UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELISIO DA COSTA NHUTA

TEOREMA DE PITÁGORAS SOB O PONTO DE VISTA DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

REDENÇÃO-CE

2021

ELISIO DA COSTA NHUTA

TEOREMA DE PITÁGORAS E SUA APLICAÇÃO SOB O PONTO DE VISTA DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. MARCELO DÁRIO DOS SANTOS AMARAL

REDENÇÃO - CE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Nhuta, Elísio da Costa.

N479t

Teorema de Pitágoras e sua aplicação sob ponto de vista dos elementos de Euclides / Elísio da Costa Nhuta. - Redenção, 2021.
43f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral.

1. Matemática - História. 2. Pitágoras, Teorema de. 3. Euclides, Elementos de. I. Título

CE/UF/BSP CDD 510

ELÍSIO DA COSTA NHUTA

TEOREMA DE PITÁGORAS E SUA APLICAÇÃO SOB O PONTO DE VISTA DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 24/08/2021

BANCA EXAMINADORA

Marcelo Dário dos S. Amaral

Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Weslley Marinho Lozório

Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Prof. Dr. Rafael Jorge Diógenes Pontes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dedico este trabalho aos meus pais Vicente Nhuta e Domingas da Costa (in mimoriam), com todo meu amor e gratidão, pela educação e pelo caminho que me mostraram e pelos conselhos, que de uma forma fizeram muita diferença em minha vida acadêmica. Aos meus queridos irmãos Paulino e Chico (in mimoriam), que nos deixaram há 3 anos, mas fizeram tanta coisa por mim ao longo das suas vidas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde, energia, força e a capacidade que me deu para poder encarrar o curso. Meus agradecimentos aos meus pais Vicente Nhuta e Domingas da Costa, por todo que me mostraram e por todo que me ensinaram para ter a coragem de enfrentar qualquer que seja desafio.

Agradeço governo brasileiro pela cooperação no setor educacional com a Guiné-Bissau, em especial a Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), pela oportunidade que me deu para construir minha vida acadêmica, pelo ensino de qualidade e pela assistência estudantil que manteve minha permanência durante esses cinco anos na Universidade.

Aos professores, funcionários e à coordenação pelo imenso profissionalismo que me faz pessoa e licenciado.

Ao professor Dr. Macelo Dario Dos Santos Amaral (Orientador), o meu mais sincero agradecimento por todos os ensinamentos, orientação, paciência e compreensão.

Agradeço minha família, sobretudo meus irmãos Inácio, Albino, Neneta, Vitor, Neusa, Zânia, Tomás, Armando, Zito e Marcelino, pelo apoio e confiança depositada em mim. As minhas primas Terezinha, Betinha, Nélida e Elve, pelo encorajamento. Agradeço minha sobrinha Filomenta, pelo apoio, aos meus queridos sobrinhos Prescott, Pucurucho, Dabu e minha cunhada Djenabu, pelo sucesso, que sempre desejavam para mim.

Agradeço colegas Franklin, Edson Xavier, Nayuca, Manfinapul, Gilmar, Danildo, Benedito,pelo apoio, sobretudo Ivanildo Rui Barbosa, que me acolheu na minha fase inicial do curso até este momento.

Meus agrdecimentos aos colegas da turma, princípalmente Elizandro, Agostinho, Hernani e Afonso, pela união e apoio em todo momento que estivemos juntos e agradeço a todos que contribuiram no meu crescimento acadêmico de forma direta ou indireta, em especial meus amigos Constantino, Carrecor e Midana, pelo apoio que me deram durante a construção deste trabalho.

Por fim, meus agradecimentos a banca examinadora, na pessoa de Professor Dr. Weslley Marinho Lozorio e Professor Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes, por aceitarem o convite para estarem presente a darem valiosas contribuições para este trabalho.

"Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes."
Isaac Newton

RESUMO

O objetivo deste trabalho, é aplicar os elementos de Euclides na demonstração do Teorema de Pitágoras e sua aplicação na quadratura de figura plana. O método utilizado para esboçar figuras foi software geogebra, ferramenta tecnológica que permite fazer construção geométrica básica, com a utilização de régua não graduada. O trabalho conta, com uma breve história de Pitágoras e Euclides, bem como a apresentação do sistema axiomático de Euclides e os fundamentos da geometria plana apresentado por David Hibert, para complementar os elementos de Euclides, na construção da geometria plana completa sem lacuna, nas quais aborda-se alguns axiomas indispensáveis, para o desenvolvimento do tema. Além disso, o mesmo apresenta definição e classificação dos paralelogramos, assim como, a demonstração das proposições que permitem provar o teorema de Pitágoras. Pelo resultado obtido, percebe-se que, este teorema, é fundamental no estudo da geometria plana possibilitando a soma dos quadrados, como no caso de quadratura de polígono de n lados, ou seja, na equivalência de áreas. Por fim, pretende-se que esse trabalho de conclusão de curso sirva de motivação aos professores a valorizarem história da matemática, como essência no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: História da Matemática. Teorema de Pitágoras. Elementos de Euclides.

ABSTRACT

The aim of this work is to apply Euclid's elements in the proof of the Pythagorean Theorem and its application in the square figure quadrature. The method used to sketch figures was geogebra software, a technological tool which permit to do the basic geometric construction, with the use of a non-graded ruler. The work has a brief history of Pythagoras and Euclid, as well as the presentation of Euclid's axiomatic system and the fundamentals of plane geometry presented by David Hibert, to complement Euclid39;s elements, in the construction of complete plane geometry without gaps, in which are addressed some essential axioms for the development of the theme. In addition, it presents the definition and classification of parallelograms, likewise the proof of the propositions that admit to prove the Pythagorean theorem. From the result obtained, it can be seen that this theorem is fundamental in the study of plane geometry, enabling the sum of squares, as in the case of quadrature of a polygon with n sides, that is, in the equivalence of areas. Finally, this course conclusion work is intended to motivate teachers to value the history of mathematics as an essence in the teaching and learning process.

Keywords: History of Mathematics.Pythagorean theorem. Elements of Euclid.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$Quad(BC)$ = Quadrado de lado BC
$Ret(AF, FB)$ =Retângulo de lados AF, FB

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Alfa
β	Beta

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho de conclusão do curso, disserta sobre o teorema de Pitágoras, possivelmente, teorema mais famoso no campo de estudo da matemática. Aqui, faremos uma abordagem baseada na história da matemática, seguindo os elementos de Euclides. Este teorema é universalmente conhecido, sobretudo na geometria plana onde se usa com frequência. Também é aplicado em diversas áreas do conhecimento para encontrar a medida de um cateto conhecendo os outros dois lados. O teorema afirma que, **o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos**. O mesmo leva o nome de Pitágoras por ser primeiro a descobrir a fórmula que hoje conhecemos, porém, tudo indica que o teorema "era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milénio antes"(Santos, 2011, p. 1).

No que se refere ao modo de como eles calculavam o lado do triângulo retângulo, está escrito em um tablete guardado hoje no Museu britânico da seguinte maneira:

4 é o comprimento, 5 é o diagonal e qual é a altura?

Então, para encontrar a resposta o procedimento aplica-se, 4 vezes 4 dá 16, 5 vezes 5 dá 25. Subtraindo 16 de 25 dá 9. Qual número devo tomar e quando multiplicar por si dá 9? Percebe-se que, 3 é o único pois, 3 vezes 3 dá 9, portanto 3 é a altura do triângulo (Santos, 2011).

Com esta demonstração, percebemos que o conhecimento que os babilônios tinham sobre o triângulo retângulo, provavelmente não despertava atenção de grandes matemáticos da época.

Neste trabalho, utilizamos como recurso tecnológico o software Geogebra, que mostrará os esboços executados de construção geométrica básica, com a utilização de régua não graduada para encontrar a equivalência de áreas. A escolha do tema surgiu na perspectiva de tentar compreender os processos que se faziam na antiguidade para encontrar equivalência de áreas, uma vez que, hoje em dia esses métodos são usados com pouca frequência, devido a aplicação de novas fórmulas matemáticos no ensino.

Portanto, o objetivo geral deste trabalho é aplicar os elementos de Euclides na demonstração do teorema de Pitágoras e sua aplicação na equivalência de áreas, e apresentar os elementos de euclides e cinco grupos de axiomas de Hilbert.

No próximas capítulo 2, nas seções 2.1 e 2.2 veremos uma breve história sobre a vida e obra de Pitágoras e Euclides. Em seguida, apresentaremos os elementos de Euclides que atráves do método axiomático são aceito alguns fatos como evidentes. Ainda, veremos os fundamentos da geometria apresentado por David Hilbert, para a construição completa da geometria plana euclidiana, nos quais veremos os cinco grupos de axiomas. No mesmo capítulo, para fechar, falaremos da definição e classificação dos paralelogramos. Por fim, no terceiro capítulo, traremos demonstração de três proposições que posteriormente vão auxilhar na demonstração do teorema de Pitágoras, onde também será aplicado o teorema na quadratura do retângulo e do polígono de n lados. E na consideração final, veremos a relevância do teorma.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo está configurado em cinco seções a saber, as quais na primeira e segunda seção apresentaremos uma breve história sobre Pitágoras e Euclides, na terceira definições, axiomas e postulados definidos por Euclides para o estudo da Geometria Plana que de certa forma os elementos introduzidos por ele, não são suficientes para demonstrar todas as afirmações, ou seja, provar todos passos da construção geométrica baseados nos postulados e axiomas, que é necessário na quarta seção apresentar os Fundamentos da Geometria introduzidos por David Hilbert para culminar erros nos elementos contidos ou complementar os elementos de Euclides com o intuito de obter uma Geometria explícita e sem lacunas e na última seção apresentaremos definição e classificação do paralelogramo.

2.1 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE PITÁGORAS

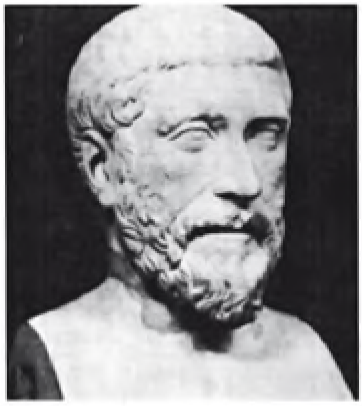
Sobre a vida do Pitágoras, parece ter nacido por volta de 572 a.C. na ilha Grega na Cidade de Samos (Eves, 2011). Conforme Russell (1957, p. 35) ele “ [...] era filho do deus Apolo [...] na época em que viveu, Samos era governado pelo tirano Polícrates [...]” de modo que o poder estava sob seu controle até por volta de 515 A. C.

Como na antiguitadade os autores gregos consideravam e manifestavam seu respeito pela sabedoria oriental e essa sabedoria era acessível a todos que pudessem viajar ao Egito e a Babilônia (Eves, 2011). Fato que se condicionou “Pitágoras a viajar para o Egito, adquirindo lá uma grande parte de sua sabedoria” (RUSSELL, 1957, p.36). Como afirma Eves:

> ao retornar a Samos encontrou o poder nas mãos do tirano Policrates e a Jônia sob o domínio de Samos, decidiu então emigrar para o porto marítimo de Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália. Lá fundou a famosa escola pitagórica, que, além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimonias (Eves, 2011, p. 97).

Entende-se que, no sul da Itália, Pitágoras sofreu tantas perseguições sobre sua ideologia e teve que fugir para Metaponto (cidade da Itália) onde foi morto, é provável que tenha sido assassinado com uma idade entre 75 e 80 anos de idade (Eves, 2011).

Figura 1 – Pitágoras.



Fonte: Eves (2011).

Só para perceber que além da descoberta do famoso teorema referente ao triângulo retângulo que leva seu nome, Russell (1957, p. 41) afirma que Pitágoras "descobriu a importância dos números na música, e a ligação por ele estabelecida entre a música e a aritmética sobrevive nos termos matemáticos "média harmônica" e "progressão harmônica", isto é, quantidade de números dividida pela soma de inverso desses números, e a mudança do ritmo em diferentes níveis e passagens.

2.2 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE EUCLIDES

Quase nada se sabe sobre a vida de Euclides, de acordo com Roque e Pitombeira (2012, p. 66) "Euclides viveu em torno de 300 a.E.C. Não se conhecem as datas de seu nascimento e morte". Para Eves (2011, p. 167) Euclides, "parece, o criador da famosa e duradora escola de matemática de Alexandria da qual, sem dúvidas foi professor [...] mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas".

Figura 2 – Euclides.

Fonte: Wikipédia (2021).

Ora, referente a obra, o livro se compõe de 465 proposições distribuídas em 13 livros, ou seja, 13 capítulos, os elementos se dividem em três grandes partes conforme apontam Roque e Pitombeira (2012, p.67):

1. Geometria plana – Livros I-VI;
2. Aritmética – Livros VII-X;
3. Geometria espacial – Livros XI-XIII.

O que de fato, os primeiros livros dos elementos cujo uma das finalidades seria o de mostrar que várias construções geométricas podem ser efetuadas apenas com régua não graduada e compasso.

A obra de Euclides hoje se encontra mais de mil edição impressas em todo o mundo, desde a primeira em 1482, no qual as proposições são deduzidas de um sistema axiomático de forma didática cujo único concorente em número de tradução é a Bíblia (Roque e Pitombeira, 2012).

2.3 OS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Na seção anterior vimos que a obra de Euclides está dividida em treze capítulos ou livros, nos quais no livro I dos elementos trata da Geometria Plana que refere ao estudo de figuras geométricas, de acordo com Silva e Viglioni (2011), este livro possui 23 definições, bem como axiomas e postulados. Nesta perspectiva, não vamos falar de todas as definições citadas, mas sim vamos estabelecer algumas que serão utilizadas durante o desenvolvimento do trabalho, fundamentado no livro de Roque e Pitombeira (2012). Nele as afirmações dos elementos se encontram no Livro I seguinte:

- Definições:
  I. Ponto é o que não tem partes.
  II. Reta é o que tem comprimento sem largura.
  III. As extremidades da linha são pontos.
  IV. Linha reta é aquela que está posta igualmente entre as suas extremidades.
  V. Superfície é o que tem comprimento e largura.
  VI. As extremidades da superfície são linhas.
  (. . .)
  X. Quando uma linha reta incidindo sobre outra linha reta fizer com esta dois ângulos iguais, cada um destes ângulos iguais se chama ângulo reto e a linha incidente se diz perpendicular à outra linha sobre a qual incide.
  XI. Um ângulo é obtuso se é maior que um ângulo reto.
  XII. E um ângulo é agudo se é menor que um ângulo reto.
  (. . .)
  XV. Círculo é uma figura plana, fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência, de maneira que todas as linhas retas que, de um certo ponto existente no

meio da figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si.

As definições foram primeiros, depois vem os axiomas em seguida.

- Axiomas:
I. As coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si.
II. Se a coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.
III. Se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.
IV. Se a coisas desiguais se juntarem outras iguais, os todos serão desiguais.
V. Se de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os restos serão desiguais.
VI. Quantidades que perfazem cada uma o dobro de outra quantidade são iguais.
VII. Quantidades que são metades de uma mesma quantidade são também iguais.
VIII. Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com a outra são iguais.
XIX. O todo é maior do que qualquer das suas partes.
X. Duas linhas retas não compreendem um espaço (uma superfície).

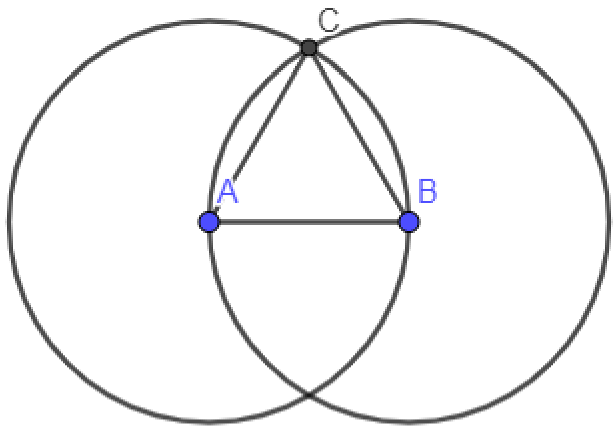
Por último, temos os 5 postulados apresentados abaixo.

- Postulados: I. Pede-se que se desenhe uma reta de um ponto qualquer até outro ponto qualquer.
II. E que se produza uma linha reta finita continuamente em uma linha reta.
III. E que com qualquer centro e qualquer distância se descreva um círculo.
IV. E que todos os ângulos retos sejam iguais.
V. E que, se uma linha reta cortando duas linhas retas torna os ângulos interiores do mesmo lado menores que dois retos, as linhas retas, se continuadas indefinidamente, se encontrem deste lado no qual os ângulos são menores que dois retos.
No ponto de vista de Santos e Viglioni (2011), o sistema axiomático compõe uma sequência de afirmações para chegar numa verdade inquestionável, isto é, um processo repetitivo com a finalidade de provar que uma afirmação é verdadeira seguindo logicamente de alguma outra afirmação, a qual você acredita ser verdadeira.
E pode-se perceber que, nos elementos Euclides adota o método axiomático para deduzir proposições e através deles são aceitos alguns elementos como evidentes. Segundo Santos e Viglioni (2011) apesar de muitos resultados complicados e implícitos encontrados nos problemas com apenas cinco postulados acima citados Euclides foi capaz de deduzir 465 proposições.
Logo, a seguir vamos demonstrar a primeira proposição do livro I que trata de construção do triângulo equilátero.

Proposição 2.1 (PROPOSIÇÃO: 1.I) *Sobre uma determinada reta construir um triângulo equlátero.*

Construção: Dada uma linha reta qualquer de extremidades A e B (Postulado I). Pelo postulado III, trace um círculo com centro em A e raio igual a reta AB, com a mesma distância ou raio BA, descrevendo outro círculo com centro em B. Seja C um dos pontos da interseção dos círculos, pelo postulado I sobre os centros A e B trace as retas AC e BC, de modo que obtemos o triângulo ABC desenhado a seguir.

Figura 3 – Triângulo equilátero.



Fonte: Autor.

Note que AB é igual AC, assim como BA é igual BC, lembrando que AB é igual BA por serem raios com a mesma distância, portanto AC, AB e BC são iguais pelo axioma I as coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si, logo triângulo ABC é equilátero como queríamos provar. Perceba que na costrução deste triângulo utilizamos postulado para traçar as retas, definição para descrever os círculos e axioma para demonstrar igualdade dos lados do triângulo, mas nehum destes elementos foram utrilizados para provar a existência de ponto de interseção entre círculos. Bem sabe que a construção geométrica a partir dos elementos precisa ser justificada todos os passos, desse modo nada está explícito sobre o ponto da interseção.

Por um lado, pode-se perceber que, a falta de clareza nos elementos de Euclides fez com que David Hilbert apresentasse um sistema de 21 axiomas, com passar o tempo reduziu para 20 para construção geométrica sólida segundo (Roque e Pitombeira, 2012). Na próxima seção veremos alguns desses axiomas.

2.4 AXIOMAS DE DAVID HILBERT PARA GEOMETRIA PLANA

Nesta seção, apresentaremos alguns elementos significantes que complementam os elementos de Euclides para deixar Geometria Plana completa e inquestionável. Baseados no sistema axiomático de David Hilbert através da sua obra Fundamentos da Geometria destaca-se alguns elementos sem a necessidade de atribuí-los uma definição, ou seja, para definir esses elementos é necessário utilizar-se de outros elementos já conhecidos, caso contrário serão chamados de elementos primitivos e que são conhecidos intuitivamente. Segundo Manfio (2008 apud Asger Aaboe 1984), esses conceitos são então articulados por meio de algumas proposições primitivas, chamadas axiomas, que não se demonstram, pois sua veracidade é evidente.

Para ele um sistema axiomático deve satisfazer três condições seguintes:

1ª Os axiomas não podem contradizer uns aos outros, por si mesmo ou por sua consequência;

2ª Os axiomas devem ser completo no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão;

3ª Cada axioma deve ser independente dos demais de modo a mostrar sua autonomia.

Neste contexto, em 1898-99, David Hilbert apresentou um sistema de 21 axiomas, que depois reduzidos por 20, segundo Manfio (2008) Hilbert, parte de dois termos primitivos que são as noções de ponto e reta, de modo que entre estes termos Hilbert propõe a existência de três relações primitivas a dizer que um ponto pertence a uma reta, um ponto está entre dois pontos e a relação de congruência.

De modo que, “os termos e as relações formam um sistema de axiomas que permitem manipular esses elementos tornando os fundamentos da Geometria mais seguro”(Manfio, 2008). O fato que levou Hilbert a dividir esses axiomas em cinco grupos:

1. Axiomas de Incidência;
2. Aximas de Ordem;
3. Axiomas de congruência;
4. Axiomas de Continuidade;
5. Axioma das Paralelas.

Esses grupos são interessantes na geometria, mas para deixar claro, aqui não será possível de desenvolver todos os 20 axiomas que compõem cinco grupos, mas vamos desenvolver alguns que vão auxiliar na demonstração do teorema e das proposições no capítulo 3.

2.4.1 Axiomas de incidência

Os axiomas de incidência tratam de relação de estar em, referindo ponto e reta no qual são termos primitivos, isto é, conhecidos intuitivamente.

Axioma 1: *Dados dois pontos distintos, A e B, existe uma única reta que os contém.*

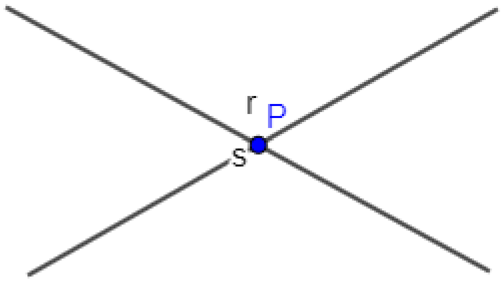
Axioma 2: *Em cada reta existe pelo menos dois pontos distintos.*

Figura 4 – Dois pontos A e B pertencentes a uma reta.

Fonte: Autor.

Definição 2.1 *Duas retas são ditas concorrentes se há um único ponto de interseção entre elas.*

Figura 5 – Interseção de r e s em P.



Fonte: Autor.

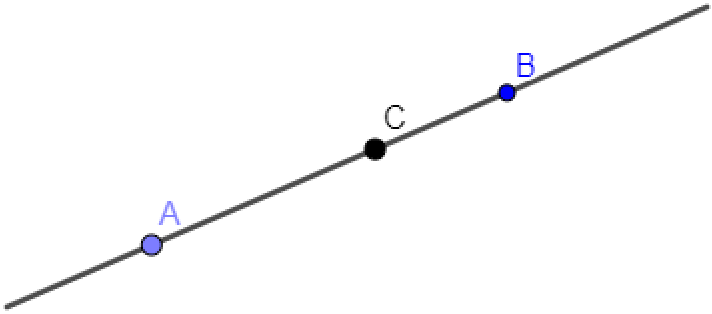
Observe que r e s são duas retas distintas e têm um único ponto P em comum, no qual se intersetam, portanto são concorrentes.

2.4.2 Axiomas de ordem

Neste segundo grupo, o termo primitivo estar entre expressa em uma ordem de sequência dos pontos colineares, de modo que um relaciona com o outro.

Axioma 1:*Dados três pontos distintos pertencentes a mesma reta, apenas um deles está entre os outros.*

Figura 6 – Ponto C está entre A e B.



Fonte: Autor.

Note que, como os pontos A, B e C são colineares, tais que o ponto C está entre A e B, isto é, existe uma relação de ordem entre os pontos, de maneira que C separa A e B.

2.4.3 Axiomas de continuidade

Os axiomas de continuidade vão nos permitir medir certas distâncias entre pontos, ou seja, comparar comprimento do segmento, por exemplo dados dois pontos A e B, respectivamente, então o comprimento do segmento AB será denotado por $\overline{AB}$

AXIOMA 1:*A todo segmento corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, as extremidades coincidem.*

Neste caso o número nesse trabalho corresponde ao comprimento do segmento.

AXIOMA 2:*Se um ponto C está entre dois pontos A e B então $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$*

Isto quer dizer que, o comprimento do segmento AB é a soma dos comprimentos dos segmentos AC e CB.

Definição 2.2 *O ponto médio C de um segmento $\overline{AB}$ é um ponto deste segmento tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.*

2.4.4 Axiomas de congruência

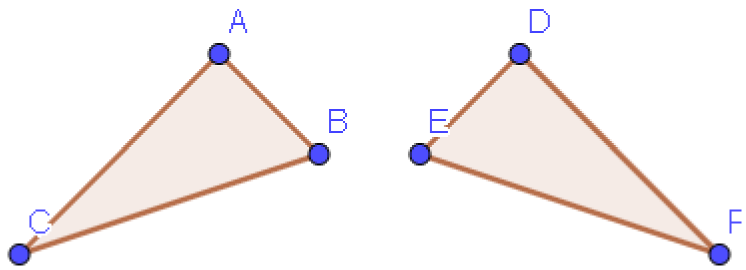
Este grupo de axiomas de congruência refere a comparação de duas figuras que têm mesmo tamanho e mesma forma, mesmo que sejam movidas sempre mantém a mesma medida sem deformar a figura. Assim, veremos a definição da congruência de dois segmentos, ângulos e congruência de dois triângulos. Utilizamos o simbolo "≡"para indicar congruência de duas figuras planas, bem como denotamos ângulo A de seguinte modo $\widehat{A}$.

Definição 2.3 *Dados dois segmentos AB e CD, se têm mesma medida, então* $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. *Da mesma forma os ângulos* $\widehat{A}$ *e* $\widehat{B}$ *possuem mesma medida, então* $\widehat{A}\equiv\widehat{B}$.

Em seguida, veremos a congruência de triângulos e seus casos, de forma que denotaremos um triângulo compreendido por três pontos não colineares A, B e C por $\triangle ABC$ ou apenas triângulo ABC.

Definição 2.4 *Triângulos são ditos congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Figura 7 – Congruência de triângulos.



Fonte: Autor.

Nas figuras acima temos dois triângulos ABC e DEF que são congruentes, pois há correspondência entre seus vérticese $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow F$ e $C \leftrightarrow E$.

E através dessa correspondência de seus vértices, temos seis elementos que permitem verificar a congruência existente, bem como três são lados e três são ângulos, isto é, seus lados são consecutivamente congruentes aos lados do outro e seus ângulos são consecutivamente congruentes aos ângulos do outro.

$$AB = DE,$$

$$AC = DF,$$

$$BC = EF,$$

e

$$\widehat{A} = \widehat{D},$$

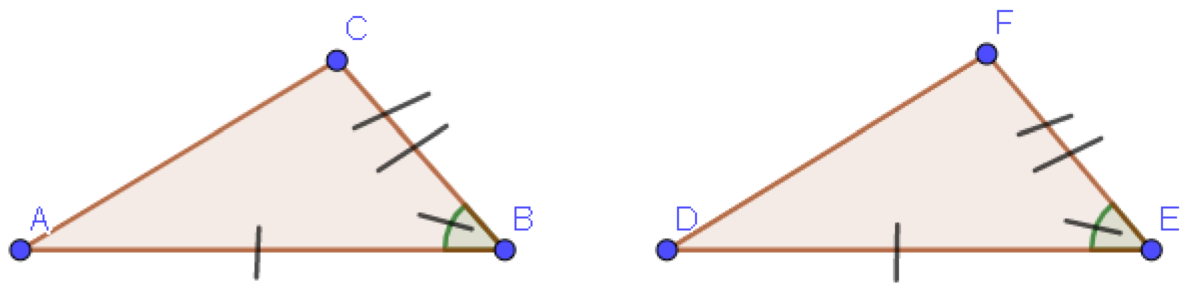
$$\widehat{B} = \widehat{E},$$

$$\widehat{C} = \widehat{F}.$$

Felizmente, podemos verificar alguns conjuntos de condições menores com o intuito de concluir que os triângulos são congruentes. Estes menores conjuntos de condições são os casos abaixo:

1º Caso L.A.L: se dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles forem congruentes a dois lados do outro e o ângulo entre esses lados podemos concluir que esses triângulos são congruentes.

Figura 8 – Congruência de triângulos LAL.



Fonte: Autor.

$$AB = DE,$$

$$\widehat{B} = \widehat{E}$$

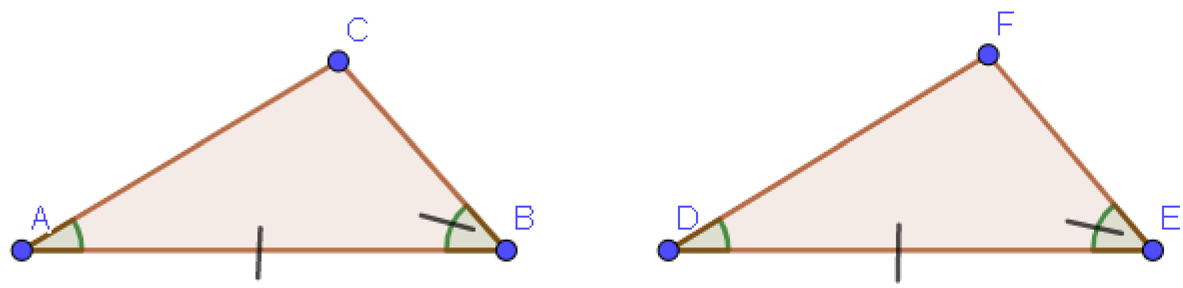
e

$$BC = EF$$

Portanto, pelo caso de congruência lado, ângulo, lado (L.A.L) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

2º Caso A.L.A: Sejam triângulos ABC e DEF possuem cada um dois ângulos consecutivamente congruentes e têm um lado consecutivamente congruente.

Figura 9 – Congruência de triângulos ALA.



Fonte: Autor.

$$\widehat{A} = \widehat{D},$$

$$AB = DE$$

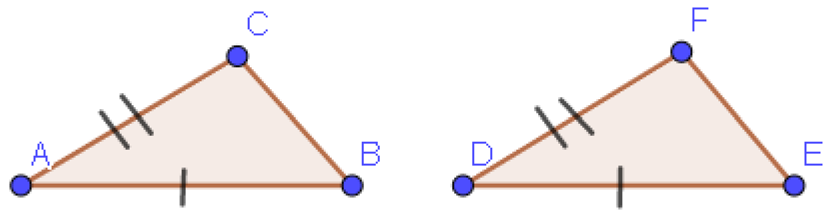
e

$$\widehat{B} = \widehat{E}.$$

Então, pelo caso de congrência ângulo, lado, ângulo (A.L.A) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

3º Caso L.L.L: dados dois triângulos ABC e DEF têm três lados correspondentes, então os triângulos são congruentes.

Figura 10 – Congruência de triângulos LLL.



Fonte: Feita por autor.

$$AB = DE,$$

$$BC = EF$$

e

$$CA = FD$$

Logo, pelo caso de congruêncialado, lado, lado (L.L.L) $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Para tal congruência, basta verificar um desses casos da correspondência, ou seja, demonstrar um desses casos nos dois triângulos é suficiente concluir que são congruentes.

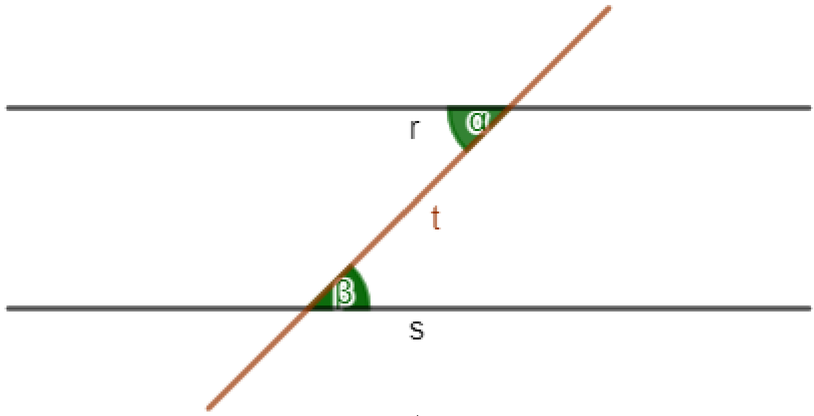
2.4.5 Axiomas das paralelas

No sistema axiomático apresentado, Hilbert considerou o quinto postulado de Euclides como um axioma, este axioma, segundo Manfio (2011), caracteriza o que hoje chamamos de Geometria Euclidiana Plana. Ele vai nos permitir demonstrar vários resultados. Usaremos o simbolo $\parallel$ para indicar retas paralelas ou simplesmente dizer que elas são paralelas. Segue axioma e teorema abaixo.

AXIOMA DAS PARALELAS (PAYFAIR):*Por um ponto que não pertence a uma reta dada, pode-se traçar somente uma reta paralela a esta reta.*

TEOREMA DAS PARALELAS: Dadas duas retas r e s paralelas interceptadas por uma transversal t, então os ângulos alternos internos são congruentes.

Figura 11 – Retas paralelas r e s.



Fonte: Autor.

Observe na figura acima, os ângulos α e β são congruentes, pois são alternos internos. De fato esse teorema mostra que os pontos ou distância entre essas retas permanecem constantes.

Como vimos cinco grupos de axiomas de Hilbert, na próxima seção falaremos de paralelogramos, no sentido de definí-los e classificá-los de acordo com suas propriedades.

2.5 PARALELOGRAMOS

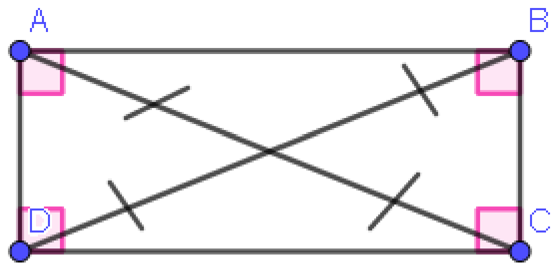
Uma figura geométrica é denominada paralelogramo se é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos e se satisfazer as seguintes propriedades: os lados opostos de um paralelogramo são congruentes e paralelos; tanto quanto os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e as diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seus pontos médios.

Quanto a classificação, os paralelogramos podem ser classificados na base de suas dimensões e dividos por grupos de retângulos, de quadrados e os demais que apresentam as relações que os difinem como paralelogramos.

2.5.1 Retângulo

Um retângulo é um paralelogramo que possui quatro ângulos retos. Além desta definição, há propriedade que relaciona suas diagonais de modo que afirma: em todo retângulo as diagonais são congruentes, portanto, todo paralelogramo é retângulo se, e somente se, as diagonais são congruentes.

Figura 12 – Retângulo.

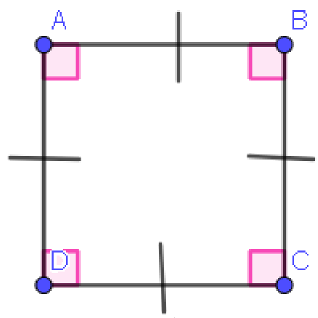


Fonte: Autor.

2.5.2 Quadrado

Um quadrado é um paralelogramo compreendido por quatro ângulos retos e quatro lados congruentes, também goza as seguintes propriedades: Todo quadrado é retângulo, mas nem todo retângulo é quadrado, o que implica todo retângulo que possui lados congruentes é definido como um quadrado, como mostra figura a seguir.

Figura 13 – Quadrado.



Fonte: Autor.

3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS E SUA APLICAÇÃO

Neste capítulo, o principal do estudo, demonstraremos o objeto chave do trabalho, Teorema de Pitágoras, assim como sua aplicação na quadratura de retângulo e de polígono de n lados.

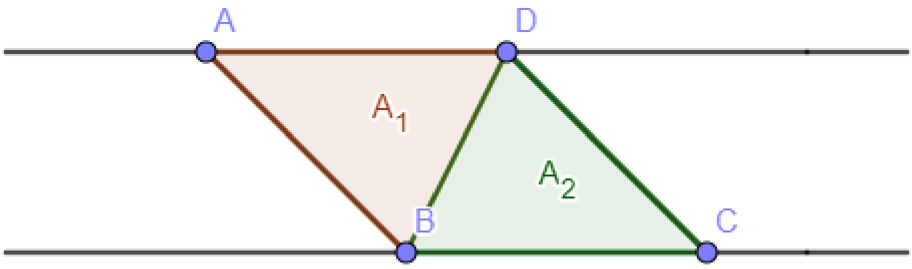
3.1 TEOREMA DE PITÁGORAS

Nesta seção, abordaremos a demonstração do Teorema de Pitágoras por elementos de Euclides, lembrando que, na linguagem antiga dos gregos, o famoso teorema afirma que, o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma dos quadrados construídos sobre os catetos, no sentido de que as áreas são iguais. Para realizar esta demonstração, iniciando com a demonstração de três proposições do livro I dos elementos, seguindo as contruções geométricas com uso de software Geogebra.

Proposição 3.1 *[PROPOSIÇÃO I.34] Em um paralelogramo os lados e os ângulos opostos são iguais e o paralelogramo é dividido pela diagonal em duas partes iguais.*

Com base nesta proposição, vamos construir dois triângulos nas mesmas paralelas e compararmos suas áreas para obter um paralelogramo.

Figura 14 – Divisão do paralelogramo



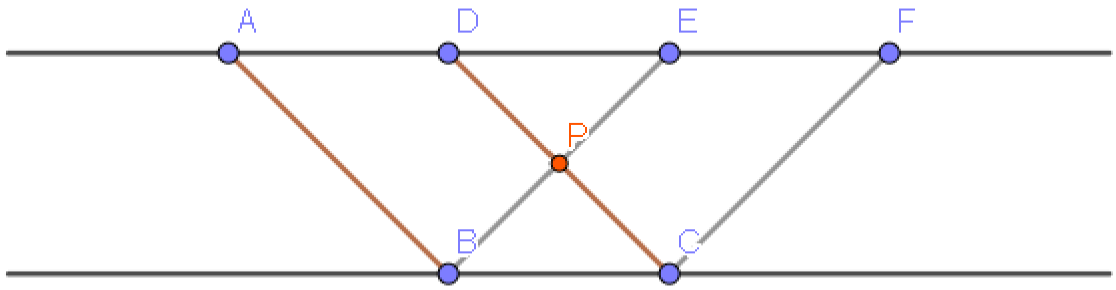
Fonte: Autor.

Observe que, no paralelogramo $ABCB$, os lados AD, BC são iguais e assim também os lados AB, DC são congruentes, pois são opostos. E o lado BD é comum a ambos os triângulos o que implica, pelo caso de congruência lado, lado, lado (LLL) $\triangle DAB \equiv \triangle BCD$, portanto o paralelogramo é dividido pela diagonal em duas partes iguais.

Proposição 3.2 *[PROPOSIÇÃO I.35] Paralelogramos que estão postos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas, são iguais.*

Nesta proposição, aqui vamos demonstrar dois casos. Primeiro caso, segue figura abaixo:

Figura 15 – Paralelogramos com base em comum



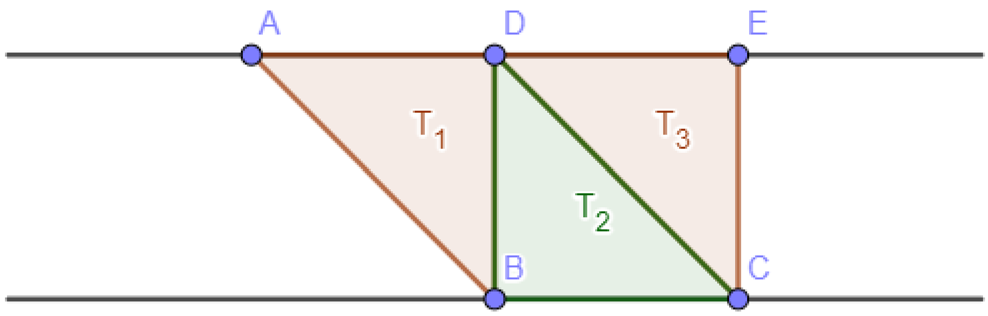
Fonte: Autor.

Dados dois paralelogramos $ABCD$ e $EBCF$ com a base BC em comum, de acordo com a proposição I.34 lados $AD = BC = EF$, $AB = DC$ e $EB = FC$ por serem lados opostos de paralelogramos. Observe que, AD adicionado com DE é igual ao DE adicionado com EF, pois coisas iguais juntadas as outras iguais, todas serão iguais (axioma II). Logo pelo caso lado, lado, lado (LLL) $\triangle ABE \equiv \triangle DCF$ e o que implica que os quadriláteros $ABPD$ e $FCPE$ são iguais (Axioma III), somando o triângulo $\triangle BCP$ em ambos os quadriláteros tem-se,

$$ABCD = ABPD + BCP = BCP + FCPE = EBCF,$$

pelo axioma II.

Segundo caso, temos paralelogramos $ABCD$ e $DBCE$ com base BC em comum, como mostra figura a seguir.



Fonte: Autor.

Na figura acima perceba que, o triângulo de área T_1 é igual ao triângulo de área T_2, pelo caso (LLL), assim como, os triângulos de áreas T_2 e T_3 são iguais, pelo mesmo caso (LLL). Mas, coisas iguais a uma terceira, são iguais entre si (axioma I), portanto, T_1 é igual T_3.

Observe que, os paralelogramos $ABCD = T_1 + T_2$ e $DBCE = T_2 + T_3$, o que de fato, $ABCD = DBCE$, pois coisas iguais somarem outras iguais, os todos serão iguais (axioma II).

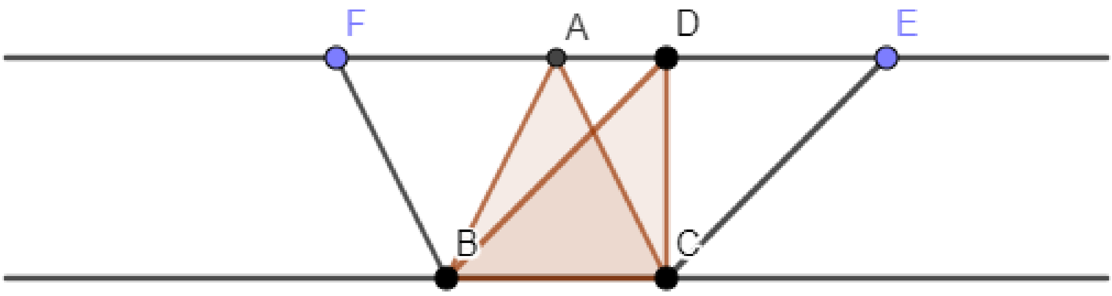
Note que, nos dias de hoje um aluno pode perceber que o resultado segue facilmente da fórmula da área de um paralelogramo, que é base vezes altura.

Como corolário, temos um dos principais resultados que garantem o Teorema de Pitágoras abaixo. Embora na linguagem moderna seria muito provavelmente referido como corolário, nos elementos de Euclides é uma proposição.

Corolário 3.1 *[Proposição I-37] Triângulos situados sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas são iguais entre si.*

Construção: Considere dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DBC$ com a mesma base BC e os outros vértices situados em uma paralela à reta que passa por A e D. Por B traca-se uma paralela a AC que interseta a reta que passa por A e D num ponto F. Analogamente, traço pelo ponto C uma paralela à BD que interseta a reta que passa sobre F, A e D em um ponto E.

Figura 16 – Triângulos sobre a masma base.



Fonte: Autor.

Note que, na Figura 16 tem-se os paralelogramos $ACBF$ e $DBCE$ congruentes, de acordo com proposição I.35. Sendo assim, pela proposição I.34, observe que o paralelogramo $ACBF$ está dividido pela diagonal AB em dois triângulos congruentes, ABC e BAF, assim como o paralelogramo $DBCE$ está dividido pela diagonal DC em dois triângulos congruentes, DBC e CED. O que implica que o triângulo ABC é congruente ao triângulo DBC, pois quantidades que são metades de uma mesma quantidade são também iguais, conforme axioma VII.

Este é um dos principais resultados para se demonstrar o Terorema de Pitágoras abaixo. Aqui está o principal resultado deste trabalho, a saber: o famoso Teorema de Pitágoras.

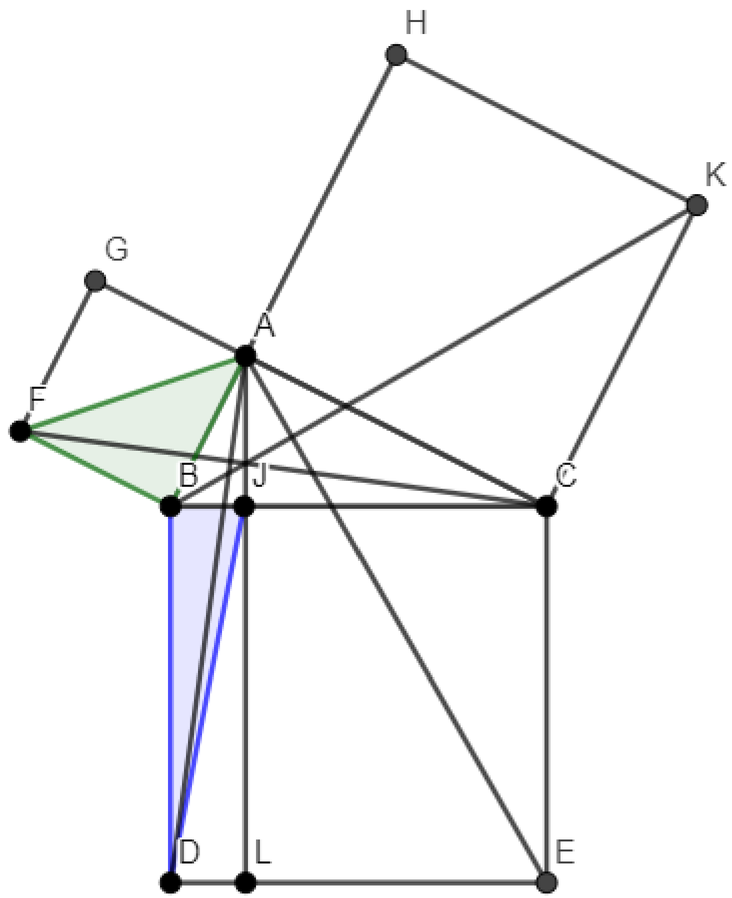
Teorema 3.1 *[PROPOSIÇÃO I.47] Em um triângulo retângulo, o quadrado construído sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados constuídos sobre os lados que formam o mesmo ângulo reto.*

Construção: Dado um triângulo retângulo ABC, reto em A sobre os seus lados construa três quadrados. A construção destes quadrados é conhecida pelos axiomas.

Dessa forma, sobre a hipotenusa BC, que é o lado oposto ao ângulo reto, temos o quadrado $BCED$ e sobre AC, AB temos os quadrados $ACKH$ e $ABFG$. E no ponto A trace segmento AL paralelo a BD, tal que J seja interseção de AL com BC.

Por fim, trace os segmentos AD, BK, AE e CF formando os triângulos $\triangle ABD$, $\triangle FBC$, $\triangle ACE$ e $\triangle BCK$. Note que, AH e AG são prolongamentos dos segmentos CA e BA, de modo que as retas CG e BH são perpendiculares e intersetam em ponto A.

Figura 17 – Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor.

Na Figura 17, temos os ângulos $F\widehat{B}A$ e $D\widehat{B}C$ iguais, por serem retos. Adicionando a cada, o ângulo $A\widehat{B}C$ terá a soma total de $D\widehat{B}A$ igual a de $C\widehat{B}F$, porque coisas iguais juntarem outrais iguais, os todos serão iguais (axioma II).

Note que, FB é igual BA lados do quadrado $\square FBAG$, DB é igual BC, por pertencerem o quadrado $\square BCED$, logo, pelo caso lado, ângulo, lado (LAL) triângulo $\triangle FBC \equiv \triangle ABD$.

Por outro lado, o triângulo $\triangle ABD$ é iguail ao triângulo $\triangle BJD$, pois têm mesma base BD e a mesma paralela AL (prop. I-37), mas o triângulo $\triangle BJD$ é a metade do paralelogramo de lados BD e DL.

Em outra direção, o triângulo $\triangle FBA$ é igual ao triângulo $\triangle FBC$, pois estão na mesma base FB e a mesma paralela GC (prop. I-37), lembrando que o triângulo $\triangle FBA$ é a metade do quadrado do lado AB.

Portanto, o quadrado de lado AB e igual ao paralelogramo de lado BD, DL, pois quantidades que são dobro de uma mesma quantidade são iguais (axioma VI).

Do mesmo modo, o ângulo $A\widehat{C}K$ é igual o ângulo $B\widehat{C}E$, porque são retos. Somando o ângulo $A\widehat{C}B$ em ambos os ângulos, tem o total $A\widehat{C}E$ e $B\widehat{C}K$ iguais, pois coisas iguais adicionadas as outras iguais, todas serão iguais (axioma II).

Perceba que, AC e CK são iguais, por serem lados do quadrado $\square ACKH$ e também BC e CE, por serem lados do quadrado $BCED$ são iguais. Portanto, pelo caso de congruência lado, ângulo, lado (LAL), os triângulos $\triangle ACE$ e $\triangle BCK$ são congruentes.

Com isso, o paralelogramo de lados CE, EL é duas vezes o triângulo $\triangle ACE$, por estarem nas mesmas paralelas CE e AL (prop. I-37). E o quadrado de lado AC é duas vezes o triângulo $\triangle BCK$, por estarem nas mesmas paralelas CK e BH (prop. I-37).

Logo, o paralelogramo de lados CE e EL é igual ao quadrado de lado AC, pois quantidades que são dobro de uma mesma quantidade são iguais (axioma VI).

Finalmente, o paralelogramo de lados BD, DL somado com o paralelogramo de lados CE, EL é igual ao quadrado $BCED$. Então, o quadrado de lado BC oposto ao ângulo reto é igual a soma de dois quadrados de lados AB e AC que formam o ângulo reto, ou seja, $Quad(BC) = Quad(AB) + Quad(AC)$.

3.2 Aplicação do teorema de Pitágoras

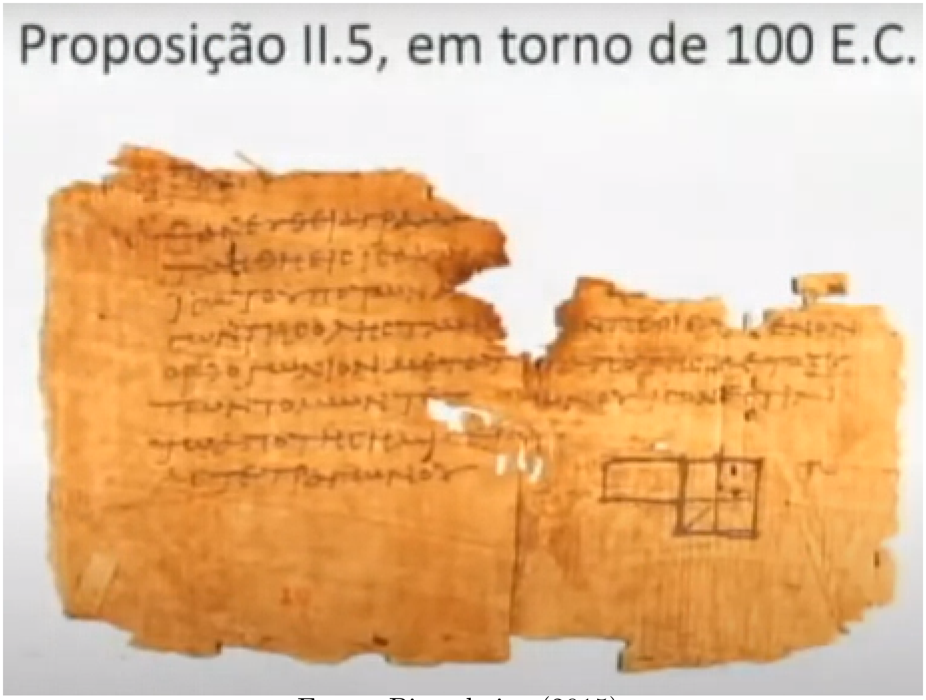
Nesta seção, abordaremos aplicação, no qual utilizaremos o que Teorema nos afirma, ou seja, a soma dos quadrados. É interessante ressaltar que nossas figuras, aqui e nos capítulos anteriores, foram feitas com ajuda do software Geogebra. Seus recursos imitam o uso de régua e compasso.

A aplicação será mostrar que todo polígono é "quadrável". Por quadrável, queremos dizer que, existe um quadrado de área equivalente à área do polígono dado. Lembrando que, a palavra equivalência deriva de: equi = igual + valência = valor, mas antes vamos demonstrar a proposição a seguir, na qual nos dará ideia de aplicá-la na quadratura de retângulo.

Uma curiosidade é que, esta proposição II.5 dos elementos de Euclides, é a parte do manuescrito mais antiga que se tem forma física. Pertencia ao vaticano e data de 100 da era cristã.

Novamente, aqui encontramos uma linguagem difícil de entender por se tratar de ser de uma época muito antiga. Temos que interpretar a proposição abaixo com muito cuidado.

Figura 18 – Imagem antiga de soma de retângulo e quadrados.



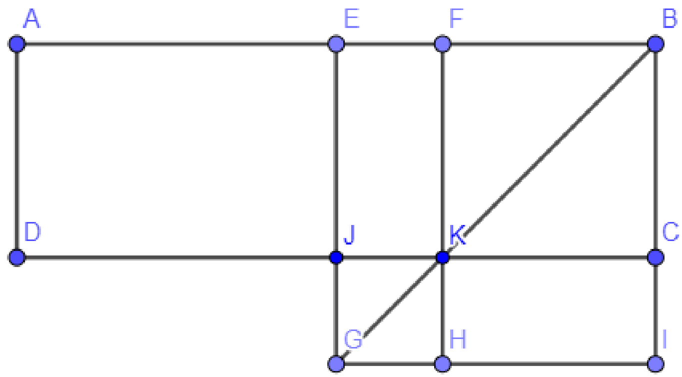
Fonte: Pitombeira (2015).

Proposição 3.3 *[PROPOSIÇÃO II.5] Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais, e em outras duas desiguais, o retângulo compreendido pelas partes desiguais, juntamente com o quadrado da parte entre as duas seções, será igual ao quadrado da metade da linha proposta.*

Construção: Seja um retângulo $ABCD$ de linha reta AB dividida em duas partes iguais no ponto E, de modo que AE e EB são iguais e sobre o lado EB dividida em duas partes desiguais no ponto F tal que EB seja igual a BC. Suponha que os lados AB, DC do retângulo $ABCD$ são opstos e maiores que os lados AD, BC que também são postos.

Trace uma reta EG paralela ao lado BC e que seja igual ao lado EB. Analogamente sobre o ponto F prolongue uma reta FH paralela BC e igual a ela EG. Prolongue BC até o ponto I de modo que EG, BI são conguentes e GI, EB congruente, então temos um quadrado $EBIG$. Marque o ponto J a interseção de EG com DC e da mesma maneira marque o ponto K a interseção de FH com DC e por fim trace diagonal GB.

Figura 19 – Soma de retângulo e quadrados.



Fonte: Autor.

Como $EG = GI$ lados do $\square EBIG$, observe que, $EG = FH$ e $GI = JC$ o que implica $FH = JC$ o que de fato, temos

$$FH = FK + KH \tag{1}$$

e

$$JC = JK + KC \tag{2}$$

mas, $KC = FK$ lados do $\square FBCK$ e $FH = JC$ então

$$FK + KH = JK + KC \tag{3}$$

substituindo KC por FK na equação (3), fica

$$FK + KH = JK + FK \tag{4}$$

subtraindo FK em ambas partes da igualdade da equação (4), teremos

$$KH = JK.$$

Portanto, as áreas dos retângulos $EFKJ$ e $KCIH$ são iguais. Em ambos retângulos adicione a área do quadrado $FBCk$, obtém

$$FBCK + EFKJ = EBCJ$$

e

$$FBCK + KCIH = FBIH.$$

Como os retângulos $EFKJ$ e KCIH são iguais e têm a área do quadrado em comum, então o retângulo

$$EBCJ = FBIH \tag{5}$$

pelo axioma II. Lembre-se que os retângulos

$$AEJD = EBCJ, \tag{6}$$

pois têm bases AE e EB congruentes e altura EJ em comum. Substituindo a equação (5) em (6), fica

$$AEJD = FBIH. \tag{7}$$

Adicionando retângulo EFKJ na equação (7) em ambas partes da igualdade, temos

$$AEJD + EFKJ = FBIH + EFKJ,$$

mas $AFKD = AEJD + EFKJ$

$$\rightarrow AFKD = FBIH + EFKJ. \tag{8}$$

Ainda adicionando o quadrado $JKHG$ de lado $JK = EF$,obtemos

$$AFKD + JKHG = FBIH + EFKJ + JKHG \tag{9}$$

como

$$EBIG = FBIH + EFKJ + JKHG \tag{10}$$

substituindo a equação (10) em (9), segue

$$AFKD + JKHG = EBIG.$$

Logo, $Ret(AF, FB) + Quad(EF) = Quad(EB)$.

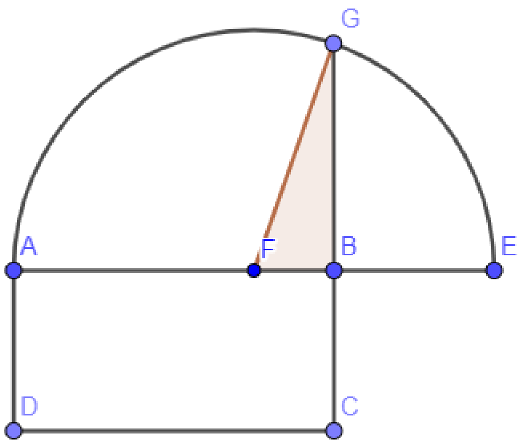
Conclui-se que o retângulo de base AF e altura FB somado com quadrado do lado EF é igual ao quadrado do lado EB. Como queriamos demonstrar.

Proposição 3.4 *[PROPOSIÇÃO II.14] Construir um quadrado igual a um retângulo dado.*

Construção: Seja $ABCD$ o retângulo dado de lados AB, DC opostos e lados AD, BC também opostos, como os lados opostos de um retângulo são iguais, então $AB = DC$ e $AD = BC$. Se $AB = AD$ significa que temos um quadrado construido, mas, se $AB \neq AD$ implica um dos lados é maior.

Considere AB lado maior, prolongue AB até o ponto E, tal que BE seja igual a BC. Suponha que F seja o ponto médio do segmento AE, de modo que o segmento AF é congruente ao segmento FE. Descreva uma semicircunferência AE de centro em F (ponto médio) e raio AF ou FE, prolongue CB até intersetar a semicircunferência no ponto G e trace um segmento FG.

Figura 20 – Quadratura de retângulo



Fonte: Autor.

Note que, os segmentos FG, FB e BG formam um triângulo reto em B, pois o segmento GC é perpendicular ao segmento AE no ponto B, também temos FG e FE iguais, por serem raios.

Como, o segmento AE é divido em duas partes iguais em F e o segmento FE dividido em duas partes desiguais em B, (pela prop. II-5)

$$Ret(AB, BE) + Quad(FB) = Quad(FE). \tag{11}$$

Como $FE = FG$ raios, implica

$$Ret(AB, BE) + Quad(FB) = Quad(FG), \tag{12}$$

pelo teorema de Pitágoras temos

$$Quad(FG) = Quad(FG) + Quad(BG), \tag{13}$$

substituindo equação (13) em (14), fica

$$Ret(AB, BE) + Quad(FB) = Quad(FB) + Quad(BG), \tag{14}$$

subtraindo ambas igualdade da equação (15) por $Quad(FB)$, tem-se

$$Ret(AB, BE) = Quad(BG),$$

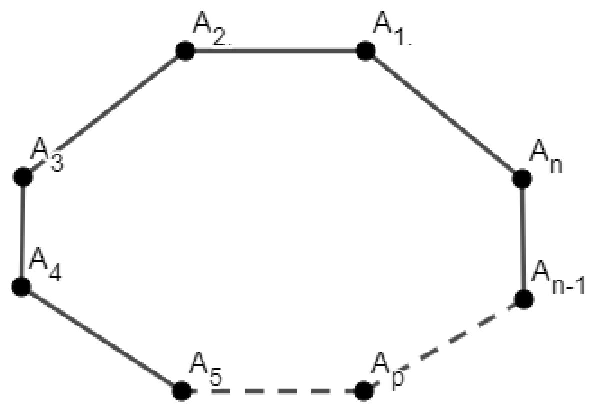
pelo axioma III.

Logo, o retângulo de base AB e altura BE é igual quadrado de lado BG, como queriamos demonstrar.

3.2.1 Quadratura de polígono de n lados

Dado um polígono qualquer de vértices $A_1, A_2, A_3, ..., A_p, A_{n-1}, A_n$ tal que, queremos encontrar um quadrado, de modo que a sua área seja equivalente a este polígono. Com isso, faremos as demostrações baseando-se nos raciocinios a seguir.

Figura 21 – Polígono de n lados.



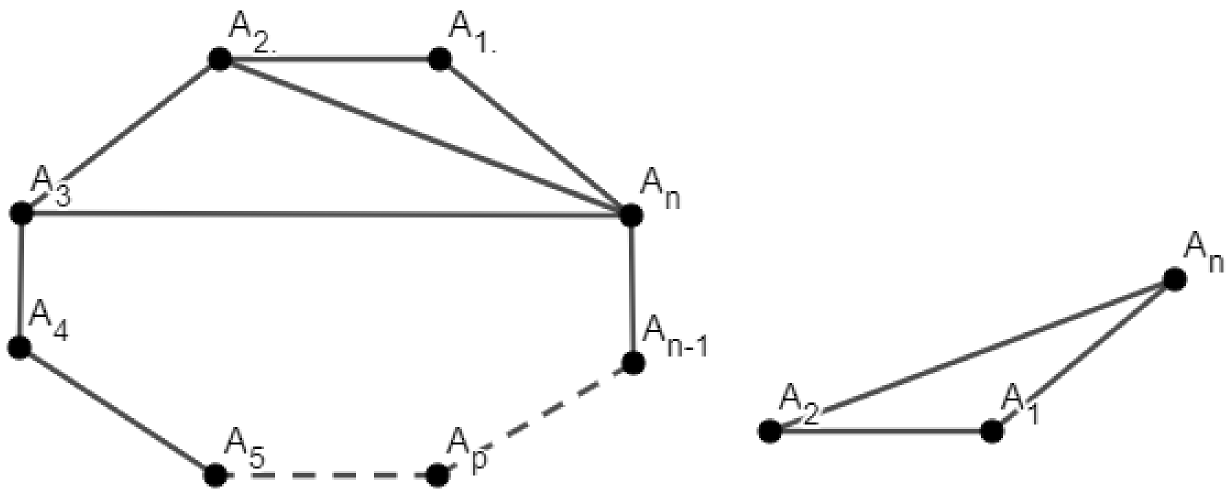
Fonte: Autor.

Considere um polígono dado de vértices $A_1, A_2, A_3, ..., A_p, A_{n-1}, A_n$. Trace segmentos de retas que dividem o mesmo em triângulos, saindo de um vértice para outro de modo que a soma dos triângulos encontrados seja igual ao polígono. Iremos encontrar um jeito de quadrar o triângulo e mostrar que a soma de quadrados é um quadrado. Desta forma, reduziremos o problema ao problema de quadrar triângulos.

Neste caso, vamos considerar o triângulo $A_1A_2A_n$ de base A_1A_2 trace uma reta paralela a sua base A_1A_2, passando pelo vértice A_n, analogamente, pelo A_2 trace uma reta paralela ao segmento A_1A_n, desse modo B seja ponto de interseção dessas reta. Portanto, tem-se um paralelogramo $A_1A_2BA_n$, tal que $A_1A_2 = BA_n$ e $A_2B = A_1A_n$, porque são lados opostos.

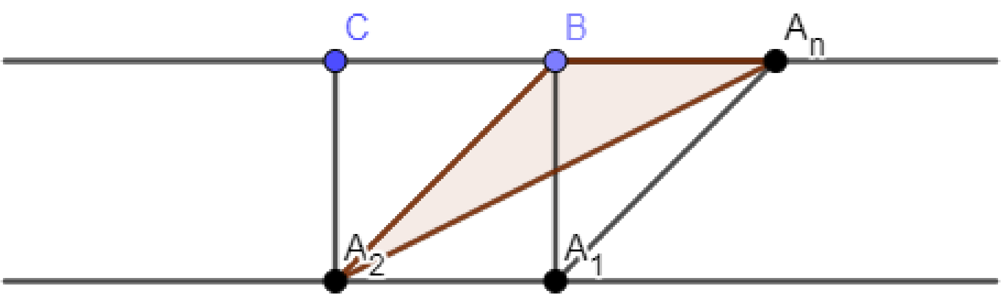
Por outro lado, o triângulo $A_1A_2A_n$ é igual ao triângulo A_2BA_n, pois o paralelogramo é dividido pela diagonal em duas partes iguais (prop. I-34), o que de fato o paralelogramo é o dobro de cada um dos tiângulos, ou seja, área do paralelogramo $A_1A_2BA_n$ é duas vezes a área do triângulo $A_1A_2A_n$, desse modo construa um retângulo A_2A_1BC sobre a mesma base A_2A_1 do paralelogramo $A_2A_1A_nB$ de forma que o ponto C pertencente a reta que passa pelos pontos B e A_n, que implíca o retângulo A_2A_1BC e o paralelogramo $A_2A_1A_nB$ são equivalentes de acordo com a (prop. I.35).

Figura 22 – Divisão do polígono em triângulos.



Fonte: Autor.

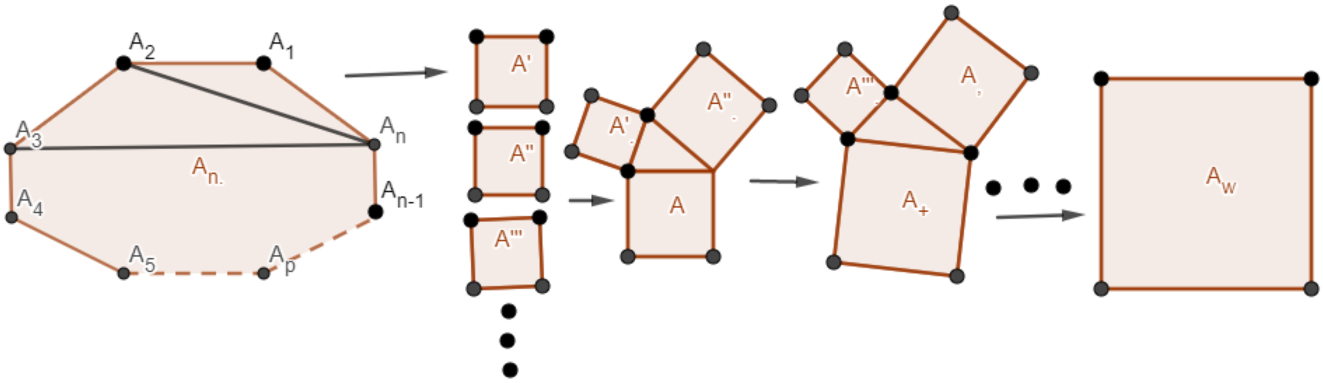
Figura 23 – Retângulo e paralelogramo na mesma base.



Fonte: Autor.

Como o retângulo A_2A_1BC é o dobro do triângulo extraído do polígono, procurando pontos médios de lados opostos e dividí-lo em dois retângulos iguais, e terá um retângulo de área equivalente a do triângulo $A_1A_2A_n$. Fazendo o mesmo procedemento para todos os triângulos que compõem o polígono, transformando-os em retângulos e em seguida aplicando os procedimentos feitos na Proposição II.14, que trata de quadratura do retângulo, transformando-os em quadrados e soma-se os quadrados por meio do teorema de Pitágoras, terá um quadrado maior e que será igual ao poligono dado. Conclui-se que qualquer polígono de n lados pode ser transformado em um quadrado equivalente, como mostra figura a seguir.

Figura 24 – Soma dos quadrados.



Fonte: Autor.

O que implica, $A_{n.} = A_w$, tais que $A_{n.}$ é a área do poligono de n lados e A_w área do quadrado.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através dos elementos de Euclides conseguimos, pelo menos provar proposições que permitiram demonstrar o teorema de Pitágoras, ou seja, com o método axiomático de Euclides é possível dizer que, em um triângulo retângulo o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma dos dois quadrados que formam o ângulo reto.

Além disso, podemos perceber que, a utilização das proposições e axiomas são de grandes importâncias na geometria plana, no sentido de que com estes conseguimos determinar a equivalência de áreas, que não é necessariamente usar as fórmulas que hoje conhecemos no campo matemático, uma vez que os elementos de Euclides nos garantem condições para tal congruência, assim como a aplicação do teorema é fundamental, pois nos permite fazer quadratura de qualquer polígono.

Portanto, esperamos que esse trabalho seja útil, não só para os alunos da matemática, mas sim de outras áreas de conhecimento para que entendam que, na antiguidade, os cálculos de áreas eram feitas por meio da comparação de figuras planas, usando os elementos Euclides. Bem como, pretendemos que esse trabalho de conclusão do curso sirva de motivação aos professores a valorizarem história da matemática como essência no processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Niclau. **Fundamentos de matemática elementar:** Geometria plana. 7ª ed.Atual editora, SP, 1997.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingos. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

MANFIO, Fernando. **Fundamentos da geometria**. ICMS-SP, 2008.

PINHO, José Luiz Rosas; BATISTA, Eliezer; CARVALHO, Neri Terezinha Both. **Geometria I**. 2ª Ed. Florianópolis, 2010.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEEIRA, J. Bosco.**Tópicos de história da matemática**.SBM, 2012.

RUSSELL, Bertrand. **História da filosofia ocidental**. Ed. Nacional SP, 1957.

SANTOS, M. Coelho. **Teorema de Pitágoras:** Suas Diversas Demonstrações. Monográfia (Curso De Especialização Em Educação Matemática Para Professores Do Ensino Médio- Turma 2010)- UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA, Campina Grande-PB, Outubro/2011.

SANTOS, Almir Rogério Silva; Viglioni, Humberto Henrique de Barros. **Geometria euclidiana plana**. UFS, 2011.