UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUCAS DE JESUS RODRIGUES SARMENTO

APLICAÇÕES DO TEOREMA ESPECTRAL NA OBTENÇÃO DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EDO LINEARES

REDENÇÃO
2021

LUCAS DE JESUS RODRIGUES SARMENTO

APLICAÇÕES DO TEOREMA ESPECTRAL NA OBTENÇÃO DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EDO LINEARES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do titulo de Graduado em Matemática. área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório

REDENÇÃO - CE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Sarmento, Lucas de Jesus Rodrigues.

S255a

Aplicações do Teorema Espectral na obtenção de solução de sistemas de EDO lineares / Lucas de Jesus Rodrigues Sarmento. - Redenção, 2021.
40f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório.

1. Álgebra linear. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Autovalores. I. Título

CE/UF/BSP CDD 512.5

LUCAS DE JESUS RODRIGUES SARMENTO

APLICAÇÕES DO TEOREMA ESPECTRAL NA OBTENÇÃO DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EDO LINEARES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 13/08/2021

BANCA EXAMINADORA

Wesley Marinho Lozório

Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Prof. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dedico este trabalho a todas as pessoas que me ajudam na articulosa caminhada da vida.

AGRADECIMENTOS

À Deus, criador do universo e da vida, sem ele esse momento não seria possível.

Ao meu pai, Jacob Rodrigues Sarmento, por em meio às adversidades nunca desistiu e me serve de inspiração.

À minha mãe, Maria Nonata de Jesus Sarmento, a mulher da minha vida.

Aos meus três irmãos, Juliana de Jesus Sarmento, José Matheus de Jesus Rodrigues Sarmento e Thiago de Jesus Rodrigues Sarmento, sem eles à vida não faria sentido.

Aos meus sobrinhos Maria Julia, Thianny, Yago e Yarla.

À duas amigas muito especiais, Fernanda Cintra Lourenço e Bruna Moura.

Aos meus amigos Gabriel, Bruno, Neto, Gilmar, John Lenno e João Vitor pela companhia e confiança de sempre.

À todos os meus colegas de classe em especial meus colegas de estudo por muito tempo, Tiago Silva e Jonathan Oliveira.

À todos os meus professores que me ajudaram na articulosa caminhada que é a graduação. Em especial, ao meu orientador Dr. Weslley Marinho Lozório pelos grandes ensinamentos não apenas em sala de aula como também sobre à vida.

À banca pelos valiosos comentários.

"A matemática, se vista corretamente, possui não apenas a verdade, mas também suprema beleza" - Bertrand Russell.

RESUMO

No presente trabalho, traremos a utilização do teorema espectral na solução dos sistemas de EDO's, veremos que quando A é matriz simétrica o teorema espectral em sua versão matricial nos garante que $A = QDQ^t$ onde Q é a matriz constituida pelos autovetores normalizados da matriz A e D é a matriz diagonal dos autovalores.

Palavras-chave: Autovalores. Autovetores. Teorema Espectral.

ABSTRACT

In the present work, we will bring the use of the spectral theorem in the solution of ODE systems, we will see that when A is a symmetric matrix, the spectral theorem in its matrix version guarantees that $A = QDQ^t$ where Q is the matrix constituted by normalized eigenvectors of matrix A and D is the diagonal matrix of eigenvalues.

Keywords: Eigenvalues. Eigenvectors. Spectral Theorem.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10
2 PRELIMINARES 11
2.1 Espaços Vetoriais 11
2.2 Subespaço Vetorial 13
2.3 Base e Dimensão 14
2.4 Mudança de Base 16
2.5 Transformação Linear 18
2.6 Matriz de uma transformação linear 19
2.7 Produto Interno 20
2.8 Norma 21
2.9 Operador auto-adjunto 22
2.10 Autovalores e Autovetores 25
2.11 Polinômio Característico 25
3 DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES 27
3.1 A diagonalização de Operadores 27
3.2 O Teorema Espectral 29
3.3 Exponêncial de uma matriz 29
4 EQUAÇÕES DIFERENCIAS ORDINARIAS 32
4.1 Teorema da Existência e Unicidade 32
4.2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares 33
5 TEOREMA ESPECTRAL PARA SOLUÇÃO DE SISTEMA DE EDO'S LINEARES 35
6 CONCLUSÃO 39
REFERÊNCIAS 40

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho tem como objetivo discorrer sobre a álgebra linear que envolve a diagonalização de operadores lineares com enfoque especialmente na solução de problemas que envolvem equações e sistemas de equações diferenciais ordinarias(EDO) lineares.

Um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita, pode ser representado através de uma matriz. Sendo as matrizes diagonais as mais simples do ponto de vista de operações matriciais. Surge então uma pergunta natural: "**Se dado um operador linear é sempre possível representá-lo por uma matriz diagonal e o que ganhamos em termos de teoria para a solução de sistemas de EDO lineares**".

O trabalho está dividido em cinco capitulos. No segundo capitulo, traremos resultados básicos da álgebra linear juntamente com o estudo dos espaços vetoriais. Quando os espaços possuem dimensões finitas, as transformações lineares possuem matrizes, fato importantíssimo para o desenvolvimento do presente trabalho e gradativamente iremos chegar no resultado central deste trabalho, o chamado **Teorema Espectral** que nos garante que todo operador é diagonalizável.

No terceiro capitulo, damos inicio aos estudos, de fato, do processo de diagonalização para que em seguida possamos introduzir a importância do estudo sobre os autovalores e autovetores de um operador linear, estudos esses que são de extrema importância na teoria das EDO e do polinômio caracteristico, fazendo assim a relação entre o teorema espectral e o devido capitulo.

No quarto capitulo trazemos uma pequena introdução sobre as equaçãoes diferenciais ordinárias e bem como o problema de valor inicial(P.V.I.) e trazemos um teorema que abrange casos gerais de P.V.I.

No quinto capitulo trazemos, de fato, a utilização do terema espectral na solução dos sistemas de EDO's, veremos que quando A é matriz simétrica o teorema espectral nos garante que $A = QDQ^t$ onde Q é a matriz constituida pelos autovetores normalizados da matriz A e D é a matriz diagonal dos autovalores.

2 PRELIMINARES

Nesta seção de preliminares, veremos alguns resultados básicos de álgebra linear que são de suma importância para o desenvolvimento do presente trabalho.

2.1 Espaços Vetoriais

Definição 2.1 *Um espaço vetorial* V *é um conjunto não vazio munido de duas operações:*

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longmapsto V \qquad (Soma) \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V &\longmapsto V \quad (produto \quad por \quad escalar) \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

que satisfazem as seguintes condições, sendo $x, y, z \in V$ *e* $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$. *Portanto, segue a seguir as condições para que* V *seja espaço vetorial:*

I) $(x+y)+z = x+(y+z)$

II) $x+y = y+x$

III) Existe $\boldsymbol{0} \in V$ *tal que* $x + \boldsymbol{0} = x$ *(*$\boldsymbol{0}$ *chamaremos de vetor nulo)*

IV) Para cada $x \in V$, *existe* $-x \in V$ *tal que* $x + (-x) = \boldsymbol{0}$

V) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

VI) $(\alpha + \lambda)x = \alpha x + \lambda x$

VII) $(\alpha\lambda)x = \alpha(\lambda x)$

VIII) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

Um conjunto com as duas operações definidas que satisfazem as condições citadas, definem a estrutura de um espaço vetorial.

Observação: É importante sabermos que o $\mathbf{0}$ e $-x$ são unicos no espaço vetorial. A demonstração desse fato segue da suposição de dois vetores nulos (ou dois inversos aditivos) e depois podemos utilizar as condições citadas para demonstraçar a unicidade de ambos.

Exemplo 2.1 *Seja* $P_n(x) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$*, com* $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$ *conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a* n*, seja definido as duas operações da seguinte forma:*

$+ : P \times P \longmapsto P$ *de tal forma que* $(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) \longmapsto (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n$ *seja a soma usual.*

e ainda,

$\cdot : \mathbb{R} \times P \longmapsto P$ *de tal forma que* $(\alpha, a_0 + a_1x + ... + a_nx_n) \longmapsto (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + ... + (\alpha a_n)x^n$ *seja o produto por escalar.*

Uma vez definida essas duas operações, podemos mostrar que as propriedades de soma e produto por escalar são satisfeitas, concluindo assim que o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n *é espaço vetorial. Vamos verificar as condições* $III)$ *e* $IV)$*, as demais deixamos como exercício ao leitor.*

III) *Existe* $\boldsymbol{0} \in V$ *tal que* $x + \boldsymbol{0} = x$

Seja $\boldsymbol{x} = (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)$ *e* $\boldsymbol{0} = (0 + 0x + ... + 0x^n)$

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) + (0 + 0x + ... + 0x^n)$

$=(a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + ... + (a_n + 0)x^n,$

$=(a_0) + (a_1)x + ... + (a_n)x^n = \boldsymbol{x}.$

IV) *Existe* $-x \in V$ *tal que* $x + (-x) = \boldsymbol{0}$

Seja $x = (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)$ *e* $-x = (-a_0 + (-a_1x) + ... + (-a_nx^n))$ *temos então que*

$x + (-x) = (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) + (-a_0 + (-a_1x) + ... + (-a_nx^n)$

$=((a_0) - (a_0)) + ((a_1 - a_1)x) + ... + ((a_n - a_n)x^n)$

$=(0 + 0x + ... + 0x^n) = \boldsymbol{0}.$

Verificando as outras condições, podemos concluir que $P_n(x)$ *é espaço vetorial.*

2.2 Subespaço Vetorial

Definição 2.2 *Seja V espaço vetorial. Um subconjunto não vazio $W \subset V$ é subespaço vetorial de V se W for fechado para as operações de adição e produto por escalar. Seja então:*

I) Se $x, y \in W$ então $x + y \in W$

II) Se $x \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\alpha x \in W$

Exemplo 2.2 *Seja $V = M_{2\times 2}$ o espaço das matrizes 2×2. Verifique que $W_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $a + b + c + d = 0$ é fechado para a soma e produto por escalar.*

Solução: Defina duas matrizes 2×2 da seguinte forma:

$x = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ *e* $y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, *daí segue que*

$$x + y = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

Da condição dada, têm-se

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 + 0 = 0.$$

W_1 é fechado para soma.

Seja ainda $x = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ *e $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que:*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x &= \alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1 + \alpha d_1 = \alpha(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) = \alpha(0) = 0.$$

W_1 é fechado para o produto por escalar.

2.3 Base e Dimensão

Seja V um espaço vetorial. Um conjunto $S = \{a_1, ..., a_k\}$ de vetores em V é dito que gera V se todo vetor em V for uma combinação linear de de $a_1, ..., a_k$, isto é, para cada $x \in V$ existem números reais $t_1, ..., t_k$ tais que

$$s = t_1a_1 + ... + t_ka_k$$

.

O conjunto S é chamado de linearmente independente quando a combinação linear

$$t_1a_1 + ... + t_ka_k = \mathbf{0},$$

ocorre, se, e só se, $t_1 = ... = t_k = 0$.
Dito isto, segue que

Definição 2.3 *Uma base para o espaço vetorial V é um conjunto de vetores que geram V e é linearmente independente.*
Proposição 2.1 *Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto com n elementos $v_1, ..., v_n$. Então qualquer conjunto L.I de V tem no máximo n elementos*
***Demonstração**:* Fixemos um subconjunto de V com m elementos $W = \{w_1, ..., w_m\}$ e seja $m > n$. Mostraremos que W é L.D, de tal forma que qualquer conjunto L.I possuirá no máximo n elementos, concluindo assim o que queremos, sejá então: Como $\{v_1, ..., v_n\}$ gera V, podemos então extrair uma base para V. Seja $\{v_1, ..., v_r\}$ esta base. Então, existem escalares α_{ij}, com i=1,2,...,r e j=1,2,...,m, tais que:

$$w_j = \alpha_{1j}v_1 + ... + \alpha_{ij}v_i + ... + \alpha_{rj}v_r. \tag{1}$$

Consideremos agora a combinação linear nula de $w_1, ..., w_m$:

$$\beta_1w_1 + ... + \beta_mw_m = e. \tag{2}$$

Substituindo as relações de 1 em 2 obtemos:

$$\beta_1(\alpha_{11}v_1 + ... + \alpha_{r1}v_r) + ... + \beta_m(\alpha_{1m}v_1 + ... + \alpha_{rm}v_r) = e$$
$$\Rightarrow (\beta_1\alpha_{11} + ... + \beta_m\alpha_{1m})v_1 + ... + (\beta_1\alpha_{r1} + ... + \beta_m\alpha_{rm})v_r = e.$$

Como $v_1, ..., v_r$ é uma base para V, então os mesmos são L.I, logo:

$$\begin{cases} \beta_1\alpha_{11} + ... + \beta_m\alpha_{1m} = 0 \\ \vdots \\ \beta_1\alpha_{r1} + ... + \beta_m\alpha_{rm} = 0 \end{cases}$$

Obtemos um sistema linear homogêneo com r equações e m incógnitas. E como $r \leq n < m$, o sistema admite solução não trivial, logo existem escalares não nulos. Portanto, $W = \{w_1, ..., w_m\}$ é L.D, concluindo então que qualquer conjunto L.I terá no máximo n elementos, o que conclui a demonstração. ■

Proposição 2.2 *As bases de um espaço vetorial admitem sempre o mesmo número de elementos.*

Demonstração: Sejam $\alpha = \{w_1, ..., w_n\}$ e $\beta = \{v_1, ..., v_m\}$ duas bases para um espaço vetorial V. Como α gera V e β é L.I, pela proposição 2.1, temos que $m \leq n$ e ainda, como β gera V e α é L.I, pela proposição 2.1 temos que $n \leq m$. Portanto, $n = m$, que mostra que qualquer base de V tem o mesmo número de elementos. ■

Definição 2.4 *O número de elementos de uma base de V é chamado de dimensão de V.*

Definição 2.5 *Seja $\beta = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ base e seja $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, $v \in V$ vetor. Os números $a_1, ..., a_n$ são chamados coordenadas do vetor v em relação à base β.*

Notação: $[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Observe que a notação não trás ambiguidade, em virtude da unicidade da combinação linear de v em relação à base β.

Exemplo 2.3 *O conjunto $\beta = \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ é uma base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n, conhecida como base canônica de $P_n(x)$. Em particular,*

$$[a_0 + a_1x + ... + a_nx^n]_\beta = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

De fato, o conjunto $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ é linearmente independente, uma vez que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0 + 0x + ... + 0x^n$$

só vale para $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$, uma vez que dois polinômios só são iguais se todos os seus coeficientes são iguais. Além disso, $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ gera todo o espaço de polinômios de grau menor ou igual a n, uma vez que qualquer $p(x) \in P_n(x)$ pode ser escrito como $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Logo, $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ é uma base de $P_n(x)$
E ainda, a dimensão de $P_n(x)$ é $dim = \{n + 1\}$

Exemplo 2.4 *Seja $[1 - x^2]_\beta$ o polinômio em relação à base canônica. Logo, teremos que suas coordenadas são:*

$$[1 - x^2]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.4 Mudança de Base

Seja $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\beta = \{w_1, ..., w_n\}$ bases do espaço vetorial V. Seja $v \in V$ um vetor, podemos escrevê-lo como combinação linear dos vetores das bases α e β

$$v = x_1v_1 + ... + x_nv_n,$$

e,

$$v = y_1w_1 + ... + y_nw_n,$$

Ou seja,

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Queremos relacionar as coordenadas do vetor em relação a base α com a base β. Logo

$$[v]_\alpha = [\textstyle\sum_{i=1}^n y_iw_i]_\alpha = \sum_{i=1}^n [w_i]_\alpha = \begin{bmatrix} [w_1]_\alpha & ... & [w_n]_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

$$\therefore [v]_\alpha = [I]^\beta_\alpha \cdot [v]_\beta$$

Definimos $[I]_\alpha^\beta$ é a matriz de mudança de base β para α, pois a multiplicação desta matriz com as coordenadas de β forcenece as coordenadas de v na base α.

Sabendo que

$$[w_1]_\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = ... = [w_n]_\alpha = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

temos então a matriz:

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Naturalmente, nos questionamos acerca da unicidade da matriz de mudança de base, de fato, suponhamos que

$[v]_\alpha = A[v]_\beta$, $\forall\ v \in V$. Sendo $A = [A_1 \cdot .... \cdot A_n]$. Sabemos que $[v_1]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $[v_2]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$,

$. \ . \ . \ , [v_n]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$

Logo,

$$[v_1]_\alpha = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_\beta = A_1;$$

$$[v_2]_\alpha = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = A_2;$$

$$\vdots$$

$$[v_n]_\alpha = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = A_n.$$

Então, vemos que $[A_1 \cdot .... \cdot A_n] = \begin{bmatrix} [w_1]_\alpha & ... & [w_n]_\alpha \end{bmatrix} = [I]_\alpha^\beta$. O que mostra a unicidade.

2.5 Transformação Linear

Definição 2.6 *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre um mesmo corpo. Uma transformação linear é uma função $T : V \to W$ tal que para todo escalar α e todos os vetores $v, w \in V$ temos:*

1. $T(0) = 0$
2. $T(v + w) = T(v) + T(w)$
3. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$.

Um operador linear é uma transformação linear de um espaço nele mesmo.

Definição 2.7 *Seja $T : V \to F$ uma transformação linear. Então ker(T)=$\{f \in V$ tal que T(f)=0$\}$ é o núcleo de T.*

Definição 2.8 *Seja $T : V \to F$ uma transformação linear. Então Im(T)=$\{$T(f) tal que $f \in V\}$ é a imagem de T.*

Teorema 2.1 *(Núcleo e Imagem): Sejam E e F espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $A : E \to F$ tem-se $dimE = dimN(A) + dimIm(A)$.*

Demonstração*:* O teorema resulta de imediato da seguinte afirmação: Se $\{A_u, ...A_{u_p}\}$ é uma base de $Im(A)$ e $\{v_1, ..., v_q\}$ é uma base de $N(A)$ então $\{u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q\}$ é uma base de E.

Com efeito, em primeiro lugar, se tivermos

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + ... + \beta_q v_q = 0,$$

então aplicando o operador A a ambos os membros desta igualdade e lembrando que $v_1, ..., v_q$ pertencem ao núcleo de A, obtemos

$$\alpha_1 A u_1 + ... + \alpha_p A u_p = 0.$$

Como os vetores $Au_1, ..., Au_p$ são L.I., resulta daí que $\alpha_1 = ... = \alpha_p = 0$. Portanto a igualdade $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + ... + \beta_q v_q = 0$ se reduz a

$$\beta_1 v_1 + ... + \beta_q v_q = 0$$

Como $v_1, ..., v_q$ são L.I., concluímos que $\beta_1 = ... = \beta_q = 0$. Isto mostra que os vetores $u_1, ..., u_p$,$v_1, ..., v_q$ são L.I..
Em seguida, consideraremos um vetor arbitrário $w \in E$. Como $Aw \in Im(A)$, podemos escrever

$$Aw = \alpha_1 Au_1 + ... + \alpha_p Au_p,$$

pois $Au_1, ..., Au_p$ é uma base da imagem de A. A igualdade acima pode ser reescrita como

$$A[w - (\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p)] = 0.$$

Assim, o vetor $w - (\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p)$ pertence ao núcleo de A, logo pode ser expresso como combinação linear dos elementos da base $v_1, ..., v_q$. Temos então

$$w - (\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p) = \beta_1 v_1 + ... + \beta_q v_q,$$

ou seja, $w = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + ... + \beta_q v_q$. Isto mostra que os vetores $u_1, ..., u_p$,$v_1, ..., v_q$ geram E e portanto constituem uma base. ■

2.6 Matriz de uma transformação linear

Sejam V e W espaços vetoriais. $\alpha = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ uma base e $\beta = \{w_1, ..., w_m\} \subset W$ base. Teremos a seguinte transfomação linear

$$\begin{array}{rcl} T : V & \longrightarrow & W \\ v & \mapsto & Tv \end{array}.$$

Analogamente à seção 2.4, queremos definir a matriz da transformação linear, logo

$$[Tv]_\beta = [T(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i v_i)]_\beta = \sum_{i=1}^n x_i [Tv_i]_\beta$$

$$[Tv]_\beta = [[Tv_1]_\beta ... [Tv_n]_\beta] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = [T]_\beta^\alpha \cdot [v]_\alpha.$$

Portanto, $[T]_\beta^\alpha$ é a matriz $m \times n$ da transformação linear.
Naturalmente, teremos que essa matriz também é única. De fato, suponha que $[Tv]_\beta = B[v]_\alpha$, $\forall v \in V$. Donde B é a matriz $B = [B_1 \cdot ... \cdot B_n]$. Novamente, temos as coordenadas

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ . \ . \ . \ , v_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[Tv_1]_\beta = B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = B_1;$$

$$\vdots$$

$$[Tv_m]_\beta = B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = B_n.$$

Logo, $[[Tv_1]_\beta \cdot ... \cdot [Tv_n]_\beta] = [B_1 \cdot ... \cdot B_n]$, mostrando assim a unicidade.

Exemplo 2.5 *Considere o seguinte operador linear*

$$\begin{aligned} I : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v \end{aligned}$$

Esse operador é conhecido como operador identidade. Seja também as bases $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ *e* $\beta = \{w_1, ..., w_n\}$*. Queremos a matriz desse operador, logo*

$$\begin{bmatrix} [Iw_1]_\alpha & ... & [Iw_n]_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [w_1]_\alpha & ... & [w_n]_\alpha \end{bmatrix} = [I]^\beta_\alpha.$$

Ou seja, a matriz do operador identidade é a matriz com entrada em β *e saída em* α *de mudança de base* β *para base* α*.*

Exemplo 2.6 *Sejam* α *e* β *base de* V *e seja* $T : V \longrightarrow V$ *operador linear, então*

$$[T]^\alpha_\alpha = [I]^\beta_\alpha [T]^\beta_\beta [I]^\alpha_\beta = [I]^\beta_\alpha [T]^\beta_\beta \left([I]^\beta_\alpha\right)^{-1}.$$

Observação: Sempre que $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ são tais que $A = PBP^{-1}$ para alguma $P \in M(n, \mathbb{R})$ invertível dizemos que A e B são matrizes semelhantes.

2.7 Produto Interno

Definição 2.9 *(Produto Interno): Seja* V *um espaço vetorial. Chamamos de produto* *interno, denotamos por* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$*, a aplicação* $V \times V \to \mathbb{R}$*, com as seguintes propriedades: Para todo escalar* $\mathbf{c}$ *e vetores* **u,v,w***, têm-se:*

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$=$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ *(Comutatividade)*
- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq \mathbf{0}$ *e vale à igualdade se, e só se,* $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = \mathbf{0}$ *(Positividade)*
- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$
- $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{k}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

Exemplo 2.7 *Sejam* $u = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *e* $v = (\beta_1, ..., \beta_n)$ *vetores. Definimos como produto interno canônico:*

$$\langle u, v \rangle = \alpha_1\beta_1 + ... + \alpha_n\beta_n.$$

Exemplo 2.8 *Sejam* $M(n, 1)$ *espaço das matrizes com n linhas e 1 coluna. Sejam* $u = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ *e* $v = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ *vetores de* $M(n, 1)$*. Logo,*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

2.8 Norma

Definição 2.10 *Sejam V um espaço vetorial. Uma norma* $\| \, . \, \|$ *em V satisfaz as seguintes condições:*

- $\| v + u \| \leq \| v \| + \| u \|, \forall v, u \in V.$
- $\| \lambda v \| = |\lambda| \, \| v \|, \, v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\| v \| \geq 0$ *e* $\| v \| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Um espaço vetorial V com uma norma é chamado de espaço normado.

Exemplo 2.9 *Podemos definir norma a partir da definição de produto interno. Seja* $v \in V$*, logo* $\| v \|$ *em relação ao produto interno é dado por*

$$\| v \| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Exemplo 2.10 *Seja* $v \in V$*, onde* $v = (x_1, ..., x_n)$*. Logo,*

$$\| v \| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Chamamos essa norma de ***norma euclidiana.***

Exemplo 2.11 $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \in M(n,1)$, *teremos então que*

$$\| v \| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Exemplo 2.12 *Seja* $(v_{ij})_{n\times m} \in M(n \times m)$, *então*

$$\| (v_{ij})_{n\times m} \| = \sqrt{\langle (v_{ij})_{n\times m}, (v_{ij})_{n\times m}\rangle}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (v_{ij})^2_{n\times m}}.$$

Definição 2.11 *Sejam* $v, u \in V$ *vetores não nulos. O ângulo entre* v *e* u *é o número* $\theta \in [0, \pi]$, *logo*

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|\|u\|}\right).$$

Definição 2.12 *Dados dois vetores de um espaço vetorial, dizemos que eles são ortogonais se o angulo* θ *entre eles é* $\frac{\pi}{2}$. *Logo,* v *e* u *são ortogonais se, e somente se,* $\langle v, u\rangle = 0$.
Definição 2.13 *Dizemos que um conjunto* $(v_1, ..., v_n)$ *de vetores de um espaço vetorial* V *é um conjunto ortogonal se para todo* $j, k \in \mathbb{N}$ *valer*

$$\langle v_j, v_k\rangle = 0,$$

sempre que $j \neq k$. *E ainda, se para todo* j *valer*

$$\langle v_j, v_j\rangle = 1$$

então dizemos que é um conjunto ortonormal.
Observação: Seja V um espaço vetorial. Nós definimos norma à partir do produto interno, então também podemos defininir produto interno em termos de sua norma e deixamos a curiosidade do leitor a definição de produto interno a partir de norma:

$$\langle v, u\rangle = \frac{1}{4}(\| v + u \|^2 - \| v - u \|^2).$$

2.9 Operador auto-adjunto

Nesta etapa estaremos pavimentando o caminho para o teorema espectral para operadores auto-adjuntos.

Definição 2.14 *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno, dizemos que um operador linear $T : V \to V$ é auto-adjunto se $T = T$, ou seja, se $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$ para todo $u, v \in V$.*

Exemplo 2.13 *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle ., .\rangle$. Seja $v \in V$ um vetor fixo. Seja $T : V \to V$ definida por $T(u) = \langle v, u\rangle v$, para todo $u \in V$. Veremos que T é auto-adjunto:*

$$\langle v, T(u)\rangle = \langle v, \langle v, u\rangle v\rangle = \langle v, u\rangle\langle v, v\rangle = \langle\langle v, v\rangle v, u\rangle = \langle T(v), u\rangle,$$

ou seja, $T = T$. Logo, T é auto-adjunto.

Exemplo 2.14 *(Coeficientes de Fourier): Seja V espaço vetorial e $\beta = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ base ortogonal com $v \in V$. Então*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i.$$

com efeito, como $v \in V$, então

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i.$$

fixando um $j \in \{1, ..., n\}$ arbitrário, então

$$\langle v, v_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, v_j\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i, v_j\rangle.$$

como β é ortogonal, então

$$a_j = \langle v_j, v_j\rangle > 0$$

$\therefore a_j = \frac{\langle v, v_j\rangle}{\langle v_j, v_j\rangle}$, $j = 1, ..., n$

Observação: Os coeficientes a_i acima são chamados ***coeficientes de Fourier****. Em particular, se β for ortonormal, então $a_i = \langle v, v_i\rangle$, $i = 1, ..., n$.*

Exemplo 2.15 *Seja $T : V \longrightarrow W$ tranformação linear e $\alpha = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ e $\beta = \{w_1, ..., w_m\} \subset W$ bases ortonormais. Então*

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

onde,

$$a_{ij} = \langle w_i, Tv_j\rangle.$$

Solução: Sabemos que

$$[T]_\beta^\alpha = \Big[[Tv_1]_\beta....[Tv_n]_\beta\Big]$$

como β é ortonormal, pelo exercício anterior, temos

$$[Tv_j]_\beta = \sum_{i=1}^{m} \langle w_i, Tv_j \rangle w_i$$

então,

$$[Tv_j] = \begin{bmatrix} \langle w_1, Tv_j \rangle \\ \vdots \\ \langle w_m, Tv_j \rangle \end{bmatrix}, j = 1, ..., n.$$

$\therefore a_{ij} = \langle w_i, Tv_j \rangle$.

Exemplo 2.16 *Seja $T : V \longrightarrow V$ operador auto-adjunto. $\alpha = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ base ortonormal. Então $[T]_\alpha^\alpha$ é simétrica.*

Soluçao: Seja $[T]_\alpha^\alpha = [a_{ij}]$, onde

$$a_{ij} = \langle v_i, Tv_j \rangle.$$

como T é auto-adjunta, temos então que

$$a_{ij} = \langle Tv_i, v_j \rangle = \langle v_j, Tv_i \rangle = a_{ji}.$$

Exemplo 2.17 *Seja $A_{n\times n}$ matriz simétrica. Então existe um $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auto-adjunto tal que*

$$[T]_{can}^{can} = A_{n\times n}.$$

Em particular, existe uma correspondencia biunívoca entre operador auto-adjunto de $\mathbb{R}^n$ e as matrizes simétricas de ordem n.

Exemplo 2.18 *A matriz de mudança de base entre bases ortonormais é uma matriz ortogonal, de fato, sejam $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ e $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ bases ortonormais, temos que*

$$[I]_\alpha^\beta = [c_1, ..., c_n]$$

mas veja que

$$c_i = [u_i]_\alpha$$

Com α ortonormal, então

$$[u_i]_\alpha = \begin{bmatrix} \langle u_i, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_i, v_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Onde,

$$\begin{aligned} \langle c_i, c_j \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \langle u_i, v_k \rangle \langle u_j, v_k \rangle \\ &= \langle u_i, \sum_{k=1}^{n} \langle u_j, v_k \rangle v_k \rangle \\ &= \langle u_i, u_j \rangle. \end{aligned}$$

Sendo β ortonormal, temos então

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}.$$

$$\therefore \begin{bmatrix} c_1 & .... & c_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & .... & c_n \end{bmatrix}^{t}.$$

2.10 Autovalores e Autovetores

Adentraremos agora no estudo sobre autovalores e autovetores que são objetos de estudo da álgebra linear de extrema importância para o entendimento do Teorema Espectral.

Definição 2.15 *Sejam E espaço vetorial sobre o conjunto $\mathbb{R}$ e $T : E \to E$ um operador linear. Seja ainda $\alpha \in \mathbb{R}$, dizemos que α é um autovalor de T se existir um vetor $v \neq 0$ tal que:*

$$T(v) = \alpha v$$

v será autovetor de T associado a α.

2.11 Polinômio Característico

Lema 2.1 *Sejam dados uma matriz real $A \in M(n)$ e um número real $\lambda \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmação são equivalentes:*

(1) λ é um autovalor de A

(2) Existe um autovetor de A com autovalor associado a λ

(3) $Nuc(\lambda I - A) \neq [0]$

(4) a matriz $\lambda I - A$ não é invertível

(5) $det(\lambda I - A) = 0$

Observe que a função determinante $\lambda \mapsto det(\lambda I - A)$ *do caminho matricial* $\lambda \mapsto \lambda I - A$ *em* $M(n)$ *é um polinômio em* λ*. Pela equivalência* $(1) \Longleftrightarrow (5)$ *do lema acima, os autovalores de* A *podem ser detectados como raízes reais do polinômio*

$$p(\lambda) = p_A(\lambda) = det(A - \lambda I),$$

denominado ***polinômio característico*** *da matriz* $A \in M(n)$*.*

Exemplo 2.19 *Dada a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos,

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2),$$

e, portanto, os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -2$.

3 DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

3.1 A diagonalização de Operadores

Na seção 2 tivemos as preliminares em Álgebra Linear de assuntos que são essenciais para o restante do trabalho. Nesta seção teremos resultados importantes de Álgebra Linear até chegar no Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos e uma consequencia desse Teorema em matrizes simétricas que ja vinhamos trabalhando na seção anterior, ambos resultados importantes que serão utilizados para as seções 4 e 5. onde adentraremos, de fato, na aplicação do teorema espectral para a solução de sistema de Equações Diferenciais Ordinarias Lineares.

Teorema 3.1 *Autovetores associados a autovalores distintos são L.I.*

***Demonstração**:* Sejam $T : E \to E$ um operador linear e $e_1, e_2, ..., e_m$ autovetores de T associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, respectivamente. Isto é, $T(e_1) = \lambda_1 e_1, ..., T(e_m) = \lambda_m e_m$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$.

O resultado será demonstrado por indução em m. Para $m = 1$ o resultado é claro. Para $m = 2$ segue que:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 e_2 = -\alpha_1 e_1.$$

Então,

$$0 = T(0) = T(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 T(e_1) + \alpha_2 T(e_2)$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \lambda_2(-\alpha_1 e_1)$$

$$= (\lambda_1 \lambda_2)\alpha_1 e_1, e_1 \neq 0, \alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

$\therefore \alpha_2 e_2 = -\alpha_1 e_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \therefore e_1, e_2$ são L.I.

Suponhamos agora que o resultado vale para $m - 1$, seja:

$$\alpha_2 e_1 + ... + \alpha_m e_m.$$

Aplicando o operador T, vêm:

$$0 = T(0) = T(\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_m e_m)$$

$$= \alpha_1 T(e_1) + ... + \alpha_m T(e_m)$$

$$= \alpha_1 \lambda_1 e_1 + ... + \alpha_m \lambda_m e_m.$$

Daí,

$$\alpha_m e_m = -\alpha_1 e_1 - ... - \alpha_{m-1}e_{m-1}.$$

Logo,

$$0 = \alpha_1\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_m(-\alpha_1 e_1 - ... - \alpha_{m-1}e_{m-1})$$

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_m\alpha_1 e_1 + ... + (\lambda m - 1 - \lambda_m)\alpha_{m-1}e_{m-1}.$$

Por hipótese de indução,$e_1, ..., e_{m-1}$ são L.I., logo:

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_m)\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ (\lambda_2 - \lambda_m)\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_{m-1} - \lambda_m)\alpha_{m-1} = 0 \Rightarrow \alpha_{m-1} = 0 \end{cases}$$

Logo, $e_1, ..., e_m$ são L.I. ■

Corolário 3.1 *Seja $T : E \rightarrow E$ um operador. Se T possui $\lambda_1, ..., \lambda_n$ autovalores distintos, então E possui uma base β formada pelos autovetores.*

Demonstração: Já vimos que n autovalores distintos acarretam na existencia de um conjunto de vetores $(e_1, .., e_n)$ L.I. Seja então W um subespaço gerado pelos autovetores de E. Como $W \subset E$ e dim E = n, então $(e_1, ..., e_n)$ é base de E. ■

Corolário 3.2 *$[T]_\beta^\beta = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ é a matriz do operador T.*

Demonstração: Exercício. ■

Teorema 3.2 *Sejam E espaço vetorial com dim(E) = n e $T : E \rightarrow E$ operador linear. T é diagonalizável se, e somente se, existir uma base $\beta = (e_1, ..., e_n)$ de E formado pelos autovetores de T.*

Demonstração: Suponha que existe $[T]_\beta^\beta$ diagonal:

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Tomando um elemento e_j de β, teremos então a coluna j de $[T]_\beta^\beta$ formada pelos coeficientes de $T(e_j)$ e escrito como combinação linear da base β.

$$T(e_j) = 0e_1 + ... + \lambda_j e_j + ... + 0e_n = \lambda_j e_j.$$

Assim, $T(e_j) = \lambda_j e_j$. Logo, e_j é um autovetor de T associado ao autovalor λ_j e então, β é formada pelos autovetores de T.

Reciprocamente, suponha $\beta = \{e_1, ..., e_n\}$ uma base de E formada pelos autovetores de T, ou seja, $T(e_j) = \lambda_j e_j$. Como as imagens dos elementos e_j da base β por T são escritos como combinação linear de β, então

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Logo, T é diagonalizável. ■

Corolário 3.3 *Seja $A \in M(n)$ matriz com n autovalores distintos, então existe uma matriz Q invertivel tal que $A = QDQ^{-1}$, onde D é matriz diagonal e $Q = [I]_{can}^\beta$.*

Demonstração: Exercício. ■

Definição 3.1 *Diremos que a matriz quadrada A é diagonalizavel se ela é semelhante a uma matriz diagonal, ou seja, se existem Q e D tais que $A = QDQ^{-1}$.*

3.2 O Teorema Espectral

Queremos entender nessa seção atráves do Teorema Espectral que para operadores auto-adjuntos $T : V \longrightarrow V$ existe uma base β de V formada por autovetores de T e consequentemente $[T]_\beta^\beta$ é diagonal.

Teorema 3.3 *(Teorema espectral para operadores auto-adjuntos): Seja $T : V \to V$ operador auto-adjunto. Então V possui uma base ortonormal formada por autovetores de T.*

Demonstração: Veja referência [1] ■

Corolário 3.4 *(Teorema espectral para Matrizes Simétricas): Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ matriz simétrica. Então existe $Q \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que $A = QDQ^t$, onde D é uma matriz diagonal.*

Demonstração: Veja referência [3]. ■

3.3 Exponêncial de uma matriz

A exponêncial de matrizes permitem um tratamento mais unificado dos sistemas de equações diferenciais, por isso trataremos como objeto de estudo para este trabalho. O espaço $M(n)$ das matrizes $n \times n$ com entradas reais é um espaço vetorial. O elemento neutro (em relação à operação de soma) em $M(n)$ é a *matriz nula* $\mathbf{0}$ com todas as entradas nulas. Além das operações de soma de matrizes e produto por escalar, temos também a multiplicação de matrizes. Em relação à operação de produto, teremos que o elemento neutro será $I = diag(1, 1, ..., 1)$. Dizemos também que B é inversa de A se, e só se, $BA = I = AB$, caso seja, denotaremos que $B = A^{-1}$.

Teremos interesse na **norma de operador** definida por

$$\| A \| = max\{|Ax|; x \in M(n,1) e |x| \leq 1\},$$

Onde $A \in M(n)$ e $|.|$ é a norma euclidiana. Ainda, temos a seguinte propriedade:

$$\| AB \| \leq \| A \| \| B \| .$$

da norma do operador. Escrevemos também

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^{m+1} = A^m A.$$

A ideia é estender a expressão da solução $x(t) = e^{at}x_0$ da equação $x' = Ax$ a uma expressão da solução $x(t) = e^{tA}x_0$ da equação $x' = Ax$. Segue a seguinte definição:

Definição 3.2 *Sabemos que a função exponêncial é dada pela série de potência (série de Taylor):*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

Agora, podemos então definir a matriz exponêncial de uma matriz $A \in M(n)$ por:

$$ExpA = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ... + \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

É importante questionar se essa série que acabamos de definir converge ou não, em outras palavras, essa definição está ou não bem definida. Perceba que se fizermos $n = 1$, obtemos $e^{(a)} = (e^a)$ e então a série de Taylor converge. Para o caso geral, tomaremos a norma citada antes de operador $M(n)$, o que nos proporciona

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \tfrac{A^n}{n!} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \| A^n \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \| A \|^n = e^{\|A\|}.$$

Portanto, a série que define a exponêncial é absolutamente convergente e, em particular, convergente. Respondendo o questionamento inicial, vemos então que está bem definido.

Exemplo 3.1 *Calcule a Exp* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix}$*:*

$$Exp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + ... + \tfrac{1}{n!} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^n & 0 \end{bmatrix}$$

$$Exp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e & 1 \end{bmatrix}$$

Veremos à seguir algumas propriedades importantes da exponêncial:

1. $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$
2. Se λ é um autovalor da matriz A então e^{λ} é um autovalor da matriz e^A
3. det $e^A = e^{trA}$
4. $e^A = e^{QDQ^{-1}} = Q^{-1}e^DQ$.

4 EQUAÇÕES DIFERENCIAS ORDINARIAS

Nesta seção veremos alguns conceitos básicos mas importantes para às seções seguintes, começando pela formalização do conceito de EDO, seguido do Teorema da Existência e Unicidade para casos gerais (O teorema não explicita a solução para EDO, por isso no devido trabalho iremos particularizar para alguns casos) e por fim adentrarmos em EDO's Lineares.

Definição 4.1 *Dada uma função contínua $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, onde $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um aberto, a equação diferencial ordinária de primeira ordem definida por f é escrita como:*

$$(1)\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Uma solução de (1) é uma função diferenciável $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, tal que

$$\forall t \in J$$

tem-se,

$$(t, \varphi(t)) \in U$$

e,

$$\frac{d\varphi}{dt}(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0)), \forall t_0 \in J.$$

4.1 Teorema da Existência e Unicidade

Fixemos algum ponto $(t_0, x_0) \in U$ e uma solução $x : I \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t, x)$. Se $t_0 \in I$ e também $x(t_0) = x_0$, dizemos que essa solução satisfaz a condição inicial $x(t_0) = x_0$ ou, então, o **problema de valor inicial**

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

A existência de soluções de equações diferenciais ordinárias em $\mathbb{R}^n$ é garantidade pela continuidade de f. Para a unicidade de soluções satisfazendo uma dada condição inicial, a continuidade não é suficiente. O teorema à seguir abrange a existência e unicidade para o caso geral de P.V.I.

Teorema 4.1 *Se $f(t, x)$ e a derivada parcial espacial $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ são aplicações contínuas de (t, x) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ então, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução do problema de valor inicial $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$, definida num intervalo aberto $(t_0 - \gamma, t_0 + \gamma)$ centrado em t_0, para certo $\gamma = \gamma(t_0, x_0) > 0$.*

Demonstração: Consultar referência [7] para demonstração do teorema. ■

4.2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Veremos agora a partir de um exemplo como as EDO's lineares tem sua solução apresentada a partir do conceito de exponêncial. Vejamos à seguir:

Exemplo 4.1 *Uma particula movendo-se ao longo de uma reta tem a cada instante, sua velocidade o dobro de sua posição. Suponhamos que no instante inicial essa particula encontrava-se à 3 metros da origem e a observação tem duração total de 10 segundos. Vamos encontrar a função posição da particula durante esse intervalo de observação. Sabemos que*

$$s'(t) = v(t) = 2s(t),$$

onde a temos a condição inicial

$$s(0) = 3.$$

Logo, podemos a partir desse estudo perceber que a solução do exemplo é dado por $s(t) = 3e^{2t}$.

Aqui, temos uma importante introdução de solução para essa EDO que é dado por $x(t) = e^{tA}x_0$, veremos no teorema a seguir que essa solução ela é **única**.

Teorema 4.2 *Seja A um operador do $\mathbb{R}^n$. Então a solução para o problema de valor inicial*

$$x' = Ax, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

dados por

$$x(t) = e^{tA}x_0$$

é única.

Demonstração: Da **propriedade** da seção 3, teremos que

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}x_0) = (\frac{d}{dt}e^{tA})x_0$$

$$= Ae^{tA}x_0.$$

como $e^{0A}x_0 = x_0$, temos que é solução. Para a unicidade, seja z(t) uma solução qualquer e ainda

$$y(t) = e^{-tA}z(t)$$

então,

$$y'(t) = (\frac{d}{dt}e^{-tA})z(t) + e^{-tA}z'(t)$$

$$= -Ae^{-tA}z(t) + e^{-tA}Az(t)$$

$$= e^{-tA}(-A + A)x(t)$$

$$= 0.$$

E vemos que y(t) é constante, então

$$e^{-tA}z(t) = x_0$$

$$e^{tA}(e^{-tA}z(t)) = e^{tA}x_0$$

$$(e^{tA}e^{-tA})z(t) = e^{tA}x_0$$

Logo, $z(t) = e^{tA}x_0$,
De fato, $x_0 = z(0) = e^0x_0 = x_0$,
Portanto,

$$z(t) = e^{tA}x_0 = x(t).$$

■

5 TEOREMA ESPECTRAL PARA SOLUÇÃO DE SISTEMA DE EDO'S LINEARES

Neste capitulo veremos a utilização do teorema espectral na obtenção da solução para o sistema de EDO's lineares.

Seja a EDO linear dada por $x'(t) = Ax(t)$, vimos no teorema 4.2 que a solução é dada por

$$x(t) = e^{tA}x_0, \qquad x(0) = x_0$$

Sendo A matriz simétrica, então o teorema espectral nos garante uma base $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ ortonormal formada pelos autovetores de A e ainda, $A = QDQ^t$, com $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os respectivos autovalores de A e $Q = [I]^{\beta}_{can} = \begin{bmatrix} [u_1]_{can} & .... & [u_n]_{can} \end{bmatrix}$ matriz ortogonal. Diante disto, temos

$$x(t) = e^{t(QDQ^t)}x_0$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = Qe^{tD}Q^t x_0$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = Qdiag(e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n})Q^t x_0.$$

Logo, a ultima equação nos proporciona uma solução para $x'(t) = Ax(t)$. Nos exemplos à seguir, veremos os casos onde λ_i são reais e distintos e reais com multiplicidade algébrica.

Exemplo 5.1 *Seja o sistema de EDO's lineares*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 5x_2 \\ x_2' = 5x_1 + x_2 \end{cases}$$

Temos que a matriz associada ao sistema é a matriz simétrica dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Queremos calcular os autovalores de A, logo

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

$$\Downarrow$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 24.$$

Então,

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 6$$

ou

$$\lambda_2 = -4.$$

Agora, queremos encontrar os autovetores associados a λ_i, ou seja

$$Av = \lambda_1 v \Leftrightarrow v = xv_1, \quad x \neq 0$$

Para $x = 1$ e resolvendo o sistema obteremos o autovetor

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Precisamos normalizar v_1, logo

$$u_1 = \frac{1}{|v_1|}v_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Analogamente, para λ_2, temos

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{|v_2|}v_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Então, temos a base $\beta = \{u_1, u_2\}$ ortonormal que nos dá a matriz Q ortogonal, isto é,

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução será dada por

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} x_0.$$

Exemplo 5.2 *Seja o sistema de EDO's lineares*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_2 \end{cases}$$

A matriz associada ao sistema é a matriz simétrica dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Queremos calcular os autovalores de A, *observe que*

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

$$\Downarrow$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$$

Então,

$$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1$$

com multiplicidade 2 ou

$$\lambda_2 = -1.$$

Agora, queremos os autovetores associados a λ_i, *ou seja, da mesma forma que o exemplo anterior encontraremos os autovetores e normalizaremos esse autovetores. Para* $\lambda_1 = 1$, *temos*

$$(A - I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Temos então $y = z$, *com* $x \in \mathbb{R}$.
Colocando como solução, teremos

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = b \end{cases}$$

Com $a, b \in \mathbb{R}$.
Teremos como solução matricial então

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ b \end{bmatrix}$$

$$= a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Que nos dá os autovetores v_1 *e* v_2 *que já são ortogonais associados a* λ_1.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{|v_1|} v_1 = (1, 0, 0).$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{|v_2|} v_2 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Analogamente para λ_3, *obteremos*

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_3 = \frac{1}{|v_3|} v_3 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Temos então a base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ *ortonormal que nos dá a matriz* Q *ortogonal, isto é,*

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução é dada por

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} x_0.$$

6 CONCLUSÃO

Podemos concluir então que o Teorema Espectral em sua versão para operadores auto-adjuntos e quando fixamos a base ortonormal no espaço vetorial temos a sua versão matricial é uma poderosa ferramenta da Álgebra Linear que pode nos proporcionar uma forma explícita da solução para as EDO's lineares quando a matriz associada ao sistema é simétrica.

Uma vez identificada a matriz simétrica seguimos para a obtenção dos autovalores e autovetores que do Teorema Espectral sabemos que teremos a base ortonormal que já nos proporciona a matriz ortogonal.

REFERÊNCIAS

DOERING, Claus Ivo., LOPES, Artur Oscar., **Equações Diferenciais Ordinárias**, 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

HIRSCH, Morris W., SMALE, Stephen., **Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra** - Academic Press. New York, 1974.

HOFFMAN, K., KUNZE, R., **Linear Algebra**, Second Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

LIMA, E. L. **Curso de análise, Volume 1**. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1983.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**: Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear**-Coleção SCHAUM.