(x,y) = F(u,v) \Leftrightarrow (x, y, f_3(x,y)) = (u, v, f_3(u,v)) \Leftrightarrow (x, y, f_3(x,y)) - (u, v, f_3(u,v)) = 0$$

$$(x-u, y-v) = 0 \Leftrightarrow x-u = 0, y-v = 0 \Leftrightarrow x = u, y = v \Leftrightarrow (x,y) = (u,v).$$

Logo a função é injetora, note que pela definição dela ela já é sobrejetiva, porque o pontos da aplicação e sobre a imagem $F(\mathbb{B}^2(0,\delta))$ ou seja o contradomínio dela é exatamente a imagem de (F), portante sobrejetividade já é imediato. Daí a prova da inversa é seguinte: Temos que $F^{-1} : F(\mathbb{B}^2(0,\delta)) \to \mathbb{B}^2(0,\delta)$, seja $p, q \in S \cap U$. Então queremos provar que existe $C > 0$ tal que

$$||F^{-1}(p) - F^{-1}(q)|| \leq C||p - q||.$$

como $p, q \in F(\mathbb{B}^2(0,\delta))$ então $p = (x, y, f_3(x,y))$ e $q = (u, v, f_3(u,v))$, para alguns $(x,y), (u,v) \in \mathbb{B}^2(0,\delta)$

$$||F^{-1}(x, y, f_3(x,y)) - F^{-1}(u, v, f_3(u,v))|| \leq C||(x, y, f_3(x,y)) - (u, v, f_3(u,v))||.$$

Temos que a inversa aplicado na função

$$F^{-1}(x, y, f_3(x,y)) = F^{-1}(F(x,y)) = (x,y)$$

e

$$F^{-1}(x, v, f_3(u,v)) = F^{-1}(F(u,v)) = (u,v).$$

Logo

$$||(x,y) - (u,v)|| \leq C||x-u, y-v, f_3(x,y) - f_3(u,v)||$$

$$||(x-u), (y-v)|| \leq C||(x-u, y-v, f_3(x,y) - f_3(u,v))||$$

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \leq C\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (f_3(x,y) - f_3(u,v))^2}.$$

Veja que isso é verdade para $C = 1$, porque o termo $(x-u)^2 + (u-v)^2$ do segundo membro controla o de primeiro membro. Portanto F^{-1} é Lipschitz.

Conclusão: Se $S \cap U \subseteq \mathbb{R}^3$ é dada como imagem de uma função $F : \mathbb{B}^2(0,\delta) \to F(\mathbb{B}^2(0,\delta))$, onde $F(x,y) = (x,y,f_3(x,y))$ com $f_3 : \mathbb{B}^2(0,\delta) \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz então, temos que S será uma superfície Lipschitz próximos de $(0,0,0)$.

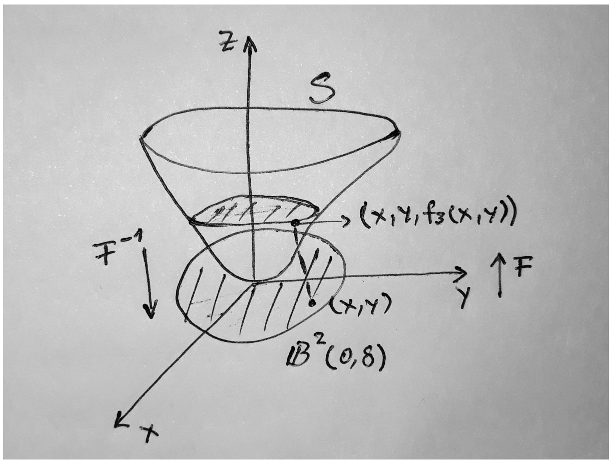

Figura 4: Imagem de aplicação bi-Lipschitz.

■

Exemplo 3.1 *O conjunto $S_1 = \{(x,y,z); / x^2+y^2 = z^2, z \geq 0\}$ é uma superfície Lipschitz.*

De fato, Dada $z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$ sabemos que a expressão representa a parte superior do cone. Logo teremos: $\Pi|_{S\cap\mathbb{B}_3(0,\delta)} : (x,y,z) = (x,y,0)$, e $\Pi^{-1}(x,y,0) = (x,y,\sqrt{x^2+y^2})$. Note que no exemplo 2.6 foi mostrado que Π^{-1} é Lipschitz. Então teremos como:

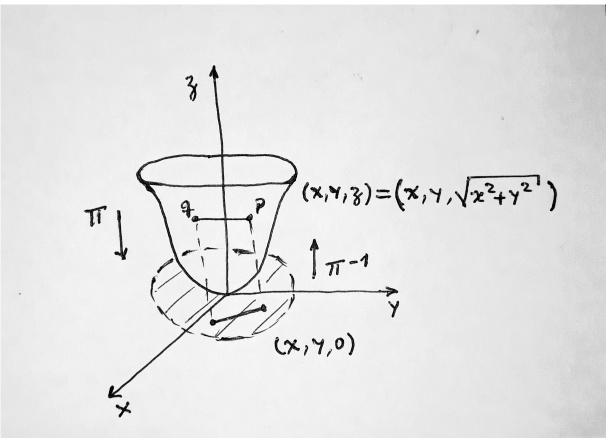

Figura 5: Imagem da projeção Lipschitz.

4 SUPERFÍCIES DESCRITAS POR $X^P + Y^P = Z^P$

Teorema 4.1 *Qualquer superfície $S \subseteq \mathbb{R}^3$ dado pela equação $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^{2m} + y^{2m} = z^{2m};\ z \geq 0\}$ é uma superfície Lipschitz.*
Demonstração: $f_3(x,y) = (x^{2m} + y^{2m})^{\frac{1}{2m}}$ é contínua porque ela é composta das funções contínua. Como $x^{2m} + y^{2m}$ é sempre positiva então a raiz fica contínua.
Seja equação dada por $x^{2m} + y^{2m} = z^{2m} \Rightarrow z = (x^{2m} + y^{2m})^{\frac{1}{2m}}$, onde $f_3(x,y) = z$. Assim $f_3(x,y) = (x^{2m} + y^{2m})^{\frac{1}{2m}}$
E as derivadas parciais em funções de (x,y) e dada por:

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2m}(x^{2m} + y^{2m})^{\frac{1}{2m}-1} \cdot 2mx^{2m-1} \Rightarrow \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = x^{2m-1}(x^{2m} + y^{2m})^{\frac{1-2m}{2m}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial x} = \frac{x^{2m-1}}{(x^{2m}+y^{2m})^{\frac{2m-1}{2m}}}.$$

$$\frac{\partial f_3(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2m}(x^{2m} + y^{2m})^{\frac{1}{2m}-1} \cdot 2my^{2m-1} \Rightarrow \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial y} = y^{2m-1}(x^{2m} + y^{2m})^{\frac{1-2m}{2m}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_3(x,y)}{\partial y} = \frac{y^{2m-1}}{(x^{2m}+y^{2m})^{\frac{2m-1}{2m}}}.$$

Agora precisamos mostrar que as derivadas parciais são limitadas para depois concluir que a superfície é Lipschitz. Vamos calcular quociente:

$$\frac{x^{2m-1}}{(x^{2m} + y^{2m})^{\frac{2m-1}{2m}}} = \left(\frac{x^{2m}}{x^{2m} + y^{2m}}\right)^{\frac{2m-1}{2m}} \leq 1.$$

Pois $x^{2m} \leq x^{2m} + y^{2m}$.
Conclusão: logo temos que $f_3(x,y) = \sqrt[2m]{x^{2m} + y^{2m}}$ é Lipschitz. Portanto pelo proposição 3.1, a teorema 2.1 em cima, provamos que a superfície $S \subseteq \mathbb{R}^3$ dado pela equação $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^{2m} + y^{2m} = z^{2m};\ z \geq 0\}$ é uma superfície Lipschitz.

∎

5 CONCLUSÃO

A abordagem métrica de superfícies algébricas com base nas ferramentas de cálculo, e desigualdade triangular pode motivar a extensão desse estudo para quaisquer superfícies $x^m + y^m = z^m$. Mais particularmente, no interesse em entender qual é o alcance das ferramentas elementares.
Portanto, ficar a recomendação aos leitores para perceber os cálculos que foram desenvolvidos junto com as ilustrações que as figuras nos trazem. Porque é muito interessante nas pesquisas do estudo métricos das superfícies ou na topologia de superfície.

REFERÊNCIAS

Bortolossi, Humberto José. *Cálculo Diferencial à várias variáveis.* Edicoes Loyola, 2002.

Do Carmo, Manfredo Perdigão. *Geometria diferencial de curvas e superfícies.* Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

Guidorizzi, HL. Um Curso de Cálculo, vol. 2 e vol. 3. *Ao Livro Técnico SA*, 1986.

Lima, Elon Lages. *Curso de análise.* 517 LIM. 1995.

Lima, Elon Lages. *Análise real.* Impa, 2004.