UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AMADÚ SANÉ

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DE BESSEL E APLICAÇÕES

REDENÇÃO
2023

AMADÚ SANÉ

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO DA EQUAÇÃO DE BESSEL E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Sané, Amadú.

S223e

Equações diferenciais ordinárias: um estudo da equação de bessel e aplicações / Amadú Sané. - Redenção, 2023.
85fl: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientador: Prof.º Dr.º Joserlan Perote da Silva.

1. Equações diferenciais. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Funções de Bessel. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 515.35

AMADÚ SANÉ

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: UM ESTUDO DA EQUAÇÂO DE BESSEL E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 15/06/2023.

BANCA EXAMINADORA

Joserlan Perote da Silva
___
Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dtavares
___
Prof.ª Dra. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Kelma Gomes de melo.
___
Prof.ª Me. Kelma Gomes de Melo
Secretaria da Educação do Ceará (SEDUC)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a minha formação.

AGRADECIMENTOS

À Deus pela vida e saúde.

À CAPES pelo apoio durante a formação no curso.

Aos meus pais pelo incentivo nos meus estudos e da minha avó que faleceu no mesmo mês que eu cheguei na UNILAB.

Ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, pela excelente orientação.

Às professoras participantes da banca examinadora Danila Fernandes Tavares e Kelma Gomes de Melo pelo disponibilizado, pela leitura e sugestões do meu TCC.

Aos irmão da casa, em especial, Honório Lima Nanque, Orfine Vitor Magalhães, Lígio Condé e Laurita Yala.

Por último aos colegas da turma de graduação, em especial, André Fonseca Miguel Lutumba, Badilé Miranda Insali, Antônio Monteiro e Kongo Lubaki e demais colegas pelas experiências partilhadas.

"Busque a simplicidade e desconfie dela."
Alfred North Whitehead

RESUMO

Neste presente trabalho, abordamos sobre equações diferenciais com destaques para a equação de Bessel. Além disso, apresentamos algumas aplicações de equações diferenciais de primeira ordem, de ordem superior e também da equação de Bessel. Entretanto, com intuito de trazer maior clareza para o leitor do trabalho no capítulo preliminar foi tratado sobre a média aritmética-geométrica , a relação entre a Função Gamma, a Função Beta e equações diferenciais de primeira ordem e ordens superiores. Porém, o foco do trabalho é a aplicação de funções Bessel na modelagem com equações diferenciais de segunda ordem sujeitas a valor inicial, sobretudo no sistema de massa-mola, em particular, movimento livre não amortecido.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Equação de Bessel. Aplicações.

ABSTRACT

In this present work, we approach differential equations with emphasis on the Bessel equation. In addition, we present some applications of first-order and higher-order differential equations, as well as the Bessel equation. However, in order to bring greater clarity to the reader of the work, the preliminary chapter dealt with the arithmetic-geometric mean, the relationship between the Gamma Function, the Beta Function and differential equations of the first order and higher orders. However, the focus of the work is the application of Bessel functions in modeling with second order differential equations subject to initial value, especially in the mass-spring system, in particular, undamped free motion.

Keywords: Differential equations. Bessel equation. Applications.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentaremos um estudo sobre as equações diferenciais de primeira ordem, e as equações diferenciais de ordem superior com ênfase na equação de Bessel. Apresentaremos também algumas aplicações de equações de primeira ordem e aplicações de equações de ordem superior. Trabalhamos também aplicações da equação de Bessel.

Falando um pouco de Friedrich Bessel, podemos relatar que ele nasceu no dia 22 de julho de 1784, na cidade de Minden-Ravensberg na Alemanha, o segundo filho de um funcionário público. Com a idade de 14 anos começou na atividade de aprendiz de importação e exportação em Bremen. A dependência da empresa de navios de carga o levou a usar as suas habilidades matemáticas para resolver os problemas de navegação. Isso, por sua vez, o conduziu a um interesse em astronomia, como uma maneira de determinar a longitude.

Na matemática, criou as "Funções de Bessel", que se aplicam ao cálculo das irregularidades das órbitas dos corpos celestres. Apesar de não ter uma formação universtária, foi considerado um dos maiores astrônomos do século XIX. É importante salientar que, a motivação desse trabalho surgiu a partir da disciplina do cálculo III, na qual a equação de Bessel me despertou interesse de saber sobre a sua aplicação, foi nessa sentido, acabamos de verificar que as funções de Bessel têm aplicações nas soluções de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem sujeitas a condição inicial, ou seja, problema do valor inicial. Para melhor compreensão do nosso trabalho dividimo-lo em nove capítulos da seguinte maneira.

No capítulo dois, ou seja, no capítulo preliminar, abordamos sobre a média aritmética geométrica, a função Gamma, função Beta e aplicação de Função Gamma. Apresentamos também as série de potencias, analiticidade em um ponto, a aritmética de uma série de potências que são fundamentais para o assunto principal desse trabalho.

No capítulo três, apresentamos as equações diferencias de primeira ordem, a saber as equações de variáveis separáveis, equações diferenciais lineares, métodos de resoluções e o problema de valor inicial. Trabalhamos também soluções de equações diferencias em série de potências.

No capítulo quatro, abordamos equações diferenciais de ordem superior, deste modo, criando a motivação para incluir as soluções de equações lineares: equações homogêneas e não homogêneas, problemas de contorno, soluções de equações em termos de pontos ordinários e pontos singulares.

No capítulo cinco, apresentamos a equação de Bessel, as funções de Bessel de primeira e de segunda ordem, equação de Bessel paramétrica e relação de recorrência diferencial. Em algumas literaturas a Equação de Bessel e de Legendre são denominadas equações especiais, por isso, apresentamos a equação de Bessel e um pouco de sua história, além de sua solução a partir da suposição de uma solução em termos de série de potências.

No capítulos seis, sete e oito, abordamos as aplicação das equações diferenciais de primeira e de segunda ordem, com exemplos de crescimento populacional, movimento livre não amortecido e apligação de funções Bessel na modelagem com equações diferenciais de segunda ordem, sujeitas a valor inicial, sobretudo no sistema de massa-mola, particularizando, movimento livre não amortecido.

Portanto, o nosso trabalho traz de uma forma sucinta algumas aplicações das funções acima citadas, mas sem deixar de lado as motivações dessas aplicações nas equações diferenciais.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos importantes para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

2.1 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nessa seção abordaremos sobre as séries de potências, iniciando com uma revisão e falando resumidamente das mesmas. Por isso, recomendamos ao leitor o livro Stewart (2006). Além disso, a seção finaliza com seguintes tópicos: representação de uma série de potências numa função, séries que são identicamente nulas, analiticidade em um ponto, aritmética de uma série de potências e solução para uma equação diferencial em série de potência.

Definição 2.1. Uma série de Potências em $x-a$ é uma série infinita na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x-a\right)^n .$$

Uma série como essa é também conhecida como uma série de potências centrada em a. Por exemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n^2} x^n$$

é uma série de potências em x, a série é centrada em $a=0$.

Convergência: para um valor específico de x, uma série de potências é uma série de constantes. Se a série é igual a uma constante real finita para o x dado, então dizemos que a série converge em x. Se a série não converge em x, dizemos que ela diverge em x.

Intervalo de Convergência: toda série de potências tem um intervalo de convergência. O intervalo de convergência é o conjunto de todos os números para os quais a série converge.

Raio de Convergência: todo intervalo de convergência tem um raio de convergência R. Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x-a\right)^n$, temos somente três possibilidades:

(i) A série converge somente no seu centro a. Nesse caso, $R=0$.

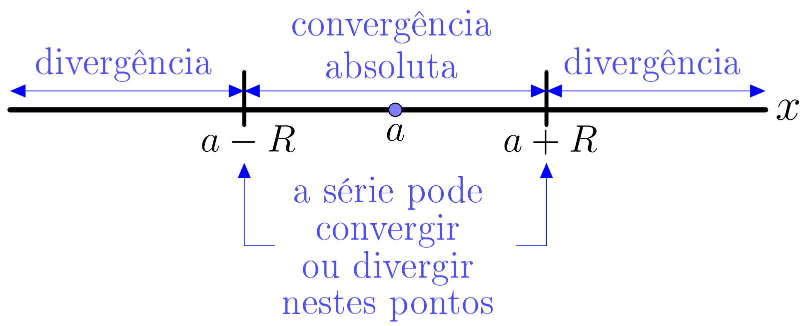
(ii) A série converge para todo x que satisfaça $|x-a| < R$, em que $R > 0$. A série diverge para $|x-a| > R$.

(iii) A série converge para todo x. Nesse caso, escrevemos $R=\infty$.

Convergência em um ponto extremo: a desigualdade do valor absoluto $|x-a|<R$ é equivalente para $a-R<x<R+a$. Se uma série de potências converge para $|x-a|<R$, em que $R>0$, ela pode ou não convergir nos pontos extremos do intervalo $a-R<x<a+R$.

Convergências Absoluta: Em seu intervalo de convergência, uma série de potências converge absolutamente. Em outras palavras, para x no intervalo de convergência, a série de valores $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||(x-a)^n|$ converge.

Figura 1 – Convergência Absoluta



Fonte: Próprio Autor (2023).

Determinação do Intervalo de Convergência: a convergência de uma série de potências pode frequentemente ser determinada pelo teste da razão

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right||x-a|=L.$$

A série será convergente se $L<1$. Por esse teste, vemos que o raio de convergência é dado por

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,$$

desde que esse limite exista.

Uma Série Potências Representa uma Função: uma série de potências representa uma função

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+....$$

cujo domínio de convergência da série é $(a-R,a+R)$. Se a série tiver raio de convergência $R>0$, então a função f será contínua, diferenciável e integrável no intervalo, $(a-R,a+R)$. Ainda, $f(x)$ e $\int f(x)\,dx$ podem ser calculadas por derivação e integração termo a termo:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a)^2 + 3c_3(x-a)^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

e

$$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + ... = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Embora, o raio de convergência dessas duas séries seja R, o intervalo de convergência pode ser diferente. Pode-se perder a convergência em um ponto extremo na derivação termo a termo e pode-se obter convergência em um ponto extremo na integração termo a termo.

Séries que são identicamente nulas: Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = 0, R > 0$ para todo x no intervalo de convergência, então $c_n = 0$ para todo n.

Analiticidade em um ponto: Vemos nos cursos de cálculo que funções como e^{x^2}, $cosx$ e $ln(x-1)$ podem ser representadas por séries de potências (desenvolvimento em série de Taylor ou Maclaurin). Dizemos que a função f é uma função analítica no ponto a quando ela pode ser representada por uma série de potências em $(x-a)$ com um raio de convergência positivo.

2.1.1 Aritmética de uma série de potências

Séries de potências podem ser combinadas através das operações de adição, multiplicação e divisão. Os procedimentos para uma série de potências são semelhantes à maneira pela qual somamos, multiplicamos ou dividimos dois polinômios, isto é, somamos coeficientes das mesmas potências de x multiplicamos termo a termo e usamos a propriedade distributiva para agrupar termos de mesma potência. Por exemplo, se a série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, forem ambas convergentes para $|x| < R$, então

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + b_n)\,x^n$$

e

$$f(x)\,g(x) = c_0b_1 + (c_0b_1 + c_1b_0)\,x + (c_0b_2 + c_1b_1 + c_2b_0)\,x^2 + ...$$

Exemplo 2.1. Encontre o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}.$$

Solução: A série está centrada em 3. Assim, o raio de convergência é

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = 2.$$

A série converge absolutamente para $|x-3| < 2$ ou $2 < x < 5$. No ponto extremo $x = 1$, verificamos que a série de constantes $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente pelo critério de Leibniz de (série alternada). No ponto extremo $x = 5$, verificamos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é série harmônica divergente. Logo, o intervalo de convergência é $[1, 5)$. ■

2.2 A MÉDIA ARITMÉTICA-GEOMÉTRICA

Nessa seção, abordaremos sobre a média aritmética-geométrica, começando por sua definição e proposição, de modo a facilitar os seus cálculos, mas de forma resumida. Entretanto, o leitor que quiser aprofundar sobre o assunto pode consultar Melo (2020).

Definição 2.2. A média aritmética-geométrica define-se da seguinte forma: fixados dois números reais a e b tais que, $0 < b < a$ sejam a_n e b_n as sucessões, onde $a_0 = a$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_0 = b$ e $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Temos que qualquer termo da sucessão a_n, excetuando o primeiro, é a média dos dois termos de ordem imediatamente anterior das sucessões a_n e b_n, todo o termo da sucessão b_n de ordem superior a um, é a média geométrica dos termos imediatamente anterior das sucessões.

Proposição 2.1. *Prove que as sucessões a_n e b_n são convergentes e convergem para o mesmo limite. Seja a_n e b_n, sequência, onde podemos considerar $a_0 = a$ e $b_0 = b$, seguindo dessa forma.*

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{a_0 + b_0}{2} \quad e \quad b_1 = \sqrt{a_0 b_0} \\
a_2 &= \frac{a_1 + b_1}{2} \quad e \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1} \\
&\vdots \\
a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \quad e \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\
a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \geq b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},
\end{aligned}$$

$a_1 \geq b_1$ pela desigualdade das médias, assim: $a \geq a_1 = \frac{2a_1}{2} \geq \frac{a_1+b_1}{2} = a_2 = \frac{2a_2}{2} \geq \frac{a_2+b_2}{2}...$ Podemos concluir então que: $a \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_n \geq ... \geq b_n \geq b_{n-1} \geq ... \geq b_3 \geq b_2 \geq b_1 \geq b$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = M(a,b) = \lim_{n\to\infty} b_n$, onde $M(a,b)$ é a média aritmética-geométrica de a e b.

2.3 A FUNÇÃO GAMMA

A função Gamma foi definida pela primeira vez no ano 1729 pelo grande matemático suíço Leonhard Paul Euler. Ele definiu a função como um produto finito

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{\left(1+\frac{z}{n}\right)}.$$

Se z for tomado como variável complexa $z = x + iy$, o produtório de Euler para $\Gamma(z)$ converge em todo z finito exceto $z = 0, -1, -2, ...$ A função definida pelo produtório é analítica em todo z finito exceto para os pontos singulares que acabamos de mencionar. Em cada $\Gamma(z)$ um dos pontos singulares tem um polo simples. A notação $\Gamma(z)$ e o nome "Função Gamma", foram usados pela primeira vez por Legendre em 1814. A partir do produto infinito de Euler para $\Gamma(z)$ pode ser derivada a fórmula $\int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$. Este integral é convergente apenas quando a parte real de z é positiva. No entanto, esse integral $\Gamma(z)$ é muitas vezes tomado como ponto de partida para tratamentos introdutórios da função Gamma. Além do mais, a variável z é frequentemente confinada a valores reais de x. Entretanto, nesse trabalho ocuparemos em nossos exercícios e problemas da função Gamma com variável real para valores positivos de x, tomaremos como definição da função Gamma da forma:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0.$$

Como geralmente é feito, devemos estender o domínio da função Gamma para o ambiente dos números negativos (exceto os inteiros negativos) por extrapolação via a equação característica $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$. Pode-se observar que esta função, ou seja, $x \cdot \Gamma(x)$ fornece uma função analítica cujo valor em cada número inteiro positivo n é $n!$. A própria função conforme estabelecida por Euler é tal que, $\Gamma(n) = (n-1)!$ em vez de $n!$ quando n é inteiro positivo. Embora, a função Gamma foi criada por Euler para resolver problemas em matemática pura, ela tornou útil para resolver alguns problemas da engenharia e da física. A função Gamma é particularmente útil em certos problemas de probabilidade, especialmente, problemas que envolvem fatoriais de números inteiros grandes ou a função Gamma incompleta, a saber:

$$\gamma(x,\tau) = \int_0^{\tau} t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0, \tau > 0.$$

Tabelas de valores de Gamma são geralmente dadas para o intervalo $1 \leq x < 2$. Não há necessidade de tabular fora de um intervalo cuja dispersão é a unidade por causa da propriedade fundamental $\Gamma(x+1) = \Gamma(x)!$.

2.4 RELAÇÃO ENTRE FUNÇÃO GAMMA E A BETA

Nessa seção, trataremos da relação entre a função Beta e a função Gamma, onde iremos calcular a Gamma de um quarto e um terço. Em seguida, utilizaremos a fórmula da duplicação de Legendre e média aritmética-geométrica para facilitar nos cálculos da Gamma de um quarto e um terço. Entretanto, o leitor que queira aprofundar mais sobre assunto, recomendamos consultar Melo (2020).

A função Beta também é chamada de integral de Euler de primeiro tipo, é a função definida pela integral,

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt, \quad onde \quad m,n \in \mathbb{R} > 0.$$

A relação da função Beta e Gamma é dada por: $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, ou seja,

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt.$$

2.4.1 Cálculo da $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$

Fazendo $m = \frac{1}{4}$ e $n = \frac{1}{2}$ obtemos:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}dt. \tag{1}$$

Fazendo mudança de variável: $t = u^4$, $dt = 4u^3du$, para $t \to 0$, $u \to 0$, e $t \to 1$, $u \to 1$. Assim temos,

$$= \int_0^1 \frac{1}{(u^4)^{\frac{3}{4}}}\frac{4u^3}{\sqrt{1-u^4}}du = \int_0^1 \frac{4u^3}{u^3\sqrt{1-u^4}}du = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^4}}du.$$

Para facilitar os cálculos, vamos utilizar a propriedade da função Gama com a trigonometria, que diz: $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{senx\pi}$.

Assim, $\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{\pi}{sen\frac{\pi}{4}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}$. Daí segue que,

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

De Melo (2020) ou do exemplo 2.8, temos que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e portanto substituindo os valores de $\Gamma\left(\dfrac{3}{4}\right)$ e $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ na equação (1) obtemos,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\pi}}{2\pi}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^4}}du = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2\pi}.$$

Isso implica que,

$$\begin{aligned}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 &= \frac{2.4\pi}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^4}}du = \frac{2.4\pi}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}M\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{4\pi^2}{2\sqrt{\pi}.M\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\ &= \frac{2.\pi^{\frac{3}{2}}}{M\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{2^{\frac{1}{2}}.\pi^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{1}{2}}\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

2.4.2 Cálculo da $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$

Assim, como $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ auxilia nos cálculos de alguns resultados de difícil completude. De fato, com a relação da função Gamma e a Beta já demonstrada, iniciaremos a construção:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} = \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}}dt. \tag{2}$$

2.4.3 Fórmula da duplicação da Legendre

A fórmula da duplicação de Legendre é definida por:

$$2^{2x-1}\Gamma\left(x\right)\cdot\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma\left(2x\right) \tag{3}$$

válida por todo $x \in \mathbb{R}$ exceto os inteiros negativos que não sejam da forma $-x$ ou $-x-\frac{1}{2}$ com $x = \{0,1,2,...\}$. Fazendo $x = \frac{1}{6}$ na equação (3) temos:

$$2^{-\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Daí segue que,

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Pela propriedade de $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{senx\pi}$, fazendo $x=\dfrac{2}{3}$ temos, $\Gamma\left(\dfrac{2}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right)=$ $=\dfrac{\pi}{sen\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Daí segue,

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Calculando $\Gamma\left(\dfrac{1}{6}\right)$ temos,

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{\frac{2}{3}}\frac{2\pi}{\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}}=\pi^{-\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{3}}\sqrt{3}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right).$$

Enquanto que $\Gamma\left(\dfrac{5}{6}\right)$ é,

$$\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}=\frac{2\pi}{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)\pi^{-\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{3}}}=\frac{2^{\frac{4}{3}}3^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}. \tag{4}$$

Assim, substituindo a equação (4) e $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ na equação (2) obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\\ &= \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{\pi}}{2^{\frac{4}{3}}\pi^{\frac{3}{2}}3^{-\frac{1}{2}}}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}\\ &= \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{\pi}}{2^{\frac{4}{3}}\pi^{\frac{3}{2}}3^{-\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t=u^3$ onde $dt=3u^3du$ concluímos que:

$$\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)=2^{\frac{4}{3}}\pi 3^{-\frac{1}{2}}3\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^3}}=2^{\frac{4}{3}}3^{\frac{1}{2}}\pi\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^3}}=\frac{2^{\frac{4}{3}}\pi}{3^{-\frac{1}{4}}}\frac{2\sqrt{3}\pi}{3M\left(2,\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}.$$

Portanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2^{\frac{7}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{12}}M\left(2, \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Agora, iremos apresentar algumas propriedades de $\Gamma(x)$ que serão úteis nas aplicação de Gama com sua relação com função Beta:

a) $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0,$

b) $\Gamma(x) = \int_0^\infty 2u^{2x-1}e^{-u^2}du, \quad x > 0$

c) $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x > 0, y > 0$

d) $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, $x \neq 0, -1, -2, ...$

e) $\Gamma(x) = \int_0^1 \left[ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{x-1} du, \ x > 0.$

f) $\Gamma(x) = 2\int_0^\infty m^{2x-1}e^{-m^2}dm, \ x > 0.$

g) $\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{sen x\pi}, \ x \neq 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$

h) $\int_0^\infty t^a e^{-bt^c}dt = \dfrac{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)}{cb^{\frac{a+1}{c}}}, \quad x > 0, b > 0, c > 0.$

i) $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y).}$

j) $B(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sen^{2x-1}\theta cos^{2y-1}\theta d\theta$

k) $B(x,y) = B(y,x)$

l) $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1), \ x \neq 0, 1, 2, 3, ...$

m) $\Gamma(x) = (x-1)!$, $x = 1, 2, 3, ...$, convencionamos que $0! = 1$.

Em seguida, iremos demonstrar algumas propriedades acima citadas:

Exemplo 2.2. Mostre que,

$$\int_0^\infty t^a e^{-bt^c}dt = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)}{cb^{\frac{a+1}{c}}},$$

onde b e c são constantes positivas e a é uma constante tal que $a > -1$.

Solução: Façamos $bt^c = x$ implica que, $t = \dfrac{x^{\frac{1}{c}}}{b^{\frac{1}{c}}}$ elevando ambos os membros por a

temos que $t^a = \dfrac{x^{\frac{a}{c}}}{b^{\frac{a}{c}}}$. Por outro lado, temos que $t^{c-1} = \dfrac{x^{\frac{(c-1)}{c}}}{b^{\frac{(c-1)}{c}}}$, ou seja, $\dfrac{1}{t^{c-1}} = \dfrac{bx^{\frac{1}{c}-1}}{b^{\frac{1}{c}}}$.
Dessa forma, obtemos $cbt^{c-1}dt = dx$. Assim,

$$dt = \left(\tfrac{1}{t^{c-1}}\right)\frac{dx}{cb} = \frac{x^{\frac{1}{c}-1}dx}{b^{\frac{1}{c}}c}.$$

Fizemos mudança de variável, não limite de integração, dessa forma temos:

$$\int_0^\infty t^a e^{-bt^c}dt = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{a}{c}}\left(e^{-x}\right)}{b^{\frac{a}{c}}}\frac{x^{\frac{1}{c}-1}}{cb^{\frac{1}{c}}}dx.$$

Fazendo os cancelamentos necessários, temos:

$$\int_0^\infty t^a e^{-bt^c}dt = \frac{1}{cb^{\frac{(a+1)}{c}}}\int_0^\infty x^{\frac{a+1}{c}-1}e^{-x}dx,$$

observamos que: $\Gamma\left[\left(\dfrac{a+1}{c}\right)\right] = \displaystyle\int_0^\infty x^{\frac{a+1}{c}-1}e^{-x}dx.$
Portanto,

$$\int_0^\infty t^a e^{-bt^c}dt = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)}{cb^{\frac{a+1}{c}}}.$$

■

Exemplo 2.3. Mostre que $\Gamma(1) = 1$.

Solução: Façamos $x = 1$ em $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty t^0 e^{-t}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}dt \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^N \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{e^N}+1\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.4. Mostre que

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left[ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{x-1}du, \;\; x > 0.$$

Solução: Vamos iniciar pelo $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\ x > 0$. Façamos $u = e^{-t},\ \ \dfrac{1}{u} = e^{t}$, daí segue que, $ln\left(\dfrac{1}{u}\right) = t$. Dessa forma, obtemos $-\dfrac{1}{u}du = dt$ e $\left[ln\left(\dfrac{1}{u}\right)\right]^{x-1} = t^{x-1}$. Nossos novos limites de integração serão: quando $t \to 0$, $u \to 1$; quando $t \to \infty$, $u \to 0$. Portanto,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = -\int_1^0 \left[ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{x-1} u.\frac{1}{u}du = \int_0^1 \left[ln\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{x-1} du.$$

■

Exemplo 2.5. Mostre que

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{\infty} m^{2x-1}e^{-m^2}dm,\ x > 0.$$

Solução: Vamos iniciar com $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\ x > 0$. Façamos $t = m^2$, então $dt = 2mdm$. Nosso limites de integração se mantêm. Fazendo as substituições necessárias, temos

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^{\infty} m^{2(x-1)}e^{-m^2}2mdm \\ &= 2\int_0^{\infty} m^{2x-1}e^{-m^2}dm,\ x > 0.\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.6. Mostre $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} 2u^{2x-1}e^{-u^2}du, \quad x > 0.$

Solução: Iniciando com $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,\ x > 0$, façamos $u^2 = t$. Implica que, $2udu = dt$. Por outro lado, $(u^2)^{x-1} = t^{x-1}$. Daí segue que,

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^{\infty} u^{2(x-1)}e^{-u^2}2udu \\ &= \int_0^{\infty} 2u^{2x}u^{-1}e^{-u^2}du \\ &= \int_0^{\infty} 2u^{2x-1}e^{-u^2}du.\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.7. Calcule:

$$\int_0^1 \left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^3 dx.$$

Solução: Façamos $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = t$. Depois $\frac{1}{x} = e^t$, $x = e^{-t}$, $dx = -e^{-t}dt$, mudando os limites de integração: quando $x \to 0$, $t \to \infty$, quando $x \to 1$, $t \to 0$. Temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^3 dx &= \int_\infty^0 t^3 \left(-e^{-t}\right) dt \\ &= \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade $h)$, com $a = 3$, $b = 1$ e $c = 1$ temos que,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{1}\right)}{(1)\left(1^4\right)} = \frac{3!}{1^4} = 3!.$$

■

Exemplo 2.8. Use a propriedade de $B(x,y) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sen^{2x-1}\theta cos^{2y-1}\theta d\theta$ para mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Solução: Tomamos $x = y = \frac{1}{2}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sen^0\theta cos^0\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\theta \\ &= 2\theta\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(1)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2.$$

Portanto,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

■

Exemplo 2.9. Calcule

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Solução: Observamos que estamos perante uma integral de probabilidade, podemos reescreve-la da seguinte forma:

$$\int_0^\infty x^0 e^{-x^2} dx,$$

agora, usando a propriedade $h)$, com $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$, temos que,

$$\int_0^\infty x^0 e^{-x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right)}{2\,(1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

■

Exemplo 2.10. Mostre que,

$$\int_0^\infty t^{n-1} e^{-(a+1)t} dt = \frac{\Gamma(n)}{(a+1)^n}, \quad n > 0, \quad a > -1.$$

Solução: Fazendo mudança de variável: $t = (a+1)^{-1} y$, depois segue que, $dt = (a+1)^{-1} dy$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{n-1} e^{-(a+1)t} dt &= \int_0^\infty \left[(a+1)^{-1} y\right]^{n-1} e^{-y} dy \\
&= \int_0^\infty (a+1)^{-n+1} (a+1)^{-1} y^{n-1} e^{-y} dy \\
&= \int_0^\infty (a+1)^{-n} y^{n-1} e^{-y} dy \\
&= (a+1)^{-n} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy \\
&= (a+1)^{-n} \Gamma(n).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty t^{n-1} e^{-(a+1)t} dt = \frac{\Gamma(n)}{(a+1)^n}.$$

■

Exemplo 2.11. Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos\theta}\, d\theta.$$

Solução: Podemos reescrever

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sen^0\theta cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta.$$

Usando a propriedade de $B(p,q) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sen^{2p-1}\theta cos^{2q-1}\theta d\theta$. Agora fazendo comparação entre os expoentes da propriedade $e)$ e a integral temos: $2p - 1 = 0 \to 2p = 1$ implica que, $p=\frac{1}{2}$ e $2q-1=\frac{1}{2} \to 2q=\frac{3}{2}$ então $q=\frac{3}{4}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos\theta}d\theta &= \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sen^0\theta cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}.\end{aligned}$$

Usando a propriedade $g)$ temos que $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{sen\frac{1}{4}\pi}=\pi\sqrt{2}$.
Assim, $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Por outro lado, temos que, $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$. Portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos\theta}d\theta=\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}.$$

■

Exemplo 2.12. Calcule a área A formada pelo eixo x e o arco da curva

$$y=sen^8x.$$

Solução: Inicialmente temos que,

$$\begin{aligned}A=\int_0^{\pi} sen^8xdx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^8xdx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^8xcos^0xdx \\ &= B\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(5)} \\ &= \frac{35\pi}{128}.\end{aligned}$$

Observação 2.1. Usando as propriedades $m)$ e $l)$ temos que, $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ e $\Gamma(5)=4!$.

■

A seguir, é apresentada a tabela (1) da função Gamma que mostra os valores de Gamma, para x variando de 1 e 2 com incremento de 0.01. No entanto, caso o leitor tenha interesse em aprofundar mais sobre o assunto recomendamos Farrell (2013).

Tabela 1 – Função Gamma

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1.0	1.0	1.2	0.91817	1.4	0.88726	1.6	0.89352	1.8	0.93138
1.01	0.99433	1.21	0.91558	1.41	0.88678	1.61	0.89468	1.81	0.93408
1.02	0.98884	1.22	0.91311	1.42	0.88636	1.62	0.89592	1.82	0.93685
1.03	0.98355	1.23	0.91075	1.43	0.88604	1.63	0.89724	1.83	0.93969
1.04	0.97844	1.24	0.90852	1.44	0.88581	1.64	0.89864	1.84	0.94261
1.05	0.9735	1.25	0.9064	1.45	0.88566	1.65	0.90012	1.85	0.94561
1.06	0.9687	1.26	0.9044	1.46	0.8856	1.66	0.90167	1.86	0.94869
1.07	0.96415	1.27	0.9025	1.47	0.88563	1.67	0.9033	1.87	0.95184
1.08	0.95973	1.28	0.90072	1.48	0.88575	1.68	0.9055	1.88	0.95507
1.09	0.95546	1.29	0.89904	1.49	0.88595	1.69	0.90678	1.89	0.95838
1.1	0.95135	1.3	0.89747	1.5	0.88623	1.7	0.90864	1.9	0.961177
1.11	0.9474	1.31	0.896	1.51	0.88659	1.71	0.91057	1.91	0.96523
1.12	0.94359	1.32	0.89464	1.52	0.88704	1.72	0.91258	1.92	0.96877
1.13	0.93993	1.33	0.89338	1.53	0.88757	1.73	0.91467	1.93	0.9724
1.14	0.93642	1.34	0.89222	1.54	0.888818	1.74	0.91683	1.94	0.9761
1.15	0.93304	1.35	0.89115	1.55	0.88887	1.75	0.91906	1.95	0.97988
1.16	0.9298	1.36	0.89018	1.56	0.88964	1.76	0.92137	1.96	0.98374
1.17	0.9267	1.37	0.88931	1.57	0.89049	1.77	0.92376	1.97	0.98768
1.18	0.92373	1.38	0.88854	1.58	0.89142	1.78	0.92623	1.98	0.99171
1.19	0.92089	1.39	0.88785	1.59	0.89243	1.79	0.92877	1.99	0.99581

Fonte: Elaborada pelo autor.

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Nesse capítulo vamos tratar de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, iniciando pelo problema de valor inicial, variáveis separáveis, método de solução e equações lineares. Além do mais, apresentaremos alguns exemplos que ajudarão na compreensão do assunto. O leitor interessado em aprofundar mais sobre tais equações recomendamos Figueiredo (1979).

3.1 PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Estamos interessados em resolver uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dx}{dy} = f\left(x, y\right),$$

sujeita a uma condição inicial $y\left(x_0\right) = y_0$ em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 é um número real arbitrário chamado de **Problema de valor inicial.** Em termos geométricos, estamos procurando solução para equação diferencial, definida em algum intervalo I tal que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado a priori.

Exemplo 3.1. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4, \;\; y\left(0\right) = -2.$$

Solução: Colocamos a equação na forma

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx. \tag{5}$$

Usando frações parciais no lado esquerdo na (5) obtemos,

$$\left[\frac{\frac{-1}{4}}{y+2} + \frac{\frac{1}{4}}{y-2}\right] dy = dx. \tag{6}$$

Integrando ambos os lados da equação (4) temos,

$$\frac{-1}{4} ln\left|y+2\right| + \frac{1}{4} ln\left|y-2\right| = x + C_1. \tag{7}$$

Portanto,

$$ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + C_2 \;\; e \;\; \frac{y-2}{y+2} = Ce^{4x},$$

em que trocamos $4C_1$ por C_2 e e^{C_2} por C. Finalmente, isolando y na última equação, obtemos

$$y = 2\frac{1 + Ce^{4x}}{1 - Ce^{4x}}. \tag{8}$$

A substituição $x = 0$, $y = -2$ nos leva a seguinte resultado,

$$-2 = 2\frac{1 + C}{1 - C}.$$

Assim,

$$-1 + C = 1 + C \;\; ou \;\; -1 = 1.$$

Examinaremos a equação diferencial mais cuidadosamente. O fato é que a equação

$$\frac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 2)$$

é satisfeita por duas funções constantes, a saber $y = -2$ e $y = 2$. Observando as equações (5), (6) e (7), vemos que as soluções $y = -2$ e $y = 2$ não foram consideradas (pois anulariam o denominador). Mas é interessante observar que a solução $y = 2$ pode ser subsequentemente usada em 8. Porém nenhum valor de C nos dará a solução $y = -2$. Esta última função constante é única solução para o problema de valor inicial. ■

3.2 VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Definição 3.1. Uma equação diferencial da forma,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada **equação separável ou variáveis separáveis**.

Podemos observar que uma equação separável pode ser escrita como,

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{9}$$

Se $h(y) = 1$ a equação (9) se reduz a

$$\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Observação 3.1. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, podemos explicitar todas as soluções da equação Fundamental num intervalo I. Para isto, basta fixarmos um $x_0 \in I$

e escrevemos a família de soluções da equação na forma,

$$y\left(x\right)=\int f\left(x\right)dx+C,$$

onde C é uma constante arbitrária.
Agora, se $y=f\left(x\right)$ denota uma solução para (9) temos:

$$h\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right)=g\left(x\right).$$

Logo,

$$\int h\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right)dx=\int g\left(x\right)dx+C. \tag{10}$$

Porém, $dy=f'\left(x\right)dx$ podemos observar que (10) é igual a

$$\int h\left(y\right)dy=\int g\left(x\right)dx+C. \tag{11}$$

3.2.1 Método de soluções

A equação (11) apresenta a forma de solução de equações diferenciais separáveis, uma família a um parâmetro de soluções que podemos obter integrando ambos os lados de $h\left(y\right)dy=g\left(x\right)dx$.

Observação 3.2. Não há necessidade de usar duas constantes na integração de uma equação separável pois,

$$\begin{aligned}\int h\left(y\right)dy+C_1 &= \int g\left(x\right)dx+C_2\\ \int h\left(y\right)dy &= \int g\left(x\right)dx+C_2-C_1=\int g\left(x\right)dx+C,\end{aligned}$$

onde $C=C_2-C_1$.

Exemplo 3.2. Resolva,

$$\left(1+x\right)dy-ydx=0. \tag{12}$$

Solução: Vamos dividir a equação (12) por $\left(1+x\right)y$ obtemos $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{\left(1+x\right)}$, integramos ambos os lados, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{(1+x)} \\
ln\,|y| &= ln\,|1+x| + C_1 \\
y &= e^{ln|1+x|+C_1} \\
&= e^{ln|1+x|}.e^{C_1} \\
&= |1+x|\, e^{C_1} \\
&= \pm e^{C_1}\,(1+x)\,.
\end{aligned}$$

Observação 3.3. Utilizamos a função modular,

$$|1+x| = \begin{cases} (1+x) & \text{se} \quad x \geq -1 \\ -(1+x) & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$$

■

3.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Nessa seção abordaremos sobre as equações diferenciais lineares de forma geral, em seguida, apresentaremos a definição de equação linear, fator de integração e teorema (critério para diferencial exata). Vamos apresentar a forma geral de uma equação diferencial linear de ordem n de seguinte modo,

$$a_n\,(x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\,(x)\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1\,(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0\,(x)\,y = g\,(x)\,.$$

Em particular, quando $n = 1$, temos a equação de primeira ordem.

Definição 3.2. Uma equação diferencial da forma,

$$a_1\,(x)\,\frac{dy}{dx} + a_0\,(x)\,y = g\,(x) \tag{13}$$

é chamada de **equação linear.**

Em seguida, se dividirmos a equação (13) por $a_1\,(x)$ obtemos uma nova equação:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0\,(x)}{a_1\,(x)}y = \frac{g\,(x)}{a_1\,(x)}.$$

Agora, fazendo $p\,(x) = \dfrac{a_0\,(x)}{a_1\,(x)}$ e $f\,(x) = \dfrac{g\,(x)}{a_1\,(x)}$ obtemos,

$$\frac{dy}{dx} + p\,(x)\,y = f\,(x)\,. \tag{14}$$

Nossa intenção é obter uma solução no intervalo I no qual as funções $p(x)$ e $f(x)$ sejam contínuas.

3.3.1 Fator de integração

Antes de continuarmos o estudo das equações lineares, enunciaremos a seguinte definição:

Definição 3.3. Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ contínuas no aberto Ω. A equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ será exata se existir $\varphi = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$, tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y) \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y) \text{ em } \Omega$$

Voltando ao estudo da equação linear, temos que, usando as diferenciais podemos reescrever a equação (14) da seguinte forma,

$$dy + [p(x)\,y - f(x)]\,dx = 0, \tag{15}$$

onde multiplicamos a equação (15) por dx. Agora, multiplicamos novamente uma função $\mu(x)$ (equações lineares possuem propriedade através das quais podemos sempre encontrar uma função $\mu(x)$) em ambos lados da equação (15) obtemos,

$$\mu(x)\,dy + \mu(x)\,[p(x)\,y - f(x)]\,dx = 0$$

é uma equação diferencial exata, podemos verificar pelo teorema a seguir.

Teorema 3.1 (Critério para diferencial exata). *Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região R definida por $a < x < b$,$c < y < d$. Então, uma condição necessária e suficiente para que,*

$$M(x,y)\,dy + N(x,y)\,dx = 0$$

sejam uma diferencial exata é:

$$\frac{\partial M}{\partial X} = \frac{\partial N}{\partial y}. \tag{16}$$

O lado esquerdo de equação (16) é uma diferencial exata se,

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\,[p(x)\,y - f(x)]$$

ou seja,

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu p(x)\,.$$

Esta é uma equação separável em que podemos determinar $\mu(x)$. Temos,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{\mu} &= p(x)\,dx \\ ln\,|\mu| &= \int p(x)\,dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \tag{17}$$

A função definida em (17) é um **fator de integração** para equação linear.

Exemplo 3.3. Resolva,

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x. \tag{18}$$

Solução: dividindo a equação (18) por x, obtemos,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x. \tag{19}$$

Podemos observar que $p(x) = -\dfrac{4}{x}$ é o fator da integração é,

$$e^{-4\int \frac{1}{x}dx} = e^{-4ln|x|} = e^{lnx^{-4}} = x^{-4}. \tag{20}$$

Agora multiplicamos (20) pela equação (19) obtemos:

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x$$

dessa forma,

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-4}y\right] = xe^x.$$

Agora, seguimos da integração por partes que,

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + c.$$

Portanto,

$$y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4.$$

■

3.4 SOLUÇÃO PARA UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA EM SÉRIES DE POTÊNCIAS

A função e^{x^2} é uma solução explícita para a equação diferencial linear de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0.$$

Substituindo x por x^2 na série de Maclaurin para e^x, podemos escrever a solução da equação como:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Essa última série converge para todos os valores reais de x. Em outras palavras, conhecendo previamente a solução, é possível encontrar uma série infinita que seja solução para a equação diferencial. Tentaremos agora obter uma solução em série de potências para a equação diferencial, usaremos a técnica dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 3.4. Encontre uma solução para $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ na forma de uma série de potências em x.

Solução: Tentamos uma solução para a equação dada na forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{21}$$

com isso, temos que,

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Notemos que, como o primeiro termo na primeira série (corresponde a $n = 0$) é zero, começamos o somatório com $n = 1$. Usando o último resultado e supondo (21) encontramos

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n x^{n+1}.$$

Gostaríamos de somar as duas séries acima. Com essa finalidade, escrevemos

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 1.c_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n x^{n+1}.$$

Agora, fazendo $k = n - 1$ na primeira série e $k = n + 1$ na segunda. O lado direito torna-se,

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\, c_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2 c_{k-1} x^k.$$

Depois, somamos as séries termo a termo. Segue-se que

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)\, c_{k+1} - 2c_{k-1}]\, x^k = 0. \tag{22}$$

Então, para termos (22) identicamente nula, é necessário que os coeficientes satisfaçam

$$c_1 = 0 \;\; e \;\; (k+1)\, c_{k+1} - 2c_{k-1} = 0 \;\; , k = 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{23}$$

A equação (23) proporciona uma relação de recorrência que determina c_k. Como $k+1 \neq 0$ para todos os valores de k, podemos escrever (23) como

$$c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k+1}.$$

Iterando essa última fórmula, temos

$$\begin{aligned}
k &= 1, \quad c_2 = \frac{2}{2} c_0 = 0 \\
k &= 2, \quad c_3 = \frac{2}{3} c_1 = 0 \\
k &= 3, \quad c_3 = \frac{2}{4} c_2 = \frac{1}{2} c_0 = \frac{1}{2!} c_0 \\
k &= 4, \quad c_5 = \frac{2}{5} c_3 = 0 \\
k &= 5, \quad c_6 = \frac{2}{6} c_4 = \frac{1}{3.2!} c_0 = \frac{1}{3!} c_0 \\
k &= 6, \quad c_7 = \frac{2}{7} c_5 = 0 \\
k &= 7, \quad c_8 = \frac{2}{8} c_6 = \frac{1}{4.3!} c_0 = \frac{1}{4!} c_0
\end{aligned}$$

e assim por diante. Logo, a partir da suposição original, encontramos

$$\begin{aligned}
y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \ldots \\
&= c_0 + 0 + c_0 x^2 + 0 + \frac{1}{2!} c_0 x^4 + 0 + \frac{1}{3!} c_0 x^6 + 0 + \ldots \\
&= c_0 \left[1 + x^2 + \frac{1}{2!} x^4 + \frac{1}{3!} x^6 + \ldots \right] = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.
\end{aligned}$$

Como a iteração da equação acima deixa c_0 completamente indeterminado, encontramos de fato a solução geral da equação diferencial. ■

4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Nessa capítulo abordaremos sobre as equações diferenciais lineares de ordem superior, iniciando com problema de valor do contorno. Em particular, apresentaremos um exemplo de problema de valor de contorno, de modo a facilitar a compreensão do conteúdo, caso o leitor queira aprofundar mais sobre o conteúdo pode consultar Zill (2009).

4.1 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Um outro tipo de problema consiste em resolver uma equação diferencial de ordem dois ou maior na qual a variável dependente y ou suas derivadas são especificadas em pontos diferentes. Um problema como:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)\,, \;\; y(a) = y_0 \;\; e \;\; y(b) = y_1,$$

é chamado de **problema de valor de contorno**. Os valores especificados $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$ são chamados de **condições de contorno ou fronteira**. Uma solução para o problema em questão é uma função que satisfaça a equação diferencial em algum intervalo I, contendo a e b, cujo gráfico passa pelos pontos (a, y_0) e (b, y_1).

Exemplo 4.1. Consideramos o seguinte problema de valor de contorno,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= 1,\;\; 0 < x < 1, \\ y(0) &= 1,\;\; y(1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Solução: Integramos duas vezes a EDO, obtemos a solução geral

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

Agora, aplicando as condições de contorno, obtemos

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \to C_2 = 1 \\ y(1) &= \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} + C_1 + C_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Isto é, temos o sistema de equações lineares,

$$\begin{aligned} C_2 &= 1 \\ C_1 + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo, temos $C_1 = -1$ e $C_2 = 1$. Desta forma, concluímos que a solução de Problema de Valor de Contorno (PVC) é

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1.$$

■

4.2 SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES LINEARES

Nessa seção, abordaremos sobre equações homogêneas e não homogêneas, teorema (princípio de superposição das equações homogêneas), corolários, soluções lineares e independentes, função complementar, equações lineares com coeficientes constantes e equação auxiliar. Em relação aos teoremas e corolários, dispensamos as suas demonstrações.

4.2.1 Equações homogêneas

Em geral, uma equação diferencial ordinária de n-ésima ordem da forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = 0$$

é chamada da homogênea, enquanto que,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = g(x),$$

com $g(x)$ não identicamente nula, é chamado de não homogênea.

Observação 4.1. A palavra homogênea neste contexto não se refere aos coeficientes como sendo funções homogêneas. Também em algum intervalo I, os coeficientes $a_i(x), i = 0, 1, ..., n$, são contínuos, a função $g(x)$ é contínua e $a_n(x) \neq 0$ para todo x no intervalo I.

Exemplo 4.2. A equação

$$2y'' + 3y' - 5y = 0$$

é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea.

Exemplo 4.3. A equação

$$y'' + 3y' - 5y = e^x$$

é uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea.

4.2.1.1 *Princípio da superposição*

No próximo teorema, veremos que a soma ou **superposição,** de duas ou mais soluções para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução.

Teorema 4.1. ***Princípio de superposição das equações Homogêneas.*** *Sejam $y_1, y_2, ..., y_k$, k soluções para equações diferenciais lineares de n-ésima ordem homogênea em um intervalo I. Então, a combinação linear*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_k y_k (x),$$

em que os C_i, $i = 1, 2, ..., k$, são constantes arbitrárias é também uma solução no intervalo I.

Corolário 4.1. *Um múltiplo $y = C_1 y_1 (x)$ de uma solução $y = y_1 (x)$ para uma equação diferencial linear é também uma solução.*

Corolário 4.2. *Uma equação diferencial linear homogênea sempre tem solução trivial $y = 0$.*

4.2.1.2 *Soluções lineares independentes*

Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$, n soluções para a equação diferencial linear homogênea de n-ésima ordem em um intervalo I. Então, o conjunto de soluções é linearmente independentes em I se e somente se

$$W (y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0,$$

para todo x no intervalo.

Exemplo 4.4. As funções $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ e $y_3 = e^{3x}$ satisfazem a equação diferencial de terceira ordem,

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Como

$$W\left(e^x, e^{2x}, e^{3x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

para todo valor de x, y_1, y_2 e y_3 formam um conjunto fundamental de soluções em $(-\infty, \infty)$. Concluímos que,

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

é a solução geral para a equação diferencial no intervalo.

Exemplo 4.5. Se α e β são números reais, $\beta \neq 0$, então $y_1 = e^{\alpha x} cos (\beta x)$ e $y_1 = e^{\alpha x} sen (\beta x)$ são linearmente independentes em qualquer intervalo do eixo x, pois

$W\left(e^{\alpha x}cos\left(\beta x\right), sen\left(\beta x\right)\right) =$

$$= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}cos\left(\beta x\right) & e^{\alpha x}sen\left(\beta x\right) \\ -\beta e^{\alpha x}sen\left(\beta x\right) + \alpha e^{\alpha x}cos\left(\beta x\right) & \beta e^{\alpha x}cos\left(\beta x\right) + \alpha e^{\alpha x}sen\left(\beta x\right) \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0.$$

Observemos que, quando $\alpha = 0$, $cos\beta x$ e $sen\beta x$, $\beta \neq 0$, são também linearmente independentes em qualquer intervalo do eixo x.

4.2.2 Equações não homogêneas

Definição 4.1. (**Solução geral das equações não homogêneas**). Seja y_p uma dada solução para a equação diferencial linear não homogênea de n-ésima ordem num intervalo I. Seja:

$$y_c = C_1y_1\left(x\right) + C_2y_2\left(x\right) + ... + C_ny_n\left(x\right)$$

a solução geral para a equação homogênea associada no intervalo I. A solução geral para equação não homogênea no intervalo é definida por

$$y = C_1y_1\left(x\right) + C_2y_2\left(x\right) + ... + C_ny_n\left(x\right) + y_p\left(x\right) = y_c\left(x\right) + y_p\left(x\right).$$

A nossa intenção agora é a definição de solução geral para uma equação linear não homogênea. Qualquer função y_p independente de parâmetros, que satisfaça a equação não homogênea é chamada de solução particular para a equação (algumas vezes é chamada de integral particular).

Exemplo 4.6. Uma solução particular para

$$y'' + 9y = 27$$

é $y_p = 3$ pois $y_p'' = 0$ e $0 + 9y_p = 9\left(3\right) = 27$.

Exemplo 4.7. $y_p = x^3 - x$ é uma solução particular para

$$x^2y'' + 2xy' - 8y = 4x^3 + 6x.$$

Fazendo $y_p' = 3x^2 - 1$ e $y_p'' = 6x$ verificamos que,

$$x^2y'' + 2xy' - 8y = x^2\left(6x\right) + 2x\left(3x^2 - 1\right) - 8\left(x^3 - x\right) = 4x^3 + 6x.$$

Teorema 4.2. *Seja y_p uma dada solução para a equação diferencial linear não homogênea de n-ésima ordem em um intervalo I e sejam $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ soluções para a equação homogênea associada no intervalo. Então, para a equação encontrar constantes $c_1, c_2, ..., c_n$ tais que*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) + y_p(x). \tag{24}$$

4.2.2.1 *Função complementar*

Na definição (4.1), a combinação linear

$$y_C(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) \tag{25}$$

que é a solução geral (25) é chamada de função complementar para a equação (24). Em outras palavras, a solução geral para equação diferencial linear não-homogênea é função complementar mais qualquer solução particular.

Exemplo 4.8. Por substituição, verificamos facilmente que a função $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ é uma solução particular para a equação não homogênea

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 3x. \tag{26}$$

Para escrever a solução geral para (26) devemos também ser capazes de resolver a equação,

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0. \tag{27}$$

Mas no exemplo (4.4), vimos que a solução geral da equação (27) no intervalo $(-\infty, \infty)$ é

$$y_C = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Portanto, a solução geral para (26) no intervalo $(-\infty, \infty)$ é

$$y = y_C + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x.$$

4.2.3 Equações lineares com coeficientes constantes

Vimos que a equação linear de primeira ordem $\frac{dy}{dx} + ay = 0$, em que a é uma constante, possui a solução exponencial $y = C_1 e^{-ax}$ em $(-\infty, \infty)$. Portanto, é natural procurar determinar se soluções exponenciais existem $(-\infty, \infty)$ para equações de ordem maior como

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{28}$$

em que os $a_i, i = 0, 1, ..., n$ são constantes. O fato surpreendente é que todas as soluções para (28) são funções exponenciais ou construídas a partir de funções exponenciais. Começamos considerando o caso especial da equação de segunda ordem,

$$Ay'' + By' + Cy = 0. \tag{29}$$

4.2.3.1 *Equação auxiliar*

Se tentarmos uma solução da forma $y = e^{mx}$, então $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2e^{mx}$, assim a equação (29) torna-se

$$Am^2e^{mx} + Bme^{mx} + Ce^{mx} = 0$$

ou

$$e^{mx}\left(Am^2 + Bm + C\right) = 0.$$

Como e^{mx} nunca se anula para valores reais de x, então a única maneira de fazer essa função exponencial satisfazer a equação diferencial é escolher m de tal forma que ele seja raiz da equação quadrática,

$$Am^2 + Bm + C = 0.$$

Essa última equação é chamada de **equação auxiliar** ou **equação característica** da equação diferencial (29). Consideremos **três casos**, a saber: as soluções para a equação auxiliar correspondem **a raízes reais distintas, raízes reais iguais e raízes complexas conjugadas**.

CASO I: Raízes reais distintas

Com a hipótese de que a equação auxiliar possui duas raízes reais distintas m_1 e m_2, encontramos duas soluções $y_1 = e^{m_1x}$ e $y_2 = e^{m_2x}$. Vimos que essas funções são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$, portanto, formam um conjunto fundamental. Segue-se que a solução geral nesse intervalo é:

$$y_1 = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}.$$

CASO II: Raízes reais iguais

Quando $m_1 = m_2$, obtemos somente uma solução exponencial $y_1 = e^{m_1x}$.

Porém, segue-se que uma segunda solução é,

$$y_2 = e^{m_1 x}\int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}}dx.$$

Mas, da forma quadrática, temos que $m_1 = -\dfrac{b}{2a}$, pois a única maneira de ter $m_1 = m_2$ é ter $b^2 - 4ac = 0$. Em vista do fato de que $2m_1 = -\dfrac{b}{a}$, torna-se

$$y_2 = e^{m_1 x}\int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}}dx = e^{m_1 x}\int dx = xe^{m_1 x}.$$

A solução geral para (29) é então

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_2 x}.$$

CASO III: Raízes complexas conjugadas

Se m_1 e m_2 são complexas então podemos escrever $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_1 = \alpha - i\beta$. Em que α e $\beta > 0$ e $i^2 = -1$. Formalmente, não há diferença entre este caso e o **CASO I**, em que

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Porém, na prática, preferimos trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas. Para este fim, usamos a fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$$

em que θ é qualquer número real. Segue-se desta fórmula que

$$e^{(i\beta x)} = cos\left(\beta x\right) + isen\left(\beta x\right) \;\; e \;\; e^{-(i\beta x)} = cos\left(\beta x\right) - isen\left(\beta x\right) \tag{30}$$

em que usamos $cos\left(-\beta x\right) = cos\left(\beta x\right)$ e $sen\left(-\beta x\right) = -sen\left(\beta x\right)$. Notemos que somando e depois subtraindo as duas equações em (30), obtemos, respectivamente, $e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2cos\beta x$ e $e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2isen\beta x$. Como $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha+i\beta)x}$ é uma solução para (29) para qualquer escolha das constantes C_1 e C_2, fazendo $C_1 = C_2 = 1$ e $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$, temos nesta ordem, duas soluções:

$$y_1 = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha+i\beta)x} \;\; e \;\; y_2 = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} - C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Mas $y_1 = e^{\alpha x}\left(e^{\beta x} + e^{-\beta x}\right) = 2e^{\alpha x}cos\beta x$ e $y_2 = e^{\alpha x}\left(e^{\beta x} - e^{-\beta x}\right) = 2ie^{\alpha x}sen\beta x$. Portanto, pelo corolário (4.1) e o teorema de **Wronskiano** e os dois últimos resultados mostram que as funções $e^{\alpha x} sen\beta x$ e $e^{\alpha x} cos\beta x$ são soluções para (29). Ainda, do Exemplo (4.5) temos que $W\left(e^{\alpha x} sen\beta x, e^{\alpha x} cos\beta x\right) \neq 0$, $\beta > 0$, e daí podemos concluir que as duas funções formam um conjunto fundamental de soluções para equação diferencial em $(-\infty, \infty)$. superposição, a solução geral é:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\alpha x} sen\beta x + C_2 e^{\alpha x} cos\beta x \\ &= e^{\alpha x}\left(C_1 sen\beta x + C_2 cos\beta x\right). \end{aligned}$$

Exemplo 4.9. Resolva as seguintes equações diferenciais

$$\begin{aligned} (a)\ \ 2y'' - 5y' - 3y &= 0 \\ (b)\ \ y'' - 10y' + 25y &= 0 \\ (c)\, y'' + y' + y &= 0. \end{aligned}$$

Solução: Inicialmente, fatorando a equação obtemos, (a)

$$2m^2 - 5m - 3 = 0 = (2m+1)(m-3) = 0.$$

Assim as raízes da equação são:

$$m_1 = -\frac{1}{2} \ \ e \ \ m_2 = 3.$$

Portanto,

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{3x}.$$

■

Solução: novamente, observamos que, (b)

$$m^2 - 10m + 25 = (m-5)^2 = 0.$$

Temos assim,

$$m_1 = m_2 = 5.$$

Portanto,

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}.$$

■

Solução: Aqui temos uma equação cujos raízes não são reais, (c)

$$m^2 + m + 1 = 0.$$

Assim obtemos que,

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \ e \ \ m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Portanto,

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 sen\frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

■

Muitas equações diferenciais com coeficientes variáveis não podem ser resolvidas em termos de funções elementares. Uma técnica padrão para resolver equações diferenciais lineares de ordem superior com coeficientes variáveis é tentar encontrar uma solução na forma de uma série infinita. Frequentemente, a solução pode ser encontrada na forma de uma série de potências. Porém, para uma revisão mais profundados conceitos de séries infinitas, recomendamos consultar Stewart (2006).

4.3 SOLUÇÕES EM TERMO DE PONTOS ORDINÁRIOS (NÃO SINGULARES)

Nessa seção, temos como objetivo dar uma breve noção a respeito de soluções em termos de pontos ordinários, começando com definição de pontos singulares e ordinários, em seguida coeficientes polinomiais e não-polinomiais. Suponhamos que a equação diferencial linear de segunda ordem

$$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x) = 0, \tag{31}$$

seja escrita da seguinte forma,

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0. \tag{32}$$

Definição 4.2. Pontos singular e Ordinários. Dizemos que um ponto x_0 é um ponto ordinário ou não-singular da equação diferencial (32) se $P(x)$ e $Q(x)$ são analíticas em x_0. Um ponto que não é um ordinário é considerando como um ponto singular da equação.

Exemplo 4.10. Todo ponto x é um ponto ordinário da equação

$$y'' + (e^x)\, y' + (senx)\, y = 0.$$

Em particular, $x = 0$ é um ponto ordinário, pois

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... \ \ \mathbf{e} \ \ senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

converge para todo valor de x.

4.3.1 Coeficientes polinomiais

Iremos nos preocupar principalmente com o caso em que (31) tem coeficientes polinomiais. Como consequência da definição(4.2), observamos que, quando $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ são polinômios sem fatores comuns, um ponto $x = x_0$ é

(i) um ponto ordinário se $a_2(x_0) \neq 0$,

(ii) um ponto singular se $a_2(x) = 0$.

Exemplo 4.11. **(a)** Os pontos singulares da equação $(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$ são as raízes de $x^2 - 1 = 0$ ou $x \pm 1$. Todos os outros pontos são ordinários.

(b) Pontos singulares não são necessariamente números reais. As raízes de $x^2 + 1 = 0$, a saber $x = \pm i$, são pontos singulares da equação $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$. Todos os outros pontos, reais ou complexos, são pontos ordinários.

Teorema 4.3. ***Existência de Soluções em série de Potências****. Se $x = x_0$ for um ponto ordinário da equação diferencial (32), podemos sempre encontrar duas soluções linearmente independentes na forma de série de potências centrada em x_0 :*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n .$$

A série converge para uma solução em $|x - x_0| < R$, em que R é a distância do ponto x_0 ao ponto singular mais próximo (real ou complexo.)

4.3.2 Coeficientes não-polinomiais

O próximo exemplo aborda como encontrar uma solução, em série de potências, para uma equação diferencial em torno de um ponto ordinário quando seus coeficientes não são polinômios.

Exemplo 4.12. Resolva $y'' + (cosx)y = 0$.

Solução: Como $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$, vemos que $x = 0$ é um ponto ordinário. Supondo então, $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, temos

$$y'' + (cosx)y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + ...\right) \\
&+ \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - ...\right)\left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ...\right) \\
&= 2c_2 + c_0\left(6c_3 + c_1\right)x + \left(12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x^2 + \left(20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1\right)x^3 + ...
\end{aligned}
$$

Como devemos ter a última identicamente nula, então

$$
\begin{aligned}
2c_2 + c_0 &= 0 \\
6c_3 + c_1 &= 0 \\
12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0 &= 0 \\
20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1 &= 0
\end{aligned}
$$

e assim por diante. Como c_0 e c_1 são arbitrárias, encontramos

$$
y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - ....\right] \;\; e \;\; y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 - ...\right].
$$

Como a equação diferencial não tem pontos singulares, ambas as séries convergem para todos os valores de x. ■

4.4 SOLUÇÕES EM TERMOS DE PONTOS SINGULARES

Nessa seção, vamos introduzir um pouco sobre soluções em termos de pontos singulares, em particular tratamos sobre pontos singulares regulares e irregulares (**Método de Frobenius caso I, II e III**). Então, nessa parte de texto não apresentamos exemplos sobre métodos, mas caso leitor queira aprofundar mais sobre assunto recomendamos Zill (2009).

4.4.1 Pontos singulares regulares: métodos de Frobenius-caso I

Como vimos na seção anterior que podemos encontrar uma solução em série de potências para

$$
a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0 \tag{33}
$$

em torno de um ponto ordinário $x = x_0$. Porém, se $x = x_0$ for um ponto singular, nem sempre é possível encontrar uma solução na forma de uma série de potências. Mas podemos tentar encontrar uma solução na forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$, em que r é uma constante a ser determinada.

4.4.1.1 *Pontos singulares regulares e irregulares*

Pontos singulares são classificados como regulares ou irregulares. Para definir esse conceito, colocamos novamente (33) na forma padrão

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0.$$

Definição 4.3. Pontos singulares regulares e irregulares. Dizemos que um ponto singular $x = x_0$ da equação (33) é um ponto singular (ou singularidade regular) se $(x - x_0)\,P(x)$ e $(x - x_0)^2\,Q(x)$ são analíticas em x_0. Um ponto singular que não é regular é chamado de **ponto singular irregular** (ou singularidade irregular) da equação.

4.4.1.2 *Coeficientes polinomiais*

No caso em que os coeficientes de (33) são polinomiais sem fatores comuns, a **Definição 10.1** é equivalente ao seguinte, seja $a_2(x_0) = 0$. Reduza $\dfrac{a_1(x)}{a_0(x_2)}$ aos menores termos para formar $P(x)$ e $Q(x)$, respetivamente. Se o fator $(x - x_0)$ aparecer no denominador de $P(x)$ com multiplicidade menor ou igual a 1 no denominador de $Q(x)$ com multiplicidade menor ou igual a 2, então $x = x_0$ será um ponto singular regular.

Exemplo 4.13. Tanto $x = 0$ quando $x = -1$ são pontos singulares da equação diferencial

$$x^2(x+1)^2\,y'' + \left(x^2 - 1\right)y' + 2y = 0.$$

Inspecionando,

$$P(x) = \frac{x-1}{x^2(x+1)} \;\; e \;\; Q(x) = \frac{2}{x^2(x+1)^2}$$

vemos que $x = 0$ é um ponto singular irregular, pois a multiplicidade do fator $(x - 0)$ no denominador de $P(x)$ é 2. Notemos, porém, que $x = -1$ é uma singularidade regular.

Teorema 4.4. *Teorema de Frobenius*. *Se $x = x_0$ for um ponto singular da equação 1, então, existe pelo menos uma solução em série na forma*

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^{n+r}, \tag{34}$$

em que o número r é uma constante a ser determinada. A série convergirá pelo menos em algum intervalo $0 < x - x_0 < R$.

Observe as palavras (pelo menos) no teorema (4.4) significa que, em contraste com o teorema anterior, não podemos garantir duas soluções na forma indicada. **Método de Frobenius** consiste em identificar uma singularidade regular x_0, substituir y dado em teorema (4.4) na equação diferencial e determinar o expoente r e os coeficientes c_n.

Exemplo 4.14. Existência de soluções em série de potências. Se $x = x_0$ for um ponto ordinário da equação diferencial (33), podemos sempre encontrar duas soluções linearmente independentes na forma
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(x - x_0\right)^n .$$
A série converge para uma solução em $|x - x_0| < R$, em que R é a distância do ponto x_0 ao ponto singular mais próximas (real ou complexo.)

4.4.1.3 *Casos de raízes indiciais*

Quando usamos o método de Frobenius, distinguimos três casos que correspondem à natureza das raízes indiciais. Para exemplificar, suponha que r_1 e r_2 sejam duas raízes reais da equação indicial e que r_1 seja a maior delas.

CASO I: Raízes que não diferem por um inteiro

Se r_1 e r_2 são raízes distintas e não diferem por um inteiro, então existem duas soluções linearmente independentes para a equação (33) na forma

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1},\ \ c_0 \neq 0 \ \ e \ \ y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2},\ \ b_0 \neq 0.$$

4.4.2 Método de Frobenius Casos II e III

Quando as raízes da equação indicial diferem por um inteiro, podemos ou não ser capazes de encontrar duas soluções para (33) em (34). Se não, então uma solução correspondendo à menor raiz contém um termo logarítmico. Quando os expoentes são iguais, uma segunda solução sempre contém um logaritmo. Essa última situação é análoga às soluções para a equação diferencial de **Cauchy-Euler** quando as raízes da equação auxiliar são iguais. Temos os dois próximos casos.

CASO II: Raízes que diferem por um inteiro positivo

Se $r_1 - r_2 = N$, em que N é um inteiro positivo, então existem duas soluções linearmente independentes para a equação (33) na forma

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1},\ c_0 \neq 0 \ \ e \ \ y_2 = C y_1 \left(x\right) lnx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2},\ \ b_0 \neq 0,$$

em que C é uma constante que pode ser zero.

CASO III: Raízes indiciais iguais

Se $r_1 = r_2$, há sempre duas soluções linearmente independentes para a equação (33) na forma

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1},\ c_0 \neq 0 \ \ e \ \ y_2 = y_1\left(x\right) lnx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2},\ \ b_0 \neq 0.$$

5 EQUAÇÃO DE BESSEL

Nessa seção, iniciaremos por apresentar um pouco sobre a origem da equação, em seguida, abordaremos sobre duas equações especiais, soluções para equação de Bessel, funções de Bessel de primeira espécie, funções de Bessel de segunda espécie, relação de recorrência e equação de Bessel paramétrica. Entretanto, alguns conteúdos foram resumidos de modo a evitar grande número de páginas do trabalho.

Friedrich Wilhem Bessel (1784-1846) foi um astrônomo alemão que em 1838 mediu pela primeira vez a distância da estrela 61 Cygni. Em 1840, ele previu a existência de uma massa planetária, além da órbita de Urânio. Bessel foi também o primeiro a calcular a órbita do cometa Halley. Embora, Bessel tenha certamente estudado a equação (35) em seu trabalho sobre o movimento planetário, a equação diferencial foram provavelmente descobertas por **Daniel Bernoulli** em sua pesquisa sobre determinação dos deslocamentos de uma corrente oscilatória. A equação de Bessel e equação de Legendre são consideradas duas equações especiais. A última equação não será apresentada nesse trabalho.

5.1 DUAS EQUAÇÕES ESPECIAIS

As duas equações:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - v^2\right) y = 0 \tag{35}$$

e

$$\left(1 - x^2\right) y'' + 2xy' + n\,(n+1)\, y = 0, \tag{36}$$

ocorrem frequentemente em estudos avançados de matemática aplicada e engenharia. As equações: **Bessel e Legendre**. Na resolução de (35) vamos supor que $v \geq 0$ e procuramos solução serial (na forma de série infinita) em torno de $x = 0$ observamos que a origem é um ponto singular e regular da equação de Bessel.

5.2 SOLUÇÕES PARA EQUAÇÃO DE BESSEL

Agora suponhamos que,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
x^2y'' + xy' + \left(x^2 - v^2\right) y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n+r\right)\left(n+r-1\right) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(n+r\right) x^{n+r} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - v^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = c_0 \left(r^2 - r + r - v^2\right) x^r \\
&+ x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\left(n+r\right)\left(n+r-1\right) + \left(n+r\right) - v^2\right] x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \\
&= c_0 \left(r^2 - v^2\right) x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\left(n+r\right)^2 - v^2\right] x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}.
\end{aligned}$$

Na equação acima, que a equação inicial é $r^2 - v^2 = 0$, portanto as raízes indiciais são $r_1 = v$ e $r_2 = -v$. Quando $r_1 = v$ a equação se torna:

$$x^v \sum_{n=1}^{\infty} c_n n \left(n+2v\right) x^n + x^v \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = x^v \left[\left(1+2v\right) c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n \left(n+2v\right) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}\right].$$

Fazendo mudança de variável, $k = n - 2$ para $n = 2$ tem-se que $k = 0$. Daí segue-se

$$x^v \left[\left(1+2v\right) c_1 x + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(k+2\right)\left(k+2+2v\right) c_{k+2} + c_k\right] x^{k+2}\right] = 0.$$

Logo, pelo argumento usual podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\left(1+2v\right) c_1 &= 0 \\
\left(k+2\right)\left(k+2+2v\right) c_{k+2} + c_k &= 0
\end{aligned}$$

ou seja,

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{\left(k+2\right)\left(k+2+2v\right)}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

A escolha de $c_1 = 0$ implica em $c_3 = c_5 = c_7 = 0$. Daí para $k = 0, 2, 4, ...$, encontramos após fazer $k + 2 = 2n, n = 1, 2, 3, ...$, que:

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2^2 n \left(n+v\right)}.$$

Logo,

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2 \times 1 \times 1 \left(1+v\right)}$$

$$
\begin{aligned}
c_4 &= -\frac{c_2}{2^2 \times 2\,(2+v)} = \frac{c_0}{2^4 \times 1 \times 2\,(1+v)\,(2+v)} \\
c_6 &= -\frac{c_4}{2^2 \times 3\,(3+v)} = -\frac{c_0}{2^6 \times 1 \times 2 \times 3\,(1+v)\,(2+v)\,(3+v)} \\
&\vdots \\
c_{2n} &= (-1)^n \frac{c_0}{2^{2n} n!\,(1+v)\,(2+v)\cdots(n+v)}, \quad n = 1, 2, 3... .
\end{aligned}
$$

Em uma prática padrão podemos escolher para c_0 um valor específico, a saber,

$$
c_0 = -\frac{1}{2^v \Gamma\,(1+v)}.
$$

Em que $\Gamma\,(1+v)$ é a função Gama. Usando a propriedade da função $\Gamma\,(1+\alpha) = \alpha.\Gamma\,(\alpha)$, podemos reduzir o produto indicado no denominador a um termo. Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
\Gamma\,(1+v+1) &= (1+v)\,\Gamma\,(1+v) \\
\Gamma\,(1+v+2) &= (2+v)\,\Gamma\,(2+v) = (1+v)\,(2+v)\,\Gamma\,(1+v) \\
&\vdots \\
\Gamma\,(1+v+n) &= (1+v)\,(2+v)\cdots(n+v)\,\Gamma\,(1+v)\,.
\end{aligned}
$$

Com isso, podemos escrever a nossa equação como,

$$
\begin{aligned}
c_{2n} &= \frac{(-1)^n}{2^{2n+v} n!\,(1+v)\,(2+v)\cdots(n+v)\,\Gamma\,(1+v)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n+v} n!\Gamma\,(1+v+n)}, \quad n = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}
$$

Segue-se que a solução,

$$
y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+v} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\,(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}
$$

se $v \geq 0$ a série converge pelo menos no intervalo $[0, \infty)$.

5.3 FUNÇÕES DE BESSEL DE PRIMEIRA ESPÉCIE

Podemos denotar a solução em forma de série da seguinte forma,

$$
J_v\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\,(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}.
$$

Com $r_1 = v$. Quando $r_2 = -v$ obtemos,

$$J_{-v}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}.$$

Estas duas funções $J_v(x)$ e $J_{-v}(x)$ são chamadas de **Funções de Bessel de primeira espécie** de ordem v e $-v$, respetivamente. Dependo do valor de v pode conter potências de negativo de x e então convergir para $(0,\infty)$. Agora devemos levar em conta alguns aspetos muito importantes, sobretudo as ordens v e $-v$. Quando $v = 0$ as duas equações são iguais. E em seguida se $v > 0$ e $r_1 - r_2 = v - (-v) = 2v$ não é um inteiro. Ou seja, a diferença entre as raízes não é um número inteiro. Podemos notar também que a diferença entre as raízes pode ser inteiro, quando v for metade do número ímpar. Em outras palavras, a solução geral da equação de Bessel para $r_1 - r_2 = v - (-v) = 2v$ não é um inteiro é dado por:

$$y = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x), \text{ onde } C_1 \text{ e } C_2 \text{ são constantes.}$$

Exemplo 5.1. Encontre uma expressão alternativa para $J_{\frac{1}{2}}(x)$. Use o fato de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Solução: Como temos que $v = \frac{1}{2}$, substituindo esse valor na função geral obtemos:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+n\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}.$$

Agora, vamos utilizar as propriedades de **Gamma** em que temos $\Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$, concluímos que,

$$\begin{aligned}
n = 0, \quad \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
n = 1, \quad \Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi} \\
n = 2, \quad \Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5\times 3}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2^3\times 4\times 2}\sqrt{\pi} = \frac{5!}{2^5 2!}\sqrt{\pi} \\
n = 3, \quad \Gamma\left(1+\frac{7}{2}\right) &= \left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7\times 5!}{2^6\times 2!}\sqrt{\pi} = \frac{7\times 6\times 5!}{2^3\times 6\times 6\times 2}\sqrt{\pi} = \frac{7!}{2^7 3!}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

No caso geral, temos:

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}.$$

Logo,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}.n!}\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}},$$

daí segue,

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}.n!}\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Fazemos a simplificação através de potenciação obtemos que,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Como a série na última linha é a série de Maclaurin de seno, então fazendo,

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Concluímos que,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} sen(x).$$

Por outro lado, quando $v = -\frac{1}{2}$, utilizando procedimento análogo, obtemos

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi . x}} cos(x).$$

Essas equações acima são expressões de alternativa e veremos mais em diante as suas aplicações. ■

5.4 FUNÇÕES DE BESSEL DE SEGUNDA ESPÉCIE

Se v for diferente inteiro a função definida pela combinação linear

$$Y_v(x) = \frac{cos(vx) J_v(x) - J_v(x)}{sen(vx)}, \tag{37}$$

se a função $J_v(x)$ são soluções linearmente independentes da equação de Bessel. Logo uma outra forma para a solução geral de equação de Bessel é $y = C_1 J_v(x) + C_2 Y_v(x)$, desde que v seja diferente inteiro. Quando $v \to m$, m um inteiro, a equação acima possui a forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Porém, pode ser mostrado pela regra de L'Hospital que, $\lim_{v \to m} Y_v(x)$ existe. Ainda a função

$$Y_v(x) = \lim_{v \to m} Y_v(x).$$

$J_v(m)$ são soluções linearmente independentes de $x^2y''+xy''+(x^2-m^2)\,y=0$. Portanto, para qualquer valor de v a solução geral de (37) em $(0,\infty)$ pode ser escrita como

$$y = C_1 J_v(x) + C_2 Y_v(x).$$

onde $Y_v(x)$ é algumas vezes chamada de **Função de Neumann** comumente, $Y_v(x)$ é chamada de **função de Bessel de segunda espécie** com ordem v.

5.5 RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA DIFERENCIAL

Fórmulas de recorrência que relacionam funções de Bessel de diferentes ordens são importantes em aplicações. A seguir apresentaremos algumas propriedades de **relação de recorrência diferencial**. O Leitor interessado em se aprofundar nesse assunto recomendamos as referencias Korenev (2002), Coburn (1948) e Bowman (2012).

Vamos apresentar abaixo algumas **proposições**, em seguida demonstraremos $1,4,5,7,8$ e 9, também durante as demonstrações utilizaremos algumas proposições não demonstradas que são necessárias para demonstrar outras:

1. $J'_v(x) = vJ_v(x) - xJ_{v+1}(x)$
2. $(x^v J_v(x))' = x^v J_{v-1}(x)$
3. $(x^{-v} J_v(x))' = -x^{-v} J_{v+1}(x)$
4. $J'_v(x) = J_{v-1}(x) - \dfrac{v}{x} J_v(x)$
5. $J'_v(x) = \dfrac{v}{x} J_v(x) - J_{v+1}(x)$
6. $J'_v(x) = \dfrac{1}{2}\left[J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x)\right]$
7. $J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) = \dfrac{2v}{x} J_v(x)$
8. $J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi.x}}\left(\dfrac{senx}{x} - cosx\right)$
9. $J_{\frac{-3}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi.x}}\left(-senx - \dfrac{cosx}{x}\right)$.

Demonstração da propriedade 1: Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}
xJ'_v(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+v)}{n!\Gamma(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} \\
&= v\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v} \\
&= vJ_v(x) + x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(1+v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v-1}.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo mudança de variável $k = n - 1$, obtemos,

$$\begin{aligned} &= vJ_v(x) + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!\Gamma(2+v+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v+1} \\ &= vJ_v(x) - xJ_{v+1}(x). \end{aligned}$$

■

Demonstração da propriedade 4: Dá propriedade 2, temos que:

$$(x^v J_v(x))' = x^v J_{v-1}(x)$$

aplicando regra derivação de produto obtemos,

$$x^v J_v'(x) + vx^{v-1} J_v(x) = x^v J_{v-1}(x).$$

Dividindo ambos lados por x^v obtemos,

$$J_v'(x) + \frac{vx^{v-1}}{x^v} J_v(x) = J_{v-1}(x).$$

Observe que $\frac{vx^{v-1}}{x^v} = \frac{v}{x}$, então temos que,

$$J_v'(x) + \frac{v}{x} J_v(x) = J_{v-1}(x).$$

Agora, subtraindo ambos lados por $\frac{v}{x} J_v(x)$ temos:

$$J_v'(x) = J_{v-1}(x) - \frac{v}{x} J_v(x).$$

■

Demonstração da propriedade 5: Dá propriedade 3, temos que:

$$(x^{-v} J_v(x))' = -x^{-v} J_{v+1}(x)$$

aplicando regra derivação de produto obtemos,

$$x^{-v} J_v'(x) - vx^{-v-1} J_v(x) = -x^{-v} J_{v+1}(x).$$

Dividindo ambos lados por x^{-v} obtemos,

$$J_v'(x) - \frac{v}{x} J_v(x) = J_{v+1}(x).$$

Agora, somando ambos lados por $\frac{v}{x}J_v(x)$ temos:

$$J_v'(x) = \frac{v}{x}J_v(x) - J_{v+1}(x).$$

■

Demonstração da propriedade 7: Pelas propriedade 4 e 5 temos,

$$\begin{aligned} J_v'(x) - J_v'(x) &= J_{v-1}(x) - \frac{v}{x}J_v(x) - \left[\frac{v}{x}J_v(x) - J_{v+1}(x)\right] \\ 0 &= J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) - \frac{2v}{x}J_v(x). \end{aligned}$$

Concluímos que,

$$J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x) = \frac{2v}{x}J_v(x).$$

■

Demonstração da propriedade 8: Pela propriedade 7 temos:

$$2vJ_v(x) = x\left[J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x)\right].$$

Façamos na equação acima $v = \frac{1}{2}$ temos,

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{2}J_{\frac{1}{2}}(x) &= x\left[J_{-\frac{1}{2}}(x) + J_{\frac{3}{2}}(x)\right] \\ J_{\frac{1}{2}}(x) &= x\left[J_{-\frac{1}{2}}(x) + J_{\frac{3}{2}}(x)\right] \\ \frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x) &= J_{-\frac{1}{2}}(x) + J_{\frac{3}{2}}(x). \end{aligned}$$

Isolando $J_{\frac{3}{2}}(x)$ obtemos,

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

Agora, substituímos $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}sen(x)$ e $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}cos(x)$, obtemos,

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sen(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}cos(x).$$

Evidenciando $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ temos,

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{sen(x)}{x} - cos(x)\right).$$

■

Demonstração da propriedade 9: Pela propriedade 7 temos,

$$2vJ_v\left(x\right) = x\left[J_{v-1}\left(x\right) + J_{v+1}\left(x\right)\right].$$

Façamos na equação acima $v = -\dfrac{1}{2}$ temos,

$$\begin{aligned} 2\left(-\frac{1}{2}\right)J_{-\frac{1}{2}}\left(x\right) &= x\left[J_{\frac{1}{2}}\left(x\right) + J_{-\frac{3}{2}}\left(x\right)\right] \\ -J_{-\frac{1}{2}}\left(x\right) &= x\left[J_{\frac{1}{2}}\left(x\right) + J_{\frac{-3}{2}}\left(x\right)\right] \\ -\frac{1}{x}J_{-\frac{1}{2}}\left(x\right) &= J_{\frac{1}{2}}\left(x\right) + J_{-\frac{3}{2}}\left(x\right). \end{aligned}$$

Isolando $J_{-\frac{3}{2}}\left(x\right)$ obtemos,

$$J_{-\frac{3}{2}}\left(x\right) = -\left(\frac{1}{x}\right)J_{-\frac{1}{2}}\left(x\right) - J_{\frac{1}{2}}\left(x\right). \tag{38}$$

Agora, substituímos, $J_{\frac{1}{2}}\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}sen\left(x\right)$ e $J_{-\frac{1}{2}}\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}cos\left(x\right)$ na equação (38) obtemos novamente,

$$J_{-\frac{3}{2}}\left(x\right) = -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}sen\left(x\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}cos\left(x\right).$$

Evidenciando $\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}$ temos,

$$J_{-\frac{3}{2}}\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{sen\left(x\right)}{x} - cos\left(x\right)\right).$$

■

5.6 EQUAÇÃO DE BESSEL PARAMÉTRICA

Na equação de Bessel, trocando x por λx e usando a regra da cadeia obtemos uma fórmula alternativa da equação de Bessel conhecida como equação de Bessel paramétrica:

$$x^2y'' + xy' + \left(\lambda^2x^2 - v^2\right)y = 0. \tag{39}$$

A solução geral para (39)

$$y = C_1J_v\left(\lambda x\right) + C_2Y_v\left(\lambda x\right).$$

Fazendo a mudança de variável

$$u = \lambda x \rightarrow \frac{du}{dx} = \lambda, \tag{40}$$

também podemos observar que

$$x = \frac{u}{\lambda} \tag{41}$$

Assim temos que,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \lambda \frac{dy}{du}, \quad y'' = \lambda^2 \frac{d^2y}{du^2}. \tag{42}$$

Substituindo (40), (41) e (42) em (39) obtemos,

$$\frac{1}{\lambda^2} u^2 \lambda^2 \frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{\lambda} u \lambda \frac{dy}{du} + \left(u^2 - v^2\right) y = 0.$$

Fazendo simplificações possíveis obtemos

$$u^2 \frac{d^2y}{du^2} + u \frac{dy}{du} + \left(u^2 - v^2\right) y = 0.$$

Todavia, uma outra equação importante, por escolhas apropriadas dos parâmetro, muitas EDO's ajustam-se em sua forma é

$$y'' + \frac{1-2a}{x} y' + \left(b^2c^2 + \frac{a^2 - p^2c^2}{x^2}\right) y = 0 \;\; p \geq 0. \tag{43}$$

Multiplicando a equação (43) por x^2 obtemos que,

$$x^2 y'' + (1-2a)\, xy' + \left(b^2c^2x^{2c} + a^2 - p^2c^2\right) y = 0.$$

No entanto, mesmo não apresentando os detalhes a solução geral de (43) é

$$y = x^a \left[c_1 J_p\left(bx^c\right) + c_2 Y_p\left(bx^c\right)\right]. \tag{44}$$

Pode ser encontrada por meio de uma mudança em ambas as variáveis, independentes e dependentes, $z = bx^c$ e $y(x) = \left(\frac{z}{b}\right)^{\frac{a}{c}} w(z)$. Se não é inteiro, então y_p em (44) pode ser substituída por J_{-p}.

6 APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Nessa seção, abordaremos sobre as aplicações de equações diferenciais de primeira ordem, iniciando com crescimento e decrescimento populacional, circuito em série. Por outro lado, trataremos da aplicação de equações não-lineares, velocidade de escape, embora de forma sucinta apresentando seus exemplos.

6.1 CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO POPULACIONAL

O Problema do valor inicial,

$$\frac{dx}{dt} = kx, \;\; x(t_0) = x_0, \tag{45}$$

em que k é uma constante de proporcionalidade, aparece em muitas teorias físicas envolvendo **crescimento** ou **decrescimento**. Por exemplo, em biologia as vezes é observado que a taxa de crescimento de certas bactérias é proporcional ao número de bactérias presentes no dado instante.

Durante um curto espaço de tempo uma população de pequenos animais tais como roedores, pode ser prevista com alto grau de precisão pela solução da equação (45). Em física um problema de valor inicial como da equação (45) proporciona um modelo para o cálculo aproximado da quantidade remanescente de uma substância que está sendo desintegrada através de radioatividade. A quantidade diferencial em (45) pode ainda determinar a temperatura de um corpo em resfriamento.

Em química a quantidade remanescente de uma substância durante certas reações também pode ser descrita por (45). A constante de proporcionalidade k em (45) é positiva ou negativa e pode ser determinada pela solução para o problema, usando um valor subsequente de x em instante $t_1 > t_0$.

Exemplo 6.1. Em uma cultura há inicialmente N_0 bactérias. Uma hora depois, $t = 1$, o número de bactérias passa a ser $\frac{3}{2}N_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique.

Solução: Primeiro, resolvemos a equação diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = KN$$

sujeita a $N(0) = N_0$. Então, usamos a condição empírica $N(1) = \frac{3}{2}N_0$ para determinar a constante de proporcionalidade K. Agora, (46) é separável e linear, quando colocada na forma:

$$\frac{dN}{dt} - KN = 0, \tag{46}$$

vemos, por inspeção, que o fator de integração é e^{-Kt}. Multiplicando ambos os lados da equação por esse termo, obtemos imediatamente,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Kt}N\right) = 0.$$

Integrando ambos os lados dessa última equação, temos

$$e^{-Kt}N = C \ \ ou \ \ N(t) = e^{Kt} \cdot C.$$

Em $t = 0$, concluímos que $N_0 = Ce^0 = C$, assim $N(t) = N_0 e^{Kt}$. Em $t = 1$, temos

$$\frac{3}{2}N_0 = N_0 e^K \ \ ou \ \ e^K = \frac{3}{2},$$

logo, $K = ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0,4055$ com quatro casas decimais. A expressão para $N(t)$ é portanto, $N(t) = N_0 e^{0,4055t}$. Para encontrar o tempo necessário para que o número de bactérias seja triplicado, resolvemos:

$$3N_0 = N_0 e^{0,4055t}.$$

segue-se dessa equação que $0,4055t = ln3$, daí segue que $t = \frac{ln3}{0,4055} \approx 2,71\, horas = 2h43min$. ■

6.2 CIRCUITOS EM SÉRIE

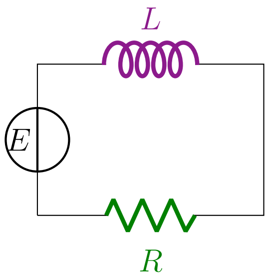
Circuito em série contendo somente um resistor e um indutor, a **lei de Kirchhoff** diz que a soma da queda da tensão no indutor $\left(L\left(\frac{di}{dt}\right)\right)$ e da queda de tensão no resistor (iR) é igual à voltagem (E(t)) no circuito. Logo, obtemos a equação diferencial linear para a corrente $i(t)$,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \tag{47}$$

em que L e R são constantes conhecidas como a indutância, respectivamente. A corrente é algumas vezes chamada de respostas do sistema. A queda de potencial em um capacitor com capacitância C é dada por $\frac{q(t)}{C}$, em que q é a carga no capacitor. Então, para o circuito em série, a segunda lei de Kirchhoff nos dá

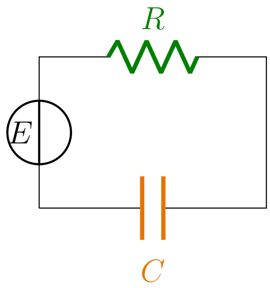
$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Figura 2 – Circuitos em Série L-R



Fonte: Próprio Autor (2023).

Figura 3 – Circuitos em Série R-C



Fonte: Próprio Autor (2023).

Mas a corrente i e a carga q estão relacionadas por $i = \dfrac{dq}{dt}$, logo, (48) torna-se a equação diferencial linear

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E\left(t\right). \tag{48}$$

Exemplo 6.2. Uma bateria de 12 volts é conectada a um circuito em série no qual a indutância é de $\frac{R}{2}$ e a resistência, 10 ohms. Determine a corrente i se a corrente inicial é zero.

Solução: De (47), vemos que devemos resolver

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12.$$

Sujeita a $i\left(0\right) = 0$. Primeira, multiplicamos a equação diferencial por 2 e tiramos o fator de integração e^{20t}. Obtemos então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[e^{20t}i\right] &= 24e^{20t} \\ e^{20t}i &= \frac{24}{20}e^{20t} + C \\ i &= \frac{6}{5} + Ce^{-20t}. \end{aligned}$$

Agora, $i\left(0\right) = 0$ implica que $0 = \frac{6}{5} + C$ ou $C = -\frac{6}{5}$. Logo, a resposta é

$$i\left(t\right) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}.$$

■

6.3 APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO LINEARES

Vimos que, se uma população P é descrita por

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad k > 0, \tag{49}$$

então $P(t)$ apresenta um crescimento exponencial não limitado. Em muitas circunstâncias, essa equação diferencial proporciona um modelo irreal de crescimento de uma população, isto é, o que se observa de fato difere substancialmente do previsto pela equação.

Por volta de 1840, o matemático-biólogo **P.F. Verhulst** preocupou-se com as formulações matemáticas para previsão de populações humanas de vários países. Uma das equações estudadas por ele foi:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \tag{50}$$

em a e b são constantes positivas. A equação acima, ficou conhecida como **equação logística** (seu gráfico é naturalmente chamado de uma logística). A equação (49) não apresenta um modelo apurado para o crescimento populacional quando está muito grande. Condições de superpopulação com as consequentes deteriorizações do meio ambiente, tais como poluição excessiva e competitiva demanda por alimento e combustível, podem ter um efeito inibidor no crescimento populacional. Se $a > 0$, é uma taxa média de nascimento, vamos supor que a taxa média de óbito seja proporcional à população $P(t)$ no instante t. Logo, se $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ é a taxa de crescimento por indivíduo em uma população, então,

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a - bP,$$

em que b é uma constante de proporcionalidade, a é a taxa média de nascimento e P é a taxa média de óbito. Multiplicando P por equação acima, obtemos imediatamente a equação de logística. Como veremos, a solução para a equação de logística é limitada quando $t \to N$. Se escrevermos (50) como $\frac{dP}{dt} = Pa - bP^2$, o termo $-bP$, $b > 0$, pode ser interpretado como um "inibidor", ou seja, "competidor". Ainda, na maioria das aplicações, a constante positiva a é muito maior que a constante b. Curvas logísticas são modelos bem acurados para previsão de crescimento populacional em um espaço limitado, de certos tipos de bactérias, protozoários, pulgas d'água e moscas das frutas. Já vimos a equação (50) na forma $\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x)$, $k > 0$. Essa equação diferencial proporciona um modelo razoável para descrever a disseminação de uma epidemia trazida inicialmente pela introdução de um indivíduo infectado em qualquer tempo t.

Solução: Um método para resolver a equação (50) é a separação de variável. Usando frações parciais, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P\left(a-bP\right)} &= dt \\ \left[\frac{\frac{1}{a}}{P}+\frac{\frac{b}{a}}{a-bP}\right]dP &= dt \end{aligned}$$

Integrando, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}ln\left|P\right|-\frac{1}{a}ln\left|a-bP\right| &= t+C \\ ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| &= at+aC \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{P}{a-bP} = C_1e^{at}. \tag{51}$$

Segue-se da última equação que:

$$P\left(t\right)=\frac{aC_1e^{at}}{1+bC_1e^{at}}=\frac{aC_1}{bC_1+e^{-at}}. \tag{52}$$

Agora, se for dada uma condição inicial $P\left(0\right)=P_0,\ \ P_0\neq\frac{a}{b}$ a equação (51) implica que $C_1=\frac{P_0}{a-bP_0}$. Substituindo esse valor em (52) e simplificando, obtemos

$$P\left(t\right)=\frac{aP_0}{bP_0+\left(a-bP_0\right)e^{-at}}. \tag{53}$$

■

Exemplo 6.3. Suponha que um estudante infectado com vírus da gripe retorne a uma faculdade isolada no campus onde se encontram 1000 estudantes. Presumindo que a taxa na qual o vírus se espalha é proporcional não somente à quantidade x de alunos infectados, mas também à quantidade de alunos não infectados, determine o número de alunos infectados após 6 dias se ainda é observado que depois de 4 dias $x\left(4\right)=50$.

Solução: Supondo que ninguém saia do campus enquanto durar a epidemia, devemos resolver o problema de valor inicial:

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(1000 - x\right), \qquad x\left(0\right) = 1.$$

Fazendo as identificações $a = 1000k$ e $b = k$, concluímos imediatamente de (53) que

$$x\left(t\right) = \frac{1.000k}{k + 999ke^{-1.000kt}} = \frac{1.000}{1 + 999e^{-1.000kt}}. \tag{54}$$

Agora, usando $x\left(4\right) = 50$, determine k através da equação

$$50 = \frac{1.000}{1 + 999e^{-1.000kt}}.$$

Encontramos

$$k = \frac{-1}{4.000} ln \frac{19}{999} = 0,0009906.$$

Logo, (54) torna-se

$$x\left(t\right) = \frac{1.000}{1 + 999e^{-0.9906t}}.$$

Finalmente,

$$x\left(6\right) = \frac{1.000}{1 + 999e^{-5,9436}} = 276 \; estudantes.$$

Valores adicionais são dados na tabela 2.

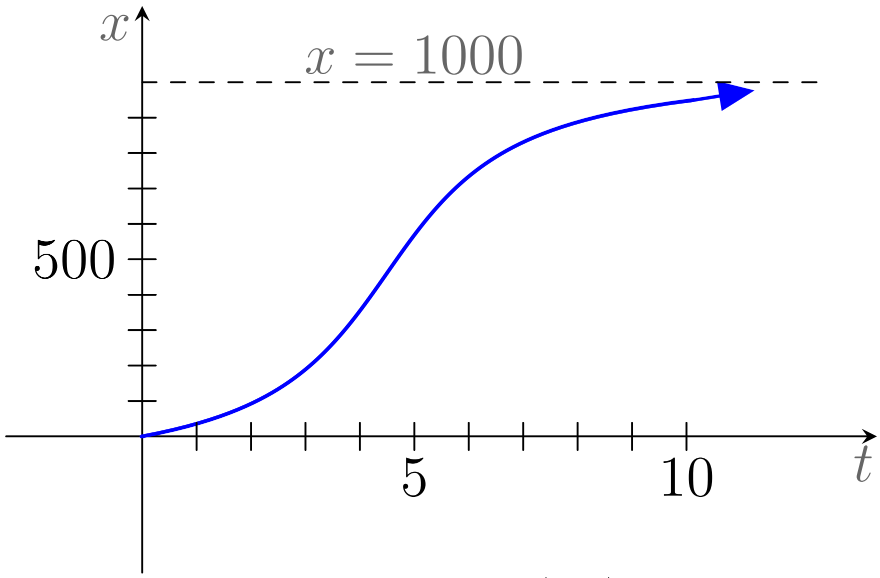
Tabela 2 – Infectados

t(dias)	x(número de infetados)
4	50(observados)
5	124
6	276
7	507
8	735
9	882
10	953

Fonte: Elaborada pelo autor.

E a representação gráfica do problema é dado por gráfico 1.

Gráfico 1 – Infectados



Fonte: Próprio Autor (2023).

■

6.4 VELOCIDADE DE ESCAPE

Inicialmente, a equação diferencial de um objeto em queda de massa m próxima à superfície da terra é dada por:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \quad ou \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -g,$$

em que s representa a distância da superfície da terra ao objeto e a direção positiva é considerada para cima. Em outras palavras, essencialmente, está sendo considerado aqui que a distância s ao objeto é pequena quando comparada com o raio da terra R; em outras palavras, a distância y a um objeto, tal como um foguete ou uma sonda espacial, for grande se comparada com R, então combinamos **a segunda lei de Newton** sobre o movimento e sua lei universal de gravitação para deduzir uma equação diferencial na variável y. A solução dessa equação diferencial pode ser usada para determinar a velocidade mínima, chamada **velocidade de escape,** necessária para um foguete se livrar da atração gravitacional da terra.

Exemplo 6.4. Um foguete é lançado verticalmente, como mostrado na figura 4. Se considerarmos a direção positiva para cima e se a resistência do ar for ignorada, então a equação diferencial do movimento depois de esgotado o combustível é

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{mM}{Y^2} \quad ou \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{M}{y^2}, \tag{55}$$

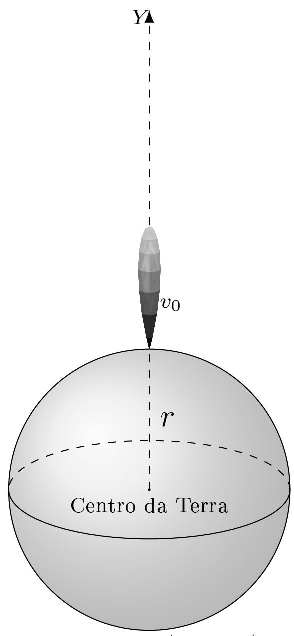
em que k é uma constante de proporcionalidade y é a distância do centro da terra ao foguete M a massa da terra e m, a massa do foguete. Para determinar a constante k, usamos o seguinte fato: quando $y = R$,

$$k\frac{mM}{R^2} = mg \quad ou \quad k = \frac{gR^2}{M}.$$

Logo, a última equação em cima se torna

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{R^2}{y^2}.$$

Figura 4 – Velocidade de Escape



Fonte: Próprio Autor (2023).

Embora isso não seja uma equação de primeira ordem, se escrevermos a aceleração como:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy},$$

então, torna-se uma equação de primeira ordem em v; isto é,

$$v\frac{dv}{dy} = -g\frac{R^2}{y^2}.$$

Esta última equação pode ser resolvida por separação de variáveis. Integrando, temos:

$$\int vdv = -gR^2 \int y^{-2}dy \quad obtemos \quad \frac{v^2}{2} = g\frac{R^2}{y} + C. \tag{56}$$

Se supomos que a velocidade é $v = v_0$ quando o combustível acabar e que $y \approx R$ nesse momento, podemos obter o valor (aproximado) de C. De (56) encontramos $C = -gR + \frac{v_0^2}{2}$.

Substituindo esse valor em (56), multiplicando a equação resultante por 2, obtemos

$$v^2 = 2g\frac{R^2}{y} - 2gR + v_0^2.$$

7 APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Nessa seção, iremos tratar sobre aplicação de equações diferenciais de segunda ordem (movimento harmônico simples). Em especial, essas aplicações são voltadas para a Física nas quais envolvem (**Lei de Hooke, segunda Lei de Newton**) por último, equação diferencial do movimento livre não amortecido.

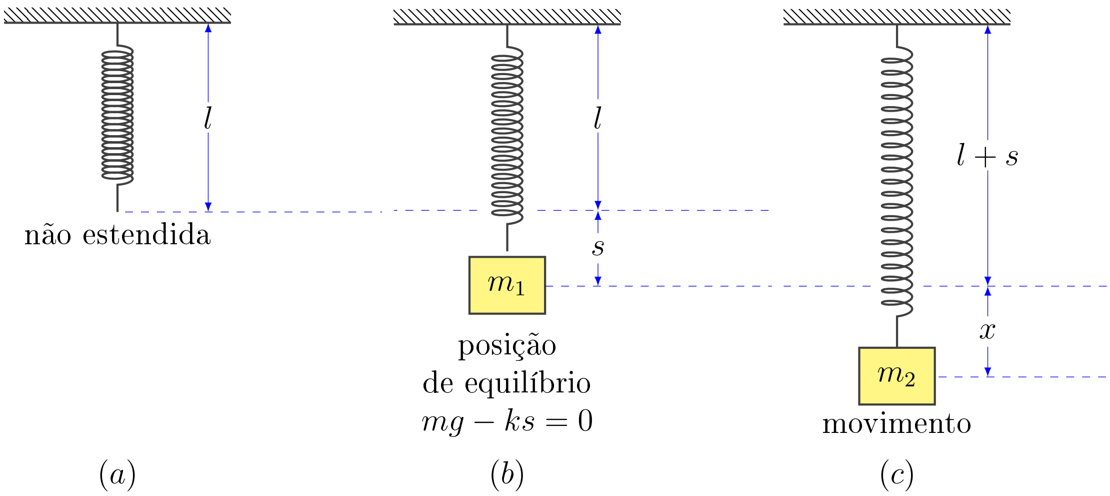
7.1 LEI DE HOOKE

Suponhamos, na figura 5, uma massa m_1 atada a uma mola flexível suspensa por um suporte rígido. Quando m_1 é substituída por uma massa diferente m_2, o alongamento da mola será diferente. Pela **lei de Hooke**, a mola exerce uma força restauradora F oposta à direção do alongamento e proporcional à distância s. Simplesmente enunciada $F = ks$ em que k é uma constante de proporcionalidade. Embora, massas com pesos diferentes distendam a mola com alongamentos diferentes, a mola é caracterizada pelo número k. Por exemplo, se uma massa pesando $10kg$ provoca uma distensão de $2cm$ em uma mola, então $98 = 2k$ implica $k = 49N/cm$. Necessariamente, então uma massa pesando $8kg$ provoca uma distensão na mesma mola de $1,6cm$.

7.2 SEGUNDA LEI DE NEWTON

Depois que uma massa m é conectada a uma mola, provoca nesta distensão s e atinge sua posição de equilíbrio na qual o peso é definido por $W = mg$ em que a massa é medida em *slugs*, quilogramas e gramas $g = 9.8m/s^2$, $32/s^2$ *ou* $980cm/s^2$. Como indicado na figura 5, a condição de equilíbrio é $mg = ks$ ou $mg - ks = 0$. Se a massa estiver deslocada por uma quantidade x de sua posição de equilíbrio, a força restauradora da mola será $k\,(x + s)$.

Figura 5 – Sistema Massa-Mola



Fonte: Próprio Autor (2023).

Supondo que não haja forças de retardamento sobre o sistema e supondo que a massa vibre sem a ação de outras forças **movimento livre**, podemos igualar F com a força resultante do peso e da força restauradora:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s+x)+mg \tag{57}$$
$$= -kx+mg-ks=-kx. \tag{58}$$

O sinal negativo na equação (58) indica que a força restauradora da mola age em direção oposta ao movimento. Além disso, adotaremos a convenção de que deslocamentos medidos abaixo da posição de equilíbrio $x=0$ são positivos.

7.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO MOVIMENTO LIVRE NÃO AMORTECIDO

Dividindo a equação (58) pela massa m, obtemos a equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \text{ ou } \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0, \tag{59}$$

em que $\omega^2=k/m$. Dizemos que a equação (59) descreve um **movimento harmônico simples** ou **movimento livre sem amortecimento.** Há duas condições iniciais óbvias associadas a equação (59): $x(0)=\alpha \ e \ x'(0)=\beta$, representando o deslocamento inicial e a velocidade respectivamente. Por exemplo, se $\alpha>0$, $\beta<0$, a massa parte de um ponto abaixo da posição de equilíbrio com velocidade inicial dirigida para cima. Se $\alpha<0$, $\beta=0$, a massa é solta a partir do repouso de um ponto $|\alpha|$ unidades acima da posição de equilíbrio.

Exemplo 7.1. Uma massa pesando 2 libras distende uma em 6 polegadas. Em $t=0$, a massa é solta de um ponto de 8 polegadas abaixo da posição de equilíbrio a uma velocidade de $\frac{4}{3}$**pé/s** para cima. Determine a equação do movimento.

Solução: Como estamos usando o sistema de unidades mais utilizado na engenharia, medidas dadas em polegadas devem ser convertidas em pés: $6pol=\frac{1}{2}$**pé**; $8pol=\frac{2}{3}$**pé**. Além disso, precisamos converter as unidades de peso dadas em libras em unidades de massa. De $m=\dfrac{W}{g}$, temos que $m=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}slugs$. Além disso, da lei de Hooke, $2=k\left(\frac{1}{2}\right)$ implica que a constante de mola $k=4lb/\text{pé}$. Logo, (59) resulta em

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2}=-4x \quad ou \quad \frac{d^2x}{dt^2}+64x=0.$$

O deslocamento e a velocidades iniciais são $x(0)=\frac{2}{3}$, $x'(0)=-\frac{4}{3}$, o sinal de negativo na última condição indica a direção negativa da velocidade inicial, ou seja, para cima.

Então, $\omega^2 = 64$ ou $\omega = 8$ e a solução geral para a equação diferencial é:

$$x\left(t\right) = C_1 cos\left(8t\right) + C_2 sen\left(8t\right).$$

Aplicando as condições iniciais a $x\left(t\right)$ e a $x'\left(t\right)$, obtemos $C_1 = \frac{2}{3}$ e $C_2 = -\frac{1}{6}$.
Portanto, a equação do movimento é

$$x\left(t\right) = \frac{2}{3} cos\left(8t\right) - \frac{1}{6} sen\left(8t\right).$$

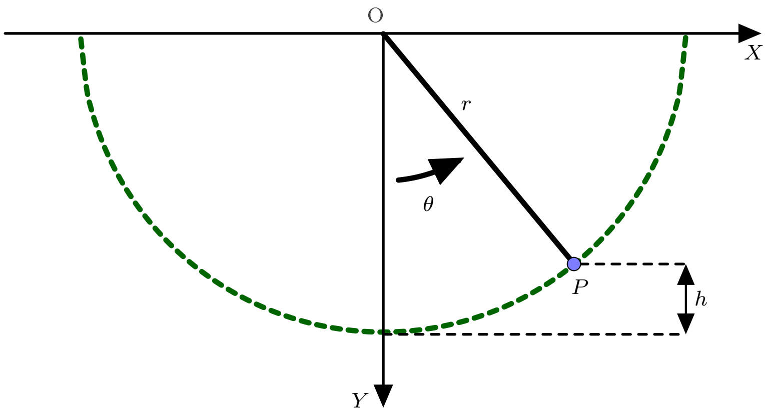
■

8 APLICAÇÕES DE FUNÇÕES BESSEL

Nessa seção, vamos apresentar algumas aplicações de Funções Bessel nas equações diferenciais ordinárias em modelagem dos problemas físicos, sobretudo **MHS** (Movimento Harmônico Simples) através de exemplos:

Exemplo 8.1. Calcule o período T de vibração de um pêndulo simples balançando para frente e para trás em um arco de 180 graus.

Figura 6 – Pêndulo Simples



Fonte: Próprio Autor (2023).

Solução: Tomamos os eixos coordenados conforme mostrado na figura 6, de modo que, à medida que o pêndulo P oscila é de $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. A coordenada polar $r = OP$ permanece constante. Como sempre, denotamos g a aceleração causada pela força gravitacional da terra e W denota o peso do pêndulo P. Naturalmente, consideramos a energia potencial $E.P$ de P igual a zero, quando P está em sua posição mais baixa, ou seja, $\theta = 0$. Então, o valor de $E.P$ em qualquer instante é igual ao produto de W pela altura alcançada por P no instante:

$$E.P = W\left(r - rcos\theta\right).$$

A energia cinética em cada instante é dada por:

$$E.K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{w}{g}\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

À medida que P oscila, a energia total permanece constante:

$$E.P + E.K = C.$$

Este fato, nos fornece a equação diferencial do movimento:

$$Wr\left(1 - cos\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{w}{g}r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = C.$$

Para determinar C consideramos o tempo $t = 0$ quando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, observando que P está momentaneamente em repouso, fazendo $\dfrac{d\theta}{dt} = 0$. Dessa forma, temos que, $C = Wr$ Assim, nossa equação de movimento é:

$$\frac{r}{2g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - cos\theta = 0.$$

Agora, com P oscilando para frente e para trás $\dfrac{d\theta}{dt}$, às vezes positiva e as vezes negativa. Mas podemos calcular o período T, calculando a oscilação entre $\theta = 0$ a $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, multiplicando o resultado por 4. Isso nos permite usar apenas a raiz quadrada quando resolvemos nossa equação para $\dfrac{d\theta}{dt}$, então, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{r}{2g}}\frac{d\theta}{dt} &= cos^{\frac{1}{2}}\theta \\
dt &= \sqrt{\frac{r}{2g}} cos^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta \\
T &= 4\sqrt{\frac{r}{2g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta \\
&= 2\sqrt{\frac{r}{2g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sen^0 cos^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta \\
&= \sqrt{\frac{r}{2g}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \\
&= \sqrt{\frac{r}{2g}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{r}{2g}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)4\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}.
\end{aligned}$$

A partir dos valores da tabela descobrimos que,

$$T \approx 7,416\sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

■

Exemplo 8.2. Resolva e interprete o problema de valor inicial,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0.$$

Solução: O problema é equivalente a puxar uma massa atada a uma mola para baixo 10 unidades para baixo da posição de equilíbrio, segurando-a até $x = 0$, então soltá-la a partir do repouso. A equação acima pode ser representada da seguinte forma

$$y'' + 16y = 0.$$

Multiplicando ambos os lados por x^2 tem-se:

$$x^2y'' + 16yx^2 = 0.$$

Agora, vamos usar a fórmula geral de calcular a equação diferencial na forma de Bessel para equações diferenciais:

$$x^2y'' + (1-2a)\,xy' + \left(b^2c^2x^{2c} + a^2 - p^2c^2\right)y = 0.$$

A solução da equação acima é $y = x^a \cdot Z_p(bx^c)$, onde $Z_p(bx^c) = \left[c_1J_p\left(bx^c\right) + c_2J_{-p}\left(bx^c\right)\right]$. Fazendo igualdade dos polinômios tem-se:

$$1-2a = 0,\ 2c = 2,\ a^2 - p^2c^2 = 0,\ b^2c^2 = 16.$$

Daí segue que, $a = \frac{1}{2},\ \ c = 1,\ \ p = \frac{1}{2}\ \ e\ \ b = 4$. Agora, substituindo os valores de constantes acima obtemos:

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}}Z_{\frac{1}{2}}(4x).$$

Observe que $J_{\frac{1}{2}}\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}sen\left(x\right)$ e $J_{-\frac{1}{2}}\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}cos\left(x\right)$. A solução pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y\left(x\right) &= x^{\frac{1}{2}}Z_{\frac{1}{2}}(4x) \\ &= x^{\frac{1}{2}}\left[C_1J_{\frac{1}{2}}\left(4x\right) + C_2J_{\frac{-1}{2}}\left(4x\right)\right] \\ &= x^{\frac{1}{2}}\left[C_1\sqrt{\frac{2}{4\pi x}}sen\left(4x\right) + C_2\sqrt{\frac{2}{4\pi x}}cos\left(4x\right)\right]. \end{aligned}$$

Agora, fazendo os cancelamentos necessário obtemos que $y\left(x\right)$ é seguinte:

$$y\left(x\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[C_1sen\left(4x\right) + C_2cos\left(4x\right)\right].$$

Aplicando as condições iniciais tem-se:

$$10 = y\left(0\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[C_1sen\left(4.0\right) + C_2cos\left(4.0\right)\right] \Rightarrow C_2 = 10\sqrt{2\pi}.$$

Aplicando no caso de $y'(0) = 0$ temos:

$$0 = y'(0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[C_1 4cos\,(4.0) - C_2 4sen\,(4.0)\right] \Rightarrow C_1 = 0.$$

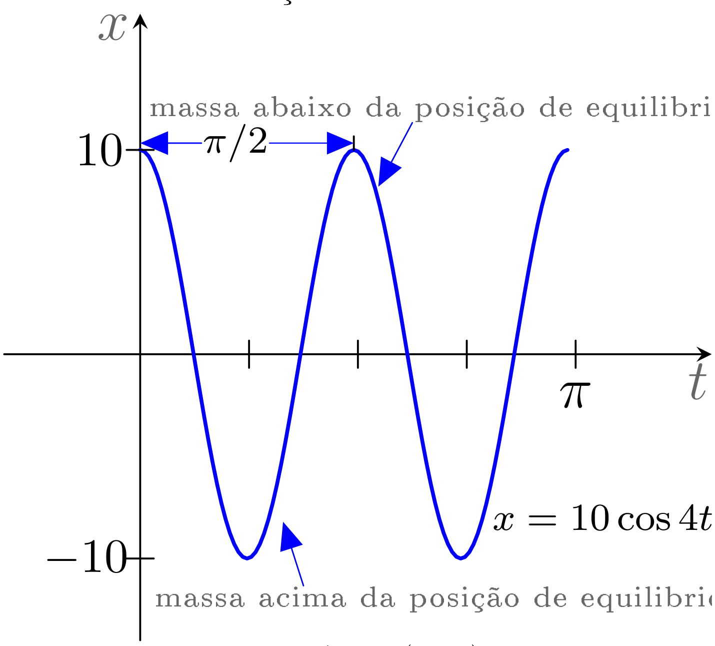
Agora, substituindo os valores dos constantes encontrados na solução obtém-se:

$$y\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[0.sen\,(4x) + 10\sqrt{2\pi}cos\,(4x)\right].$$

Portanto,

$$y\,(x) = 10cos\,(4x)\,.$$

Gráfico 2 – Solução do Problema 8.2



Fonte: Próprio Autor (2023).

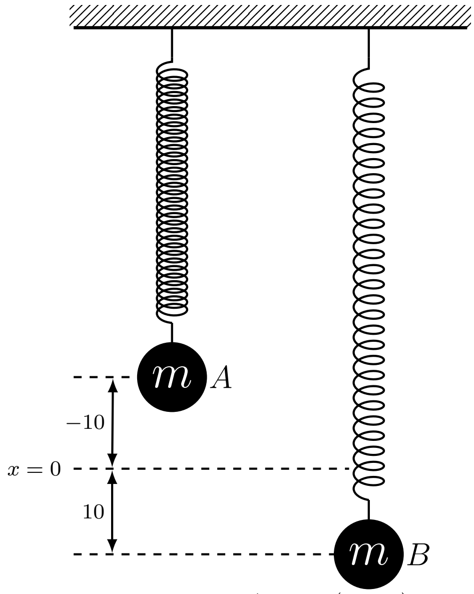
A solução é a mesma encontrada por via de equações diferenciais ordinárias. Em seguida, a solução mostra claramente que, uma vez que o sistema seja colocado em movimento, ele permanece em movimento com a massa oscilando para frente e para trás 10 unidades em cada posição do equilíbrio $x = 0$. Como mostrado no gráfico 2 o período de oscilação é de $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ segundos. ■

Exemplo 8.3. Resolva e interprete o problema de valor inicial,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 10.$$

Solução: O problema é equivalente a puxar uma massa atada a uma mola para baixo 10 unidades para baixo da posição de equilíbrio, segurando-a até $x = 0$, depois soltá-la a partir do repouso.

Figura 7 – Posição do Equilíbrio



Fonte: Próprio Autor (2023).

A equação acima pode ser representada da seguinte forma,

$$y'' + 25y = 0.$$

Multiplicando ambos lados por x^2 tem-se:

$$x^2y'' + 25x^2y = 0.$$

Agora, vamos usar a fórmula geral de calcular a equação diferencial na forma de Bessel para equações diferenciais:

$$x^2y'' + (1 - 2a)\,xy' + \left(b^2c^2x^{2c} + a^2 - p^2c^2\right)y = 0.$$

A solução da equação acima é $y = x^a \cdot Z_P(bx^c)$, onde $Z_p(bx^c) = [c_1J_p\,(bx^c) + c_2J_{-p}\,(bx^c)]$. Fazendo igualdade dos polinômios tem-se:

$$1 - 2a = 0, \;\; 2c = 2, \;\; a^2 - p^2c^2 = 0, \;\; b^2c^2 = 25.$$

Daí segue que, $a = \frac{1}{2}, \;\; c = 1, \;\; p = \frac{1}{2} \;\; e \;\; b = 5$. Agora, substituindo os valores de constantes acima Obtemos:

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}}Z_{\frac{1}{2}}(5x).$$

observe que $J_{\frac{1}{2}}\,(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}sen\,(x) \;\; e \;\; J_{-\frac{1}{2}}\,(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}cos\,(x)$. A solução pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{\frac{1}{2}} Z_{\frac{1}{2}}(5x) \\ &= x^{\frac{1}{2}} \left[C_1 J_{\frac{1}{2}}(5x) + C_2 J_{\frac{-1}{2}}(5x) \right] \\ &= x^{\frac{1}{2}} \left[C_1 \sqrt{\frac{2}{5\pi x}} sen(5x) + C_2 \sqrt{\frac{2}{5\pi x}} cos(5x) \right]. \end{aligned}$$

Agora, fazendo os cancelamentos necessário obtemos que $y(x)$ é seguinte:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} \left[C_1 sen(5x) + C_2 cos(5x) \right].$$

Aplicando as condições iniciais tem-se:

$$-2 = y(0) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} \left[C_1 sen(5.0) + C_2 cos(5.0) \right] \Rightarrow C_2 = -\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{5\pi}}}.$$

Aplicando no caso de $y'(0) = 10$ temos:

$$10 = y'(0) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} \left[C_1 5cos(5.0) - C_2 5sen(5.0) \right] \Rightarrow C_1 = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{5\pi}}}.$$

Agora, substituindo os valores dos constantes encontrados na solução obtém-se:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} \left[\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{5\pi}}}.sen(5x) - \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{5\pi}}} cos(5x) \right].$$

Portanto,

$$y(x) = 2sen(5x) - 2cos(5x).$$

■

Exemplo 8.4. Uma massa pesando 2 libras distende uma mola em 6 polegadas. Em $x = 0$, a massa é solta de um ponto de 8 polegadas abaixo da posição de equilíbrio, a uma velocidade de $\frac{4}{3}$**pé/s** para cima. Determine a equação do movimento.

Solução: Como estamos usando o sistema de unidades da engenharia, medidas dadas em polegadas devem ser convertidas em pés: $6pol = \frac{1}{2}$**pé**; $8pol = \frac{2}{3}$**pé**. Além disso, precisamos converter as unidades de peso dadas em libras em unidades de massa. De $m = \dfrac{W}{g}$, temos que $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} slugs$. Além disso, da lei de Hooke, $2 = k\left(\frac{1}{2}\right)$ implica que a constante de mola $k = 4lb/$pé. Logo, o problema resulta em EDO de segunda ordem:

$$\frac{1}{16}\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0 \ ou \ \frac{d^2y}{dt^2} + 64y = 0.$$

Agora, multiplicando a equação acima por x^2 temos:

$$x^2y'' + 64x^2y = 0.$$

Usando a comparação com a equação:

$$x^2y'' + (1-2a)\,xy' + \left(b^2c^2x^{2c} + a^2 - p^2c^2\right)y = 0$$

e a solução é dada por $y = x^a Z_p\left(bx^c\right)$, onde $Z_p(bx^c) = \left[c_1 J_p\left(bx^c\right) + c_2 J_{-p}\left(bx^c\right)\right]$. Assim, temos que:

$$1-2a = 0,\ \ 2c = 2,\ \ b^2c^2 = 64,\ \ a^2 - p^2c^2 = 0.$$

Consequentemente, $a = \frac{1}{2},\ \ c = 1,\ \ b = 8\ \ e\ \ p = \frac{1}{2}$. Dessa forma temos que,

$$\begin{aligned} y &= x^A Z_p\left(\lambda x^1\right) \\ &= x^{\frac{1}{2}} Z_{\frac{1}{2}}\left(8x\right) \\ &= x^{\frac{1}{2}}\left[C_1 J_{-\frac{1}{2}}\left(8x\right) + C_2 J_{\frac{1}{2}}\left(8x\right)\right]. \end{aligned}$$

Observe que $J_{\frac{1}{2}}\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} sen\left(x\right)\ e\ J_{-\frac{1}{2}}\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} cos\left(x\right)$. A solução pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y\left(x\right) &= x^{\frac{1}{2}} Z_{\frac{1}{2}}\left(8x\right) \\ &= x^{\frac{1}{2}}\left[C_1 J_{-\frac{1}{2}}\left(8x\right) + C_2 J_{\frac{1}{2}}\left(8x\right)\right] \\ &= x^{\frac{1}{2}}\left[C_1\sqrt{\frac{2}{8\pi x}} cos\left(8x\right) + C_2\sqrt{\frac{2}{8\pi x}} sen\left(8x\right)\right]. \end{aligned}$$

Agora, fazendo os cancelamentos necessário obtemos que $y\left(x\right)$ é seguinte:

$$y\left(x\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[C_1 cos\left(8x\right) + C_2 sen\left(8x\right)\right].$$

Aplicando as condições iniciais tem-se:

$$\frac{2}{3} = y\left(0\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[C_1 cos\left(0\right) + C_2 sen\left(0\right)\right] \Rightarrow C_1 = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}.$$

Aplicando no caso de $y'(0) = -\dfrac{4}{3}$ temos:

$$-\frac{4}{3} = y'\left(0\right) = -\frac{16}{3}sen\left(0\right) + \frac{8}{2\sqrt{\pi}}C_2cos\left(0\right).$$

Implica que $C_2 = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$, substituindo os valores dos constantes encontrados na solução, obtemos:

$$y\left(x\right) = \frac{2}{3}cos\left(8x\right) - \frac{1}{6}sen\left(8x\right).$$

■

9 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, revisamos o conceito de série de potências e de soluções em termos de pontos singulares e ordinária como um pré-requisito para soluções da Equação de Bessel. Para isso, abordamos sobre as soluções em termos de pontos ordinários e singulares. Apresentamos a equação de Bessel e a sua solução a partir de série de potências, assim como, funções de Bessel de primeira e segunda espécie. Como as funções de Bessel estão relacionadas com a relação de recorrência diferencial, fizemos algumas demonstrações das mesmas.

Por outro lado, tratamos sobre aplicações de equações diferenciais de primeira ordem e superior, como as suas aplicações, por exemplo,crescimento e decrescimento populacional e circuito em série. Em relação às equações diferenciais ordinárias de segunda ordem abordamos sobre sua aplicação em Física que envolve o sistema de massa-mola, no qual a lei de Hooke e segunda lei de Newton facilitam na solução na EDO. No caso das equações diferenciais não lineares abordamos sobre a velocidade de escape e da equação logística. Finalizamos com as aplicações de funções de Bessel nas soluções das equações diferenciais de segunda ordem sujeitas as condições inicialmente determinadas, para mais clareza, modelamos um problema físico, depois solucionamos-lo por meio das funções de Bessel.

Enfatizamos a importância do estudo das equações diferencias e as aplicações das mesmas com ênfase nas equações de Bessel e aplicações. Ademais, demonstramos algumas propriedades da Função Gamma, Beta e Funções Bessel que facilitaram a compreensão de alguns cálculos. Embora, não foi possível apresentar todas as aplicações de funções acima mencionadas, mas esperamos que o trabalho desperte ainda mais interesse de pesquisa nas áreas semelhantes ou iguais.

Em síntese, vale ressaltar que, pretendemos continuar com a pesquisa sempre que houver disponibilidade, no qual procuraremos resultados um pouco mais avançados.

REFERÊNCIAS

BOWMAN, Frank. **Introduction to Bessel functions**. Courier Corporation, 2012.

COBURN, N. **FE Relton, Applied Bessel functions**. 1948.

FARRELL, Orin J ; ROSS, Bertram. **Solved problems in analysis:** as applied to gamma, beta, legendre and bessel functions. Courier Corporation, 2013.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVES, Aloisio Freiria. **Equações diferenciais aplicadas**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

KORENEV, Boris Grigor'evich. **Bessel functions and their applications**. CRC Press, 2002.

MELO, Kelma Gomes de. **A Função Gama como Extensão da Função Fatorial e Aplicações.** 2020. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional) – Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2020. Disponível em: <http://repositorio.unilab.edu.br/jspui/handle/123456789/2055>. Acesso em: 20 mar. 2022.

STEWART, James. **Cálculo**, v. 2. Pioneira Thomson Learning, 2006.

ZILL, Dennis G; CULLEN, Michael R. **Matemática Avançada para Engenharia**, v. 1. Bookman Editora, 2009.