UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TIAGO SILVA DE OLIVEIRA

UM BREVE PARALELO ENTRE A INTEGRAL DE RIEMANN E A INTEGRAL DE LEBESGUE

REDENÇÃO - CE

2021

TIAGO SILVA DE OLIVEIRA

UM BREVE PARALELO ENTRE A INTEGRAL DE RIEMANN E A INTEGRAL DE LEBESGUE

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador(a): Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes

REDENÇÃO - CE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Oliveira, Tiago Silva de.

O42b

Um breve paralelo entre a integral de Riemann e a integral de Lebesgue / Tiago Silva de Oliveira. - Redenção, 2021.
58f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientadora: Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes.

1. Integral de Riemann. 2. Integral de Lebesgue. 3. Deficiência da Integral de Riemann. I. Título

CE/UF/Dsibiuni CDD 517.518

TIAGO SILVA DE OLIVEIRA

UM BREVE PARALELO ENTRE A INTEGRAL DE RIEMANN E A INTEGRAL DE LEBESGUE

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 14/04/2021

BANCA EXAMINADORA

Amanda Angélica Feltrin Nunes.

Profa. Dra. Amanda Ângélica Feltrin Nunes (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Profa. Dra. Tatiana Skorana
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a meu Deus, que sempre me abençoou com sua graça e misericórdia. E dedico este trabalho a todos os meus familiares, amigos, colegas e professores que contribuíram para esse feito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sua misericórdia e graça sobre minha vida, onde por meio Dele vivencio essa realização. Agradeço ao meus pais que sempre se dedicaram, não medindo esforços para que eu juntamente com meus irmãos tivéssemos uma boa educação.

Agradeço a todos meus familiares, amigos e colegas que contribuíram nessa minha jornada, em particular à Ruthyele Marinho por sempre ter me incentivado e inspirado a seguir firme e forte em busca dos meus objetivos.

Agradeço a minha excelente orientadora Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes por ter aceitado esse desafio de ser minha orientadora, na qual sempre se mostrou acessível, me ajudando sempre no que era possível e incentivando a seguir perseverante nos estudos.

Agradeço aos professores da banca Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes, Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva que contribui para o desenvolvimento da minha formação com suas longas conversas nos esbarrões dos corredores da universidades e à Profa. Dra. Tatiana Skoraia por seus métodos de ensino singulares que nos incentiva a evoluir como professores e matemáticos.

Agradeço a todos que fazem parte da UNILAB, em especial a todos os professores que contribuíram de maneira direta e indireta na minha formação acadêmica e também a CAPES por todo apoio financeiro.

“O que é impossível para as pessoas é possível para Deus."(Lucas 18:27)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma das deficiências da Integral de Riemann, na qual será solucionado pela integral de Lebesgue. Para tanto, foi exibido ao longo desse trabalho as duas teorias de maneira a contemplar apenas o essencial dos conceitos relacionado as mesmas para que pudéssemos cumprir com o planejado para este projeto. Ressaltamos que, a construção da Integral de Lebesgue foi feita seguindo o método de F. Riez apresentado na referência (MEDEIROS, 2019). Desta maneira não utilizamos conceitos relacionado à Teoria da medida, com exceção do conceito de medida nula, na qual muitas das vezes é apresentado apenas no curso de mestrado. Seguindo essa vertente, possibilita aquele aluno que não tem domínio deste assunto a conhecer a teoria relacionada à Integral de Lebesgue usando, relativamente, apenas o conhecimento adquirido na graduação.

Palavras-chave: Integral de Riemann. Integral de Lebesgue. Deficiência da Integral de Riemann.

ABSTRACT

This work aims to present one of the shortcomings of the Riemann Integral, which will be solved by the Lebesgue Integral. In order to do so, two mentioned theories were explained throughout the text in order to consider their essential concepts, so we could accomplish the objectives of this project. We emphasize that the construction of the Lebesgue Integral was made following the method of F. Riez, presented in the reference (MEDEIROS, 2019). Thus, we did not use the concepts related to the Measurement Theory, except for the concept of null measure, which is often viewed only in the Master's degree course. Following this line, it is posible for that student who does not have the domain of this subject to learn the theory related to the Lebesgue Integral, by using, relatively, only the knowledge acquired in undergraduation.

Keywords: Riemann Integral. Lebesgue Integral. Deficiency of the Riemann Integral.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A integral de Riemann é um conceito estudado nos cursos de Matemática, Física, Química, Engenharias e dentre outras áreas, tal conceito nos permite resolver diversos problemas matemáticos que envolvem cálculos de áreas, volumes e outros assuntos que se relacionam com a teoria. Mas, alguns estudantes muitas vezes não se perguntam quais as limitações da mesma, acreditamos que o motivo seja porque tal teoria é conveniente para muitos problemas que são considerados palpáveis.

Mas para aqueles estudantes mais curiosos, é sabido que existem limitações para a Integral de Riemann, ou seja, existem problemas em que a mesma não engloba. Nesse trabalho iremos considerar uma dessas limitações, na qual é sanada pela Integral Segundo Lebesgue. Está última nos permite ampliar a noção de Cálculo Integral para uma classe maior de funções em comparação à classe das funções Integráveis à Riemann. Este trabalho é dividido nos seguintes capítulos: Integral Segundo Riemann, Integral Segundo Lebesgue, reve paralelo entre a Integral Segundo Riemann e a Integral Segundo Lebesgue.

O primeiro capítulo iniciaremos com uma breve história relacionada a vida do matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann e suas relações com o Cálculo Integral, mostraremos alguns conceitos preliminares fundamentais para construímos a noção de Integral de Riemann, apresentaremos conceitos relacionados a Integral Inferior e Integral Superior, uma breve concepção de Funções Integráveis e apresentaremos o Teorema Fundamental do Cálculo no objetivo de apenas registrar sua importância para a matemática, pois a mesma não caminha diretamente para os objetivos deste trabalho.

No segundo capítulo será apresentado uma breve história de Henri Léon Lebesgue e sua Relação com o Cálculo Integral, alguns conceitos preliminares que serão fundamentais para se definir a Integral de Lebesgue, vamos recapitular a ideia de função escada pois a mesma é necessária para se construir a Integral de Lebesgue via método F. Riez, será a exibido o Primeiro e Segundo Lema Fundamental que são fundamentais para definimos a classe $S_1(a,b)$ e consequentemente o espaço $L(a,b)$ que é o espaço das funções Lebesgue integráveis.

No quarto capítulo vamos fazer conforme o objetivo desse trabalho, um breve paralelo entre a integral de Riemann e Integral de Lebesgue, no qual vamos apresentar uma função que não é integrável a Riemann, mas é integrável a Lebesgue e por fim no quinto capítulo são feitas algumas considerações finais.

2 INTEGRAL SEGUNDO RIEMANN

Neste capítulo iniciaremos o estudo das integrais de Riemann seguindo basicamente abordagem de dois livros escrito por Elon Larges na qual consta como referência (LIMA, 2013) e (LIMA, 2012), tais livros tratam do estudo de análise real que por sua vez, tem como subtemas assuntos relacionados às integrais de Riemann. Tentaremos trazer neste capítulo, aquilo que acreditamos ser fundamental para que se possa ter uma concepção acerca das funções integráveis à Riemann e ressaltamos que os resultados relacionados a essência da discussão apresentada neste capítulo são das referências citadas anteriormente.

2.1 BREVE HISTÓRIA DE RIEMANN E SUA RELAÇÃO COM O CÁLCULO INTEGRAL

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 1826 numa aldeia de Hanover, Alemanha, filho de um pastor Luterano, estudou na Universidade de Berlim e depois na de Gottingen, onde na mesma obteve seu título de doutorado com a tese no campo da teoria das funções complexas. Em 1854 Riemann se tornou professor Privantdocent (professor oficial não remunerado) em Gottingen, em 1857 foi indicado professor assistente e em 1859 sucedeu Dirichelet como professor titular de uma cadeira que outrora era ocupada por Gauss, ambos os cargos foram obtidos na mesma instituição.

Podemos citar que uma das características marcantes sobre a personalidade de Riemann é que ele sempre se mostrou um sujeito tímido e de saúde frágil, e infelizmente em 1866 faleceu acometido pela tuberculose. Em sua vida curta publicou relativamente poucos artigos, mas todos eles de grande importância para matemática que de certa forma contribuíram bastante para o desenvolvimento da mesma. Por meio de sua tese de doutorado, ele criou a concepção das superfícies de Riemann pela qual introduziu considerações topológicas na análise dentre outas implicações.

Dentre as várias contribuições de Riemann, gostaria de frisar sobre sua participação no desenvolvimento do Cálculo Integral, pois até o surgimento do conceito que conhecemos hoje como Integral de Riemann, o Cálculo Integral não havia sido sistematizado e organizado. Tivemos vários matemáticos, na qual tiveram uma participação fundamental na criação desta teoria, como por exemplo, Newton (1643-1727), Leibniz (1646-1716), Cauchy (1789-1857) e dentre outros que tiveram sua parcela de contribuição na construção da noção de integral. Se verificarmos ao longo da história do desenvolvimento deste assunto, veremos que Cauchy foi responsável por demonstrar que o conceito do Teorema Fundamental do Cálculo, para uma função definida em um intervalo compacto $[a, b]$, definidas por Leibiniz e Newton eram equivalentes. Ele estendeu estes conceitos para uma semirreta, ao invés de um intervalo compacto, desta forma definindo este novo conceito de integral imprópria. Entretanto, Riemann, e posteriormente Darboux, estenderam estes conceitos para uma classe de funções não necessariamente contínua. Portanto, o que podemos perceber na contribuição de Riemann é que ele ajudou a torna claro o conceito de integrabilidade, tal definição proposta por Riemann permanece até hoje e é frequentemente usado na modelagem de problemas de engenharia, física, química, dentre várias outras áreas.

2.2 CONCEITOS INICIAIS

Nesta seção faremos uma breve revisão sobre alguns resultados relacionados ao conceito de ínfimo e supremo relacionado a conjuntos de números reais, visto que estes possuem um papel fundamental no desenvolvimento do assunto estudado neste capítulo como também para o trabalho em geral. Lembremos que, dado uma função limitada $f : A \to \mathbb{R}$, tem-se que $\sup f = \sup f(A) = \sup\{f(x); x \in A\}$ e $\inf f = \inf f(A) = \inf\{f(x); x \in A\}$. Consideremos os conjuntos a seguir sendo diferentes do vazio, salvo no caso que afirmamos explicitamente o contrário.

Lema 2.1. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leq y$. Então $\sup(A) \leq \inf(B)$. E $\sup(A) = \inf(B)$ se, somente se, para todo $\epsilon > 0$ dado, exista $x \in A$ e $y \in Y$ com $y - x < \epsilon$.*

Demonstração. Sabemos que todo $x \in A$ é cota inferior de B, então $x \leq \inf B$. Então, isto nos mostra que todo elemento de B é cota superior de A, em particular $\inf B$, portanto $\sup A \leq \inf B$. Se for o caso da desigualdade estrita $\sup A < \inf B$, então $\epsilon = \inf B - \sup A > 0$ e $y - x \geq \epsilon$ para todo $x \in A$, $y \in B$, pois $x \leq \sup A \leq \inf B \leq y \Rightarrow \epsilon = \inf B - \sup A \leq y - x$. No caso da igualdade estrita, temos que, se $\sup A = \inf B$ para todo $\epsilon > 0$ dado, $\sup A - \frac{\epsilon}{2}$ não é cota superior de A e $\inf B + \frac{\epsilon}{2}$ não é cota inferior de B, logo existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $\sup A - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \sup A = \inf B \leq y < \inf B + \frac{\epsilon}{2}$, logo $y - x < \epsilon$.

□

Lema 2.2. *Sejam A, B conjuntos não vazios e limitados de números reais. Pondo $A + B = \{x + y; x \in A$ e $y \in B\}$, tem-se $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$ e $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.*

Corolário 2.1. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Então $sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$ e $\inf(f + g) \geq \inf(f) + \inf(g)$.*

Para detalhes relacionados às demonstrações do Lema e corolário anterior consultar referência (LIMA, 2013).

Exemplo 1. *Seja* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$*, onde* $f(x) = x$*,* $g(x) = -x$*. Então* $\sup(f) = 1$ *e* $\sup(g) = 0$ *e* $\sup(f+g) = 0$*. Neste caso, temos* $\sup(f+g) < \sup(f) + \sup(g)$*.*

Lema 2.3. *Seja* $A \neq \emptyset$ *um conjunto limitado de números reais. Dado* $c \in \mathbb{R}$*, ponhamos* $c \cdot A = \{cx : x \in A\}$*. Então* $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup(A)$ *e* $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf(A)$ *para* $c \geq 0$*. Quando* $c < 0$ *tem-se* $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf(A)$ *e* $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup(A)$*.*

Demonstração. Ver referência (LIMA, 2013)

Definição 2.1 (Oscilação em um conjunto)**.** *Dado* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada, sua oscilação no conjunto* $X \subset [a,b]$ *é definida por*

$$w(f;X) = \sup f(X) - \inf f(X).$$

O lema seguinte resulta em uma definição equivalente para oscilação em um conjunto.

Lema 2.4. *Seja* B *um conjunto não vazio limitado de números reais. Se* $m = \inf(B)$ *e* $M = \sup(B)$*, então* $M - m = sup\{|x-y|;\ x, y \in B\}$*.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $M - m$ é uma cota superior. Seja $A = \{|x-y|; x, y \in B\}$. Dado $x, y \in B$ arbitrários, sem perca de generalidade, podemos escolher a notação de modo que $x \geq y$. Logo:

$$m \leq y \leq x \leq M \Rightarrow |x-y| = x - y = x + (-y) \leq M - m.$$

Temos então que, $M - m$ é uma cota superior. Mostraremos agora que $M - m$ é o menor das costas superiores, ou seja, o supremo do conjunto A. Para isto, temos que para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar $x,\ y \in B$ tais que $x > M - \frac{\epsilon}{2}$ e $y < m + \frac{\epsilon}{2}$, ou seja, $-y > -m - \frac{\epsilon}{2}$, logo:

$$|x-y| = x - y = x + (-y) > (M-m) - \epsilon.$$

Portanto, $M - m = \sup A$. □

Corolário 2.2. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Para todo* $A \subset [a,b]$ *não vazio, tem-se* $w(f;A) = \sup\{|f(x) - f(y)|;\ x, y \in A\}$*.*

Demonstração. Se tomamos $B = f(A)$ no Lema 2.4, fica demonstrado seguindo o mesmo raciocínio da demonstração anterior. □

Em particular, dado $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e uma partição P do intervalo $[a,b]$, indicaremos com $w_i = M_i - m_i$ a oscilação de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, onde m_i é o ínfimo e M_i o supremo dos valores de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Observe que utilizamos a palavra "partição" nesse parágrafo, tal termo será definido na seção a seguir.

2.3 INTEGRAL SUPERIOR E INFERIOR

Consideremos funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida num intervalo compacto $[a, b]$ e limitado nesse intervalo, onde $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.2 (Partição)**.** *Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito $P \subset [a, b]$ tal que $a, b \in P$. Se tomamos $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$, convencionamos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, onde os intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ serão chamados intervalos da partição P.*

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Indicaremos por m_i o ínfimo e M_i o supremo dos valores de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Definição 2.3 (Soma Inferior e Soma Superior)**.** *Definimos a soma inferior $s(f; P)$ e soma superior $S(f; P)$ da função f relativamente à partição P pondo, respectivamente:*

(i) $s(f; P) = m_1(t_1 - t_0) + \ldots + m_n(t_n - t_{n-1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$

(ii) $S(f; P) = M_1(t_1 - t_0) + \ldots + M_n(t_n - t_{n-1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$

Decorre que, se m *e* M são, respectivamente, ínfimo e supremo de f em $[a, b]$, temos que:

$$m(b - a) \leq s(f; P) \leq S(f; P) \leq M(b - a), \qquad \forall P \subset [a, b].$$

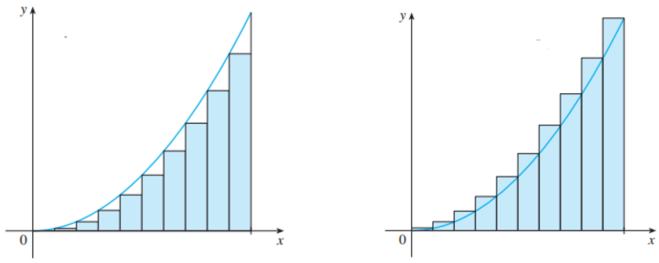
Quando f é uma função positiva, as somas $s(f; P)$ e $S(f; P)$ podem ser interpretadas como áreas de polígonos, um inscrito e outro circunscrito ao gráfico de f.

Note que, embora a figura apresentada a seguir possua, aparentemente, intervalos de mesma amplitude. Destacamos que não é necessário tomar partições com intervalos necessariamente de mesmo tamanho para que a ideia relacionada a soma inferior e soma superior seja válida.

Definição 2.4 (Refinamento)**.** *Sejam P, Q partições de $[a, b]$. Quando $P \subset Q$, diz-se que a partição de Q é mais fina do que P.*

Ressalto que, a maneira mais simples de refinar uma partição P é acrescentando-lhe um único ponto ou novos pontos de divisão aos intervalos de P.

Figura 1.1 - Integral Inferior e Integral Superior



Fonte: James Stewart(2013)

Teorema 2.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Quando se refina uma partição P a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.*

Demonstração. Note que, se uma partição Q resulta do acréscimo de um ponto a partição P tem-se $S(f; Q) \leq S(f; P)$, pois:

Tomemos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ e consideremos $Q = \{t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, r, t_i, \ldots t_{n-1}, t_n\}$, onde $t_{i-1} \leq r \leq t_i$. Sejam M_i, M' e M'' os supremos de f nos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $[t_{i-1}, r]$ e $[r, t_i]$, respectivamente, vemos que $M_i \geq M'$ e $M_i \geq M''$. Como $t_i - t_{i-1} = (t_i - r) + (r - t_{i-1})$, temos:

$$\begin{aligned} S(f; P) - S(f; Q) &= M_i(t_i - t_{i-1}) - M''(t_i - r) - M'(r - t_{i-1}) \\ &= M_i(t_i - r) + M_i(r - t_{i-1}) - M''(t_i - r) - M'(r - t_{i-1}) \\ &= (M_i - M'')(t_i - r) + (M_i - M')(r - t_i) \geq 0. \end{aligned}$$

Concluímos que $P \subset Q$ implica $S(f; Q) \leq S(f; P)$. De forma análoga, se prova para $P \subset Q \Rightarrow s(f; Q) \geq s(f : P)$. Logo, diante do exposto esta provado o teorema.

□

Vale ressaltar que, aplicando esse resultado repetidamente para outros pontos que podem ser acrescidos obtém-se a mesma conclusão.

Corolário 2.3. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Para quaisquer partições P, Q de $[a, b]$, tem-se $s(f; P) \leq S(f; Q)$.*

Demonstração. Sabemos que, a partição $P \cup Q$ refina P e Q. Logo

$$s(f; P) \leq s(f; P \cup Q) \leq S(f; P \cup Q) \leq S(f; Q).$$

Portanto, toda soma inferior de f é menor ou igual a qualquer soma superior.

□

Definição 2.5 (Integral Inferior e Integral Superior).

1. Integral Inferior de uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup_P s(f; P)$$

2. Integral superior de uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf_P S(f; P)$$

O sup e o inf são tomados relativamente a todas as partições P de $[a, b]$.

Exemplo 2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, definida por $f(x) = k$ se x é racional e $f(x) = q$ se x é irracional, onde $k < q$ e $k, q \in \mathbb{N}$. Mostre que a integral superior difere da integral inferior.*

R: Dada uma parição P qualquer de $[a, b]$, sabemos que para cada intervalo $(t_{i-1}, t_i) \subset P$ temos números racionais e irracionais contidos neles, logo $m_i = k$ e $M_i = q$, para todo $i = 1, 2, ..., n$. Pois, como sabemos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ são densos nos reais e logo para cada intervalo que tomamos na reta real sempre vai haver números racionais e irracionais. Portanto, teríamos que

$$s(f; P) = k(b - a) \neq q(b - a) = S(f; P),$$

o implica que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Exemplo 3. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ constante, $f(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$. Mostre que a integral superior é igual a integral inferior.*

R: Note que para qualquer partição P de $[a, b]$, temos que $M_i = m_i = k$ para qualquer intervalo (t_{i-1}, t_i). Logo $S(f; P) = k(b - a) = s(f; P)$, o implica que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = k(b - a).$$

No exemplo 3 temos que a integral inferior é igual a integral superior, entretanto casos como estes em que ambas as integrais possuem um mesmo resultado terão uma definição apropriada, na qual veremos na seção seguinte. Sem mais delongas, temos a seguir algumas propriedades que configuram a integral inferior e superior.

1. Para qualquer partição P de [a,b] tem-se $s(f;P) \leq \sup_P s(f;P) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$;

2. Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P \subset [a,b]$ tal que $s(f;P) > \underline{\int_a^b} f(x)dx - \epsilon$;

3. Para qualquer partição P de [a,b] tem-se $S(f;P) \geq \inf_P S(f;P) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$;

4. Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição $P \subset [a,b]$ tal que $S(f;P) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \epsilon$.

Observação 2.1. *Em particular se* $|f(x)| \leq K, \ \forall \ P$ *de* $[a,b]$*, então;*

$$\left| \underline{\int_a^b} f(x)dx \right| \leq K(b-a) \qquad e \qquad \left| \overline{\int_a^b} f(x)dx \right| \leq K(b-a),$$

pois $-K < f(x) < K$.

Teorema 2.2. *Se* $a < c < b$ *e* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Então:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$$

e

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx.$$

Para detalhes sobre a demonstração consultar a referência (LIMA, 2013).

Teorema 2.3. *Seja $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitadas. Então:*

1. $\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx \leq \underline{\int_a^b}[f(x) + g(x)]dx \leq \overline{\int_a^b}[f(x) + g(x)] \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx.$

2. Se $c > 0$, $\underline{\int_a^b} cf(x)dx = c\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} cf(x)dx = c\overline{\int_a^b} f(x)dx$.

   Se $c < 0$, $\underline{\int_a^b} cf(x)dx = c\overline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} cf(x)dx = c\underline{\int_a^b} f(x)dx$.

3. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx$ *e* $\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)dx$.

Demonstração. 1. Provaremos apenas a primeira desigualdade, pois a segunda não é difícil ver pelo corolário 2.3 e a terceira segue o mesmo raciocínio que iremos utilizar agora. Tomemos $m_i(f), m_i(g)$ e $m_i(f+g)$ para indicarmos os ínfimos das funções f, g e $f+g$ no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de um partição P. Pelo corolário 2.1, temos que $m_i(f+g) \geq m_i(f) + m_i(g)$ e consequentemente $s(f+g; P) \geq s(f; P) + s(g; P)$. Logo,

$$\underline{\int_a^b}[f(x) + g(x)]dx \geq s(f+g; P) \geq s(f; P) + s(g; P),$$

para toda partição P de $[a, b]$. Dadas arbitrariamente as partições P e Q temos que

$$s(f; P) + s(g; P) \leq s(f; P \cup Q) + s(g; P \cup Q) \leq \underline{\int_a^b}[f(x) + g(x)]dx,$$

na qual estamos tomando $P \cup Q$ sendo um refinamento da partição P. O lema 2.2 nos possibilita então que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx = \sup_{P,Q}[s(f; P \cup Q) + s(g; P \cup Q)] \leq \underline{\int_a^b}[f(x) + g(x)]dx.$$

2. Pelo Lema 2.3, temos que: Seja A igual ao conjunto das somas superiores com relação a função $h = c \cdot f$ e toda partição P tomada de $[a, b]$, $c > 0$, e seja B igual ao conjunto das somas superiores com relação a função f e toda partição P tomada de $[a, b]$, então

$$\overline{\int_a^b} h(x)dx = \overline{\int_a^b} c \cdot f(x)dx = \inf(A) = \inf(c \cdot B) = c \cdot \inf(B) = c \cdot \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

De maneira análoga, observando o Lema 2.3, se prova as demais situações deste item.

3. Temos que se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$, então $m_i(f) \leq m_i(g) \Rightarrow s(f;P) \leq s(g;P)$ para toda partição P tomada de $[a,b]$. Logo $\sup\limits_{P} s(f;P) \leq \sup\limits_{P} s(g;P)$, o que implica que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx.$$

De maneira análoga se prova para a soma superior.

□

2.4 FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

Para efeito de simplicidade, quando nos referimos a funções integráveis a Riemann neste capítulo, em alguns momentos, diremos apenas que a função é integrável ou Riemann integrável.

Definição 2.6. *Uma função limitada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ chama-se integrável quando:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Este valor, comum é chamado a integral de f e denotado por:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Podemos citar como exemplo de função integrável uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = c$, onde $\int_a^b f(x)dx = c \cdot (b-a)$. Além disso, se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função escada, então f é integrável e $\int_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1})$, onde c_i são valores que f assume nos intervalos (t_{i-1}, t_i). Observemos que no exemplo 3 a função é integrável, enquanto no exemplo 2 a função não é integrável.

Quando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, os números $s(f;P)$ e $S(f;P)$, são valores aproximados, respectivamente, por falta e por excesso da área da região A, limitado pelo gráfico de f, pelo intervalo $[a,b]$ do eixo das abscissas e pelas verticais levantadas nos pontos a e b desse eixo. Sempre que concluímos que uma função f é integrável a Riemann, significa que as aproximações por falta e por excesso se conduzem para um mesmo resultado da área da região A. Se $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então os números

$s(f;P)$ e $S(f;P)$ são valores aproximados para área da região A com o sinal trocado.

Observação 2.2. *Representaremos por $R(a,b)$ a classe de todas as funções limitadas e integráveis a Riemann em (a,b).*

Teorema 2.4. *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f é integrável
2. Para todo $\epsilon > 0$, existem partições P, Q do intervalo [a,b] tais que $S(f;Q)-s(f;P) < \epsilon$;
3. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma partição P do intervalo $[a,b]$ tal que $S(f;P)-s(f;P) < \epsilon$;
4. Para todo $\epsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ do intervalo $[a,b]$ tal que $\sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) < \epsilon$.

Demonstração. Demonstração. Pelo Lema 2.1 temos que $1 \Leftrightarrow 2$. Note que $3 \Leftrightarrow 4$, pois dada uma partição P tem-se,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})\\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})\\ &= S(f;P) - s(f;P).\end{aligned}$$

Temos que $3 \Rightarrow 2$, visto que dada uma partição P de $[a,b]$ podemos refina-la. E por último, dispomos de $2 \Rightarrow 3$, porque se $S(f;Q) - s(f;P) < \epsilon$, e $K = Q \cup P$, temos que $s(f;P) \leq s(f;K) \leq S(f;K) \leq S(f;Q)$. Logo,

$$S(f;K) - s(f;K) \leq S(f;Q) - s(f;P) < \epsilon.$$

□

Teorema 2.5. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então:*

1. Para todo $a < c < b$, $f|_{[a,c]}$ *e* $f|_{[c,b]}$ são integráveis e se tem
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{1}$$
Reciprocamente se $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis, então f é integrável e vale a igualdade a cima.
2. Para todo $c \in \mathbb{R}$, cf é integrável e $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
3. $f + g$ é integrável e $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
4. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
5. $|f|$ é integrável e se tem:
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$
6. O produto de $f \cdot g$ é integrável.

Demonstração. 1. Sejam $a = \displaystyle\int_{\underline{a}}^{c} f(x)dx$, $A = \displaystyle\int_{a}^{\underline{c}} f(x)dx$, $b = \displaystyle\int_{\underline{c}}^{b} f(x)dx$ e $B = \displaystyle\int_{c}^{\bar{b}} f(x)dx$.
Pelo Teorema 2.2 temos,
$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = a + b \quad \text{ e } \quad \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx = A + B$$
e sabemos que $a \leq A$ e $b \leq B$. Logo, f é integrável se, somente se, $a = b$ e $A = B$, portanto
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. Pelo Teorema 2.3 temos que, se $c < 0$, então $\displaystyle\int_{\underline{a}}^{b} c \cdot f(x)dx = c\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$ e como f é integrável resulta da igualdade anterior que
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

O caso em que $c \geq 0$ não é difícil de ver.

3. Pelo Teorema 2.3 temos o seguinte,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx \leq \int_{\underline{a}}^b [f(x)+g(x)]dx \leq \overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)] \leq \int_a^{\bar{b}} f(x)dx + \int_a^{\bar{b}} g(x)dx$$

como f e g é integrável, temos então que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx.$$

Portanto, $\underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]dx = \overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

4. Observando o Teorema 2.3, temos que $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx$, como f e g são integráveis, temos

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

5. A demonstração deste item se constitui em duas etapas. Primeiramente mostraremos que $x \mapsto |f(x)|$ é integrável. Nota-se que para $x, y \in [a,b]$ quaisquer, temos que $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x)-f(y)|$. Logo, pelo corolário do Lema 2.4, temos que $w(|f|;X) \leq w(f;(X))$ para qualquer subconjunto $X \subset [a,b]$. Tomando, em particular, uma partição P de [a,b], temos que $w_i(|f|;P) \leq w_i(f;P)$. Desta forma pelo Teorema 2.4 temos que $|f(x)|$ é integrável. Resta mostramos que $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, de fato esta afirmação está correta, visto que para todo $x \in [a,b]$, vale $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Como $|f|$ é integrável e usando as afirmações do item 2 e 4 deste Teorema 2.5, segue que:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

conforme queríamos demonstrar.

6. Seja $|f(x)| \leq K$ e $|g(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$. Dada uma partição $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$

de $[a, b]$ e indiquemos por $w_i(f \cdot g), w_i(f)$ e $w_i(g)$ as oscilações dessas funções no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Para $x, y \in [t_i - t_{i-1}]$, quaisquer, temos

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)||g(x) + g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\
&\leq K|f(x) - f(y)| + K|g(x) - g(y)| \\
&\leq K[w_i(f) + w_i(g)],
\end{aligned}$$

ou seja, temos que $w_i(f \cdot g) \leq K[w_i(f) + w_i(g)]$. Consequentemente, observando o item 4 do Teorema 2.4, notaremos que $(f \cdot g)$ é integrável pela integrabilidade de f e g, dado que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w_i(f \cdot g)(t_i - t_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^{n} K \cdot w_i(f)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} K \cdot w_i(g)(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq K\left[\sum_{i=1}^{n} w_i(f)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} w_i(g)(t_i - t_{i-1})\right].
\end{aligned}$$

□

Observação 2.3. *Sejam quais forem os reais $a, b, c \in \mathbb{R}$ convencionaremos o seguinte*:

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Se considerarmos essas convenções, a igualdade do item (1) do Teorema 2.5 mantém-se para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ou seja, existem seis possibilidades; $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ e $c \leq b \leq a$. Para cada caso, basta considerarmos a integrabilidade no maior intervalo.

Definição 2.7. *Se V é um espaço vetorial sobre o conjunto dos reais, uma aplicação $f : V \to \mathbb{R}$ diz-se* **funcional linear** *se:*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad \forall x, y \in V \text{ e } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Observação 2.4. *Note que, se as funções f e g pertencem a $R(a, b)$, então valem é as seguintes propriedades.*

(i) Se $f, g \in R(a, b)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha f + \beta g \in R(a, b)$ e tem-se

(ii) $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$

Pela Observação 4 item (i) e item (ii) temos que, respectivamente, $R(a, b)$ é um espaço vetorial, pois ele é um subespaço do espaço de todas as funções definidas em (a, b), e que a cada $f \in R(a,b)$ se associa um número real dado pela aplicação $\int_a^b f(x)dx$, no qual recai sobe a definição de funcional linear. Percebam que a verificação de tais propriedades são garantidas pelo Teorema 2.5.

Teorema 2.6. *Toda função contínua $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração. Como a função é definida no intervalo compacto, logo é uniformemente contínua. Portanto, tomando $\gamma = \dfrac{\epsilon}{b-a} > 0$, existirá um $\delta > 0$ na qual $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \gamma$. Basta tomar uma partição $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ de $[a,b]$, onde $t_i = a + i(\frac{b-a}{n})$ e $[t_i - t_{i-1}] < \delta$, perceba que para qualquer $x,\ y \in [t_i - t_{i-1}]$ tem-se que $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \gamma$. Logo, usando o corolário 2.2 e pelo Teorema 2.4 f é integrável, pois temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) &< \sum_{i=1}^{n} \gamma \cdot (t_{t_i - t_{i-1}}) = \gamma \sum_{i=1}^{n} \cdot (t_{t_i - t_{i-1}}) \\
&< \frac{\epsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_{t_i - t_{i-1}}) = \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.7. *Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se, para cada $c \in [a,b)$, $f|_{[a,c]}$ é integrável, então f é integrável em $[a,b]$.*

Demonstração. Seja K constante tal que $|f(x)| \le K$ para todo $x \in [a,b]$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $c \in [a,b)$ tal que $K \cdot (b-c) < \dfrac{\epsilon}{4}$. Como $f|_{[a,c]}$ é integrável, existe uma partição $\{t_0 \cdots t_n\}$ de $[a,c]$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2}$. Pondo $t_{n+1} = b$, obtemos uma partição $\{t_0 \cdots t_n, t_{n+1}\}$ de $[a,c]$. Certamente $w_{n+1} \le 2K$, pois

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x)| + |f(y)| \le 2K, \qquad \forall\ x,\ y \in (t_n, t_{n+1}).$$

Logo $w_{n+1} \cdot (t_{n+1} - t_n) = w_{n+1} \cdot (b-c)$. Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} w_i(t_i - t_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) + w_{n+1}(t_{n+1} - t_n) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + w_{n+1}(b-c) \\
&\le \frac{\epsilon}{2} + 2K(b-c) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + 2\frac{\epsilon}{4} = \epsilon,
\end{aligned}$$

e assim f é integrável. □

Corolário 2.4. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se para $a < c < d < b$ quaisquer, $f|_{[c,d]}$ é integrável, então f é integrável.*

Demonstração. Note que, se tomamos um ponto p tal que $a < p < b$, então teremos que $f_{[a,p]}$ e $f_{[p,b]}$ é integrável. Pois, se tomamos $p < q < b$ teremos que $f_{[p,b]}$ é integrável pelo Teorema 2.7, e de maneira análoga $f_{[a,p]}$ é integrável. Portanto $f_{[a,p]}$ e $f_{[p,b]}$ é integrável pelo item 1 do Teorema 2.5

□

Corolário 2.5. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, com um número finito de descontinuidade. Então f é integrável.*

Demonstração. Seja $t_0, t_1, ..., t_n$ os pontos de descontinuidade de $[a, b]$. Pelo corolário anterior, para cada $i = 1, \cdots, n$, temos que $f_{(t_{i-1}, t_i)}$ é integrável, pois f é contínua em todo intervalo $[c, d]$ com $t_{i-1} < c < d < t_i$. Logo f é integral pelo Teorema 2.5 item 1.

□

Vale ressaltar que, caso o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tenha medida nula, a função será integrável. Tal resultado e o conceito de conjunto de medida nula serão apresentados no próximo capítulo.

2.5 O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Enunciaremos nesta seção um resultado relevante para história da matemática, o Teorema Fundamental do Cálculo. Esse nome é apropriado, dado que este resultado permite estabelecer uma conexão entre dois ramos do Cálculo; o Cálculo Integral e o Cálculo Diferencial.

Seja $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável. Sabemos que $f|_{[a,x]}\in R(a,b)$ para todo $x\in[a,b]$ pelo item 1 do Teorema 2.5. Definindo uma função $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, onde:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

Se $|f(t)|\leq K$ para todo $t\in[a,b]$, então, dado quaisquer $x,y\in[a,b]$, tem-se:

$$\begin{aligned}
|F(y)-F(x)| &= \left|\int_a^y f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right| \\
&= \left|\int_a^y f(t)dt+\int_x^a f(t)dt\right| \\
&= \left|\int_x^y f(t)dt\right| \\
&\leq \int_x^y |f(t)|dt \\
&\leq K\cdot\int_x^y dt = K\cdot|y-x|.
\end{aligned}$$

Teorema 2.8. *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável. Se f é continua no ponto $c\in[a,b]$, então a função $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, é derivável no ponto c e se tem $F'(c)=f(c)$.*

Corolário 2.6. *Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua, existe $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $F'=f$.*

Teorema 2.9 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Se uma função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ possui derivada integrável, então*

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(t)dt.$$

Nos Teoremas e no corolário apresentado anteriormente foi omitido suas demonstrações, dado que nosso objetivo não será trabalhar diretamente com a importância desses resultados. Entretanto para mais detalhes sobre suas demonstrações ver referência (LIMA, 2013).

Destacamos que, os resultados apresentados nesta seção ocasionaram um grande progresso no desenvolvimento da matemática. Pois, muitos dos problemas que se reduziam ao encontro de áreas, volumes e comprimentos de curvas, outrora vistos como contratempos embaraçosos desde o tempo de Eudóxio até Fermat, passaram ser visto como questões relativamente menos complicadas.

Ressaltamos que as implicações do Teorema Fundamental do Cálculo são utilizadas em diversas áreas como Química, Física, Engenharias e afins. Desta maneira, fica evidente que tal resultado possui uma grande importância para o desenvolvimento da ciência na sociedade, pois proporcionou e proporciona a resolução de vários problemas nas mais diversas áreas antes insolucionáveis, dado que não existia teoria matemática que abrangesse tais obstáculos.

3 INTEGRAL SEGUNDO LEBESGUE

Neste capítulo iniciaremos um estudo sobre um modelo de integrabilidade desenvolvida por Lebesgue, entretanto não caminharemos pela mesma metodologia utilizado por ele na apresentação no conteúdo e na maioria das vezes utilizados por aqueles que buscam estudar e conhecer esse assunto. Pois, para tanto seria necessário, para o desenvolvimento deste trabalho, um domínio razoável de uma gama de afirmações relacionadas ao ramo da matemática conhecido como Teoria da Medida, como pretendemos estudar e expor uma ideia matemática tentando utilizar apenas ferramentas que nos foi dado durante a graduação, optamos por seguir a abordagem apresentada por Luis Adauto na referência (MEDEIROS, 2019), no qual se utilizar a formulação F. Riez para apresentar o conteúdo tema deste capítulo e ressaltamos que os resultados relacionados a essência da discussão apresentada neste capítulo são da referência citada.

3.1 BREVE HISTÓRIA DE HENRI LÉON LEBESGUE E SUA RELAÇÃO COM O CÁLCULO INTEGRAL

Lebesgue nasceu em 1875 na cidade de Beauvais, França, filho de pai tipógrafo e mãe professora de escola básica. Lebesgue iniciou seus estudos no Collège Beuvais, e depois foi para Paris, onde estudou primeiro no Liceu Saint Louis e por seguinte no Liceu Louis-le-Grand. Ele entrou na École Normale Supérieure em 1894, Paris, e recebeu seu diploma de professor de matemática em 1897.

O final do século XIX, se destacava a ênfase no rigor matemático e levou muitos matemáticos, intencionalmente, a produzirem várias funções que denominavam "patológicas", porquê a mesma gozava de alguma propriedade incomum e de maneira tal violavam um teorema que antes se suponha válido em geral. E isso preocupava muitos analistas renomados, e embora Lebesgue tivesse como professores matemáticos que desfrutavam dessa mesma preocupação, o mesmo fazia estudos de casos incomuns e questionava seus professores sobre afirmações outrora feitas. Se verificamos a história de vida de Lebesgue veremos que ele se comunicava bastante com Emile Borel (1871-1956) em École Normale, e o mesmo refletindo sobre os trabalhos de Borel relacionado a conjuntos, percebeu que a definição de Riemann possuía algumas limitações, um exemplo seria a permutação do limite sobre o sinal de integral, o qual é permitido, segundo definição de Riemann , apenas em casos excepcionais.

Em 1902, Lebesgue produziu sua tese que tinha como intuito redefinir e generalizar a definição dada por Riemann sobre integrais, e infelizmente sua teoria sofreu bastante resistência pelos matemáticos conservadores, pois os mesmos acreditavam que a busca por funções patológicas e suas implicações produziria o declínio do desenvolvimento da matemática. Até mesmo Lesbesgue chegou a temer o rumo que a matemática estava tomando, entretanto naquela época não só ele mais outros matemáticos importantes estavam fazendo esses estudos de casos, no qual produziram resultados fundamentais para a construção da matemática moderna. E podemos citar que, embora muitos tenham demonstrado relutância pelo trabalho de Lebesgue, pouco a pouco seus estudos foram ganhando espaço e em 1910 foi nomeado professor assistente em Sobornne, e além disso, ele ocupou vários outros cargos de importância devido ao reconhecimento de suas teorias.

3.2 CONCEITOS PRELIMINARES

Acreditamos que o conceito de comprimento ou amplitude de um intervalo na reta seja conhecido por todos amantes da matemática, entretanto por efeito de formalidade e pela importância que manifestará ao longo desse capítulo, temos a seguinte definição.

Definição 3.1. *Consideremos a amplitude de um intervalo na reta como sendo o valor absoluto da diferença entre os extremos do intervalo, não importando se o intervalo é aberto ou fechado. Denotaremos amplitude de um intervalo I, por* $amp(I)$. *Se o intervalo é não limitado diremos que tem amplitude infinita.*

Observação 3.1. *A priori todos os conjuntos ao qual mencionaremos ao longo deste capítulo serão subconjuntos do intervalo* (a, b), *aberto e limitado, de* $\mathbb{R}$.

Como afirmamos anteriormente não utilizaremos a Teoria da Medida para desenvolver os assuntos aqui apresentados, entretanto vamos inserir o conceito de conjunto de medida nula, que é relativamente simples.

Definição 3.2 (Conjunto de Medida Nula)**.** *Diz que um conjunto* E *tem medida nula, quando para todo* $\epsilon > 0$ *existe uma família enumerável de intervalos abertos* $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfazendo as condições:*

(i) $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, *isto é,* $\{I_n\}$ *é uma cobertura E.*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} amp(I_n) < \epsilon$.

Note que, se E é um conjunto de medida nula, temos por definição que o subconjunto $F \subset E$ também tem medida nula.

Proposição 3.1. *Todo conjunto enumerável tem medida nula.*

Demonstração. Dado um conjunto $E = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$, enumerável, contido em $\mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos os intervalos $I_n = \{x \in \mathbb{R}; r_n - \frac{\epsilon}{2^{(n+2)}} < x < r_n + \frac{\epsilon}{2^{(n+2)})}\}$ para $n = \{1, 2, \dots\}$. Temos que a família $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura enumerável de E e a amplitude de cada intervalo I_n é dada por $\frac{\epsilon}{2^{(n+1)}}$. Logo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{(n+1)}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2\cdot 2^n}=\frac{\epsilon}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\epsilon}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-1\right]=\frac{\epsilon}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right]=\frac{\epsilon}{2}\cdot 1=\frac{\epsilon}{2}$$

Portanto temos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{(n+1)}}<\epsilon$.

□

Proposição 3.2. *A união de uma família enumerável de conjuntos de medida nula possui medida nula.*

Demonstração. Considere $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de medida nula. Sabemos por definição que para todo $\epsilon > 0$ e para todo $k \in \mathbb{N}$ existe uma cobertura enumerável de E_k por intervalos abertos $\{I_n^k\}$, tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} amp\{I_n^k\} < \frac{\epsilon}{2^k}. \tag{2}$$

Então, temos que o conjunto $E=\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}E_k$ é coberto por uma família de intervalos $\{I_n^k\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ que ainda é enumerável e pela equação (2.1) tem sim:

$$\sum_{n=1}^{\infty}amp\{I_n^1\}+\sum_{n=1}^{\infty}amp\{I_n^2\}+\cdots+\sum_{n=1}^{\infty}amp\{I_n^k\}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}amp\{I_n^k\}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^k}=\epsilon\cdot 1=\epsilon$$

portanto o conjunto E tem medida nula.

□

Definição 3.3. *Diz-se que um conjunto E goza de uma propriedade p quase sempre, quando tal propriedade é válida para todo elemento do conjunto E, exceto em subconjunto de medida nula de E.*

Teorema 3.1. *Uma condição necessária e suficiente para que uma função limitada, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, seja integrável segundo Riemann em (a,b) é que f seja contínua quase sempre em (a,b).*

O teorema apresentado a cima é um resultado mais geral que o corolário 2.5. Entretanto, omitiremos sua demonstração, dado que a mesma não se dirige diretamente para os objetivos desse trabalho. Entretanto, para mais detalhes relacionado à demonstração veja a referência (MEDEIROS, 2019).

Apresentaremos a definição de sequência de função simples e uniforme, dado que o conhecimento das mesmas é fundamental para que possamos compreender a teoria apresentada nessa seção.

Definição 3.4. *Diz-se que uma sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ converge simplesmente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $x \in X$, a sequência de números $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ converge para o número $f(x)$.

Portanto, em termos matemáticos temos que, $f_n \to f$ simplesmente quando:

$$\forall\ \epsilon > 0 \text{ e } x \in X, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

onde n_0 depende de ϵ e de $x \in X$.

Definição 3.5. *Diz-se que uma sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ converge uniformemente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se tomamos $n > n_0$, então $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, seja qual for o $x \in X$.

Portanto, em termos matemáticos temos que, $f_n \to f$ uniformemente quando:

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

onde $n_0 \in \mathbb{N}$ depende apenas de ϵ para qualquer $x \in X$.

3.3 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES ESCADAS

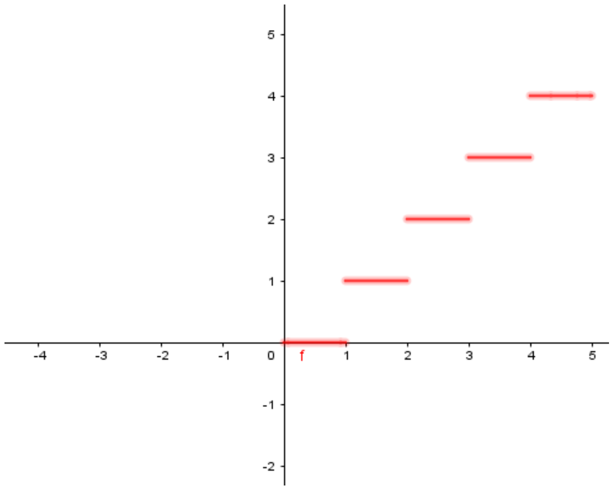
Daremos ênfase nesta seção ao conceito de integração de funções escada, dado que a compreensão desta ideia é essencial para o estudo da Integral de Lebesgue via método de F. Riez, procedimento no qual foi adotado por nós para elaboração desse trabalho.

Definição 3.6. *Diz-se que* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *é uma função escada, quando existe uma partição P do intervalo* (a, b) *tal que f é constante em cada subintervalo* $J_i = (t_{i-1}, t_i)$, *onde* $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *de* P.

Na Definição 3.6 , temos que a partição P diz-se associada à função f, note que, entretanto P não é univocamente determinada para f, pois pela definição 2.4 podemos refinar a partição P.

Exemplo 4. *A função* $f : (0,5) \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in (0,5)$ associa sua parte inteira é uma função escada, observe a figura abaixo.

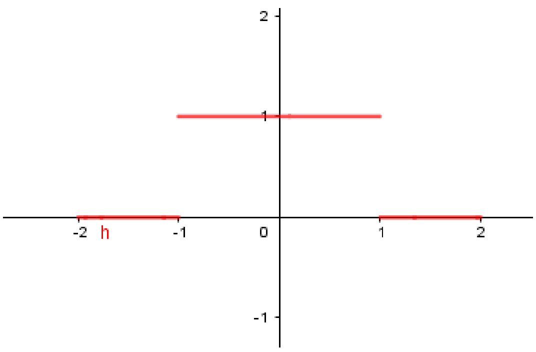
Figura 2.1 - Gráfico da função f do exemplo 4



Fonte: Próprio autor

Exemplo 5. *Seja* $f : (-2,+2) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \lim_{k\to\infty} \dfrac{1}{1+x^{2k}}$. Temos que f é uma função escada.

Figura 2.2 - Gráfico da função f para $k = 100000$



Fonte: Próprio autor

Nota-se que, alterando os valores de uma função escada f em número finito de pontos de (a,b), em particular, nos pontos de divisão de uma partição associada a f tem-se, ainda, uma função escada.

Lema 3.1. *Sejam f e g duas funções escadas definidas em (a,b). Então existe uma partição de (a,b) associada, simultaneamente, a f e g.*

Demonstração. Se tomamos as partições P_1 e P_e associadas a f e g, respectivamente. Então ao tomamos a partição $P_1 \cup P_e$, notaremos que tal união de partições, é um refinamento de ambas associada tanto a f como também a g. $\square$

Observação 3.2. *Denotaremos a classe das funções escadas definidas em* (a, b) *por* $S_0(a, b)$ *ou apenas* S_0.

Observação 3.3. *Note que* $S_0(a, b)$ *é um espaço vetorial pelo Lema 3.1.*

Definição 3.7. *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *duas funções pertencentes a* S_0*, define-se* $f \vee g$, $f \wedge g$ *e* $|f|$ *da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} (f \vee g)(x) &= \max\{f(x), g(x)\} \\ (f \wedge g)(x) &= \min\{f(x), g(x)\} \\ |f|(x) &= |f(x)|. \end{aligned}$$

Note que se $f,\ g \in S_0(a, b)$, então $(f \vee g),\ (f \wedge g) \in S_0(a, b)$. E obviamente $|f|,\ |g| \in S_0(a, b)$, pois $|f| = (f \vee (-f))$, analogamente para g. Assim, $S_0(a, b)$ é um reticulado vetorial real, pela definição seguinte.

Definição 3.8 (Reticulado vetorial)**.** *Um conjunto não vazio* R *parcialmente ordenado pela relação de ordem* $\preceq; (R\ \preceq)$ *é dito reticulado se para quaisquer* $x, y \in R$ *existem o supremo e o ínfimo de* $\{x; y\}$*: E usual denotá-los por* $x \vee y$ *e* $x \wedge y$*, respectivamente.*

Proposição 3.3. *Sejam* f_i *e* g_i *duas sequências de funções escadas definidas em* $[a, b]$*, convergente quase sempre em* $[a, b]$ *para as funções* f *e* g*, respectivamente. Então as sequências* $(f_i \vee g_i)$ *e* $(f_i \wedge g_i)$ *convergem quase sempre em* $[a, b]$ *para* $(f \vee g)$*,* $(f \wedge g)$*, respectivamente.*

Demonstração. Consideremos A o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ onde as sequência (f_i) e (g_i) não convergem, logo A tem medida nula. Tomemos $x \in [a, b] - A$. Então para todo $\epsilon > 0$ existem i_1 e i_2 tais que:

$$-\epsilon + f(x) < f_i(x) < \epsilon + f(x) \qquad \text{para } i > i_1 \tag{3}$$

$$-\epsilon + g(x) < g_i(x) < \epsilon + g(x) \qquad \text{para } i > i_2. \tag{4}$$

Seja $i^* = \max\{i_1,\ i_2\}$, logo resulta que as desigualdades (2.2) e (2.3) são válidas para $i > i^*$. Portanto,

$$\min\{-\epsilon + f(x),\ -\epsilon + g(x)\} < \min\{f_i(x)\ g_i(x)\} < \min\{\epsilon + f(x),\ \epsilon + g(x)\} \quad \forall\ i > i^*,$$

ou seja

$$-\epsilon + (f \wedge g)(x) < (f_i \wedge g_i)(x) < \epsilon + (f \wedge g)(x).$$

Portanto $(f_i, \wedge g_i)$ converge para $(f \wedge g)$ quase sempre em $[a, b]$. E de maneira análoga se prova que $(f_i \vee g_i)$ converge para $(f \vee g)$ quase sempre em $[a, b]$.

□

Observe que, pela definição de Integral segundo Riemann dada anteriormente, podemos dar a seguinte definição.

Definição 3.9. *Seja $f \in S_0$, P uma partição de (a, b) associada a f. Seja C_i o valor constante assumido por f no intervalo I_i de P, $i = 1, 2 \ldots, n$. O numero real dado por $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i(t_i - t_{i-1})$ denomina-se integral da função f no intervalo (a, b) e a representaremos por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ou $\displaystyle\int f$.*

Proposição 3.4. *Se $f \in S_0$, então a integral de f em (a, b) não depende da partição P de (a, b) associada a f.*

Para detalhes relacionado à demonstração consultar referência (MEDEIROS, 2019).

Podemos notar que o espaço vetorial $S_0 \subset R(a, b)$. Convém observar que, a aplicação $f \to \displaystyle\int f$ onde a cada $f \in S_0$ associa o número $\displaystyle\int_a^b f$ é um funcional linear sobre S_0. Além disso, temos garantido pelo corolário 2.5 do Teorema 2.7 que a integral de f não depende dos valores que f assume nos pontos de divisão de uma partição P associada a f, depende apenas dos valores assumidos por f no intervalos J_i.

Definição 3.10. *Diz-se função característica do subconjunto $E \subset (a, b)$, a função $\mathcal{X}_E : (a, b) \to \mathbb{R}$ definida por $\mathcal{X}_E = 1$ se $x \in E$ e $\mathcal{X}_E = 0$ nos demais pontos de (a, b).*

Notemos que, se $E \subset (a, b)$ é união de n intervalos abertos J_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dois a dois disjuntos, verifica-se que $\mathcal{X}_E \in S_0(a, b)$.

Definição 3.11. *Para f pertencente a $S_0(a, b)$ define-se*

$$\int_E f = \int_a^b f\mathcal{X}_E.$$

Sucedendo que $\displaystyle\int_E f = \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f$, visto que $\mathcal{X}_E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{J_i}$ pela definição de função característica exceto, possivelmente, em um conjunto de medida nula. Em particular, note que, se $f = \mathcal{X}_E$ implica que $\displaystyle\int_E \mathcal{X}_E = \sum_{i=1}^{n} amp(J_i)$ e neste caso o número $\displaystyle\int_E \mathcal{X}_E$ chama-se amplitude de E e denota-se por amp(E).

3.4 PRIMEIRO E SEGUNDO LEMA FUNDAMENTAL

Apresentaremos nesta seção duas proposições indispensáveis para construção da Integral de Lebesgue via método de F. Riez, dada a sua importância elas serão chamadas de “Primeiro Lema Fundamental” e “Segundo Lema Fundamental”.

Proposição 3.5 (Primeiro Lema Fundamental). *Seja (f_i) uma sequência decrescente de funções escadas não negativas em (a,b). Se $\lim\limits_{i\to\infty} f_i = 0$ quase sempre em (a,b), então* $\lim\limits_{i\to\infty} \int_a^b f_i = 0$.

Demonstração. Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja E_i o conjunto dos pontos de descontinuidade da função f_i em $[a,b]$. Como $f_i \in S_0$, então E_i é finito e portanto $E = \bigcup\limits_{i=i}^{\infty} E_i$ é enumerável, logo E possui medida nula. Consideremos o conjunto F, sendo a coleção dos pontos de $[a,b]$ nos quais a sequência f_i não converge para zero, logo F tem medida nula por hipótese. Tomemos $G = E \cup F$ então G possui medida nula. Resulta daí que para cada $\epsilon > 0$, existe uma família enumerável de intervalos abertos $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que podemos tomar a seguinte situação satisfazendo a condição para um conjunto ser de medida nula.

(i) $G \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i = J_1$, isto é, J_1 é uma cobertura G,

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} amp(T_i) < \dfrac{\epsilon}{2M}$,

onde $M > \sup\{f_1(x); x \in (a,b)\}$. Se p é um ponto de $[a,b]-G$, resulta que $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(p) = 0$. Logo existe um número natural m, dependendo de p e ϵ, tal que

$$f_m(p) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}. \tag{5}$$

Como $p \notin G$, f_m é contínua em p e sendo f_m uma função escada, existe um intervalo aberto $I(p)$ contido em (a,b) e contendo p, tal que para todo x em $I(p)$ se tem

$$f_m(x) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}. \tag{6}$$

Sendo f_i decrescente, resulta que a desigualdade (6) é válida para todo $i > m$ e todo $x \in I(p)$, ou seja,

$$f_i(x) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \tag{7}$$

para todo $i > m$ e todo $x \in I(p)$.

Quando p varia em $[a,b]-G$, obtém-se uma coleção de intervalos aberto no qual denotamos por $J_2 = \{I(p); p \in [a,b]-G\}$, nos quais vale raciocínio análogo a desigualdade (7). A união $J_1 \cup J_2$ é uma cobertura do intervalo compacto $[a,b]$ por intervalos abertos. Temos que, pelo Teorema de Borel-Lebesgue existe uma subcobertura finita, extraída da cobertura $J_1 \cup J_2$, que cobre $[a, b]$. Tal subcobertura iremos denotar por $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, I(p_1), I(p_2), \ldots, I(p_s)\}$, onde os α_i são os elementos de J_1 e os $I(p_j)$ são os elementos de J_2 que ocorrem em B.

Observemos que, para cada intervalo $I(p_j)$, $j = 1, 2 \ldots, s$ de B, existe um $m_j \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f_i(x) < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \qquad \text{para todo } i > m_j \text{ e todo } x \in I(p_j),$$

pela própria definição dos $I(p_j)$. Seja $\overline{m} = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$, temos que:

$$f_i(x) < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \qquad \text{para todo } x \in K = \bigcup_{j=1}^{s} I(p_j), \text{ e para todo } i > \overline{m}.$$

Notemos que, K pode ser escrito como união de um número finito de subintervalos de $[a, b]$ dois a dois disjuntos sem ponto interior em comum. Logo, pela definição 3.11, temos que para todo $i > \overline{m}$:

$$\begin{aligned} \int_K f_i &= \int_a^b f_i \mathcal{X}_K < \int_a^b \frac{\epsilon}{2(b-a)} \mathcal{X}_K = \frac{\epsilon}{2(b-a)} \int_a^b \mathcal{X}_K \\ &= \frac{\epsilon}{2(b-a)} \int_K \mathcal{X}_K = \frac{\epsilon}{2(b-a)} amp(K) \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Consideremos agora a parte correspondente aos α_i, tomando $\alpha = \bigcup_{i=1}^{r} \alpha_i$ e $S = \alpha \cap [a, b]$. Notemos que S também pode ser escrito como uma união de um número finito de subintervalos de $[a, b]$ dois a dois disjuntos. Portanto, para todo $k \in \mathbb{N}$ temos:

$$0 \leq \int_S f_i = \int_a^b f_i \mathcal{X}_S \leq \int_a^b f_1 \mathcal{X}_S \leq M \int_a^b \mathcal{X}_S = M \int_S \mathcal{X}_S = M\ amp(S) \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{9}$$

visto que $amp(S) < \dfrac{\epsilon}{2M}$.

Observe que pela equação 8 e 9, podemos concluir que para todo $i > \overline{m}$

$$0 \leq \int_a^b f_i = \int_a^b f_i \mathcal{X}_{(a,b)} \leq \int_a^b f_i(\mathcal{X}_S + \mathcal{X}_K) = \int_a^b f_i \mathcal{X}_S + \int_a^b f_i \mathcal{X}_K = \int_S f_i + \int_K f_i \leq \epsilon,$$

concluindo assim que $\lim\limits_{i \to \infty} \int_a^b f_i = 0$. $\square$

Proposição 3.6 (Segundo Lema Fundamental)**.** *Seja (f_i) uma sequência de funções escadas em (a,b), crescente. Se existe uma constante M, tal que $\int f_i < M$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então a sequência (f_i) converge para um limite finito f quase sempre em (a, b).*

Demonstração. Sem perca de generalidade, consideremos f_i funções não negativas, pois em caso contrário tomaríamos as funções $g_i = f_i - f_1$ no lugar de f_i.

Seja o conjunto $E_0 = \{x \in [a, b]; \lim_{i\to\infty} f_i = +\infty\}$. Por hipótese, existe $M > 0$ tal que $\int f_i < M$ para todo $i \in \mathbb{N}$, tomemos um $\epsilon > 0$, onde para cada natural i consideremos o conjunto definido da seguinte forma:

$$E_{(\epsilon,i)} = \left\{x \in (a, b);\ f_i > \frac{M}{\epsilon}\right\}.$$

Notemos que, quando i varia em $\mathbb{N}$ obtém-se uma sequência $E_{(\epsilon,i)}$ crescente no que se refere a inclusão de conjuntos, ou seja, $E_{(\epsilon,1)} \subset E_{(\epsilon,2)} \subset \ldots \subset E_{(\epsilon,i)} \ldots$, pois a sequência $E_{(\epsilon,i)}$ é crescente. Observando que, (f_i) são funções escadas, resulta que para cada i, o conjunto $E_{(\epsilon,i)}$, se não for vazio, é a união de intervalos disjuntos contidos em (a, b).

Considerando $m_{(\epsilon,i)}$ a soma das amplitudes desses intervalos. E sabendo que para cada $i \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$M > \int f_i = \sum_{j}^{n(i)} C_j^i (x_j^i - x_{j-1}^i), \tag{10}$$

onde C_j^i é o valor de f_i no intervalo $(x_j^i - x_{j-1}^i)$ de uma partição associada a f_i.

Separando a soma do segundo membro de (10) nas parcelas Σ' e Σ'', definidas da seguinte maneira, Σ' é soma dos termos em que $C_j^i > \frac{M}{\epsilon}$ e Σ'' é a soma dos termos restante. Logo, resulta que:

$$M > \Sigma' + \Sigma'' > \frac{M}{\epsilon} m_{(\epsilon,i)} + \Sigma'' > \frac{M}{\epsilon} m_{(\epsilon,i)} \qquad \Rightarrow \qquad m_{(\epsilon,i)} < \epsilon.$$

Observe que, $E_0 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{(\epsilon,i)}$, pois E_0 estar contido em $E_{(\epsilon,i)}$ para algum $i \in \mathbb{N}$. Tomando $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{(\epsilon,i)} = E_\epsilon$, então E_ϵ é a união enumerável de intervalos cujo soma das amplitudes é menor do ϵ, pois E_ϵ estar contido em $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{(\epsilon,i)} = E_\epsilon$ e $\sum_{i=1}^{\infty} E_{(\epsilon,i)} = m_{(\epsilon,i)}$, desta maneira satisfazendo as condições necessárias de conjunto de medida nula. Portanto, temos que E_0 tem medida nula, pois é um subconjunto de um conjunto de medida nula.

$\square$

Daqui em diante, quando nos referimos ao Primeiro Lema Fundamental ou ao Segundo Lema Fundamental, por efeito de simplicidade, em alguns momentos abreviaremos tais expressões da seguinte forma, respectivamente, **PLF** e **SLF**.

3.5 DEFININDO A CLASSE $S_1(a, b)$

Definição 3.12. *Representaremos por S_1 ou $S_1(a, b)$ a classe de todas as funções $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ que são limites quase sempre de sequências de funções de S_0 satisfazendo as hipóteses do* **SLF***, ou seja, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ pertence a S_1 se, somente se, existe uma sequência crescente (f_i) de funções de S_0 tal que a sequência das integrais $(\int f_i)$ tem um majorante e $\lim_{i\to\infty} f_i(x) = f(x)$ quase sempre em (a, b). Diremos que tal sequência define f.*

Note que, se $f \in S_0$, então $f \in S_1$. Entretanto, a recíproca não ocorre, conforme é comentado na observação a seguir.

Observação 3.4. *Em geral, nem toda função que pertence a S_1 pertence a S_0, como veremos no caso da função f de Dirichlet que será explanada no exemplo 7 do capítulo seguinte. Provaremos que a referida função, não pertence a $R(a, b)$ consequentemente $f \notin S_0(a, b)$, mas mostraremos no exemplo 8, também no próximo capítulo, que existe uma sequência de funções (f_i) satisfazendo o* **SLF** *definindo f como elemento de S_1.*

Definição 3.13 (Definição de Integral em S_1)**.** *Seja $f \in S_1$ e (f_i) uma sequência de funções de S_0, satisfazendo as hipóteses do* **SLF***, convergindo para f quase sempre em (a, b). Sendo a sequência (f_i) crescente vem que $(\int f_i)$ é crescente e como esta última tem um majorante ela é convergente, ou seja, existe e é finito o $\lim_{i\to\infty} \int f_i$. Este limite será, por definição, a integral de f em (a, b), como elemento de S_1. Isto é*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{i\to\infty} \int_a^b f_i(x)dx,$$

onde as integrais $\int f_i$ são aquelas definidas para funções de S_0.

A proposição 3.7 e suas consequências que vem a seguir nos mostra que a noção de integral definida em S_1 está bem definida. Entretanto antes de enunciamos tal proposição e suas implicações consideremos a definição seguinte.

Definição 3.14. *Dada uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ podemos definir as funções f^+ e f^- chamadas, respectivamente, parte positiva e parte negativa de f, da seguinte maneira: $f^+ = f \vee \mathcal{O}$ e $f^- = (-f) \vee \mathcal{O}$, a notação $\mathcal{O}$ aqui introduzida representa a função nula.*

Observação 3.5. *Note que*

$$f^+,\ f^- \geq 0, \quad f = f^+ - f^- \quad e \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Observação 3.6. *Se f e g são funções quaisquer, definidas em (a, b), tem-se as seguintes identidades:*

$$(f-g)^{+} = (f \vee g) - g = f - (f \wedge g) \tag{11}$$
$$(f-g)^{-} = (f \vee g) - f = g - (f \wedge g) \tag{12}$$

Proposição 3.7. *Sejam f e g funções de S_1 definidas, respectivamente, pelas sequências de funções (f_i) e (g_i) de S_0, satisfazendo as hipótese do* **SLF**. *Se $f \leq g$ quase sempre em (a, b), então tem-se:*

$$\lim_{i\to\infty} \int f_i \leq \lim_{i\to\infty} \int g_i.$$

Demonstração. Consideramos uma função f_k de f_i com k fixo, temos que $(f_k - g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ será decrescente e converge quase sempre para $f_k - g$. Note que temos, $f_k - g < f - g \leq 0$ quase sempre em (a, b) por hipótese.

Pela proposição 3.3, $(f_k - g_i)^{+}$ converge quase sempre em (a, b) para a função $(f_k - g)^{+} \equiv 0$. Pois, sabendo que $(f_k - g_i)^{+} = (f_k \vee g_i) - g_i$, temos que

$$\lim_{i\to\infty} (f_k - g_i)^{+} = \lim_{i\to\infty} [(f_k \vee g_i) - g_i] = \lim_{i\to\infty} [(f_k \vee g_i)] - \lim_{i\to\infty} g_i = g - g = 0,$$

quase sempre. Desta forma temos uma sequência $([f_k - g_i]^{+})_{i\in\mathbb{N}} \subset S_0$ decrescente e convergente quase sempre para 0 em (a, b), pelo **PLF** logo a sequência das integrais $(\int [f_k - g_i]^{+})_{i\in\mathbb{N}}$ converge para 0. Sabendo que para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$f_k - g_i \leq [f_k - g_i]^{+} \Rightarrow \int (f_k - g_i) \leq \int [f_k - g_i]^{+}$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \int (f_k - g_i) = \int f_k - \lim_{i\to\infty} \int g_i \leq \lim_{i\to\infty} \int [f_k - g_i]^{+} = 0$$

$$\Rightarrow \int f_k \leq \lim_{i\to\infty} \int g_i.$$

Portanto, como temos que as expressões acima é válida para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $\lim\limits_{i\to\infty} \int f_i \leq \lim\limits_{i\to\infty} \int g_i$.

$\square$

Corolário 3.1. *Se $f \in S_1$ é limite de f_i e g_i de S_0, nas hipóteses do* **SLF**, *então $\lim\limits_{i\to\infty} \int f_i = \lim\limits_{i\to\infty} \int g_i$, ou seja, a integral em S_1 está bem definida.*

Demonstração. É suficiente consideramos $f \geq g$ na proposição anterior, deste modo chegaríamos que $\lim_{i\to\infty} \int f_i \geq \lim_{i\to\infty} \int g_i$ e $\lim_{i\to\infty} \int f_i \leq \lim_{i\to\infty} \int g_i$, resultando que $\lim_{i\to\infty} \int f_i = \lim_{i\to\infty} \int g_i$, como desejado. □

Corolário 3.2. *A restrição da integral definida em S_1 a classe S_0 coincide com a integral definida em S_0.*

Demonstração. Consideremos nesta demonstração as integrais definidas em S_1 e S_0 representadas por I_1 e I_0, respectivamente. Vamos provar que se $f \in S_o$ então $I_1(f) = I_0(f)$. De fato, sendo $f \in S_0$ podemos considerar a sequência (f_i) onde $(f_i) = f$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Então (f_i) define f como elemento de S_1, pois $(f_i) \in S_0$ e satisfaz as hipóteses do **SLF**. Por definição temos

$$I_1(f) = \lim_{i\to\infty} I_o(f_i) = I_0(f).$$

□

Proposição 3.8. *Sejam $f,\ g \in S_1$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Então, λf e $f + g$ também pertence a S_1. Além disto, tem-se*

$$\int \lambda f = \lambda \int f \qquad e \qquad \int (f+g) = \int f + \int g.$$

Demonstração. Seja f_i sequências de funções de S_0 , satisfazendo as hipóteses do **SLF**, que define a função f. Como $\lambda \geq 0$, a sequência λf_i está nas condições do Segundo Lema Fundamental e define a função λf.

Portanto $\lambda f \in S_1$, obtendo-se

$$\int \lambda f = \lim_{i\to\infty} \int \lambda f_i = \lim_{i\to\infty} \left[\lambda \int f_i\right] = \lambda \int f,$$

porque $\int \lambda f_i = \lambda \int f_i$, dado que as f_i pertencem a S_0. A outra parte da demonstração não é difícil de ver, para mais detalhes consultar (MEDEIROS, 2019).

□

Observação 3.7. *Note que a classe S_1 não é um espaço vetorial, pois não ocorre que $f - g \in S_1$ para todo $f,\ g \in S_1$. Observe que, se $g \in S_1$ não implica necessariamente que $-g \in S_1$, pois não é garantido que exista uma sequência de funções $(\overline{g}_i)$ satisfazendo* **SLF** *convergindo quase sempre para $-g$. Entretanto, se $f \in S_1$ e $g \in S_0$, então $f - g \in S_0$. Pois, se $g \in S_0$, então $-g \in S_0$, onde sabemos que S_0 é um espaço vetorial e $S_0 \subset S_1$.*

Logo, $(f - g) \in S_1$ *pela proposição 3.8.* Para mais detalhes relacionado a questão de S_1 não ser um espaço vetorial, consultar referência MEDEIROS (2019).

Observação 3.8. *Seja* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *uma função de* S_1*. Para cada* $t \in (a,b)$*, a função* $f\mathcal{X}_{(a,t)}$ *é também uma função de* S_1*. Define-se* $\int_a^t f = \int_a^b f\mathcal{X}_{(a,t)}$*, pois se* $t \in (a,b)$ *e* $f \in S_1$*, então*

$$\int_a^b f = \int_a^t f + \int_t^b f.$$

Observando que, $f = f\mathcal{X}_{(a,t)} + f\mathcal{X}_{(t,b)} + f\mathcal{X}_{\{t\}}$.

Proposição 3.9. *Se* f *e* g *são funções de* S_1*, então* $f \vee g$ *e* $f \wedge g$ *também pertencem a* S_1.

Demonstração. Sejam (f_i) e (g_i) sequências de funções de S_0 satisfazendo as hipóteses do **SLF,** definindo f e g, respectivamente. Considerando a sequência (ϕ_i) onde $\phi_i = f_i \vee g_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pela proposição 3.3, (ϕ_i) converge quase sempre para $f \vee g$.

Observe que, (ϕ_i) é uma sequência de funções S_0 crescente, desta forma satisfazendo uma das hipóteses do **SLF**, falta apenas verificamos se (ϕ_i) atende a outra hipótese. No caso, temos que demonstrar que a sequência das integrais possui um majorante. Note que para cada $i \in \mathbb{N}$, tem-se

$$f_i \wedge g_i \leq f_i \leq \phi_i = f_i \vee g_i \leq (f_i \vee f_1^-) \vee (g_i \vee g_1^-) \leq (f_i + f_1^-) + (g_i + g_1^-) \tag{13}$$

Uma vez que $(f_i + f_1^-) \geq 0$ e $(g_i + g_1^-) \geq 0$, pois:

- se $f_i \leq 0 \Rightarrow f_1 \leq 0$, dado que a sequência de função é crescente. Logo $f_1^- \geq 0 \Rightarrow (f_i + f_1^-) \geq 0$;
- se $f_1 \geq 0 \Rightarrow f_i \geq 0$, dado que a sequência de função é crescente. Logo $f_1^- \geq 0 \Rightarrow (f_i + f_1^-) \geq 0$;
- se $f_1 \leq 0$ e $f_i \geq 0$, implica que $f_1^- \geq 0 \Rightarrow (f_i + f_1^-) \geq 0$.

Raciocínio análogo para constatar que $(g_i + g_1^-) \geq 0$. E, sabemos que o supremo de duas funções não negativas e limitadas é menor ou igual à sua soma conforme o corolário 2.1. Decorre da desigualdade (2.12) e considerando o Lema 3.1, que

$$\int f_i \wedge g_i \leq \int f_i \leq \int \phi \leq \int f_i + \int g_i + \int f_1^- + \int g_1^- \leq M,$$

onde M é uma constante. Portanto $f \wedge g$ pertence a S_1. De maneira análoga prova-se que $f \vee g$ pertence a S_1.

$\square$

Retornaremos aqui a noção de integral de Riemann, pois faremos uma pequena análise para a linguagem de função escada.

Definição 3.15. *Seja $f : (a, b) \to R$ limitada, e P uma partição de (a, b). Para cada $j = 1, 2, \ldots, k$ seja $m_j = \inf\{f(x), x \in I_j\}$ e $M_j = \sup\{f(x), x \in I_j\}$, onde $I_j = (x_{j-1}, x_j)$. Feitas estas considerações, ficam definidas em (a, b) as seguintes funções escadas.*

- $l_P = m_j$ *para cada* $x \in I_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$
- $L_P = M_j$ *para cada* $x \in I_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$
- $l_P(x_j) = L_P(x_j) = f(x_j)$ *(Ou seja, nos pontos de divisão de cada intervalo da partição P, $l_P(x_j) = L_P(x_j) = f(x_j),\ \forall\ j = 1, \cdots, j-1$.)*

Desta forma, obtemos que $s(f; P)$ e $S(f; P)$ podem ser representadas, respectivamente, pelas integrais das funções escadas l_P e L_P, isto é,

$$s(f; P) = \int_a^b l_P(x)dx \qquad e \qquad S(f; P) = \int_a^b L_P.$$

Seja (P_i) uma sucessão crescente de partições de (a, b), ou seja, para cada $i \in \mathbb{N}$ estamos fazendo refinamentos consecutivos da partição inicial P_1. Denotaremos esta inclusão por $P_i < P_{i+1}$ para $i \in \mathbb{N}$. Representaremos as funções l_{P_i} e L_{P_i} simplesmente por l_i e L_i, respectivamente, para $i \in \mathbb{N}$. Notemos que, se $P_i < P_{i+1}$ então $l_i \leq l_{i+1}$ e $L_i \geq L_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, ou seja, a sequência (l_i) é crescente e a sequência (L_i) decrescente. Como $(l_i) < f(x) < (L_i)$ em (a, b) para todo $i \in \mathbb{N}$, resulta que estas sequências são convergentes em (a, b) e tem-se:

$$l(x) = \lim_{i\to\infty} l_i(x) \leq f(x) \leq \lim_{i\to\infty} L_i(x) = L(x). \tag{14}$$

Se $f \in R(a, b)$, a sucessão (P_i) pode ser escolhida de modo que $\int_a^b (L_i - l_i)$ converge para zero.

Lema 3.2. *Seja f_i uma sequência decrescente de funções escadas não negativas. Se $\lim\limits_{i\to\infty} \int f_i = 0$, então a sequência (f_i) converge para zero, quase sempre em (a, b).*

Demonstração. Sendo (f_i) decrescente e limitada inferiormente por zero, resulta que f_i converge em (a, b), para uma função f não negativa, pois a sequência (f_i) é monótona e limitada.

Como para todo $i \in \mathbb{N}$ tem-se $f_i \geq 0$, tomemos S referindo-se ao conjunto dos pontos onde $f \neq 0$ tal que S é união enumerável dos conjuntos $E_j = \{x \in (a, b); f(x) \geq \frac{1}{j}\}$, $j \in \mathbb{N}$. Mostraremos que S é a união de conjuntos de medida nula, ou seja, que E_j tem medida nula para todo $j \in \mathbb{N}$ e consequentemente $f = 0$ quase sempre em (a, b).

Note que, $f_i \geq f$ implica que $f_i \geq \frac{1}{j}$ para todo $x \in E_j$ e todo $i \in \mathbb{N}$. Tomando

$j,\ i \in \mathbb{N}$ fixo, os subintervalos de disjuntos de (a, b) onde f_i é constante e nos quais $f_i \geq \frac{1}{j}$, formam uma cobertura finita dos pontos de E_j diferentes dos pontos de descontinuidade de f_i nas quais são em número finito, uma vez que f_i é uma função escada.

Sejam $I_1, I_2, \ldots, I_k$ os intervalos de tal cobertura e $K = I_1 \cup I_2 \cup \ldots I_k$. Então

$$\int_a^b f_i \geq \int_a^b f_i \mathcal{X}_k \geq \frac{1}{j} \int_a^b \mathcal{X}_k = \frac{1}{j} amp(K).$$

Logo $amp(K) \leq j \int_a^b f_i$, na qual $amp(K) = \sum_{n=1}^{k} amp(I_n)$. Entretanto, como $\lim_{i\to\infty} \int_a^b f_i = 0$, ocorre que se dado $\epsilon > 0$ e i suficientemente grande, implica que $amp(K) \leq \epsilon$. Conclui-se para todo $\epsilon > 0$ existe uma cobertura de E_i cuja a soma das amplitudes é menor do que ϵ. Portanto E_j tem medida nula para todo j, dado que estamos tomando j arbitrário. E pela proposição 3.2 temos que K é um conjunto de medida nula.

□

Proposição 3.10. *Se f é integrável à Riemann em (a, b), então existe uma partição P_i tal que $l(x) = f(x) = L(x)$ quase sempre em (a, b).*

Demonstração. Sabemos que, $\lim_{i\to\infty} (L_i - l_i) = L - l$, e nota-se que à sequência $(L_i - l_i)$ é formada de funções escadas não negativas, pois $(L_i - l_i) \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Perceba que a sequência $(L_i - l_i)$ é decrescente. Como $f \in R(a, b)$, a sucessão P_i pode ser escolhida de modo que a sequências das integrais $\int(L_i - l_i)$ converge para zero (ver Teorema 2.4 item 3). Logo pelo Lema 3.2, conclui-se que $(L_i(x) - l_i(x))$ converge para zero quase sempre em (a, b), consequentemente $L(x) = l(x)$ quase sempre em (a, b). Observando que a desigualdade 14, temos que $l(x) = f(x) = L(x)$ quase sempre em (a, b)

□

Corolário 3.3. *Toda função $f \in R(a, b)$ é uma função de S_1 e a integral de f em S_1 é a integral de f segundo Riemann.*

Demonstração. Note que, para uma conveniente sucessão de partições (P_i), (l_i) é uma sequência de funções escadas satisfazendo o **SLF**, que converge quase sempre para f, perceba que a integral de f segundo Riemann é dada por $\int f = \sup_{P_i} s(f; P_i) = \lim_{i\to\infty} \int l_i \Rightarrow \int f = \lim_{i\to\infty} \int l_i$, entretanto está é a definição de integral de f em S_1.

□

Proposição 3.11. *Sejam $f : (a,b) \to R$, limitada, (g_i), (h_i) sequências de funções escada em (a,b), a primeira crescente e a outra decrescente, ambas convergindo quase sempre para f e tais que para todo i, $g_i \leq f \leq h_i$ em (a,b). Então f é integrável à Riemann em (a,b) e $\displaystyle\int f = \lim_{i\to\infty} \int g_i = \lim_{i\to\infty} \int h_i$.*

Demonstração. Seja P_i, para cada i, uma partição associada, simultaneamente, a g_i e h_i. E considere (l_i) e (L_i), relacionadas a f, definidas a partir das partições da (P_i)(conforme a definição 3.15), note que para cada i tem-se

$$g_i(x) \leq l_i(x) \leq f(x) \leq L_i(x) \leq h_i(x), \qquad \forall x \in (a,b). \tag{15}$$

Mas, como $(h_i - g_i)$ converge para zero quase sempre em (a,b) e é decrescente, pelo **PLF** temos que o $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int (h_i - g_i) = 0$ e por (2.14) resulta que $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int (L_i - l_i) = 0$. Segue-se que, $S(f;P_i) - s(f;P_i) = \int (L_i - l_i)$ converge para zero e, portanto f é integrável a Riemann. Além disso, temos que

$$\int f = \lim_{i\to\infty} \int g_i = \lim_{i\to\infty} \int l_i = \lim_{i\to\infty} \int L_i = \lim_{i\to\infty} \int h_i.$$

□

Observação 3.9. *Nem toda função de S_1 é uma função de $R(a,b)$, veja observação 3.4.*

3.6 DEFININDO O ESPAÇO $L(a,b)$

Nesta seção iremos definir o espaço das funções integráveis a Lebesgue, mas antes vamos apresentar algumas definições que se fazem necessário para esse propósito.

Definição 3.16 (Cone)**.** *Seja C um subconjunto de um espaço vetorial V. Se $\lambda f \in C$ para todo $f \in C$ e para todo $\lambda \geq 0$, diz-se que C é um cone.*

Definição 3.17 (Cone convexo)**.** *Se C é um cone e $(f+g) \in C$ para todo f, $g \in C$, diz-se que C é um cone convexo.*

Convém observar que, pela que proposição 3.8, $S_1(a,b)$ é um cone convexo.

Observação 3.10. *Dado W o subespaço de V gerado por um cone convexo C. Sabemos que, cada elemento de W é uma combinação linear de uma família finita de elementos de C, ou seja, por definição temos que, se $w \in W$, então*

$$w = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n \qquad w_i \in C,\ \lambda_i \in R,\ i = 1, 2 \ldots, n.$$

Se f e g são, respectivamente, as somas dos termos para os quais $\lambda_i \geq 0$ e $\lambda_i < 0$, então $w = f - g$ com f, $g \in C$. Reciprocamente, se f e $g \in C$ e $w = f - g$, então $w \in$

W. Portanto, fica definido que W é o conjunto dos elementos de V da forma $f-g$, onde $f,\ g \in C$.

Definição 3.18. *Será representado por $L(a,b)$ o subespaço do espaço das funções reais em (a,b) gerado pelo cone convexo $S_1(a,b)$. Pelo que foi visto na observação (3.10), $h \in L(a,b)$ se, e só se, $h = f - g$, onde $f,\ g \in S_1(a,b)$.*

Proposição 3.12. *$L(a,b)$ é um reticulado vetorial.*

Corolário 3.4. *Se $f \in L(a,b)$*, então f^+ e f^- também pertencem a $L(a,b)$, consequentemente, $|f| \in L(a,b)$.

As provas da Proposição 3.12 e Corolário 3.4 podem ser encontradas na referência (MEDEIROS, 2019).

Definição 3.19. *Seja $h \in L(a,b)$ e escrevamos $h = f - g$, onde $f, g \in S_1$. Define-se a integral de h em $L(a,b)$ como sendo $\int h = \int f - \int g$, onde as integrais do segundo membro são definidas em S_1.*

Convém notar que, a integral de $h \in L(a,b)$ não depende da escolha da representação de h como diferença de funções de S_1. Ou seja, dado $h = f - g = f_1 - g_1$, sendo $f,\ g,\ f_1,\ g_1 \in S_1$, implica que $f_1 + g = f + g_1$ e sabemos que $(f_1+g),\ (f+g_1) \in S_1$, desta forma temos que.

$$\int f_1 + \int g = \int f + \int g_1,$$

resultando que

$$\int f - \int g = \int f_1 - \int g_1 = \int h.$$

Portando, fica demonstrado que a integral de h está bem definida.

Proposição 3.13. *A aplicação $w \to \int w$, que a cada $w \in L(a,b)$ associa a integral de f é um funcional linear sobre o espaço vetorial $L(a,b)$.*

Demonstração. Sabemos que, para uma aplicação ser um funcional linear tem que satisfazer duas condições conforme definição 2.7. Considere $w,\ w_1 \in L(a,b)$, logo $(w + w_1) \in L(a,b)$. Para a primeira condição de funcional linear temos o seguinte, se $w = f - g$ e $w_1 = f_1 - g_1$ onde $f,\ g,\ f_1,\ g_1 \in S_1$, por definição sucede que

$$\begin{aligned}
\int (w + w_1) &= \int (f - g + f_1 - g_1) = \int (f + f_1 - (g + g_1)) \\
&= \int (f + f_1) - \int (g + g_1) = \int f + \int f_1 - \int g - \int g_1 \\
&= \left(\int f - \int g\right) + \left(\int f_1 - \int g_1\right) = \int w + \int w_1,
\end{aligned}$$

satisfazendo a primeira condição de funcional linear. Para a segunda condição de funcional linear, temos que, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e tomemos $w \in L(a,b)$. Temos os seguintes casos

- Se $\lambda \geq 0$, implica que $\displaystyle\int \lambda w = \int (\lambda f - \lambda g) = \int \lambda f - \int \lambda g = \lambda (\int f - \int g) = \lambda \int w.$

  Em particular

$$\int (-w) = \int (g - f) = \int g - \int f = -(\int f - \int g) = -\int w$$

  logo, conclui-se que

- Se $\lambda < 0$, tem-se $\displaystyle\int \lambda w = \int (-|\lambda| w) = -\int |\lambda| w = -|\lambda| \int w = \lambda \int w = \lambda \int w.$

$\square$

Definição 3.20. *O conjunto denotado por $L(a,b)$, é dito espaço vetorial das funções integráveis à Lebesgue. A integral definida em $L(a,b)$ denomina-se integral de Lebesgue. Omitiremos, em alguns momentos, a palavra Lebesgue e diremos apenas integral e função integrável (ou somável, como Lebesgue chamou originalmente) quando nos referirmos aos elementos de $L(a,b)$.*

Observação 3.11. *Note que, se $f \in S_1$ então a integral de f como elemento de S_1 coincide com a integral de Lebesgue de f. Basta considerar uma função g arbitrária em S_1 e escrever $f = (f+g) - g$. Então, por definição, a integral de Lebesgue de f é dada por*

$$\int f = \int (f+g) - \int g = \int f + \int g - \int g = \int f.$$

Na qual as integrais do segundo membro em diante, coincide com integrais definidas para os elementos de S_1. Portanto, conforme a teoria construída ao longo desse trabalho, temos que

$$S_0(a,b) \subset R(a,b) \subset S_1(a,b) \subset L(a,b)$$

Note que a recíproca não é verdade de acordo com a observação 3.9.

Proposição 3.14. *Se $h \in L(a,b)$ e $h \geq 0$ quase sempre, então $\int h \geq 0$.*

Demonstração. Considere $h = f - g$, com $f,\ g \in S_1$. Como $h \geq 0$, quase sempre, implica que $f \geq g$ quase sempre, daí temos que $\int f \geq \int g$ (ver proposição 3.7). Portanto $\int h = \int f - \int g \geq 0$.

$\square$

Corolário 3.5. *Se $h_1,\ h_2 \in L(a,b)$ e $h_1 \geq h_2$ quase sempre, então $\int h_1 \geq \int h_2$*

Demonstração. Considere $h = h_1 - h_2$, e considere raciocínio análogo a proposição 3.14.

$\square$

Proposição 3.15. *Se $h \in L(a,b)$, então $|\int h| \geq \int |h|$.*

Demonstração. De acordo com o corolário 3.4, $|h| \in L(a,b)$. E sabemos que $\pm h \leq |h|$, pela proposição 3.14 temos que $\pm \int h \leq \int |h|$. Resulta que $|\int h| \leq \int |h|$.

$\square$

Proposição 3.16. *Se $h \in L(a,b)$, então existe uma sequência $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de funções escada em (a,b) tal que $\lim\limits_{i\to\infty} h_i = h$ quase sempre. Além disso, tem-se que $\lim\limits_{i\to\infty} \displaystyle\int |h_i - h| = 0$.*

Demonstração. Seja $h = f - g$, onde $f,\ g \in S_1$. Por definição de S_1 temos que existem (f_i) e (g_i), sequências de funções escada que satisfaz o **SLF** convergindo para as funções $f,\ g$ quase sempre, respectivamente. Desta maneira temos que, tomando $h_i = f_i - g_i,$ para todo $i \in \mathbb{N}$, é uma função escada, o que implica

$$\lim_{i\to\infty} h_i = \lim_{i\to\infty} f_i - \lim_{i\to\infty} g_i = f - g = h$$

quase sempre. Além disso, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int |h_i - h| = \int |f_i - g_i - f + g| \\ &\leq \int |f - f_i| + \int |g - g_i| \\ &= \int (f - f_i) + \int (g - g_i), \end{aligned}$$

pois $f \geq f_i$ e $g \geq g_i$. Tomando o limite quando $i \to \infty$, e observando que $\lim\limits_{i\to\infty} \displaystyle\int (f_i - f) = \lim\limits_{i\to\infty} \displaystyle\int (g_i - g) = 0$ quase sempre, resulta que $\lim\limits_{i\to\infty} \displaystyle\int |h_i - h| = 0$.

$\square$

É importante lembrar que, a partir de S_0 sobre algumas hipóteses, conforme definição 3.12, construímos a classe S_1. Mais a diante apresentaremos o Teorema de Beppo Levi, tal que suas implicações nos garante que ao utilizamos o mesmo método de construção da classe de funções S_1 para as sequências de funções de $L(a,b)$ não obtemos uma nova classe de funções.

Lema 3.3. *Seja h uma função integrável. Então, para cada $\epsilon > 0$ existem funções $f,\ g \in S_1$ tais que $h = f - g$, $g \geq 0$ e $\int g(x)dx < \epsilon$. Além disso, se $h \geq 0$ então pode-se considerar $f \geq 0$.*

Demonstração. Seja $h = (f^* - g^*) \in L(a,b)$, onde $f^*,\ g^* \in L(a,b)$, considere (g_i) uma sequência de funções escadas que satisfaz às hipóteses **SLF** convergindo quase para g^*. Então

$$h = (f^* - g^*) = (f^* - g_i) - (g^* - g_i) = F_i - G_i \qquad \forall i \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

onde estamos considerando $F_i = (f^* - g_i)$ e $G_i = (g^* - g_i)$. Convém notar que $G_i \geq 0$, pois dado que (g_i) é crescente temos que $g^* - g_i \geq 0 \Rightarrow g^* \geq g_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pela definição de integral em S_1 sabemos que $\displaystyle\int g^* = \lim_{i\to\infty} \int g_i$, implicando que

$$\int g^* - \lim_{i\to\infty} \int g_i = 0 \Rightarrow \lim_{i\to\infty} \int (g^* - g_i) = \lim_{i\to\infty} \int G_i = 0.$$

Desta forma temos que, dado $\epsilon > 0$ podemos tomar um $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int G_{i_0} < \epsilon$. Se tomamos $i = i_0$ em (16) tem-se $h = F_{i_0} - G_{i_0}$ e as funções $f = F_{i_0}$ e $g = G_{i_0}$ satisfazem às condições do lema, pela observação 3.7. No mais se $h \geq 0$, temos por (16) que, para todo $i,\ F_i = h + G_i \geq 0$. Em particular $F_i \geq 0$.

□

Lema 3.4. *Seja (h_i) uma sequência crescente de funções de S_1 cuja sequência das integrais $(\int h_i)$ tem um majorante. Então (h_i) converge quase sempre para uma função $h \in S_1$ e tem-se ainda que $\displaystyle\int h = \lim_{i\to\infty} \int h_i$.*

Não demonstraremos o Lema 3.4, mas o leitor interessado pode procurar mais detalhes na referência (MEDEIROS, 2019)

Corolário 3.6. *Consideremos uma série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f_i$, com $f_i \in S_1$, $f_i \geq 0$ para todo i. Se a sequência $\displaystyle\left(\int [\sum_{i=1}^{k} f_i]\right)_{k\in\mathbb{N}}$ for limitada, então a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge quase sempre para uma função $f \in S_1$ e $\displaystyle\int f = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i$.*

Demonstração. Considere para cada i, $\displaystyle F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k = f_1 + f_2 \ldots + f_k$. Logo F_i satisfaz as hipóteses do Lema 3.4, consequentemente existe uma função $f \in S_1$ tal que $\displaystyle\lim_{i\to\infty} F_i = f$ quase sempre, e tem-se que

$$\int_a^b f = \lim_{i\to\infty} \int_a^b F_i = \lim_{i\to\infty} \int \left(\sum_{k=1}^{i} f_i\right) = \lim_{i\to\infty} \int_a^b (f_1 + f_2 \ldots + f_i)$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left(\int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \ldots + \int_a^b f_i\right) = \lim_{i\to\infty}\sum_{k=1}^{i}\int f_k = \sum_{i=1}^{\infty}\int f_i.$$

$\square$

Teorema 3.2 (Beppo Levi). *Seja (f_i) uma sequência crescente de funções de $L(a,b)$ cuja sequência das integrais $(\int f_i)$ é limitada superiormente. Então f_i converge quase sempre para uma função $f \in L(a,b)$ e tem-se que $\displaystyle\int f = \lim_{i\to\infty}\int f_i$.*

Demonstração. Considere (f_i) um a sequência crescente de funções pertencente a classe $L(a,b)$, e suponha que exista uma constante A tal que $\displaystyle\int f_i < A$ para todo i. Tomamos agora a série $f_1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} g_i$, onde $g_i = f_{i+1} - f_i$ para todo i. Desta forma temos que, para cada i, $\displaystyle\int f_i = \int f_1 + \sum_{k=1}^{i-1}\int g_k$, logo

$$\int \sum_{k=1}^{i-1} g_k = \int f_i - \int f_1 < A - \int f_1 = B, \tag{17}$$

Como g_i é integrável a Lebesgue pode se escrever $g_i = F_i - G_i$, onde $F_i,\ G_i \in S_1$. Pelo lema 3.3 podemos considerar $F_i,\ G_i \geq 0$ e

$$\int G_i < \frac{1}{2^i}. \tag{18}$$

Note que $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} F_i$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} G_i$ satisfazem as condições do corolário 3.6. Pois, temos que $F_i,\ G_i \geq 0$ para todo i, por (18) a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\int G_i$ é convergente e resulta que a sequência $\left(\displaystyle\int\sum_{i=1}^{n} G_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ é limitada. Sabemos por (17) que a sequência $\left(\displaystyle\int\sum_{i=1}^{n} g_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ é limitada, e ocorre a igualdade $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int F_i = \int\sum_{i=1}^{n} g_i + \sum_{i=1}^{n}\int G_i$, concluindo desta forma que a sequência $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int F_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ é limitada. Portanto as séries $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} F_i$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} G_i$ satisfazem o corolário 3.6, desta maneira, convergem quase sempre para as funções F e G, respectivamente, onde $F,\ G \in S_1$. Então a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} g_i = \sum_{i=1}^{\infty} F_i - \sum_{i=1}^{\infty} G_i$ convergem quase sempre para $g = F - G$ que é uma função integrável a Lebesgue. Além disso, tem-se que $\displaystyle\int g = \int F - \int G = \sum_{i=1}^{\infty}\int F_i - \sum_{i=1}^{\infty}\int G_i = \sum_{i=1}^{\infty}\int (F_i - G_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\int g_i$. Concluído desta maneira que a sequência (f_i) converge quase sempre para a função integrável a Lebesgue $f = f_1 + g$ e $\displaystyle\int f = \int f_1 + \int g = \int f_1 + \lim_{i\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \int g_i = \lim_{i\to\infty} \int f_i$.

□

O Teorema anterior é a forma crescente do Teorema de Beppo Levi. Nele a sequência (f_i) é suposta crescente e a sequência $(\int f_i)$ majorada por uma constante. A forma decrescente, consequência imediata da forma crescente, é a seguinte:

Teorema 3.3 (Beppo Levi). *Seja (f_i) uma sequência decrescente de funções de $L(a,b)$ cuja sequência das integrais $(\int f_i)$ é limitada inferiormente. Então f_i converge quase sempre para uma função $f \in L(a,b)$ e tem-se que $\displaystyle\int f = \lim_{i\to\infty} \int f_i$.*

Demonstração. Se tomamos (f_i) uma sequência decrescente de funções de $L(a,b)$ cuja sequência das integrais $(\int f_i)$ é limitada inferiormente, basta multiplicamos a sequência (f_i) por (-1), isso é possível pois $L(a,b)$ é um espaço vetorial. Consequentemente teremos uma sequência nas hipótese do Teorema 3.2, logo teremos $\displaystyle\int (-f) = \lim_{i\to\infty} \int -f_i \Rightarrow \int f = \lim_{i\to\infty} \int f_i$.

□

Proposição 3.17. *Seja $f \in L(a,b)$ tal que $f \geq 0$ e $\int_a^b f = 0$. Então $f = 0$ quase sempre em (a,b).*

Demonstração. Consideremos $g_i = if$ para cada i, logo (g_i) é integrável a Lebesgue. Nota-se (g_i) satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2, pois (g_i) é um sequência crescente e $\int g_i = i \int f = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, portanto converge quase sempre, entretanto g_i não converge nos pontos onde f é diferente de zero. Resulta que, $f = 0$ quase sempre em (a,b).

□

Observação 3.12. *Convém relembrarmos alguns conceitos que se farão necessário mais a diante. Seja (f_i) uma sequência de funções definida em (a,b), em cada ponto $x \in (a,b)$ temos que*

- $\inf(f_i) = \inf\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i = \lim\limits_{i\to\infty} \min\limits_{1\leq k\leq i} \{f_k(x)\}$
- $\sup(f_i) = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i \lim\limits_{i\to\infty} \max\limits_{1\leq k\leq i} \{f_k(x)\}$

Assim de acordo a notação estabelecida anteriormente

$$\inf_{i\in\mathbb{N}} f_i = \lim_{i\to\infty} (f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_i) \qquad e \qquad \sup_{i\in\mathbb{N}} f_i = \lim_{i\to\infty} (f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_i).$$

Recorde-se, também, que o limite superior e limite inferior de (f_i) *são as funções* $\limsup_{i\to\infty} f_i$ *e* $\liminf_{i\to\infty} f_i$ *definidas, respectivamente, por*

$$\limsup_{i\to\infty} f_i = \inf_{i\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq i} f_n \qquad e \qquad \liminf_{i\to\infty} f_i = \sup_{i\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq i} f_n. \tag{19}$$

Notando que a sequência $(\sup_{n\geq i} f_n)$ *é decrescente e a sequência* $(\inf_{n\geq i} f_n)$ *é crescente, podemos escrever (19) da seguinte forma*

$$\limsup_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} \sup_{n\geq i} f_n \qquad e \qquad \liminf_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} \inf_{n\geq i} f_n.$$

Lembrando que, $\liminf_{i\to\infty} f_i \leq \limsup_{i\to\infty} f_i$ *e que se* f_i *tem um limite* $f(x)$ *num ponto* $x \in (a,b)$*, então*

$$\liminf_{i\to\infty} f_i = \limsup_{i\to\infty} f_i = f(x).$$

Observação 3.13. *Seja* $f_0 \in L(a,b)$ *e denotaremos o conjunto das funções integráveis em* (a,b) *tal que* $f(x) \leq f_0(x)$ *para todo* $x \in (a,b)$ *por,* $L_s(f_0) = \{f \in L(a,b); f \leq f_0\}$*. Então, tem-se* $\int f \leq \int f_0$ *para todo* $f \in L_s(f_0)$*. Decorre daí que se* (f_i) *é uma sequência de funções de* $L_s(f_0)$*, a sequência das integrais* $(\int f_i)$ *é limitada superiormente. Se, além disso,* (f_i) *é crescente, então pela forma crescente do Teorema de Beppo Levi,* (f_i) *converge em* (a,b) *para uma função* $f \in L(a,b)$ *e como* $f_i \in L_s(f_0)$*,* $i = 1, 2, \ldots,$ *tem-se que* $f \in L_s(f_0)$*. Conclui daí que* $L_s(f_0)$ *é fechado por passagem ao limite das sequências crescente. Analogamente, o conjunto* $L_i(f_0) = \{f \in L(a,b); f \geq f_0\}$ *é fechado por passagem ao limite das sequências decrescentes e, se* $f_0 \geq 0$*, o conjunto* $L(f_0) = \{f \in L(a,b); -f_0 \leq f \leq f_0\}$ *é fechado por passagem ao limite das sequências monótonas.*

Uma consequência desse resultado é que, para toda sequência (f_i) de funções de $L_s(f_0)$, a função $\sup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ pertence a $L_s(f_0)$, uma vez que $\sup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ é limite da sequência crescente $(f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_i)$. Analogamente, $\inf_{i\in\mathbb{N}} f_i \in L_i(f_0)$ para toda sequência (f_i) de funções de $L_i(f_0)$. Consequentemente, $\inf_{i\in\mathbb{N}} f_i$ e $\sup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ pertencem ao $L(f_0)$ para toda sequência (f_i) de funções de $L(f_0)$ e, desse modo, $\liminf_{i\to\infty} f_i$ e $\limsup_{i\to\infty} f_i$ pertence a $L(f_0)$, visto que $\limsup_{i\to\infty} f_i$ é limite da sequência decrescente $(\sup_{n\geq i} f_n)$ e $\liminf_{i\to\infty} f_i$ é limite da sequência crescente $(\inf_{n\geq i} f_n)$ de funções de $L(f_0)$. Com base nestas considerações preliminares demonstraremos o seguinte Teorema de Lebesgue, também conhecido por Teorema da Convergência Dominada.

Teorema 3.4 (Teorema de Lebesgue)**.** *Seja* (f_i) *uma sequência de funções de* $L(a,b)$*, convergente quase sempre para a função* f*. Se existe uma* $f_0 \in L(a,b)$ *tal que* $|f_i| \leq f_0$ *quase sempre para* $i \in \mathbb{N}$*, então* f *é integrável e tem-se* $\displaystyle\int f = \lim_{i\to\infty} \int f_i$.

Demonstração. Sem perca de generalidade, pode-se supor que para todo $i \in \mathbb{N}, |f_i| \leq f_0$ em todo ponto de (a, b). Com efeito, é bastante, se necessário, redefinir convenientemente as funções f_i em conjuntos de medida nula; as funções obtidas serão ainda integráveis, suas integrais coincidirão com as das f_i e a sequência delas ainda será convergente quase sempre para f. Com essa hipótese e pelo que foi dito na Observação 3.13, $\lim_{i\to\infty} \inf f_i$ pertence a $L(f_0)$ e, portanto é integrável. Entretanto, por hipótese, (f_i) converge quase sempre para f, logo $f = \lim_{i\to\infty} \inf f_i$ quase sempre, donde f é integrável e $f = \lim_{i\to\infty} g_i$ quase sempre, onde $g_i = \inf_{n\geq i} f_n$. Temos $g_i \leq f_j \leq f_0,\ j \geq i$ donde

$$\int g_i \leq \int f_j \leq \int f_0.$$

De $\int g_i \leq \int f_j$ conclui-se, como $\int g_i \leq \int f_0$ resulta que a sequência $(\int g_i)$ tem majorante finito e portanto pela forma crescente do Teorema de Beppo Levi , que $\displaystyle\int f = \lim_{i\to\infty} \int g_i$ e $\displaystyle\int g_i \leq \int f_j$, resulta que $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int g_i \leq \lim_{i\to\infty} \inf \int f_j$. Portanto

$$\int f \leq \lim_{i\to\infty} \inf \int f_i.$$

Analogamente, considerando $g_i = \sup_{n\geq i} f_n$, conclui-se que

$$\int f \geq \lim_{i\to\infty} \sup \int f_i.$$

Portanto,

$$\int f = \lim_{i\to\infty} \int f_i.$$

□

4 UMA PARTICULAR DEFICIÊNCIA DA INTEGRAL DE RIEMANN SANADA PELA INTEGRAL DE LEBESGUE

Temos apresentado nos capítulos anteriores desse trabalho duas teorias relacionas ao Cálculo Integral, desta maneira tentaremos trazer neste capítulo uma breve comparação entre ambas. Ressaltamos que, apresentamos anteriormente apenas aquilo que acreditamos ser elementar para que pudéssemos fazer conforme planejado para esta parte do trabalho, que é um resumido paralelo entre tais teorias, onde levantaremos em questão apenas uma das deficiências da Integral de Riemann que é sanada pela Integral de Lebesgue. Portanto para um estudo mais aprofundado de ambas as teorias recomendamos ver as referências (LIMA, 2013) e (MEDEIROS, 2019).

Vamos iniciar, para nossos objetivos desse capítulo, apresentando um teorema relacionado a *Sequências e Séries de Funções.*

Teorema 4.1. *Se uma sequência de funções integráveis a Riemann $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável a Riemann e vale*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{i\to\infty} \int_a^b f_i(x)dx.$$

$$\textit{Em Resumo:} \int_a^b \lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} \int_a^b f_i \textit{ desde que limite de } \lim_{i\to\infty} f_i \textit{ seja uniforme.}$$

Omitiremos a demonstração desse Teorema, entretanto para o leitor interessado na demonstração recomendamos consultar a referência (LIMA, 2013).

Agora trabalharemos com alguns exemplos de funções que nos ajudam a evidenciar uma deficiência da Integral segundo Riemann que é sanada pela integral de Lebesgue.

Exemplo 6. *Seja $g_n : [0, 1-\lambda] \to \mathbb{R},\ 0 < \lambda < 1$, onde $g_n(x) = x^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, temos que a sequência (g_n) converge uniformemente para $g(x) = 0$, para todo $x \in [0, 1-\lambda]$. Portanto, pelo Teorema 4.1 temos que*

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\lambda} g(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\lambda} g_n(x)dx, \qquad \textit{isto é,} \\ \int_0^{1-\lambda} \lim_{n\to\infty} (x^n)dx &= 0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\lambda} (x^n)dx. \end{aligned}$$

Vale observar que no espaço das funções escadas a integral é um funcional linear, na qual queríamos estender este funcional a um espaço vetorial contendo $S_0(a, b)$.

No entanto, passamos por uma etapa intermediária que foi a construção da classe $S_1(a,b)$ que contem $S_0(a,b)$, mas essa, como havíamos observado, não é ainda um espaço vetorial. Portanto, por construção toda função Riemann integrável é Lebesgue integrável. Vejamos agora uma função que não é integrável a Riemann, onde mais a diante veremos que é integrável a Lebesgue.

Exemplo 7. *Seja $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, definida da seguinte maneira*

$$f(x)=\begin{cases}1, & \textit{nos pontos racionais de } (0,1)\\ 0, & \textit{nos demais pontos de } (0,1)\end{cases} \tag{20}$$

Note que analogamente ao exemplo 2, dada uma partição $P=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ qualquer de $(0,1)$, sabemos que para cada intervalo $(t_{i-1},t_i)\subset P$ com $i=1,2\dots,n$, temos números racionais e irracionais contidos nele, logo $m_i=0$ e $M_i=1$, onde m_i é o ínfimo e M_i o supremo dos valores de f no intervalo (t_{i-1},t_i) para cada $i=1,2,\dots,n$. Pois, como sabemos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ são densos nos reais e logo para cada intervalo que tomamos na reta real sempre vai haver números racionais e irracionais. Portanto, teríamos que $s(f;P)=0\cdot(1-0)\neq 1\cdot(1-0)=S(f;P)$. Logo,

$$\int_{\underline{0}}^{1} f(x)dx=0 \qquad e \qquad \int_{0}^{\overline{1}} f(x)dx=1,$$

isto é, as integrais inferior e superior são diferentes. Portanto, f não é integrável a Riemann.

Vale ressaltar que a função f apresentada em (20), é conhecida como função de Dirichlet e tem a propriedade de ser descontínua em todos os pontos do domínio e consequentemente não é integrável a Riemann. Vejamos agora uma situação que nos ajuda a ver a deficiência da integral de Riemann.

Exemplo 8. *Neste exemplo vamos usar, a priori, a teoria relacionada a Integral segundo Riemann para tentar resolver a situação dada a seguir. Seja $\{r_1,r_2,\dots\}$ o conjunto dos racionais no intervalo $(0,1)$ e $f_i:(0,1)\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f_i(x)=\begin{cases}1, & \textit{nos pontos } r_1,r_2,\dots,r_i\\ 0, & \textit{nos demais pontos de } (0,1)\end{cases}.$$

Então (f_i) é uma sequência crescente de funções de $R(a,b)$, com $\int_0^1 f_i(x)dx=0 \quad \forall\, i\in\mathbb{N}$, que converge simplesmente para uma função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}1, & \textit{nos pontos racionais de } (0,1)\\ 0, & \textit{nos demais pontos de } (0,1)\end{cases}. \tag{21}$$

Neste caso não é possível passar ao limite sobe o sinal da integral pelo Teorema 4.1, pois $\lim_{i\to\infty} f_i(x)$ *não converge uniformemente. E, além disso, temos pelo exemplo 7, que* f *é a função de Dirichlet e consequentemente* $f \notin R(a,b)$.

Portanto, temos que a sequência (f_i) *de funções integráveis a Riemann converge simplesmente para a função* $f(x)$ *e consequentemente a igualdade apresentada no Teorema 4.1:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_i(x)dx,$$

não ocorre e também o lado esquerdo dessa igualdade não faz sentido na situação aqui trabalhada, visto que mencionamos anteriormente que $f \notin R(a,b)$.

Vemos no exemplo 8 que mostra claramente a seguinte falha da integral de Riemann, o limite de uma sequência crescente e convergente de funções de $R(a,b)$, cuja sequências das integrais é limitada, nem sempre pertence a $R(a,b)$. Na qual, segundo o referencial bibliográfico (MEDEIROS, 2019) tomado, é uma falha muito grave que praticamente a torna ineficiente no trato dos problemas que envolvem passagem ao limite sob o sinal de integral.

Convém observar que a função f de Dirichlet apresentada no exemplo 7, embora não pertença a $R(a,b)$, pertence a $L(a,b)$. Com efeito, observe o exemplo a seguir.

Exemplo 9. *Seja* $f_i : (0,1) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots,$ *definida por*

$$f_i(x) = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Temos que para todo $i < i+1$, *implica em* $f_i \leq f_{i+1}$, *logo* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência crescente de funções, onde pela definição de função escada nota-se que* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in S_0(0,1)$. *Também temos que* $\int_0^1 f_i(x)dx = 0$, *para todo* $i \in \mathbb{N}$. *E* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge quase sempre para a função* f *de Dirichlet no intervalo* $(0,1)$, *pois notemos que* $f_i(x) \neq f(x)$ *se* $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ *e sabemos que* $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ *é enumerável e portanto possui medida nula. Conclui-se que* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de funções escadas, crescente e a sequência das integrais* $(\int f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *é limitada para todo* $i \in \mathbb{N}$, *logo* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *satisfaz o* **SLF** *definindo a função de Dirichlet* f *em* $S_1 \subset L(a,b)$.

Agora prosseguiremos para mostrar a integral de tal função via integral Lebesgue. Conhecendo o Teorema de Lebesgue e considerando a sequência de funções apresentada no exemplo 9 temos o seguinte.

Sabemos que, no exemplo 9, $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções integráveis tal que $|f_i(x)| \leq f_0(x) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$, com $f_0 \equiv 0$ integrável. Resulta que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ limitada para todo $i \in \mathbb{N}$, e temos também pelo exemplo 9 que a sequência $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge quase sempre para a função f. Resulta, pelo Teorema 3.4, que

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_i(x)dx = 0,$$

pois $\displaystyle\int_0^1 f_i(x)dx = 0,\ (i = 1, 2, \ldots)$.

Portanto, observa-se que a função de Dirichlet apresentada no exemplo 7 não é integrável a Riemann, mas é integrável a Lebesgue, além disso para a classe de funções integráveis a Lebesgue não é preciso que a convergência seja uniforme para que haja a permuta do limite sobre o sinal da integral, pois observemos pelo Teorema de Lebesgue que sobre certas hipótese é permitido tal permutação. Desta maneira temos que, a classe $L(a, b)$ amplia noção de Cálculo Integral, se comparada com a classe $R(a, b)$. Desta maneira concordando com nosso argumento feito antes do exemplo 7, portanto toda função Riemann integrável é Lebesgue integrável, mas a recíproca nem sempre é verdade.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De modo geral, neste trabalho estudamos de forma breve alguns conceitos relacionados a Integral de Legebegue tomando como base apenas nas ferramentas, disciplinas, que são apresentadas no Curso de Licenciatura em Matemática na UNILAB. Enfatizando que não usamos, em sua grande parte, os meios relacionados a Teoria da Medida para apresentar os resultados aqui alcançados, pois foi usado a abordagem de F. Riez dada na referência (MEDEIROS, 2019) para trabalhar tal assunto. Com este projeto apresentamos uma deficiência relacionada à integral de Riemann que é sanadas pela integral de Lebesgue, onde tais limitações da primeira teoria é desconhecidas por alguns estudantes. Desta forma salientamos que a universidade nos proporciona conhecimento necessários para manejar novas informações que vão para além de nossa formação. Em suma, vale destacar a importância de estudar a integral de Lebesgue, pois a mesma ajudou a tornar mais ampla o conceito de Cálculo Integral, que outrora possuía suas limitações, de maneira a obter uma classe maior de funções integráveis em comparação com a classe das funções integráveis a Riemann, desta maneira ocasionando o desenvolvimento da matemática.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Benjamin. MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Editora Blucher, 2019.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**/Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, v. 844, p. 63, 2004.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), **Cálculo Diferencial e Integral**, 2021. Disponivel em:`http://ecalculo.if.usp.br/historia/riemann.htm`. Acesso em: 17 de fev. de 2021.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise** - Volume 1, 14ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real** - Volume 1, 11ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MEDEIROS, Luis Adauto da Justa, ELIEL Amancio de Mello. **Integral de Lebesgue.** 6 Ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2019.

SANTOS, Clotilzio Moreira. **Reticulados, álgebra booleana e formas quadráticas abstratas. C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** Bauru, v. 5, p. 2-9, dez. 2015.

SANTOS, Wagner Luiz Moreira dos. **A integral de Riemann generalizada.** Minas Gerais: UFOP/ICEB, 2019.

STEWART, James. **Cálculo** - Volume 1, 7ª Edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.